



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد  
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed  
معهد الصيانة و الأمن الصناعي  
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

**Département de Maintenance en Electromécanique**

## **MÉMOIRE**

Pour l'obtention du diplôme de Master

**Filière :** Electromécanique  
**Spécialité :** Electromécanique Industrielle

### **Thème**

Etude numérique d'un fluide dans la veine d'un capteur solaire plan à air munie de rugosités.

Présenté et soutenu publiquement par :

Nom : AISSAOUI Prénom : Abdelmadjid

Devant le jury composé de :

<b>Nom et Prénom</b>	<b>Grade</b>	<b>Etablissement</b>	<b>Qualité</b>
Mr. ADJLOUA A	MAA	IMSI d'univ d'Oran2	<b>Président</b>
Mr. BOUHAMRI N	MCB	IMSI d'univ d'Oran2	<b>Encadreur</b>
Mr. BOUHAFS M	MCB	IMSI d'univ d'Oran2	<b>Examineur</b>

**2020/2021**

## **Dédicaces**

Avant tout propos, je tiens à rendre grâce à Dieu qui m'a guidé sur la bonne voie.

Je dédié ce travail à:

Ma mère et mon père

Mes frères et mes sœurs

Mes amis

Ma famille

Je prie Dieu de leurs accorder longue vie et bonne santé

## **Remerciements**

Je remercie ALLAH de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

J'exprime mes gratitudes, mes reconnaissances et mes sincères remerciements à Mr. Bouhamri pour m'avoir encadré tout le long de mon projet.

### ملخص

في هذا العمل ، تم اجراء دراسة رقمية للتعامل مع الخصائص والآليات المرتبطة بالمجال الهيدروديناميكي والتي تتعلق بظواهر تطور الاضطراب داخل تيار الهواء الديناميكي للاقط حرارة شمسي. الدراسة مكرسة للتحكم في التدفق باستخدام خشونة اصطناعية، والهدف منها هو معالجة السلوك الديناميكي والحراري لتدفق الهواء في محيط الحواجز ، في وريد الهواء الديناميكي. في هذا العمل ، يتم تحديد الكميات الفيزيائية المتعلقة بالتدفق (مجال السرعة ، مجال الضغط ، مجال درجة الحرارة والاضطراب) في أي نقطة في التدفق.

**الكلمات المفتاحية :** لاقط شمسي, تبادل حراري, خشونة اصطناعية, محاكاة رقمية.

### Résumé

Dans ce travail, une étude numérique a été élaborée traitant ainsi les propriétés et les mécanismes attachés au champ hydrodynamique qui relève des phénomènes de développement de la turbulence au sein de la veine d'air dynamique d'un capteur solaire à air. L'étude est consacrée à contrôler passivement l'écoulement en utilisant des rugosités artificielles de types chicanes, dont l'objectif est de traiter le comportement dynamique et thermique de l'écoulement d'air au voisinage des chicanes, au sien de la veine d'air dynamique. Dans ce travail, les quantités physiques liées à l'écoulement (champ de vitesse, champ de pression, champ de température et la turbulence) sont identifiées en tout point de l'écoulement.

**Mots clés :** Capteur solaire à air, transfert thermique, rugosité artificielle, simulation numérique.

### Abstract

In this work, a numerical study was developed dealing with the properties and mechanisms attached to the hydrodynamic field which relates to the phenomena of development of turbulence within the dynamic air stream of a solar air collector. The study is devoted to passively control the flow by using artificial roughness of baffle types, the objective of which is to treat the dynamic and thermal behavior of the air flow in the vicinity of the baffles. In this work, the physical quantities related to the flow (velocity field, pressure field, temperature field and turbulence) are identified at any point in the flow.

**Key words :** flat plate collector, heat transfer, artificial roughness, numerical simulation.

**Table des matières**

**Résumé**

**Table des matières**

**Liste des figures**

**Liste des tableaux**

**Nomenclature**

<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre I: Recherche bibliographique</b> .....	<b>3</b>
I.1 Introduction .....	4
I.2 Quelques travaux effectués sur les transferts thermique .....	4
I.3 Conclusion .....	13
<b>Chapitre II: Généralités sur les capteurs solaires &amp; transfert thermique</b> .....	<b>14</b>
II.1 Introduction .....	15
II.2 Transferts de chaleur dans un écoulement dans un canal .....	15
II.2.1 Transfert de chaleur par conduction .....	17
II.2.2 Transfert de chaleur par Convection .....	18
II.2.3 Transfert de chaleur par rayonnement .....	18
II.3 Equations de conservation de quantité de mouvement .....	19
II.4 Conclusion .....	21
<b>Chapitre III: Modélisation de l'équation de transfert Thermique</b> .....	<b>22</b>
III.1 Introduction .....	23
III.2 Les méthodes utilisées dans les échanges thermiques .....	23
III.3 Modélisation de la turbulence.....	23
III.3.1 Modèles à viscosité turbulente (Eddy Viscosity Turbulence Models).....	24
III.3.1.2 Modèle aux tensions de Reynolds (Reynolds Stress Turbulence Models) .....	25
III.3.2 Le modèle k-ε.....	26
III.3.2.1 Le modèle k-ε standard. ....	26

