



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة و الأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Département de Maintenance en Electromécanique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Electromécanique
Spécialité : Electromécanique

Thème

Modélisation numérique de l'interaction des fissures

Présenté et soutenu publiquement par :

Nom: BEN ABDERRAHMANE

Prénom: Abdelfattah

Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
SENHADJI Salima	MCB	Université d'Oran2	Président
YAHIAOUI Reda	MCB	Université d'Oran2	Encadreur
ADJELOUA Abdelaziz	MAA	Université d'Oran2	Examineur

Année 2020



Remerciements

- Avant tout je remercie Dieu de m'avoir donné la patience, de la chance et surtout des capacités intellectuelles qui m'ont aidé à surmonter bien des épreuves.
- Je tiens à remercier mes chers parents pour leur soutien tout au long de nos études.
- Toute ma gratitude infinie à mon promoteur, Mr. YAHIAOUI Reda pour son encadrement et ses aides précieuses.
- Je remercie également tous les membres du jury, qui vont honorer par leur présence et leur jugement, la soutenance de ce Mémoire.



Dédicace

Je dédie ce modeste travail :
Avant tout à ma chère mère, aussi à mon père
A tous mes frères et Sœurs,
Et à toute la famille ben Abderrahmane
Pour leur patience avec moi aussi bien pour leur
collaboration et leur aide pendant toute la
période universitaire.
Et à toute la promotion 2019/2020
De maintenance notamment la promotion de
Electromécanique
A toutes mes adorables que j'ai connu pendant
toute ma vie ...

Ben Abderrahmane Abdelfattah

Table des Matières

Table des Matières

Chapitre I Notions de la mécanique de la rupture	1
I.1 Introduction	3
I.2 Modes élémentaires de fissuration	4
I.3 Description du champ des contraintes à l'extrémité d'une fissure	7
I.4 Propagation des fissures	9
I.5 Loi de propagation des fissures	10
I.6 Conclusion	11
Chapitre II:La méthode des éléments finis	2
II.1 Introduction	13
II.2 Historique	13
II.3 Caractéristiques de l'élément fini	13
II.4 Etapes de la méthode des éléments finis	15
II.5 Étapes logiques du calcul par éléments finis	16
II.6 Avantages et inconvénients de la MEF	16
II.6.2 Les Inconvénients de la MEF	16
II.7 Conclusion	17
Chapitre III:Modélisation numérique	13
III.1 Introduction	19
III.2 Etude de l'interaction des fissures	19
III.3 Présentation du modèle et maillage	20
III.5 Résultats et discussions	21
III.6 Modélisation dans le cas de deux fissures	23
III.7 Effet de la position angulaire de la deuxième fissure	24
III.8 Conclusion	29

LISTE DES FIGURES

Liste des Figures

Chapitre I Notions de la mécanique de la rupture.....	1
Figure I.1. Schématisation des trois modes de fissuration.....	5
Figure I.2. Représentation à l'échelle atomique de la fissure (a), et des lignes de forces au voisinage de la pointe de l'entaille(b).	6
Figure I.3. Zones délimitant le voisinage de la pointe de la fissure	6
Figure I.4. Champ de Contraintes au voisinage de l'extrémité	7
Figure I.5. Contrainte σ_{yy} ($\theta = 0$) perpendiculaire au plan de fissuration.....	8
Figure I.6. Les Trois stades de propagation de fissure.	9
Chapitre II:La méthode des éléments finis	2
Figure II.1.domaine V discrétisé par sous domaine V_e	14
Figure III.1. Représentation de la disposition géométrique des fissures	20
Figure III.2. Présentation la plaque fissurée.	20
Figure.III.3. Maillage utilisé pour la plaque	21
Figure III.4. Elément à 8 nœuds avec les points d'intégration	21
Figure III.5. Evolution de K_I en fonction des contours.....	22
Figure III.6. Répartition des contraintes au sein de la plaque.....	23
Figure III.7. Maillage de la plaque	23
Figure III.8. Distribution des contraintes dans le cas de $2c = 15\text{mm}$, $c/d = 0.4$ et $\alpha = 20$	24
Figure.III.9.Variation de \mathbf{R} en fonction de l'angle α , avec $2c = 15\text{ mm}$ et $c/d = 0.4$	25
Figure.III.10. Evolution de \mathbf{R} en fonction de $\cos\alpha$ pour $2c = 15\text{ mm}$ et $c/d = 0.4$	25
Figure.III.11.Variation de \mathbf{R}_m en fonction de $\cos(\alpha)$ pour ($c/d = 0.4$)	26
Figure.III.12.Variation de \mathbf{R}_m en fonction de $\cos(\alpha)$ pour $c/d = 0.5$	27
Figure.III.12:Variation de \mathbf{R}_m en fonction de $\cos(\alpha)$ pour ($c/d = 0.6$).....	27
Figure.III.13:Variation de \mathbf{R}_m en fonction de $\cos(\alpha)$ pour ($c/d = 0.7$).....	28
Figure.III.14:Variation des coefficients A, B, C et D en fonction du rapport c/d	29

Introduction générale

Introduction générale

Assurer l'intégrité des structures et composants industriels de grande taille passe par la considération de la présence de défauts et par la détermination des conditions d'amorçage, de propagation et d'arrêt des fissures dues à la présence de ces défauts. La présence d'une fissure dans un équipement sous pression nécessite, pour des raisons de sécurité évidentes, de connaître de manière précise son degré de nocivité. Lorsque cette fissure se propage, il est important d'évaluer rapidement l'évolution de ce degré de nocivité.

L'objectif de notre travail est d'étudier l'effet des fissures sur le facteur d'intensité de contrainte qui est obtenu par modélisation en éléments finis. Pour cela, le logiciel Abaqus est utilisé et qui va permettre aussi d'étudier l'influence des différents paramètres géométriques des fissures sur le facteur d'intensité de contrainte.

Le présent mémoire s'articule de la manière suivante :

Chapitre 1: il consiste en une étude bibliographique, afin de rappeler les notions de la mécanique de rupture et de présenter les outils nécessaires à cette étude.

Chapitre 2: dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode des éléments finis, ses propriétés et ses caractéristiques.

Chapitre 3: nous allons entreprendre dans le dernier chapitre, les étapes nécessaires pour construire le modèle numérique avec le logiciel Abaqus, et présenter une analyse des résultats obtenus du problème étudié.

Ce mémoire est clôturé par une conclusion générale concernant notre travail.

Chapitre I
Notions de la mécanique
de la rupture

I.1 Introduction:

La rupture est un problème auquel l'homme devra faire face aussi longtemps qu'il construira des édifices ou fabriquera des structures. ce problème est de plus en plus crucial avec le développement, lié aux progrès technologiques, de structures complexes. Les avancées dans la connaissance de la mécanique de la rupture permettent aujourd'hui et plus précisément depuis le milieu du 20e siècle, de mieux prévenir le risque de rupture.

La mécanique de la rupture a été introduite par Griffith vers 1920. L'objectif de la mécanique de la rupture est de caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide de paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment le champ de contraintes, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Les premiers développements théoriques d'analyse des champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure ont été entrepris par Westergaard vers 1940. Une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure valable uniquement pour les matériaux fragiles, ne tenant pas compte de la dissipation de l'énergie due à la plastification. En 1948 Irwin proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

En 1956, un groupe de chercheurs de la marine américaine, ont développé le concept du taux de restitution d'énergie à partir de la théorie de Griffith sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard, Irwin, montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique relié au taux de restitution d'énergie. Ce paramètre caractérise l'état de sollicitation dans la région dans laquelle la rupture se produit, il est appelé facteur d'intensité de contrainte (FIC).

L'extension de la discipline a été amorcée par Irwin vers 1960. Depuis cette date, le développement de la mécanique de la rupture s'étend aux problèmes non linéaires matériellement et géométriquement, aux problèmes de bifurcation des fissures en modes mixtes et plus récemment aux composites, aux techniques numériques de résolution et à l'état de l'art relatif au dimensionnement de diverses structures complexes . [1]

Chapitre I: Notions de la mécanique de la rupture

La rupture par fissuration est la création d'une surface de discontinuité. Elle est le terme ultime d'un essai de traction et quelque fois la seule réaction à un essai de déformation. La mécanique des solides aborde les problèmes de calcul de structures où l'on parle d'un élément de volume dont les dimensions sont de 1 mm et de structure pour 10 à 103 mm. Dans ce domaine, on traite du problème de la 'rupture par fissuration.

Le mécanisme de rupture par fissuration peut intervenir selon deux types de fissuration :

a) La *fissuration brutale*:

Pour les solides, ou pour les matériaux à très haute résistance, les contraintes de travail sont très élevées et une énergie potentielle considérable est ainsi créée ; la présence de petites fissures peut alors conduire à une rupture brutale qui souvent ne s'accompagne pas de déformations plastiques macroscopiques par suite de la très faible ductilité.

b) La *fissuration successive*:

Il s'agit ici, d'une succession de mécanismes (fragile-ductile) qui, sous contraintes répétées, entraîne la fissuration successive, appelée la rupture par fatigue.

I.2 Modes élémentaires de fissuration:

D'un point de vue macroscopique, on peut considérer deux modes principaux de rupture : la rupture plate et la rupture inclinée. La rupture plate correspond à une surface de rupture globalement perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale. La rupture inclinée dans le sens transversal par rapport à la direction de propagation s'accompagne souvent de grandes déformations. L'examen du faciès de rupture permet bien souvent de détecter, après rupture, le mécanisme de rupture et le type de fissuration produit.

On remarque généralement:

- *Une zone lisse et soyeuse* correspondant à la propagation en fatigue ou,
- *Une zone à grains cristallins ou moins apparents*, correspondant à la fissuration brutale.

On montre que toute fissuration peut être ramenée à l'un des trois modes simples ou à leur superposition. Il existe donc trois modes de fissuration élémentaires (Figure I.1):

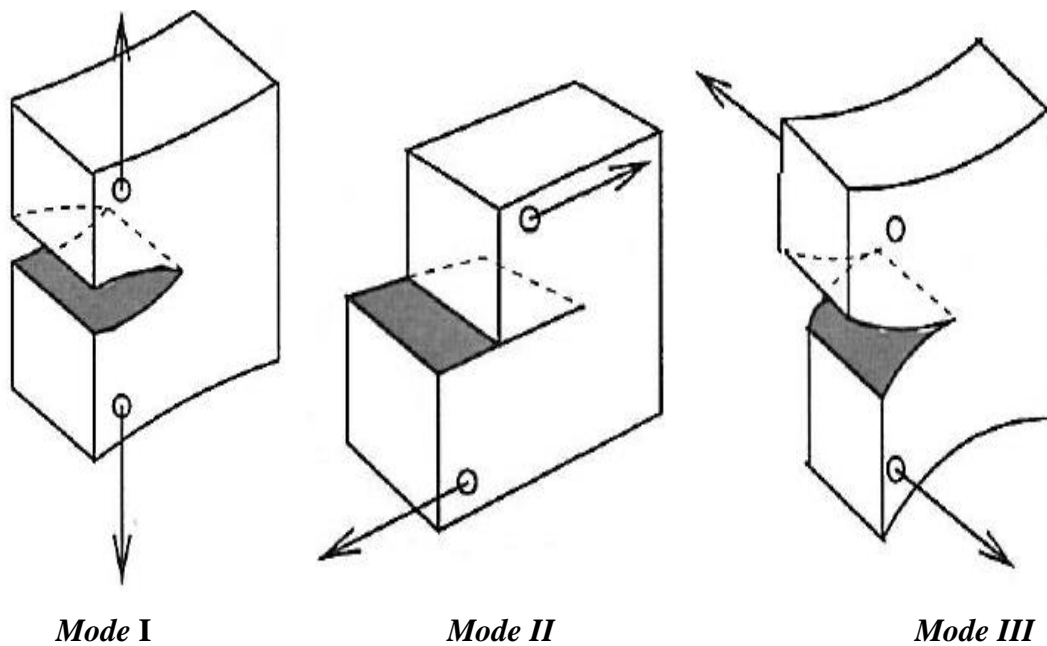


Figure I.1. Schématisation des trois modes de fissuration

Mode I: mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation.

Mode II: mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.