## *Table des matières*

---

III.3.2.2 Le modèle k- $\epsilon$ RNG.....	27
III.3.2.3 Le modèle k- $\epsilon$ réalisable.....	28
III.3.3 Le modèle k- $\omega$ SST .....	28
III.4 Représentation du code de calcul .....	28
III.4.1 La méthode des éléments finis.....	29
III.4.2 Principe de la méthode des éléments finis.....	29
III.4.3 Mise en œuvre numérique.....	32
III.5 Descriptions des logiciels utilisés pour la simulation COMSOL Multiphysics .....	32
III.6 Description du problème physique .....	33
III.6.1 Représentation schématique.....	33
III.6.2 Hypothèses simplificatrices.....	34
III.7 Optimisation du maillage.....	34
III.8 Conclusion.....	36
<b>Chapitre IV: Résultats et discussions .....</b>	<b>37</b>
IV.1 Introduction.....	38
IV.2 Profil de la vitesse.....	38
IV.2.1 Effet du nombre de Reynolds sur l'évolution de la vitesse .....	42
IV.3 Profil de la température.....	43
IV.3.1 Effet du nombre de Reynolds sur la distribution de la température .....	45
IV.4 Profile de pression.....	46
IV.5 Conclusion.....	47
Conclusion générale.....	48
Références bibliographiques.....	49

**Liste des figures**

- Figure I.1 Photo de l'équipement expérimentale.
- Figure I.2 Les géométries étudiées.
- Figure I.3 Emplacement des éléments de mesure au niveau du capteur solaire.
- Figure I.4 Schématisation des flux convectifs et radiative dans un capteur solaire couvert.
- Figure I.5 Schéma du capteur solaire à double passe avec milieu poreux.
- Figure I.6 Capteur solaire à air vertical.
- Figure I.7 Modèle d'un capteur à tube sous vide simulé sur TRNSYS 15.
- Figure I.8 Bilan thermique d'un capteur solaire plan.
- Figure I.9 Capteur thermique hybride (chauffe-eau/air).
- Figure I.10 Cellule expérimentale.
- Figure I.11 Schéma du dispositif expérimental utilisé.
- Figure I.12 Géométrie du problème.
- Figure I.13 Schéma descriptif du système de séchage.
- Figure I.14 Configuration de l'installation de climatisation solaire sous TRNSYS.
- Figure I.15 Géométrie du problème.
- Figure I.16 Schéma d'une coupe du capteur BATISOL et maquette numérique 2D réalisée sous COMSOL Multyphysics.
- Figure II.1 Courbe d'ébullition ou courbe de Nukiyama (1934).
- Figure II.2 Schéma du transfert de chaleur conductif.
- Figure II.3 Schéma du transfert de chaleur convectif.
- Figure II.4 Schéma du transfert de chaleur radiatif.
- Figure III.1 Un domaine d'étude discrétisé en éléments finis
- Figure III.2 Exemple de maillage triangulaire.
- Figure III.3 Informations sur le logiciel COMSOL Multiphysics.
- Figure III.4 Schéma de la veine d'air dynamique en configuration 2D.

## *Liste des figures*

---

Figure III.5 Représentation de l'entrée de la veine du capteur avec une seule chicane.

Figure III.6 Différents types de maillage.

Figure IV.1 Champ de la vitesse axiale pour 13 chicanes à différentes valeurs de débit.

Figure IV.2 Contours de la vitesse axiale pour 1 chicane à différentes valeurs de débit.

Figure IV.3 Champ de la vitesse axiale pour 2 chicanes à différentes valeurs de débit.

Figure IV.4 Champ de la vitesse axiale pour 1 chicane à différentes valeurs de débit.

Figure IV.5 Profil de la vitesse à la position  $x = 0.08$  m.

Figure IV.6 Profil de la vitesse à la position  $x = 0.1$  m.

Figure IV.7 Profil de la vitesse à la position  $x = 0.1134$  m.

Figure IV.8 Profil de la vitesse à la position  $x = 0.15$  m.

Figure IV.9 Profil de la vitesse en fonction de nombre de Reynolds à la position  $x = 0.15$  m.

Figure IV.10 Contours de la température pour différentes valeurs de débit.

Figure IV.11 Profil de la température à la position  $x = 0.08$  m.

Figure IV.12 Profil de la température à la position  $x = 0.1$  m.

Figure IV.13 Profil de la température à la position  $x = 0.1134$  m.

Figure IV.14 Profil de la température à la position  $x = 0.15$  m.

Figure IV.15 Evolution axiale de la température en fonction du nombre de Reynolds à la position  $x = 0.15$  m.

Figure IV.16 Contours de la pression pour différentes valeurs de débit.



**Liste des tableaux**

Tableau II.1 Ensemble des corrélations exprimant le transfert de chaleur en convection forcée.

Tableau II.2 Conductivité thermique de certains matériaux.

Tableau III.1 Constantes du modèle k- $\epsilon$  standard.

Tableau III.2 Valeurs des constantes du modèle RNG k - $\epsilon$ .

Tableau III.3 Différentes types de maillage.