Mode III: mode de cisaillement hors du plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

Dans un matériau homogène soumis à une contrainte uni-axiale, l'effort se transmet d'un atome à l'autre en suivant des lignes de force qui sont parallèles (Figure I.2-a). Dans un matériau qui possède une entaille, les lignes de force doivent contourner cette entaille, ce qui conduit à une concentration de ces lignes au voisinage de la pointe de l'entaille (Figure I.2-b), donc une concentration de la contrainte dans cette région, appelée tête ou pointe de fissure.

La mécanique de la rupture étudie l'interaction entre la discontinuité géométrique (fissure) et le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité. D'un point de vue mécanique, on peut distinguer schématiquement, dans un milieu fissuré, trois zones successives. (Figure I.3).

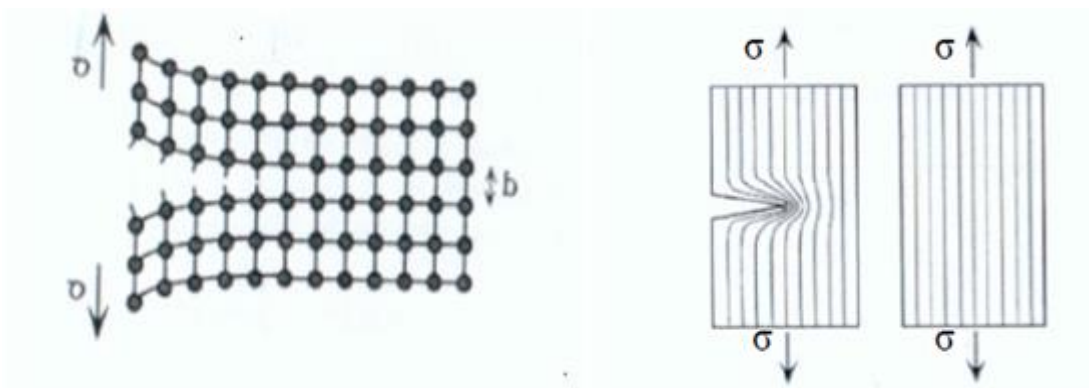


Figure I.2. Représentation à l'échelle atomique de la fissure (a), et des lignes de forces au voisinage de la pointe de l'entaille(b).

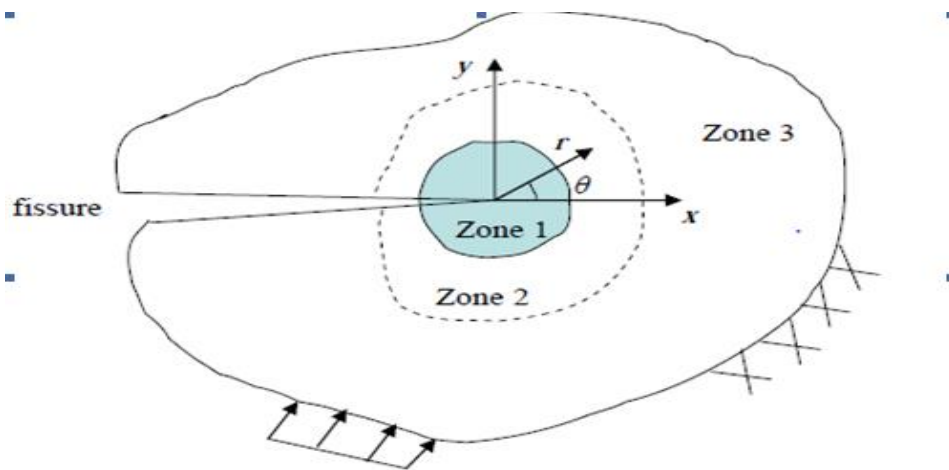


Figure I.3. Zones délimitant le voisinage de la pointe de la fissure

- **La zone d'élaboration 1:** elle se trouve à la pointe de fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau.
- **La zone singulière 2:** dans laquelle les champs de déplacements, déformations et contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure.
- **La zone 3 extérieure** comprenant les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites en charges et en déplacements. [2]

Chapitre I: Notions de la mécanique de la rupture

I.3 Description du champ des contraintes à l'extrémité d'une fissure:

Dans un matériau dont le comportement est élastique et linéaire, la forme générale du champ des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure est de la forme:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (I.1)$$

Où les coordonnées (r, θ) sont repérées par rapport à l'extrémité de la fissure (figure I.4). La fonction adimensionnelle $f_{ij}(\theta)$ dépend du mode de sollicitation, l'autre fonction adimensionnelle g_{ij} dépend à la fois du mode de sollicitation, de l'état de contrainte et de la géométrie du corps fissuré.

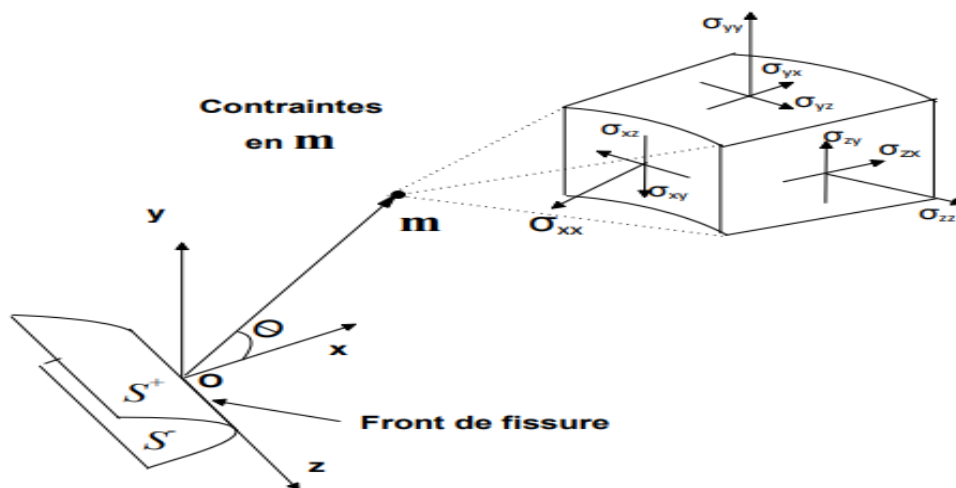


Figure I.4. Champ de Contraintes au voisinage de l'extrémité

Au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$ (c'est à dire lorsque $r \rightarrow 0$, la contrainte tend vers l'infini).

Comme les termes d'ordre plus élevé $r^{\frac{m}{2}}$ (avec $m > 2$) de la relation II.24 sont négligeables devant $1/r$, la zone la plus critique est bien le voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure. Pour ces raisons, seuls les termes en $1/\sqrt{r}$ sont considérés. On dit que les champs de contraintes asymptotiques sont de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (I.2)$$

Chapitre I: Notions de la mécanique de la rupture

Ces champs asymptotiques sont décrits et exprimés à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes K (K_I , K_{II} ou K_{III} : selon le mode de sollicitation considéré - mode I, II ou III).

$$\text{Mode I} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{array} \right\} \text{(I.3)}$$

$$\text{Mode II} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{array} \right\} \text{(I.4)}$$

$$\text{Mode III} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{13} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right\} \text{(I.5)}$$

La Figure I.6 met en évidence la zone où la singularité domine. Au delà de cette zone, on retrouve les conditions limites loin de la zone fissurée et la contrainte σ_{yy} tend progressivement vers la contrainte appliquée σ_∞ .

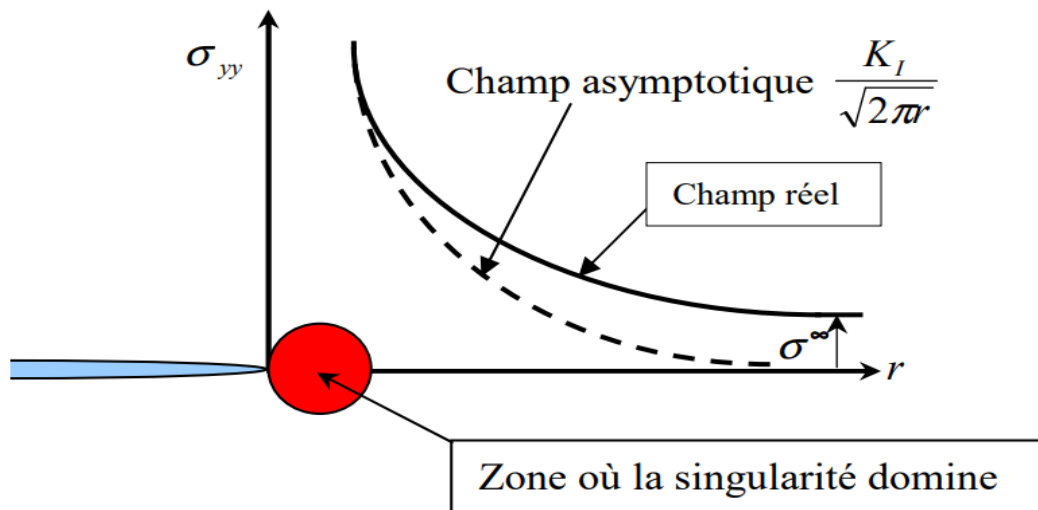


Figure I.5. Contrainte σ_{yy} ($\theta = 0$) perpendiculaire au plan de fissuration

Le facteur d'intensité des contraintes (FIC), noté K_I en mode I, est proportionnellement attaché à l'amplitude de la zone de singularité : autrement dit, le FIC et les contraintes

Chapitre I: Notions de la mécanique de la rupture

augmentent proportionnellement. Il s'agit donc d'un procédé de caractérisation des conditions à l'extrémité de la fissure : lorsque le FIC est connu, les champs des contraintes, des déformations et des déplacements le sont aussi. Le facteur d'intensité des contraintes est un des concepts les plus importants de la mécanique linéaire de la rupture [3].

I.4 Propagation des fissures:

L'application d'un chargement cyclique (d'amplitude constante ou variable) à une pièce se traduit par l'apparition d'un dommage qui comprend à trois stades (voir Figure I.7).

- **Stade I** : si le chargement est en dessous d'un certain seuil, la fissure ne se propage pas au niveau macroscopique. On réalise dans ce cas l'essai de détermination du seuil de propagation de fissure. La grandeur considérée est en quelque sorte l'équivalent de la limite de fatigue déterminée sur éprouvette lisse.
- **Stade II** : la fissure se propage « le plus souvent » dans un plan perpendiculaire à la direction de l'effort appliqué. L'essai de mesure de vitesse de propagation de fissure se rapporte principalement au régime correspondant au stade II.
- **Stade III** : il correspond au cas de chargements élevés pour lesquels une déchirure se produit dans le matériau. Les vitesses de propagation très élevées observées dans ce domaine conduisent rapidement à la rupture de la pièce. Les mesures de vitesses relatives à ce domaine ne sont mises en œuvre que dans le cas de problèmes bien spécifiques.

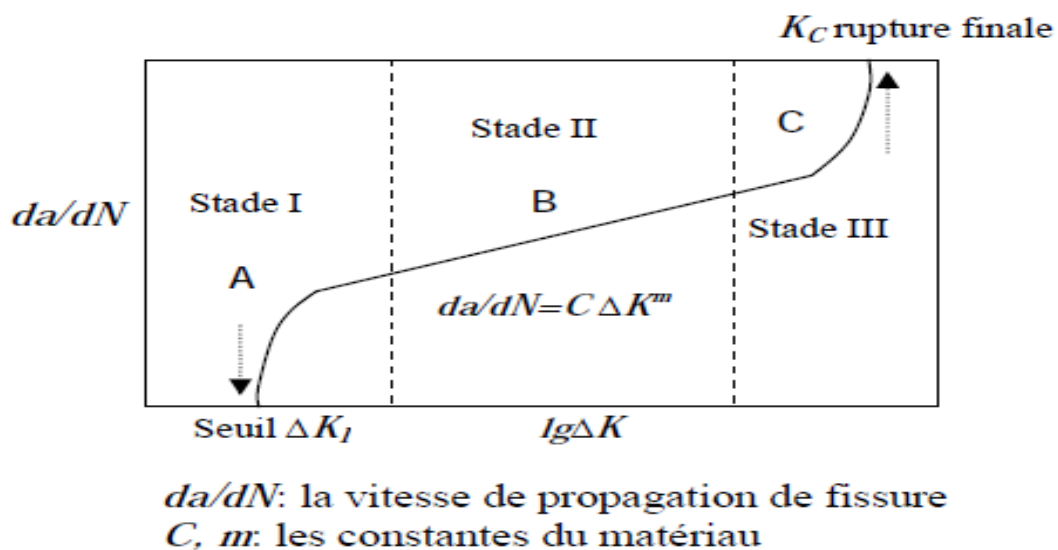


Figure I.6. Les Trois stades de propagation de fissure

Chapitre I: Notions de la mécanique de la rupture

I.5 Loi de propagation des fissures:

La rupture par fatigue est le phénomène de la fissuration successive d'une fissure sous chargement cyclique passant par les stades décrits auparavant. La compréhension de ce phénomène réside dans l'étude de la vitesse de propagation des fissures par fatigue. Les modèles qui sont proposés pour décrire la propagation d'une fissure devront tenir compte de tous les paramètres qui conditionnent cette propagation dans un matériau donné.