*Nomenclature*

---

**Nomenclature**

symbole	désignation	unité
$A_c$	Surface du capteur conventionnel	$m^2$
$C_p$	Chaleur massique de l'air	J/kg K
$D_h$	Diamètre hydraulique	m
$D_\omega$	Diffusion croisée dans l'équation de (k- $\omega$ )	-
E	Energie totale	Wh
$e_{ch}$	Épaisseur de la chicane	m
h	Largeur de la veine d'air dynamique	m
H	Hauteur de la veine d'air dynamique	m
$h_c$	Coefficient de transfert thermique	W/m <sup>2</sup> K
$h_t$	Hauteur du tourbillon	m
$G_b$	Forces de poussée gravitationnelle dans l'équation du model de turbulence (k- $\epsilon$ )	-
$G_k$	Génération de l'énergie cinétique turbulente dans les équations de (k- $\epsilon$ )	-
$G_\omega$	Génération de ( $\omega$ ) dans l'équation de (k- $\epsilon$ )	-
I	Intensité du rayonnement solaire	W/m <sup>2</sup>
k	Energie cinétique turbulente	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$k_{eff}$	Conductivité thermique effective	W/mK
L	Longueur de la veine d'air dynamique	m
$L_{ch}$	Longueur de la chicane	m
$\dot{m}$	Débit massique	Kg/s
p	Pas entre chicanes	m
P, $P_{atm}$	Pression, Pression atmosphérique	Pa
$T_e$	Température de l'air à l'entrée	K
$T_s$	Température de l'air à la sortie	K
u	Vitesse axiale suivant l'axe (x)	m/s
$U_L$	Coefficient des pertes thermiques	W/m <sup>2</sup> K
v	Vitesse verticale suivant l'axe (y)	m/s
$Y_k, Y_\omega$	Dissipations de (k) et ( $\omega$ ) respectivement	-
Nu	Nombre de Nusselt	-
Pr	Nombre de Prandtl	-
Re	Nombre de Reynolds	-
$\beta$	Indice de vérification asymptotique	-
$\Gamma$	Coefficient de diffusion	-
$\Gamma_k \Gamma_\omega$	Diffusivités effectives de (k) et ( $\omega$ ) respectivement	-
$\Delta P$	Pertes de charge	Pa
$\delta, \delta_k$	Epaisseur de la couche limite, Symbole de Kronecker	m, -
$\epsilon, \epsilon_p$	Taux de dissipation turbulente, Taux de dissipation turbulente à la paroi	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>

## *Nomenclature*

---

$\varepsilon_r$	Erreur relative	-
$\mu, \mu_t$	Viscosité dynamique, Viscosité dynamique turbulente	N/s/m <sup>2</sup>
$\nu$	Viscosité cinématique turbulente	pl
$\rho$	Densité de l'air	Kg/m <sup>3</sup>
$\tau$	Tenseur des contraintes	-
$(\tau\alpha)_e$	Produit de transmittivité et d'absorptivité effective	-
$\tau_p$	Contrainte de cisaillement pariétale	-
$\phi$	Dissipation visqueuse	-
$\varphi$	Variable d'état, Flux de chaleur	-, N/m <sup>2</sup>
$\omega$	Dissipation spécifique	-

## **Introduction générale**

Depuis le commencement de la révolution industrielle au 19<sup>ème</sup> siècle, l'utilisation de l'énergie a pris de l'ampleur, l'homme à inventer les premières machines industrielles relevant du domaine agro-alimentaire et d'autres. Donc l'exploitation de nouvelles formes d'énergie est devenue primordiale pour assurer le niveau de vie actuel de l'humanité. Dans les années 60 on a constaté l'épuisement de certains gisements de matières premières surtout le charbon. L'homme a accéléré la cadence du développement et la demande pour les matières première est devenue intenable. Dans les années 80 s'est installé la pollution et la situation était catastrophique alors il était impératif de penser aux énergies renouvelables. En outre, le réchauffement climatique était un autre résultat de l'exploitation massive des hydrocarbures qui produisent de grandes quantités de gaz à effet de serre. Au 20<sup>ème</sup> siècle, des scientifiques ont indiqué une augmentation de 0.6°C de la température moyenne de la planète et selon un rapport réalisé par le GIEC (groupe intergouvernemental sur l'évolution du climat) en 2007, la température moyenne de la planète va augmenter de 1.8 à 4°C d'ici la fin du 21<sup>ème</sup> siècle. A cet effet et pour mieux préserver l'avenir de l'humanité, il est de rigueur de consommer rationnellement les énergies conventionnelles et de développer les énergies renouvelables qui sont inépuisables et propres.

Parmi les énergies renouvelables, nous citons l'énergie solaire, une énergie exploitée depuis les millénaires. Les techniques d'exploitation de cette ressource ont vu ces dernières années une mutation remarquable faisant intervenir une technologie de pointe, rendant ainsi les couts d'exploitation de plus en plus attractifs, notamment dans la production l'énergie thermique. En effet l'énergie thermique produit par voie solaire est une forme d'énergie très écologique sans émission de CO<sub>2</sub>. De ce fait substitution des charbons, gaz naturelle et autres réduisent sans aucun doute les effets désastreux des systèmes énergétiques classiques. Ce travail s'intéresse à l'étude du capteur thermique solaire plan à air. Les capteurs solaires plans à air dont la veine fluide au sein du capteur n'est équipée d'aucun type de promoteur de turbulence c'est les capteurs plans à air sans chicanes. Ce type de capteurs date depuis les premiers travaux initié dans ce domaine. Le rendement faible de ce type des capteurs à pousser les chercheurs à fouiner encore plus et mettre en place des systèmes plus performants afin d'améliorer les performances du capteur , d'où la naissance du deuxième type de capteur solaire plan à air munis de rugosité comme promoteurs de turbulence favorisant ainsi un meilleur transfert de chaleur entre l'absorbeur et fluide caloporteur (l'air).