Des modèles théoriques reposant sur différentes hypothèses relatives au mécanisme de fissuration ont vu le jour: modèles basés sur la théorie des dislocations, sur le comportement du matériau en pointe de fissure, sur les lois de fatigue oligocyclique etc. Ces modèles ne rendent pas bien compte de toutes les situations de fissuration observées et sont peu aisés à mettre en œuvre.

A partir des concepts de la mécanique de la rupture, Paris et al se sont livrés à l'analyse suivante : les contraintes au voisinage d'une fissure, au cours d'un cycle de fatigue, sont connues dès que l'on connaît les valeurs minimale K_{min} et maximale K_{max} du facteur d'intensité de contrainte K au cours de ce cycle; on peut en conclure que tout phénomène se produisant dans la zone du voisinage de la pointe d'une fissure est contrôlé par ces deux paramètres, en particulier la vitesse de fissuration, et on doit avoir :

$$\frac{da}{dN} = f(K_{min}, K_{max}) \quad (I.6)$$

Si l'on pose $\Delta K = K_{max} - K_{min}$

$$R_s = \frac{K_{min}}{K_{max}} \quad (I.7)$$

On obtient:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R_s) \quad (I.8)$$

En première approximation, on considère une fissure qui se propage sous l'effet d'un programme de charge simple pour lequel R_s est constant, et l'expérience montre que pour la majorité des matériaux métalliques, la loi peut s'écrire sous la forme d'une loi de puissance :

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (I.9)$$

Chapitre I: Notions de la mécanique de la rupture

ΔK est la variation du facteur d'intensité de contrainte, fonction du chargement ($F_{max} - F_{min}$); de la longueur de fissure, de la géométrie globale de la pièce et locale de la fissure. m et m' sont deux constantes intrinsèques au matériau. Cette loi est communément appelée la loi de Paris. Elle est d'un intérêt pratique considérable pour l'ingénieur : tout essai de fissuration donne lieu à un dépouillement qui permet d'obtenir la loi de Paris du matériau. [2]

I.6 Conclusion:

Ce premier chapitre permet de fixer le cadre dans lequel s'inscrit notre sujet de recherche. D'un point de vue théorique, l'analyse asymptotique en mécanique linéaire de la rupture a défini les paramètres décrivant la rupture. Nous avons rappelé les principaux travaux relatifs à la détermination du champ de contraintes au voisinage d'une entaille et le facteur de contraintes dans le cas élastique.

.

Chapitre II

La méthode des éléments finis

II.1 Introduction:

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées dans une large variété de problèmes d'ingénieries. Tout au début cette méthode était développée pour étudier les structures complexes. [4]

II.2 Historique:

Les bases théoriques de la MEF reposent d'une part sur la mécanique des structures de la formulation énergétique et d'autre part sur les méthodes d'approximations.

La MEF est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'ailes d'avion) ; On y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956).

Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites par exemple celui de la torsion de Saint Venant en divisant la section en triangles, mais elles restèrent sans suite.

L'expression élément fini a été inventée par Slough en 1960, la MEF s'attaque à tous les domaines du calcul de structures. On trouve des programmes de la MEF principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures, Conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs tels que : ABAQUS, SAP2000, CATIA, FORTRAN, etc.

C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement gigantesque et les possibilités d'application augmentent sans cesse. [5], [6]

II.3 Caractéristiques de l'élément fini:

II.3.1 Les nœuds géométriques:

Nous choisissons un ensemble de n points, sur le domaine V , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés **les nœuds géométriques**, coïncident éventuellement avec les nœuds d'interpolation.

Puis nous remplaçons le domaine V par un ensemble de domaines V_e de formes relativement simples. [7] (Figure II.1)

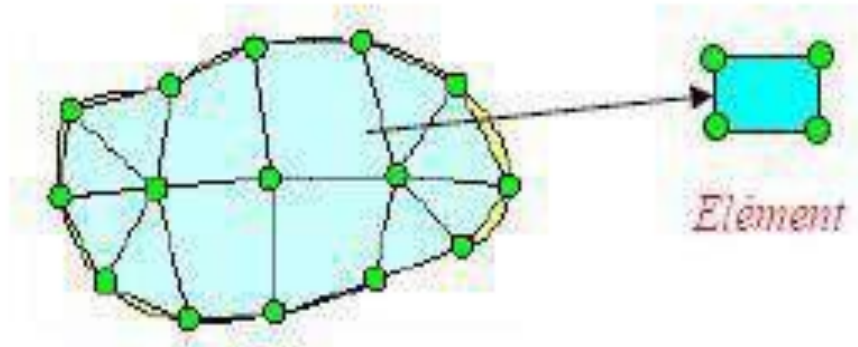


Figure II.1. domaine V discrétisé par sous domaine V_e

II.3.2 Attributs de l'élément fini:

La méthode des éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir la caractéristique. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangulaire ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.
- **Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope...etc.).
- **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connectivité des éléments les uns aux autres, ils occupent les sommets, les milieux des arêtes et faces, selon le type de l'élément et la théorie adaptée.
- **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (ex : le champ de déplacements) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

Chapitre II: La méthode des éléments finis

• **Forces nodales** : a travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées a l'élément (poids propre, charge uniforme, température....etc.).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force.

II.3.3 Type des éléments finis:

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement. Ils sont groupés en quatre classes :

- 1- les déplacements et les déformations planes.
- 2- la flexion des plaques.
- 3- les coques.
- 4- l'analyse des solides (3D).

Nous distinguons trois familles correspondantes à des différents type d'éléments finis à une, deux, trois dimensions :

- **Les éléments unidimensionnels (1D)**:barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile.
- **Les éléments bidimensionnels (2D)**:élasticité plane (déformation oncontraint) on plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- **Les éléments tridimensionnels (3D)**:éléments de volume ou coques épaisses
- **Les éléments axisymétriques** : qui constituent une classe bien particulière, où on a des formes de révolution. [8]

II.4 Etapes de la méthode des éléments finis:

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines. (Figure II.3)
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires.
- Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.

II.5 Étapes logiques du calcul par éléments finis:

Définir les nœuds et les propriétés des éléments (Créer le maillage) :

- Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$.
- reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux $\{U\}$ et les forces $\{F_e\}$ appliquées aux nœuds : $[K_e] \{U_e\} = \{F_e\}$.
- Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global.
 $[K] \{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.
- Modifier le système global en tenant compte des conditions aux Limites.
- Résoudre le système $[K] \{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds.
- Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont Imposées. [9]

II.6 Avantages et inconvénients de la MEF :

II.6.1 Les Avantages de la MEF:

La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse. Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécanique ou bien physiques. la géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque.

- Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. et toute cette diversité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).
- Le modèle qu'utilise la méthode des éléments finis est très proche de la structure réelle.

II.6.2 Les Inconvénients de la MEF:

- La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients. Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique.

Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple.

- Un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires;
- Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés.

- L'expérience et le bon sens de l'ingénieur sont indispensables à la définition d'un bon modèle. [10]

II.7 Conclusion:

La M.E.F c'est une méthode approchée de calcul numérique permettant de déterminer l'état d'équilibre d'un milieu continu élastique à deux ou trois dimensions. Elle consiste à déterminer de manière approximative les déplacements d'un certain nombre de points du milieu appelés « nœuds ». Le Modèle de déformation présente une interpolation directe sur les déformations et permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration), contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour déplacements.

Chapitre III

Modélisation numérique

III.1 Introduction:

Une défaillance globale peut se produire dans de nombreuses structures d'ingénierie en raison de l'initiation et de la propagation des fissures. Le facteur d'intensité de contrainte est largement utilisé pour étudier l'avancée cyclique d'une fissure dans un solide élastique, ce facteur réside dans la caractérisation du champ de contrainte et de déformation près de la pointe de fissure obtenus à partir des fonctions de contraintes introduites par Westergaard.

Dans de nombreuses applications d'ingénierie, les études expérimentales sur les structures fissurées sont souvent très coûteuses et difficiles en raison de la géométrie compliquée et des conditions aux limites. Par conséquent, l'analyse numérique utilisant la méthode des éléments finis est souvent utilisée pour étudier les paramètres de rupture de ces structures. La détermination analytique du facteur d'intensité de contraintes est extrêmement difficile. En conséquence, la modélisation numérique semble être une bonne alternative. Pour les problèmes de mécanique du solide, la méthode de modélisation numérique la plus fréquente est celle basée sur l'utilisation des éléments finis.

Dans notre étude, on va essayer de mettre en évidence l'influence de la présence d'une fissure au voisinage d'une fissure centrale. Ce fait est exprimé en termes de facteur d'intensité de contrainte. Celui-ci sera obtenu par modélisation par éléments finis en utilisant le logiciel Abaqus. La modélisation est conduite en faisant varier la longueur de la fissure et sa position géométrique.

III.2 Etude de l'interaction des fissures:

L'étude est conduite sur une plaque de forme carrée de dimension de 120x120 mm contenant une fissure centrale de longueur $2a = 30$ mm et une deuxième fissure à proximité de celle-ci d'une longueur $2c$, située une distance d et un angle α par rapport à la pointe de la fissure centrale (Figure III.1).

La plaque est soumise à une contrainte de traction uniformément répartie $\sigma=100\text{MPa}$ symétriquement appliqué sur ses deux côtés et dans la direction perpendiculaire à celle de la fissure centrale. La plaque est caractérisée par un module d'élasticité $E= 63\text{GPa}$ matériel et un coefficient de poisson $\nu=0.3$.

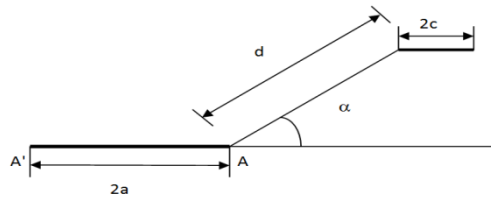


Figure III.1. Représentation de la disposition géométrique des fissures

Dans un premier temps, l'étude va être effectuée que sur la plaque contenant la fissure centrale. Le facteur d'intensité de contrainte va être déterminé et servira de référence pour la suite de l'étude. La distribution des contraintes autour de la fissure va être établie à son tour. Ensuite, une deuxième fissure sera introduite à proximité de la première et le facteur d'intensité de contraintes sera calculé de nouveau. L'effet de la présence de cette deuxième fissure sera décrit par le rapport des deux facteurs d'intensité de contraintes obtenus.

III.3 Présentation du modèle et maillage :

La modélisation numérique est réalisée en deux dimensions en état de contraintes planes (Figure III.2), et en supposant que le matériau a un comportement linéaire élastique.

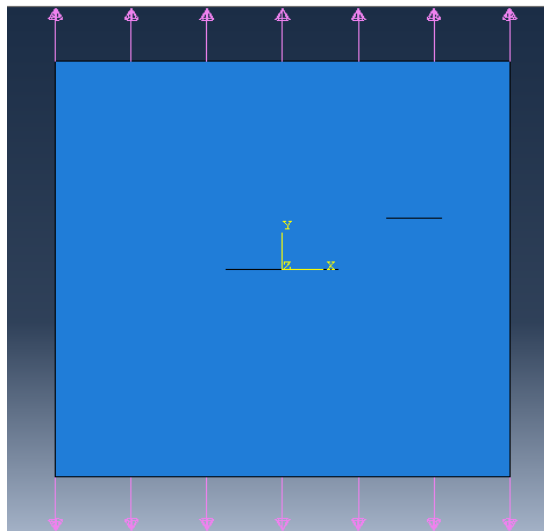


Figure III.2. Présentation la plaque fissurée.

Un ensemble de 1664 éléments est utilisé pour discrétiser la plaque. Des éléments triangulaires à 3 nœuds, linéaire en déplacement, en contrainte plane 'CPS3' sont utilisés (figure III.3), sauf au voisinage de la pointe de la fissure. Cette zone utilise des

éléments à quatre nœuds bilinéaires quadrilatère ‘CPS4’ qui est centrés autour de la pointe de la fissure.