Dans le chapitre 1, nous présentons une revue bibliographique des travaux disponibles dans la littérature qui traitent la perspective thermique et dynamique, en particulier, les modifications géométriques effectuées sur les capteurs solaires plans à air.

On a entamé dans le deuxième chapitre les différents types du transfert thermique que nous pouvons voir dans un écoulement et dans un canal, et Les différentes équations de conservation de quantité de mouvement.

## *Introduction générale*

---

Nous abordons dans le troisième chapitre la description de la modélisation numérique d'un écoulement d'air dans la veine d'air dynamique d'un capteur solaire à air, puis nous établirons les équations de bilan régissant l'écoulement et nous présenterons la méthode des éléments finis utilisée pour résoudre le système d'équations, et la méthode de génération du maillage nécessaire à la simulation numérique.

Le chapitre 4 est consacré à la présentation et l'interprétation des résultats obtenus. Les résultats ont permis de visualiser les contours de la vitesse, la température, la pression et la turbulence. Les profils sont tracés afin de mettre en évidence l'effet des rugosités sur le comportement dynamique et thermique de l'écoulement de l'air dans les régimes laminaire et turbulent.

# Chapitre I

Recherche bibliographique

## I.1 Introduction

Les capteurs solaires plans à air, qui sont l'objet de notre étude transforment l'énergie solaire incidente solaire en énergie thermique extraite par l'air en écoulement dans le capteur. Cette énergie est ensuite utilisée dans diverses applications, à savoir ; le chauffage, le séchage, etc.

L'étude du comportement thermique de notre capteur relativement aux configurations utilisées, est une étude parmi d'autres déjà élaborées dans divers laboratoires de recherche. L'objectif principal de cette étude est de mettre en évidence les paramètres de performances, à noter l'optimisation des échanges convectifs dans le conduit utile du capteur, et la modélisation de ces échanges en fonction de plusieurs variables, notamment les paramètres géométriques.

## I.2 Quelques travaux effectués sur les transferts thermiques

Faris Aissaoui et al. [1] ont fait une étude expérimentale à l'aide de thermocouples pour mesurer les distributions de température sur les composants d'un capteur solaire plan. Les différentes températures mesurées de la plaque absorbante, du débit d'air et de la plaque inférieure sont utilisées pour déterminer les coefficients locaux de transfert de chaleur par convection. Deuxièmement, le problème est traité numériquement par un code FORTRAN développé pour calculer pour différentes intensités de rayonnement solaire, les variations de température dans chaque composant de capteur solaire. Les résultats ont montré que les valeurs expérimentales sont presque égales aux valeurs numériques.



*Figure I.1* Photo de l'équipement expérimental.

K.Aliane, M.Henaoui. [2] ont étudié l'influence des chicane rectangulaires minces perforées sur le comportement thermique d'un capteur solaire plan à air, par une simulation numérique avec le logiciel FLUENT, de l'écoulement de l'air dans la conduite d'un capteur muni de chicanes rectangulaires perforées. La résolution numérique du problème étudié utilise la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations gouvernantes. La modélisation de la turbulence est basée sur le modèle de turbulence k- $\epsilon$ . Il y est conclu que la présence de

chicanes perforées dans la veine du fluide caloporteur a permis une distribution adéquat de celui-ci et un chauffage plus important par rapport aux chicanes simples.

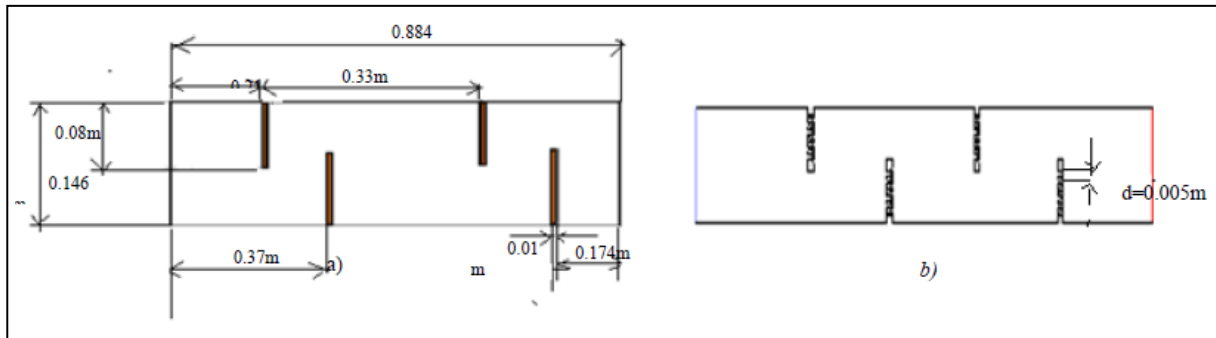


Figure I.2 Les géométries étudiées.