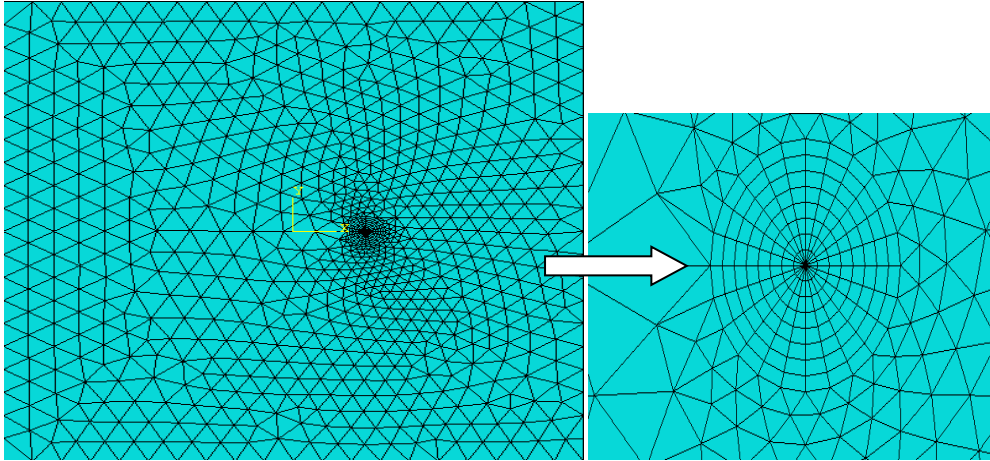


Figure.III.3. Maillage utilisé pour la plaque

Pour réaliser ce type de maillage, il faut remailler tous les éléments en contact avec la pointe de la fissure pour avoir des éléments triangulaires disposant toujours de 8 nœuds. Pour cela, il faut imposer aux nœuds 1 et 2 les mêmes coordonnées et les mêmes déplacements que le nœud 5 (Figure III.4).

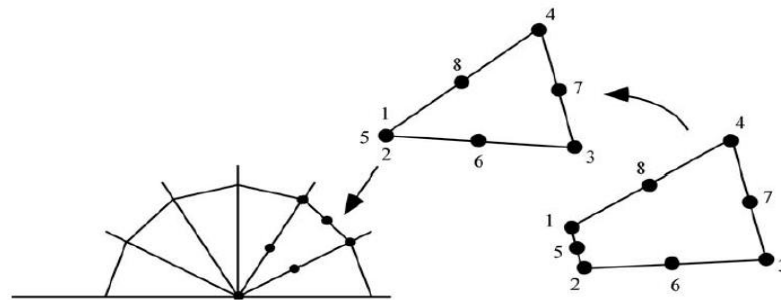


Figure III.4. Élément à 8 nœuds avec les points d'intégration

III.5 Résultats et discussions:

Cette section est divisée en deux parties, la première partie est consacrée à la détermination du facteur d'intensité de contraintes de la plaque contenant seulement la fissure centrale. La deuxième par contre, considère la présence d'une deuxième fissure à proximité de la fissure centrale. Le facteur d'intensité de contraintes est principalement lié à la longueur de la fissure, de la contrainte appliquée et de la géométrie de la plaque.

Rappelons que dans le cas d'une fissure centrale dans une plaque, la valeur de K_I est de $716.33MPa\sqrt{m}$, obtenue grâce à la relation:

$$KI = \sqrt{\pi a} \cdot \sigma \cdot \alpha \text{ (III.1)}$$

Avec un facteur de correction géométrique α de 1.04, selon la relation:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot [1.77 + 0.277 \left(\frac{a}{h}\right) - 0.51 \left(\frac{a}{h}\right)^2 + 2.7 \left(\frac{a}{h}\right)^3] \text{ (III.2)}$$

La modélisation permet d'obtenir une valeur de K_{I0} de $720.9MPa\sqrt{m}$, ce qui est très proche de la valeur calculée en tenant compte du facteur de correction géométrique.

L'indépendance du contour utilisé pour l'obtention du facteur d'intensité de contrainte a tout d'abord été vérifiée. Pour cela, nous avons effectué un calcul sur les 8 premiers contours, de telle sorte que chaque contour présente une couche d'éléments autour de la fissure. Les valeurs trouvées sont stables à partir du 3ème contour (Figure III.5). La documentation d'ABAQUS suggère de prendre la moyenne des calculs issue des différents contours sans prendre en compte la valeur du premier contour.

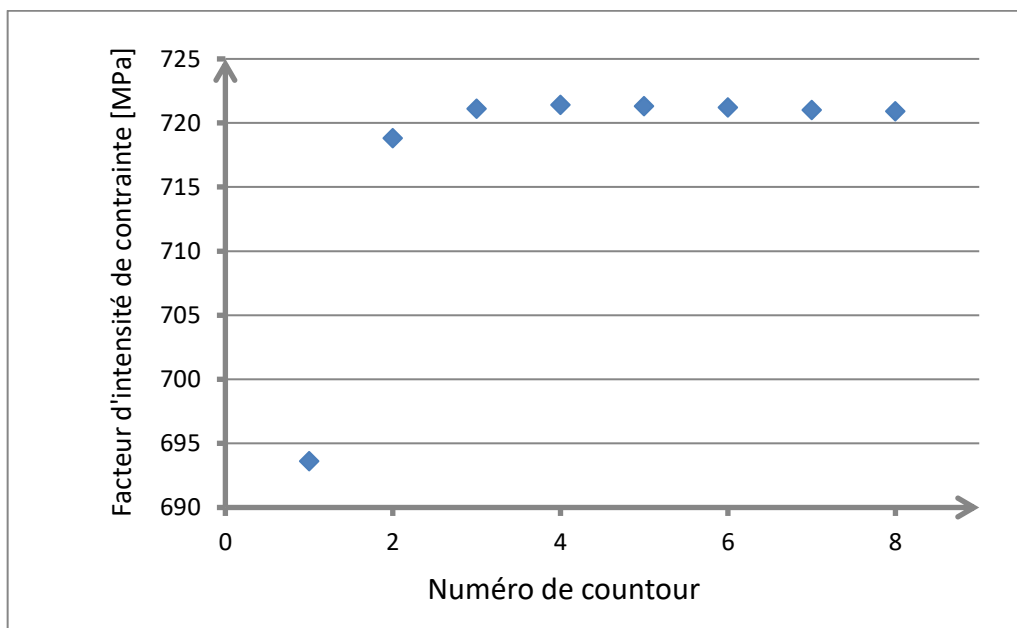


Figure III.5. Evolution de K_I en fonction des contours

La Figure III.6 montre la distribution des contraintes au sein la plaque. On distingue deux zones. La zone près de la pointe de fissure présente une forte concentration de contrainte, avec une contrainte maximale $\sigma_{\max} = 745.6$ MPa. Loin de la fissure les contraintes sont pratiquement du même ordre de grandeur que celle de la contrainte appliquée.

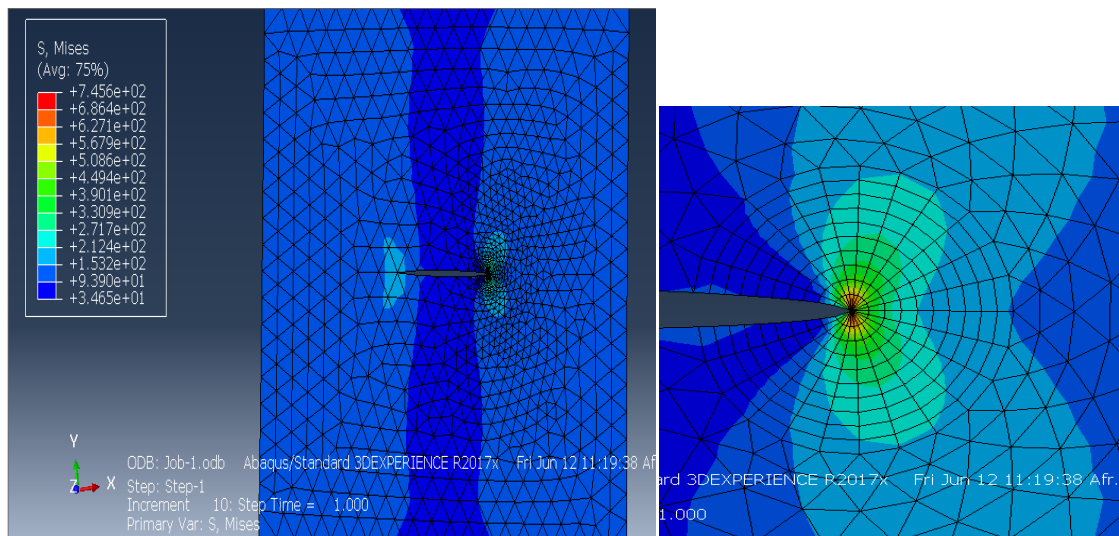


Figure III.6. Répartition des contraintes au sein de la plaque

III.6 Modélisation dans le cas de deux fissures:

Pour mettre en évidence l'effet de la présence d'une deuxième fissure sur le facteur d'intensité de contrainte, la modélisation sera effectuée pour différentes positions de la deuxième fissure (figure III.7), en faisant varier le rapport géométrique (c/d) et l'angle α (voir figure III.1).

L'interaction des deux fissures sera exprimée par le rapport des deux facteurs d'intensité de contrainte calculés.

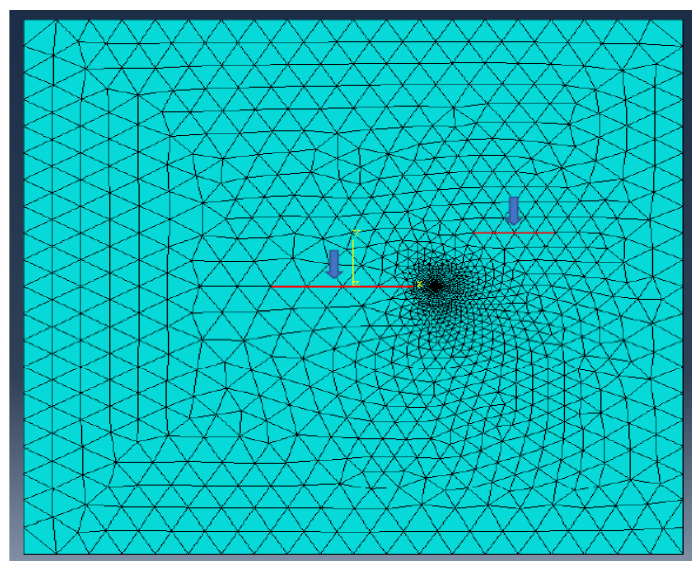


Figure III.7. Maillage de la plaque

La figure III.8 présente la distribution de contrainte au sein de la plaque dans le cas de la présence de deux fissures avec $c/d = 0.4$ et $\alpha = 20^\circ$. Une forte concentration de contrainte est observée dans le ligament séparant les pointes des deux fissures, avec une contrainte maximale $\sigma_{\max} = 721.8$ MPa.

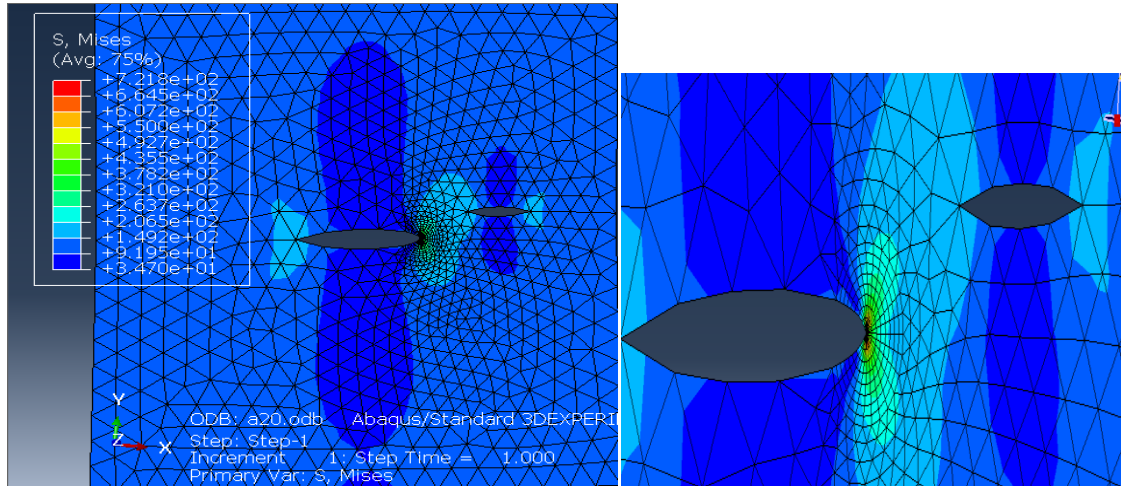


Figure III.8. Distribution des contraintes dans le cas de $2c = 15$ mm,
 $c/d = 0.4$ et $\alpha = 20$

III.7 Effet de la position angulaire de la deuxième fissure :

Le rapport des facteurs d'intensité de contrainte est calculé pour différentes positions angulaires de la deuxième fissure tout en fixant la longueur de celle-ci et la distance d qui la sépare de la fissure centrale. La position de la deuxième fissure varie de 20° à 120° avec un pas de 20° .