R.Khama, F.Aissani, R.Alkama. [3] ont fait une étude expérimentale menée sur un capteur plan à air intégré à un séchoir solaire de type indirect destiné au séchage des produits agroalimentaires sous les conditions météorologiques d'Ouargla au sud-est de l'Algérie. Le but essentiel des expériences réalisées est de comparer le mode passif (ventilation naturelle) au mode actif (ventilation forcé) du capteur en question.

Les conclusions principales de cette étude expérimentale comparative peuvent être résumées comme suit :

- L'augmentation du rayonnement solaire a plus d'influence sur les températures du capteur solaire en ventilation naturelle (mode passif) qu'en ventilation forcée (mode actif).
- En ventilation naturelle, les valeurs du rendement thermique du capteur solaire varient entre 26.61 et 46.32% avec une moyenne de 32.32%, alors qu'en ventilation forcée, elles varient entre 33.45 et 66.56% avec une moyenne de 51.33%.
- Le rendement du capteur solaire augmente linéairement avec l'augmentation du rayonnement solaire ( $400 \leq I \leq 800 \text{ W/m}^2$ ) pour des vitesses de l'air fixées entre 1 et 1.40 m/s, mais l'effet de la vitesse de l'air sur l'efficacité du capteur solaire est négligeable pour un rayonnement solaire voisin de 800 W/m<sup>2</sup>.

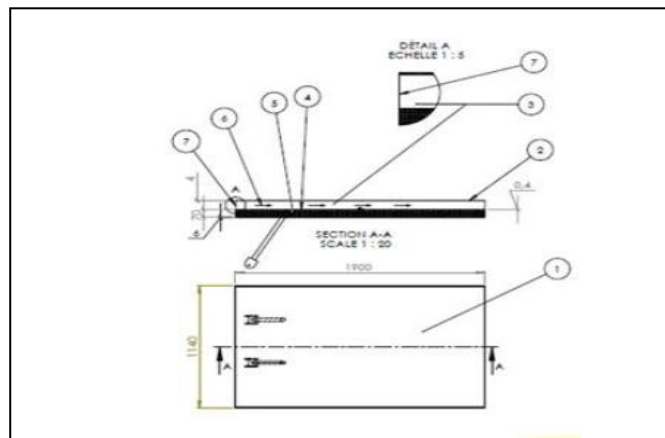


Figure I.3 Emplacement des éléments de mesure au niveau du capteur solaire.



M.Zedairia et al. [4] ont étudié l'amélioration des performances thermique d'une gamme des capteurs solaires plans à air (simple passe). Une investigation numérique a été réalisée pour mettre en évidence l'impact des paramètres géométriques tels que, la hauteur du canal, La distance entre le verre et l'absorbeur, la longueur et largeur du capteur, et l'épaisseur de l'isolant sur les performances thermiques des capteurs solaires plans à air, par un programme de calcul informatique sous l'environnement MATLAB.

Les principaux points et les remarques obtenus sont :

La longueur du capteur comprise entre 1,5 et 1,8 m et la largeur entre 0,8 et 1m, par contre la distance entre l'absorbeur et la vitre ces environs de 3 cm, la hauteur de canal serait de 3.5 cm, et une épaisseur d'isolation comprise entre 5 et 6 cm.

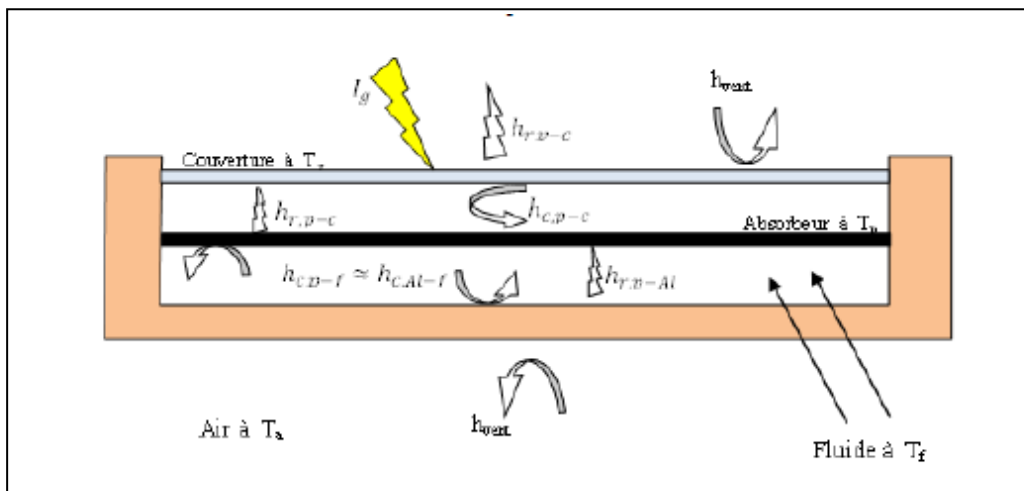


Figure 1.4 Schématisation des flux convectifs et radiative dans un capteur solaire couvert.

M. Sandali, A.N. Korti. [5] ont fait une étude sur les effets de la variation du rayonnement solaire et du débit massique, et de l'addition du milieu poreux sur le rendement thermique du capteur solaire. Une comparaison entre deux capteurs solaires à air à double passe l'un avec milieu poreux et l'autre sans milieu poreux a été développée. Les résultats obtenus montrent l'influence de l'addition du milieu poreux, du débit massique et du rayonnement solaire sur les performances thermiques du capteur solaire.

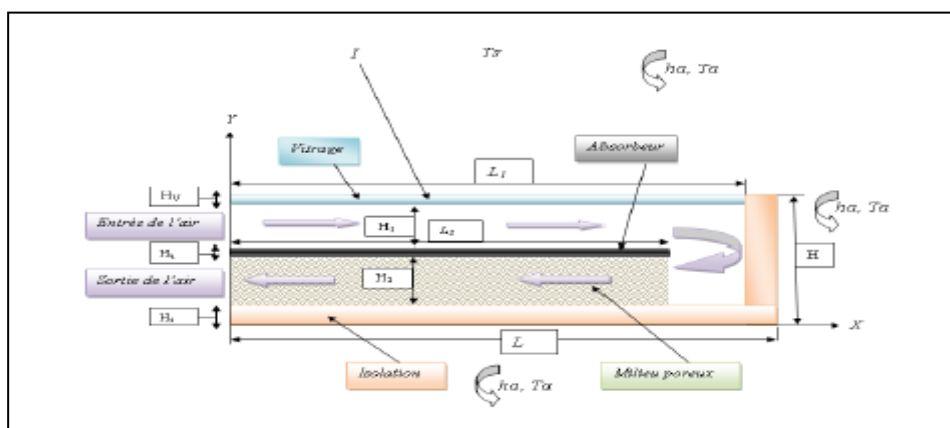
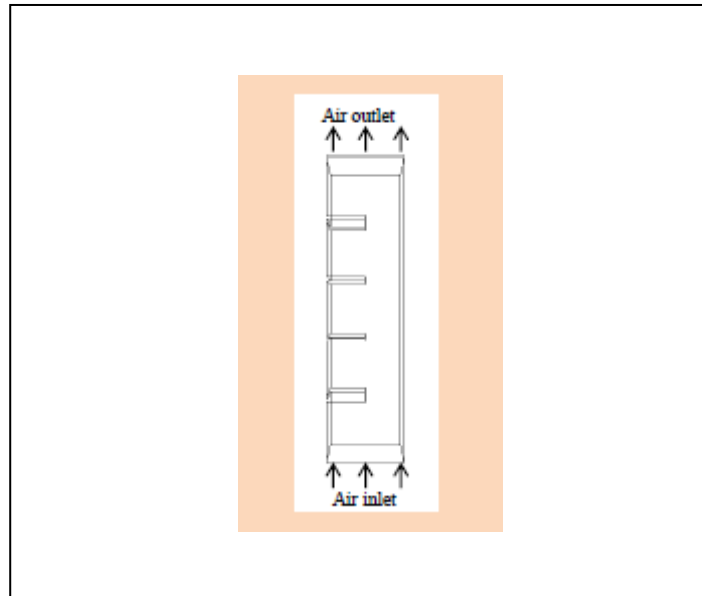


Figure 1.5 Schéma du capteur solaire à double passe avec milieu poreux.

A.Moumeni, B.Bouhekima. [6] ont étudié un capteur vertical muni de chicanes afin d'obtenir les profils des différents paramètres : pression, vitesse, turbulence et température.

La technique de simulation CFD, basée sur la méthode des volumes finis, a été mise en œuvre avec l'algorithme SIMPLE et le modèle de turbulence standard ( $k - \epsilon$ ). L'utilisation des chicanes dans un capteur solaire à air vertical nous permet de créer d'une part la turbulence et faire augmenter la surface de transfert d'autre part. Ils ont remarqué que e la turbulence existe mais avec des zones mortes donc ils ont proposé l'utilisation des chicanes croisées.



*Figure I.6* Capteur solaire à air vertical.

A.N.C.Noël, D.Noël, A.Zaatri. [7] ont fait la modélisation et l'étude comparative des capteurs solaires plans et à tubes dans les régions soudano sahéliennes du Cameroun. Dans un premier temps, une modélisation complète des capteurs solaires est effectuée, ensuite, des simulations sur TRNSYS sont réalisées en utilisant les conditions climatiques (rayonnement solaire, ensoleillement et température) de ces régions.

Pour chaque simulation, en fonction de la surface du capteur, de l'ensoleillement et de la température des mois d'Avril et Août 2012 de des régions soudano-sahéliennes du Cameroun, et ils ont calculé l'énergie gagnée par le capteur ainsi que l'énergie fournie par le chauffage auxiliaire. Ce qui a permis d'évaluer le rendement du capteur correspondant à cette surface pour les deux technologies à savoir, pour le capteur plan et pour le capteur à tube sous vide à l'aide des TYPE 71 et TYPE538 du logiciel TRNSYS.

Les résultats obtenus montrent que, les capteurs à tubes sous vide offrent des meilleurs rendements par rapport aux capteurs plans, avec des valeurs comprises entre 79% et 81 % contre 61,8 % et 62,93 % pour les capteurs solaires plans.