La figure III.9 montre la variation du rapport R pour différents angles de α , dans le cas de $2c = 15$ mm et $c/d = 0.4$. Les résultats obtenus montrent que l'angle α affecte considérablement la valeur du rapport R . Lorsque la valeur de l'angle α augmente, le rapport R diminue. Il varie de 1.07 pour $\alpha = 20^\circ$ à 0.942 pour $\alpha = 120^\circ$.

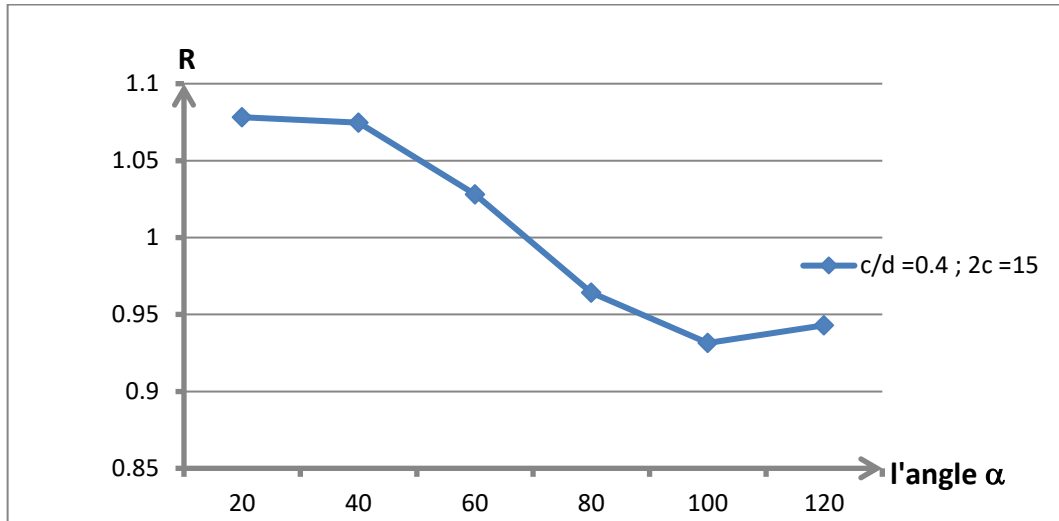


Figure.III.9. Variation de **R** en fonction de l'angle α , avec $2c = 15$ mm et $c/d = 0.4$

La relation liant le rapport **R** à l'angle α peut être décrite par un polynôme d'ordre trois de $\cos(\alpha)$, Figure.III.10.

$$R = -0.178(\cos\alpha)^3 + 0.18(\cos\alpha)^2 + 0.13(\cos\alpha) + 0.942$$

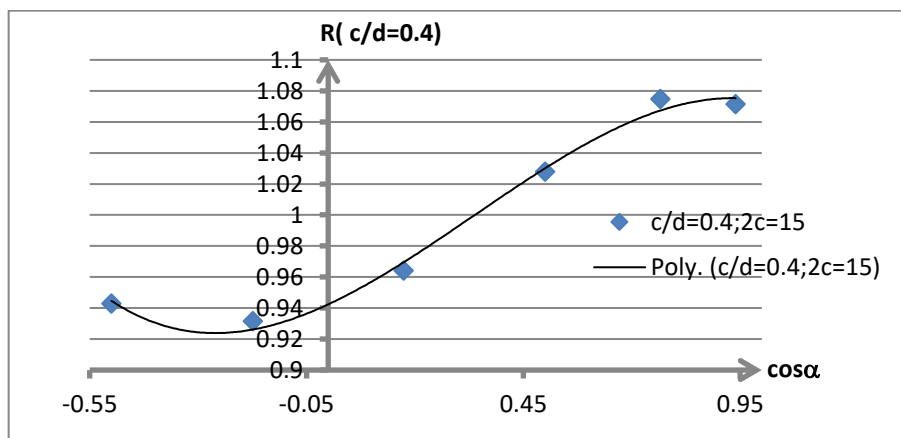


Figure.III.10. Evolution de **R** en fonction de $\cos\alpha$ pour $2c = 15$ mm et $c/d = 0.4$

Le tableau III.1 donne l'expression du rapport **R** obtenue pour les différentes valeurs de $2c$ et du rapport c/d .

2c (mm)	c/d	Expression de R
15	0.4	$R = -0.163(\cos\alpha)^3 + 0.176(\cos\alpha)^2 + 0.125(\cos\alpha) + 0.942$
15	0.5	$R = -0.198(\cos\alpha)^3 + 0.237(\cos\alpha)^2 + 0.165(\cos\alpha) + 0.917$
15	0.6	$R = -0.176(\cos\alpha)^3 + 0.277(\cos\alpha)^2 + 0.193(\cos\alpha) + 0.894$
15	0.7	$R = -0.074(\cos\alpha)^3 + 0.297(\cos\alpha)^2 + 0.203(\cos\alpha) + 0.868$
9	0.7	$R = -0.172(\cos\alpha)^3 + 0.289(\cos\alpha)^2 + 0.219(\cos\alpha) + 0.878$
12	0.5	$R = -0.187(\cos\alpha)^3 + 0.221(\cos\alpha)^2 + 0.154(\cos\alpha) + 0.923$
12	0.6	$R = -0.165(\cos\alpha)^3 + 0.257(\cos\alpha)^2 + 0.185(\cos\alpha) + 0.901$
12	0.7	$R = -0.163(\cos\alpha)^3 + 0.302(\cos\alpha)^2 + 0.217(\cos\alpha) + 0.872$
9	0.4	$R = -0.143(\cos\alpha)^3 + 0.156(\cos\alpha)^2 + 0.107(\cos\alpha) + 0.951$
9	0.5	$R = -0.172(\cos\alpha)^3 + 0.210(\cos\alpha)^2 + 0.142(\cos\alpha) + 0.93$
9	0.6	$R = -0.164(\cos\alpha)^3 + 0.244(\cos\alpha)^2 + 0.176(\cos\alpha) + 0.907$

Tableau.III.1. Expression de R en fonction de $\cos(\alpha)$

Afin d'ajuster au mieux l'expression de R, une moyenne des paramètres de la relation est calculée pour chaque c/d, ainsi :

- Pour $c/d = 0.4$:

La figure III.10 montre la variation du rapport moyen dans le cas de $c/d = 0.4$, pour $2c = 15$ et 9 mm, son expression s'écrit comme suit :

$$R_m = -0.153(\cos\alpha)^3 + 0.166(\cos\alpha)^2 + 0.116(\cos\alpha) + 0.9465$$

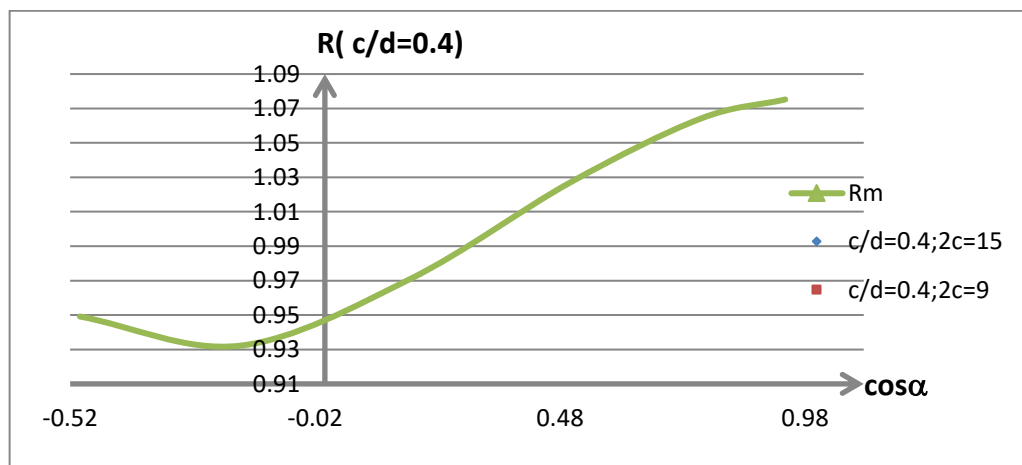


Figure.III.11. Variation de R_m en fonction de $\cos(\alpha)$ pour $(c/d=0.4)$

- Pour $c/d = 0.5$

La figure III.11 montre la variation du rapport moyen dans le cas de $c/d = 0.5$, pour $2c = 15, 12$ et 9 mm, son expression s'écrit comme suit :

$$R_m = -0.1857 (\cos\alpha)^3 + 0.2226(\cos\alpha)^2 + 0.1536(\cos\alpha) + 0.9233$$

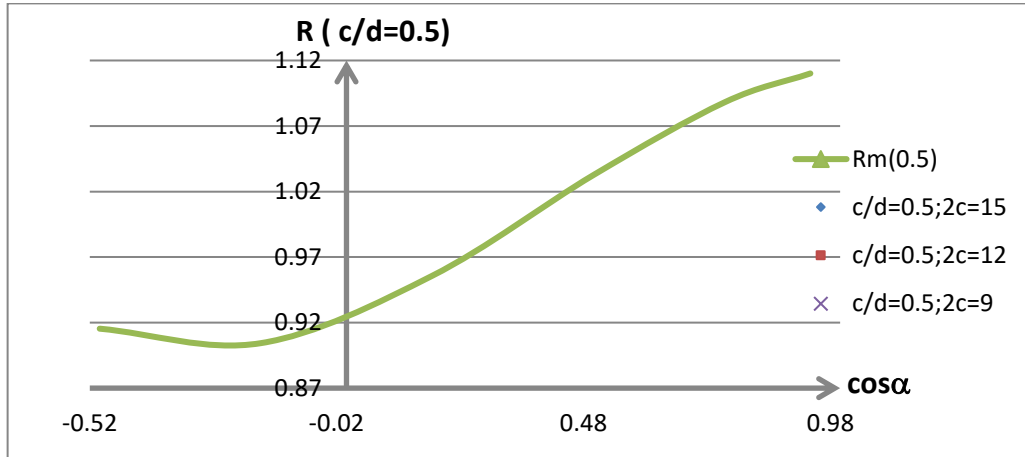


Figure.III.12.Variation de R_m en fonction de $\cos(\alpha)$ pour $c/d=0.5$

- Pour $c/d = 0.6$:

La figure III.12 montre la variation du rapport moyen dans le cas de $c/d = 0.6$, pour $2c = 15, 12$ et 9 mm, son expression s'écrit comme suit :

$$R_m = -0.1683 (\cos\alpha)^3 + 0.259(\cos\alpha)^2 + 0.1846(\cos\alpha) + 0.9006$$

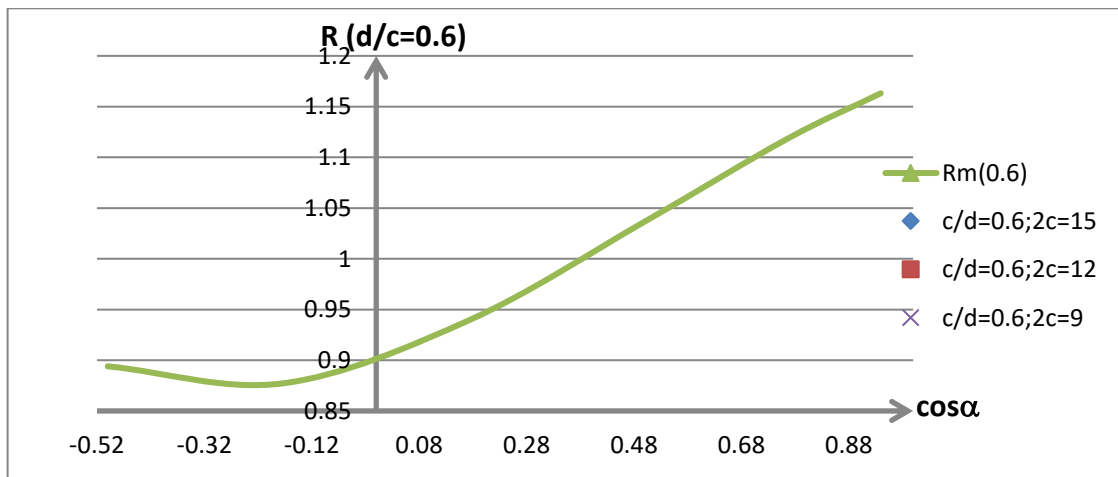


Figure.III.12:Variation de R_m en fonction de $\cos(\alpha)$ pour $(c/d=0.6)$

- Pour $c/d = 0.7$:

La figure III.13 montre la variation du rapport moyen dans le cas de $c/d = 0.7$, pour $2c = 15, 12$ et 9 mm, son expression s'écrit comme suit :

$$R_m = -0.136 (\cos\alpha)^3 + 0.296(\cos\alpha)^2 + 0.213(\cos\alpha) + 0.8726$$

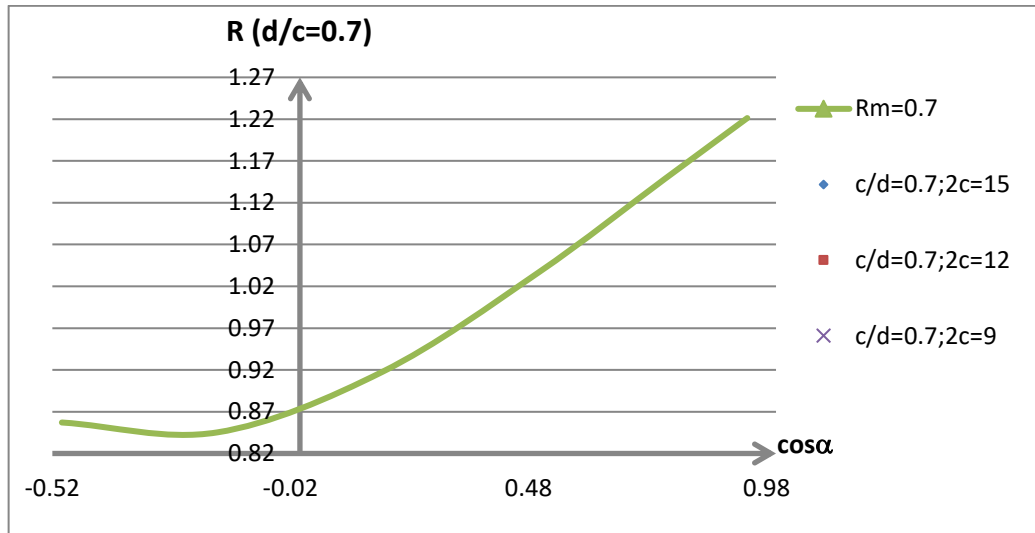


Figure.III.13:Variation de R_m en fonction de $\cos(\alpha)$ pour ($c/d=0.7$)

Le tableau III.3 regroupe les expressions de R_m en fonction de c/d et de $\cos(\alpha)$

c/d	Expression de R_m
0.4	$R_m = -0.153(\cos\alpha)^3 + 0.166(\cos\alpha)^2 + 0.116(\cos\alpha) + 0.9465$
0.5	$R_m = -0.1857 (\cos\alpha)^3 + 0.2226(\cos\alpha)^2 + 0.1536(\cos\alpha) + 0.9233$
0.6	$R_m = -0.1683 (\cos\alpha)^3 + 0.259(\cos\alpha)^2 + 0.1846(\cos\alpha) + 0.9006$
0.7	$R_m = -0.136 (\cos\alpha)^3 + 0.296(\cos\alpha)^2 + 0.213(\cos\alpha) + 0.8726$

tableau.III.2. Expressions de R_m en fonction de c/d et $\cos(\alpha)$

L'expression de R_m étant de la forme :

$$R_m = A(\cos\alpha)^3 + B(\cos\alpha)^2 + C(\cos\alpha) + D$$

La variation des coefficients A, B, C et D est représentée dans la figure III.14, où on constate que B, C et D varient pratiquement d'une façon linéaire en fonction du rapport c/d .

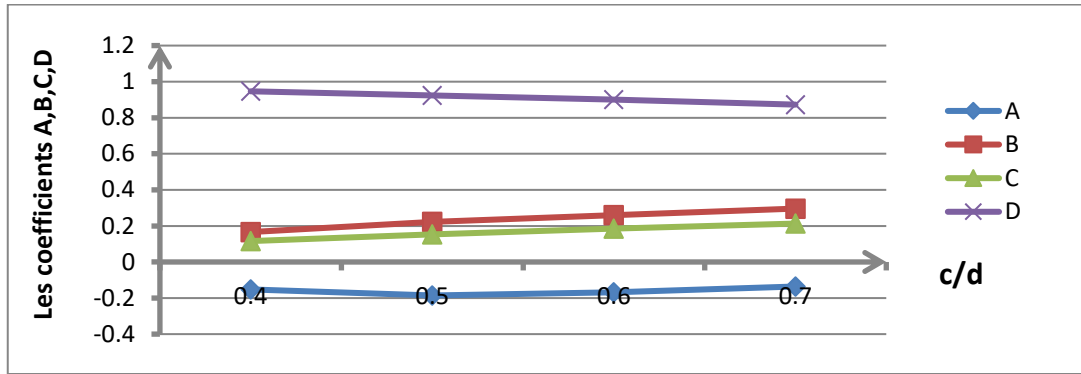


Figure.III.14:Variation des coefficients A, B, C et D en fonction du rapport c/d

III.8 Conclusion:

La modélisation par éléments finis permet d'obtenir le facteur d'intensité de contrainte pour différentes dispositions des fissures. Les résultats obtenus montrent que la présence d'une fissure dans une plaque déjà fissurée affecte la distribution des contraintes et augmente le niveau du facteur d'intensité de contrainte. Plus le rapport c/d augmente plus le rapport des facteurs d'intensité de contrainte augmente à son tour. Une augmentation de l'ordre de 20% est observée dans le cas de $c/d = 0.7$.

Conclusion générale

La modélisation par éléments finis, en utilisant Abaqus, permet d'analyser l'influence de l'interaction des fissures sur le facteur d'intensité de contrainte. Cette analyse se base sur l'utilisation du rapport R, défini comme étant le rapport du facteurs intensité de contrainte obtenu pour la plaque contenant une fissure centrale et celle contenant une autre fissure au voisinage de celle-ci. L'étude montre que ce rapport R peut être exprimé par un polynôme d'ordre trois du cosinus de l'angle entre les deux fissures. Selon la disposition géométrique des deux fissures on observe une augmentation du facteur d'intensité de contrainte qui peut être de l'ordre de 20%.

Annexe A

Présentation du code de calcul par éléments finis ABAQUS:

ABAQUS est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978. Il est avant tout un logiciel de simulation de problèmes très variés en mécanique. Simuler la réponse physique des structures soumises à des chargements, des températures, des impacts ou autres conditions extérieures, Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants de problèmes non-linéaires. D'un point de vue technique, les résultats obtenus grâce à ABAQUS sont le bilan des énergies, des forces nodales, des déformations, des déplacements, des contraintes, des vitesses, des accélérations et de toutes les grandeurs physiques nécessaires à la conception d'un modèle.[14]

Généralité sur le code de calcul ABAQUS :

ABAQUS compose de trois produits : ABAQUS/Standard, ABAQUS/Explicit et ABAQUS/CAE.

ABAQUS/Standard:est un solveur généraliste qui recourt à un schéma traditionnel d'intégration implicite. Il est caractérisé par :

- Résolution basée sur l'algorithme de Newton-Raphson et la méthode de Riks;
- Problèmes linéaires et non linéaires;
- Géométrie diversifiée ; 1D, 2D, 3D et Axisymétrique;
- Nombreuses procédures d'analyse dans le domaine temporel et fréquentiel.

ABAQUS/ Explicite, un schéma d'intégration explicite pour résoudre des problèmes dynamique ou quasi-statiques non-linéaires, caractérisé par :

- Analyse non linéaire (discrétisation spatiale et temporelle);
- Problème transitoire et dynamique des structures;
- Résolution basée sur la méthode explicite d'intégration en temps.

ABAQUS /CAE, constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour les dits solveurs. [15]

Caractéristiques de logiciel ABAQUS :

Description succincte des possibilités d'ABAQUS.

- Analyses.
- Éléments.
- Linéarités.

Les éléments utilisés par ABAQUS :

On distingue différentes grandes classes d'éléments :

- **Les éléments unidimensionnels (1D) :** barre; poutre ,rectiligne ou courbe
- **Les éléments bidimensionnels (2D) :** élasticité plane (contrainte ou déformation plane), plaques en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou rectangulaire.
- **les éléments tridimensionnels (3D) :** de forme tétraédrique, hexaédrique...etc.
- **les éléments axisymétriques :** (pour les pièces présentant une symétrie de révolution au niveau de la géométrie et du chargement).
- **les autres éléments :** ressorts, amortisseurs, rigides. [16]

Réalisation d'une simulation numérique :

La réalisation complète d'un jeu de données s'effectue après un passage successif dans les Modules : [17]

- Part
- Property
- Assembly
- Step
- Interaction
- Load
- Mesh
- Job (pour lancer le calcul)

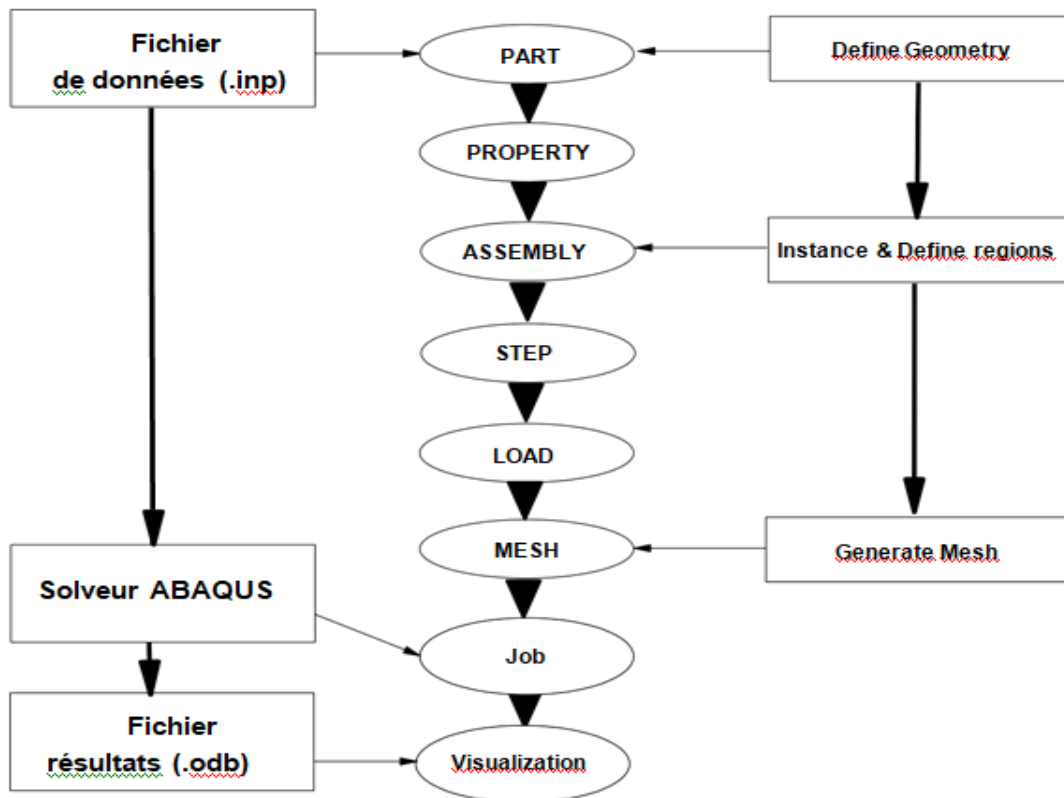


Figure.A.1. Réalisation d'une simulation numérique

Dans le code de calcul Abaqus le fichier de données décrit les géométries, les matériaux, les conditions aux limites avec une extension (.inp) et le fichier de résultats décrit les contours et les courbes résultats avec l'extension (.odb).