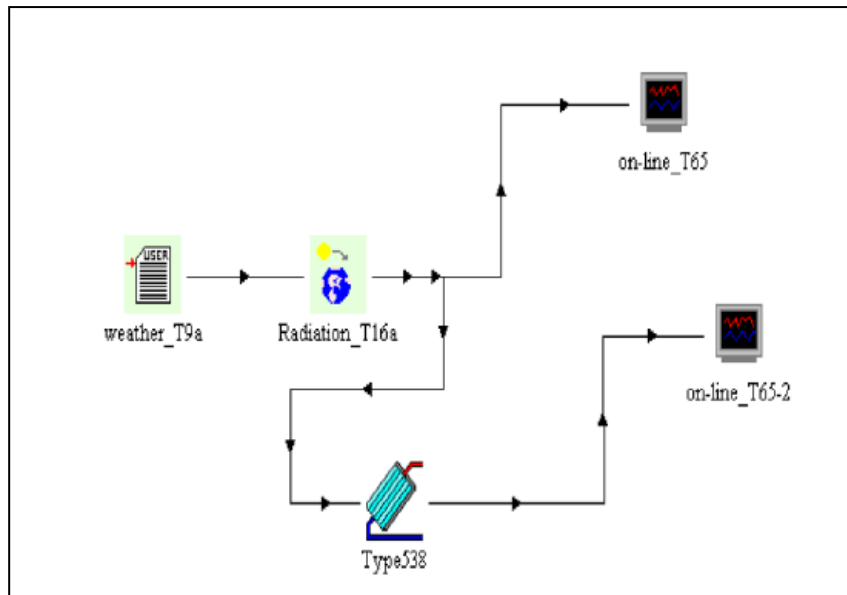


Figure I.7 Modèle d'un capteur à tube sous vide simulé sur TRNSYS 15.

S.Kherris et al. [8] ont fait une étude et une caractérisation d'un capteur solaire plan destiné aux applications à basse température. Une modélisation mathématique du système en question basée sur le modèle de PERRIN Brichambaut pour la détermination de l'éclairement solaire journalier ainsi qu'un programme sous l'environnement Matlab ont été élaborés pour étudier les transferts convectifs entre l'absorbeur et l'isolant afin d'optimiser l'épaisseur de l'isolant permettent d'augmenter le rendement du capteur. Les résultats obtenus mettent en évidence l'influence de l'épaisseur de l'isolant sur la conductance globale et par conséquent sur le rendement instantané aussi. Il apparaît clairement que le rendement instantané du capteur solaire est une fonction proportionnelle à la conductance globale solaire et l'épaisseur de l'isolant. En revanche, les résultats obtenus montrent qu'au-delà d'une certaine température de fonctionnement du capteur solaire plan, son rendement instantané diminue si la puissance absorbée par cet appareil augmente, ceci peut être expliqué par le fait que l'écart de température entre l'absorbeur et l'air ambiant et les pertes thermiques vers le milieu extérieur vont augmenter.

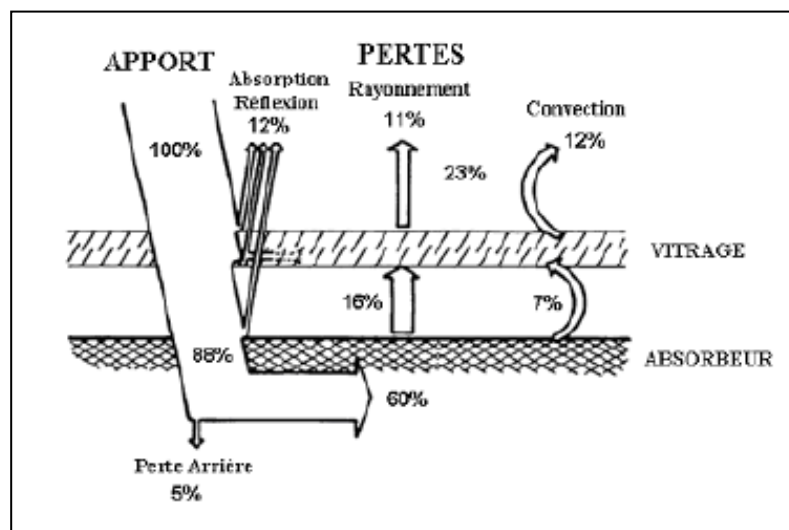


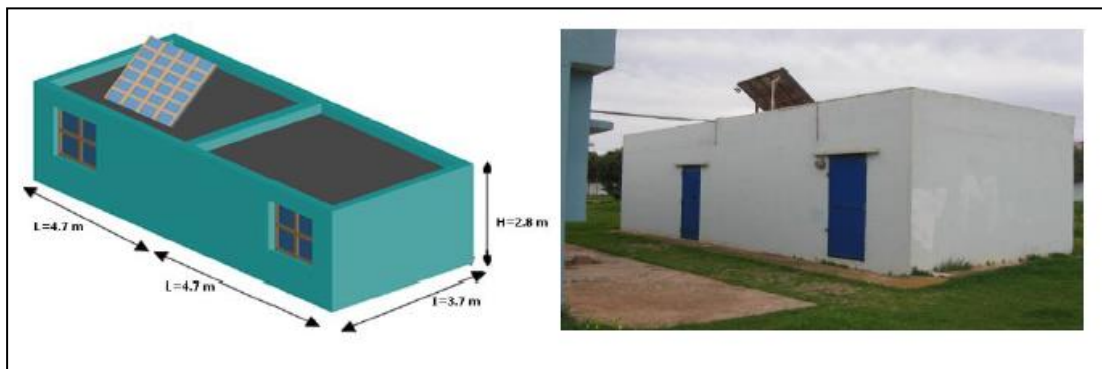
Figure I.8 Bilan thermique d'un capteur solaire plan.