Système d'unités dans le code de calculAbaqus:

Comme dans beaucoup de logiciels, il n'ya pas de système d'unités fixé. C'est à l'utilisateur de définir son propre système.

MASSE	LONGUER	TEMPS	FORCE	PRESSION	ENERGIE
M	L	T	M.L.T ⁻²	M.L ⁻¹ .T ⁻²	M.L ² .T ⁻²
Kilogramme	Mètre	Seconde	Newton	Pascal	Joule
Gramme	Millimètre	Milliseconde	Newton	MPa	Mili joule
Tonne	Millimètre	Seconde	Newton	MPa	Mili joule

Tableau .A.1. Tableau des unités pour ABAQUS

Annexe B

Construction dans ABAQUS:

La réalisation complète d'un jeu des données s'effectue après un passage successif dans les Modules(Part,Property ,Assembly ,Step ,Interaction, Load, Mesh,Job).(Figure III.3-9)

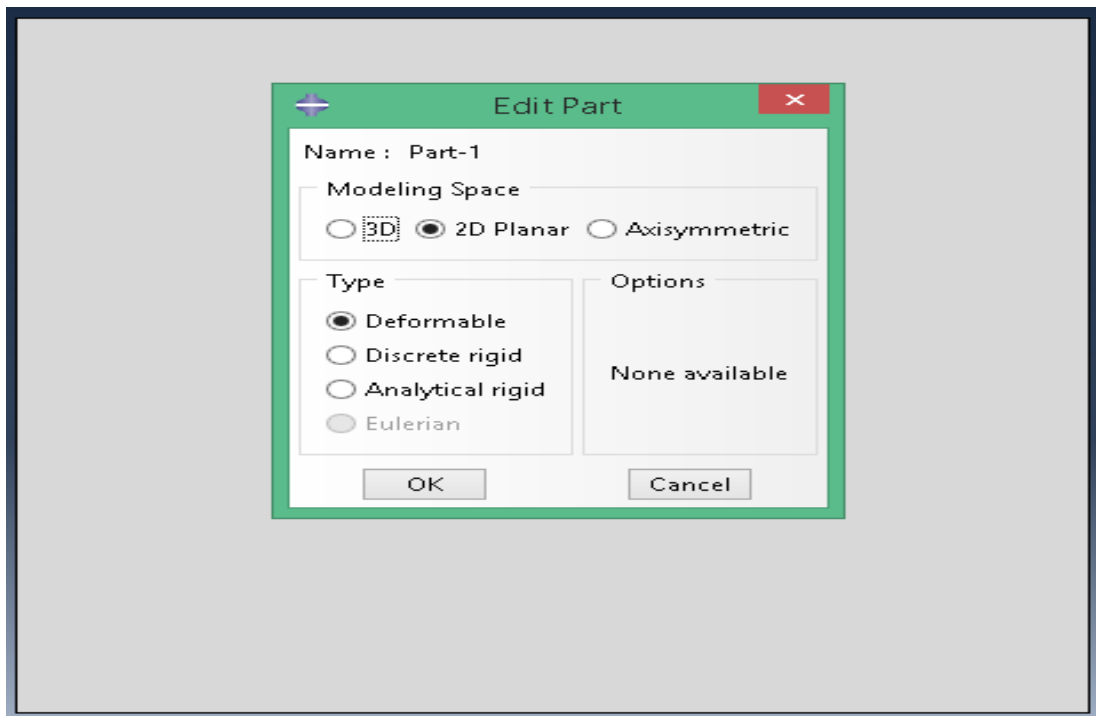


Figure B.1. Création la géométrie

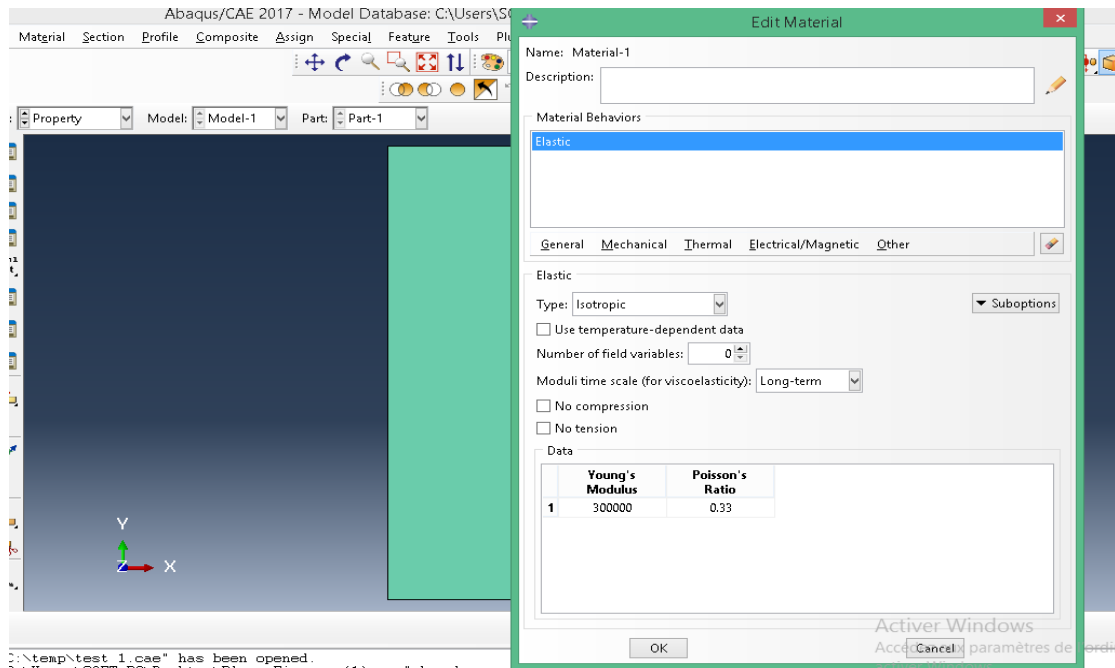


Figure B.2. Définition du matériau

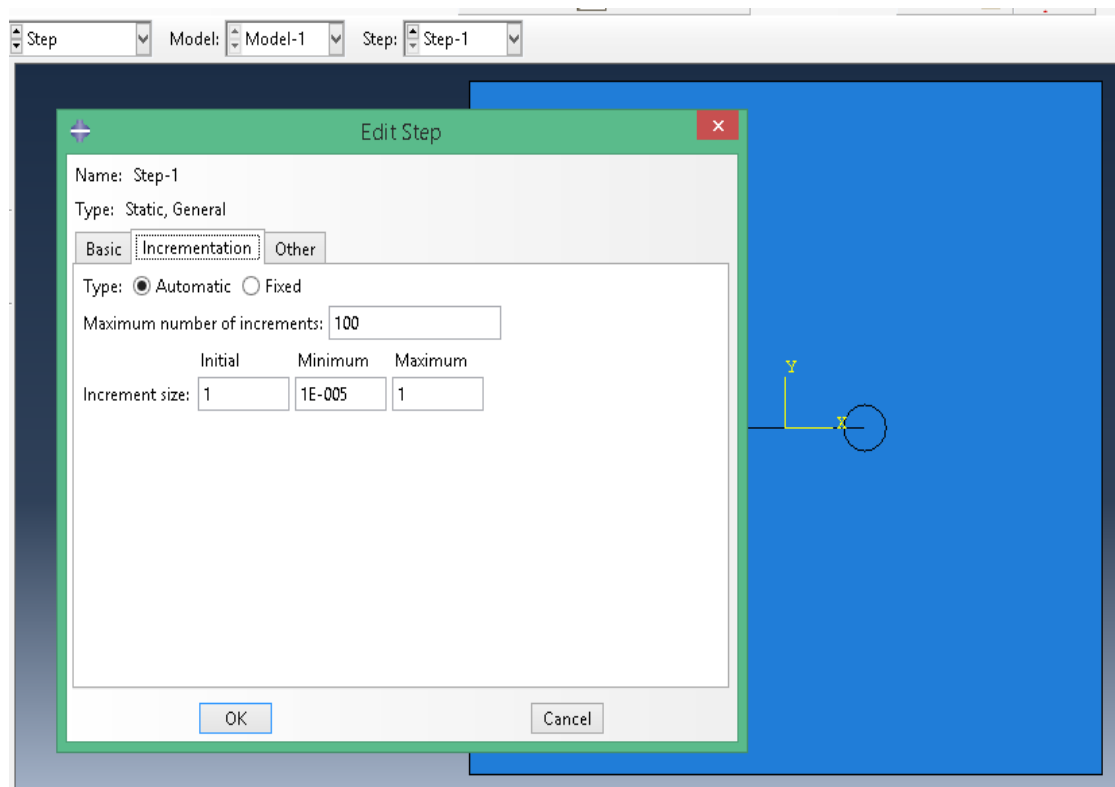


Figure B.3. Création de l'étape

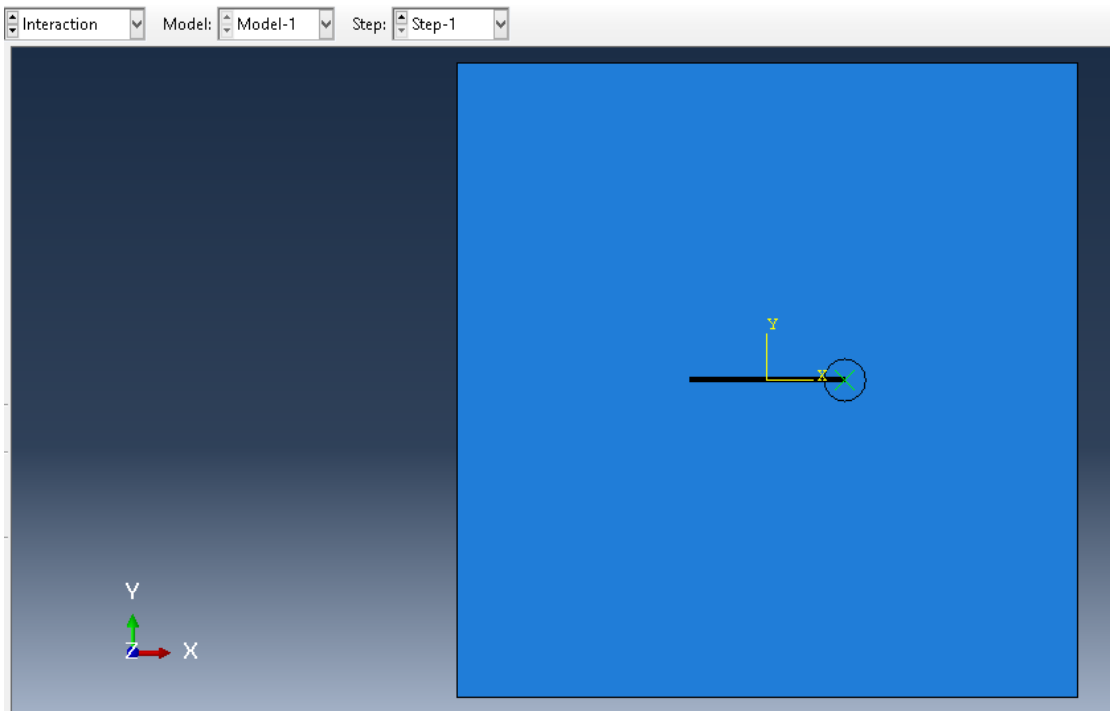


Figure B.4. Définition de la fissure

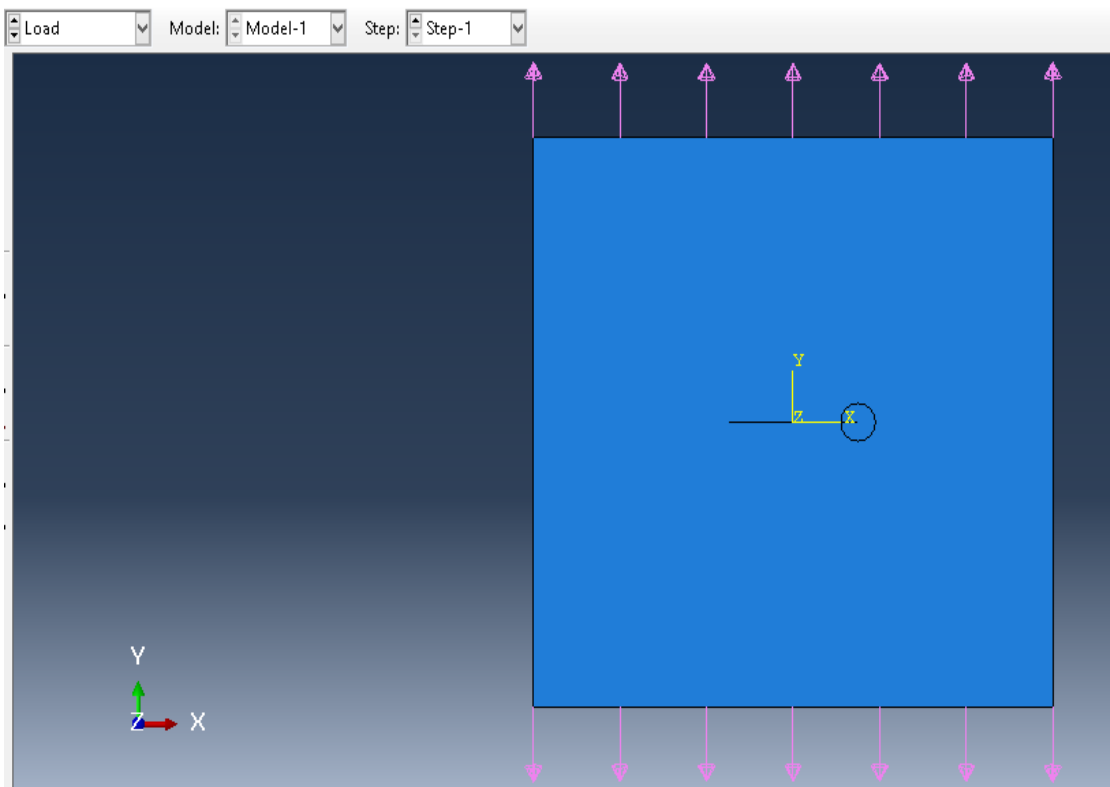


Figure B.5. Définition de la charge

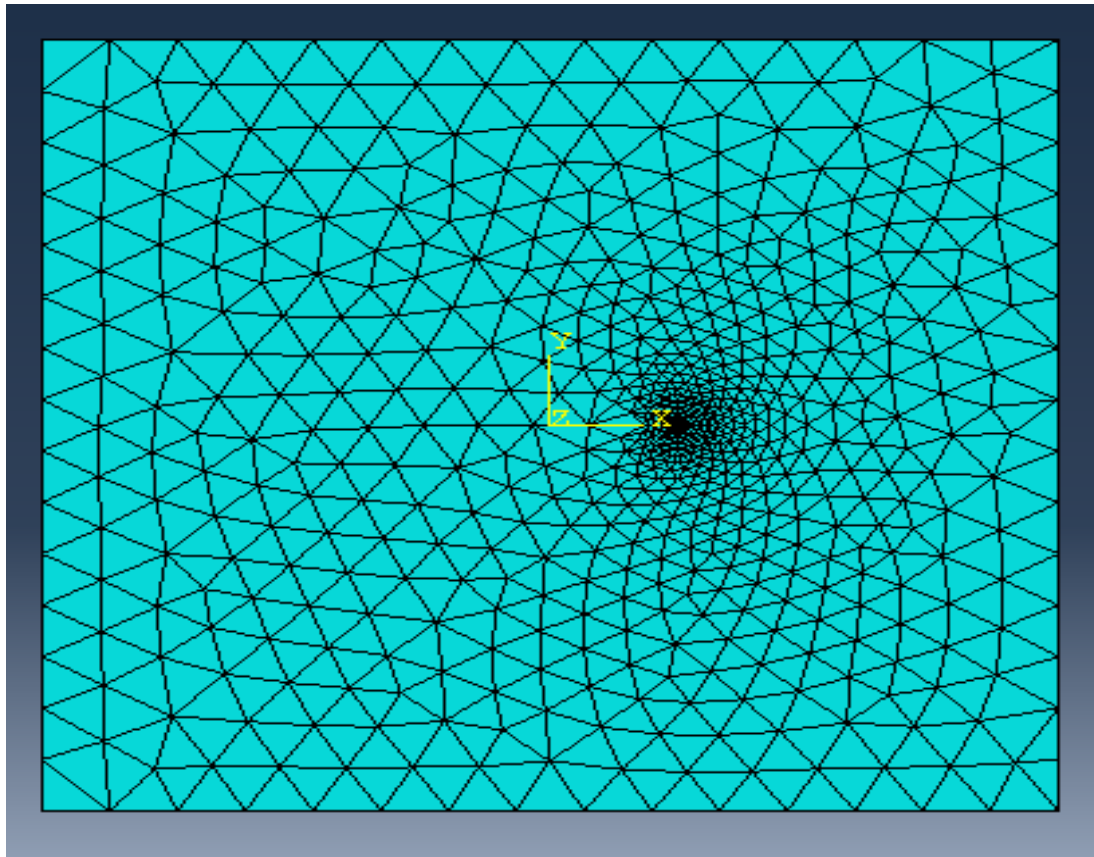


Figure B.6. Maillage de la plaque

D'après le développement de maillage on passera au job et resultants pour visualiser le modèle:(Figure III.9)

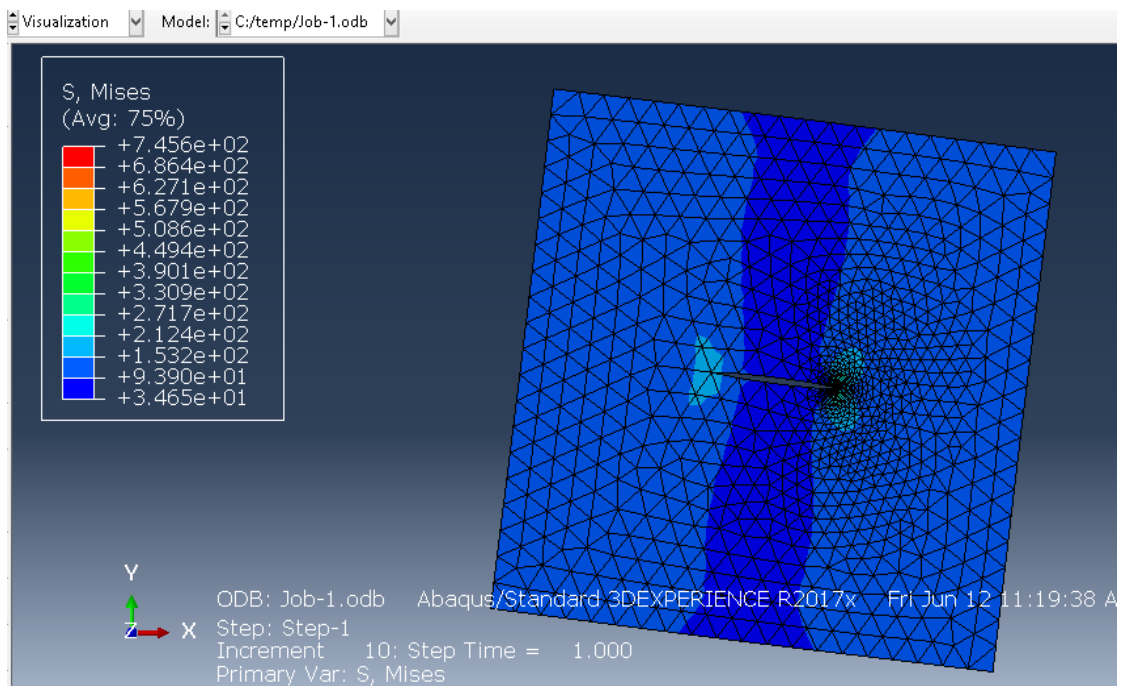


Figure B.7. Résultat

Partie2:

Il faut introduire les coordonnées Pour introduire la deuxième fissure. (Figure.III.11)

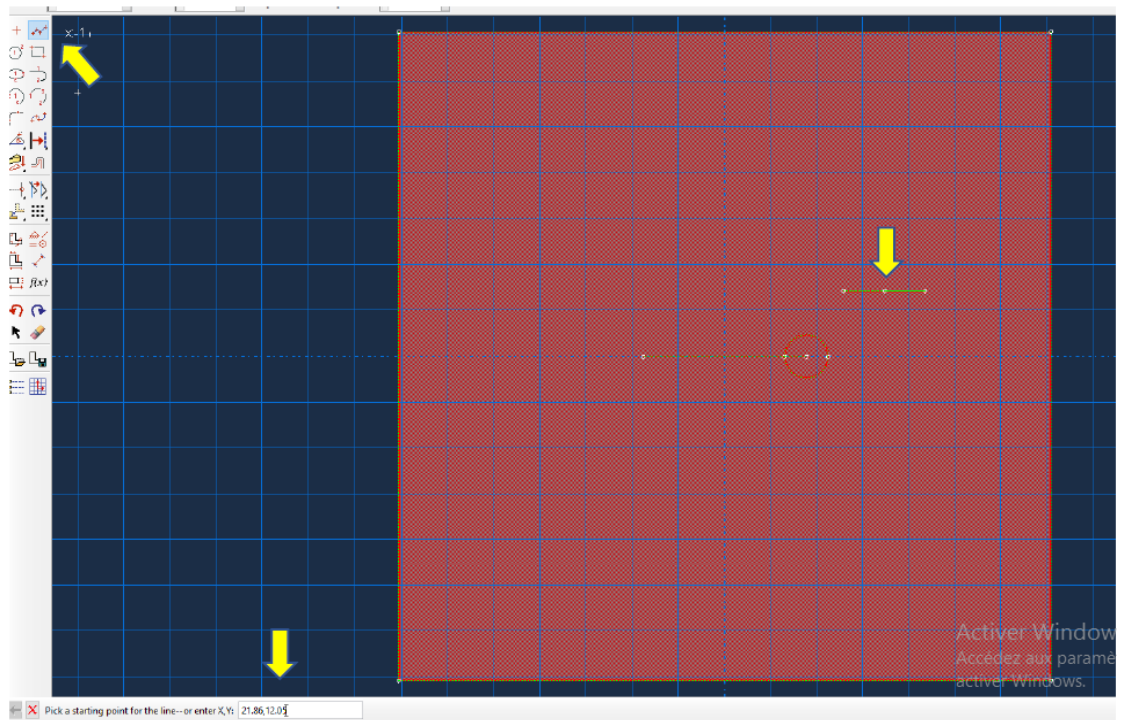


Figure B.8. Création la deuxième fissure

Références bibliographiques

- [1] Tahar Nateche / Réhabilitation et Renforcement des Canalisations sous pression en présence des défauts de surfaces / Université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf (Oran) / 1-Jul-2015.
- [2] Shixiang MA "Propagation de fissure en mode mixte dans un milieu élasto-plastique avec prise en compte des contraintes résiduelles ", Université BLAISE PASCAL – Clermont II / Ecole Doctorale / Sciences pour l'Ingénieur de Clermont – Ferrand / 13 Janvier 2005.
- [3] Zaghoul A, "Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture", Université de lorraine.(2016)
- [4] MARTIN LEVESQUE/ « Cours d'éléments Finis en Mécanique des Solides»/ Ecole Polytechnique de Montréal,1986.
- [5] TURNER G. ET DHATT G/« Une présentation de la méthode des éléments finis »/Eds.P.U.L.Q., France, 1981.
- [6] ARGYRIS J.H. AND KELSEY S/ « Energy theorems and Structural Analysis »/Butterworth, London, 1960.
- [7] Yves Debard/« Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle »/ mémoire Master Université du Maine.
- [8] BATOZ J.L. ET DHATT G /« Modélisation des structures par éléments finis. Poutres et Plaques »/, Paris, 1990.
- [9] BATHE K.J/ « FiniteElementProcedures » / Prentice Hall, 1996.
- [10] MEZIANI NEDJMA/ « Mémoire de magister ère Contribution De L'approche En Déformation Dans La Modélisation Des Structures A Contour Circulaire »/ Université de Med Khider Biskra 2006.
- [14] MEFTEH KAMEL/ Cours : Introduction général au logiciel Abaqus université de Biskra. 2013.
- [15] MEFTEH KAMEL, « Cours : Introduction général au logiciel Abaqus » université de Biskra, 2013
- [16] M. SARTOR/ « Eléments finis »/ Notes de cours , Chapitre 01
- [17] MEFTEH KAMEL/ « Cours : Introduction général au logiciel Abaqus »/ université de Biskra, 2013.