S. Haddad, K. Touafek, M. Mordjaoui, H. Bougarouche. [9] ont fait une étude expérimentale, qui a été réalisée à l'Unité de Recherche Appliquée aux Energies Renouvelables de Ghardaïa. Sur un nouveau capteur un nouveau capteur solaire air eau. Ce nouveau capteur solaire peut être utilisé pour le chauffage de l'eau et de l'espace d'un habitat. Ils ont entamé des mesures de température, et de rayonnement dans une période de temps, ces mesures les a permettent de relever les caractéristiques thermiques de leur capteur. Les résultats montrent que ce type de capteur hybride est une bonne alternative aux capteurs thermiques à eau et aux capteurs solaire pour le chauffage d'air installés séparément.



*Figure I.9* Capteur thermique hybride (chauffe-eau/air).

M. H. Benzaama, M. Lachi, A. Mokhtari, C. Maalouf. [10] ont étudié l'efficacité énergétique d'un système solaire actif (PSD) couplé à une cellule expérimentale implantée dans la région d'Oran (Algérie). Le système est composé d'un capteur solaire plan, un circuit hydraulique en deux boucles noyé dans la dalle, et d'un module de transfert hydraulique. La métrologie mise en place a permis de suivre l'évolution de la température à plusieurs niveaux du système ( $T^\circ$  du capteur solaire,  $T^\circ$  dalle,  $T^\circ$  de l'air intérieur et extérieur). Les mesures in situ réalisées ont été effectuées durant une période de 08 jours. Sur l'environnement TRNSYS.16, ils ont établi un modèle d'un plancher solaire direct. Les résultats montrent que l'utilisation de la technique d'un plancher solaire direct dans un climat Algérien est très prometteuse au vu de l'importance du gisement solaire dans cette région ceci confirme l'utilité d'avoir recours à ce type de chauffage qui s'avère très rentable et non polluant.



*Figure I.10* Cellule expérimentale.

S. Youcef-Ali, J. Y. Desmons, E. H. Mezaache, M. Daguinet. [11] ont examiné les variations le coefficient d'efficacité « Ef » que nous définissons par la masse à sécher par unité de temps dans le cas d'une production permanente et continue en fonction des paramètres sur lesquels nous pouvons agir.

Ils ont évoqué brièvement le modèle théorique élaboré qui régit le code de calcul permettant de simuler le comportement de la chaîne énergétique capteur-séchoir fonctionnant en convection forcée. Ce code a déjà été validé par un grand nombre de manipulations expérimentales. Cette validation a permis de tester, dans les limites de validité du code de calcul, les possibilités de la chaîne étudiée et de dégager certains principes permettant d'en tirer le maximum de production. A flux fixé, le coefficient d'efficacité croît avec le débit d'air, mais tend vers une limite d'autant plus élevée que la masse introduite au départ est importante.

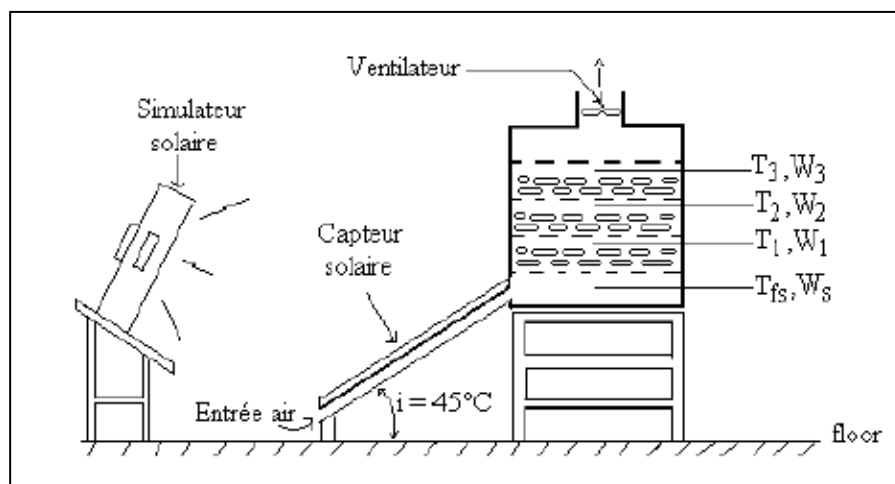


Figure I.11 Schéma du dispositif expérimental utilisé.

A. Youcef. [12] a fait une étude numérique du comportement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'air dans un canal rectangulaire munie des chicanes sous forme aile. L'effet de l'insertion des chicanes a été analysé. Les équations de Navier-Stokes et de l'énergie, sont résolues par la méthode des volumes finis à l'aide de l'utilisation de l'algorithme Simple. Les contours de température et de vitesse ont été obtenus pour différents cas traités. L'étude a montré que, une augmentation de la vitesse près des chicanes générée tout d'abord par la présence des zones de recirculation qui accompagnent par un changement brusque du sens d'écoulement.

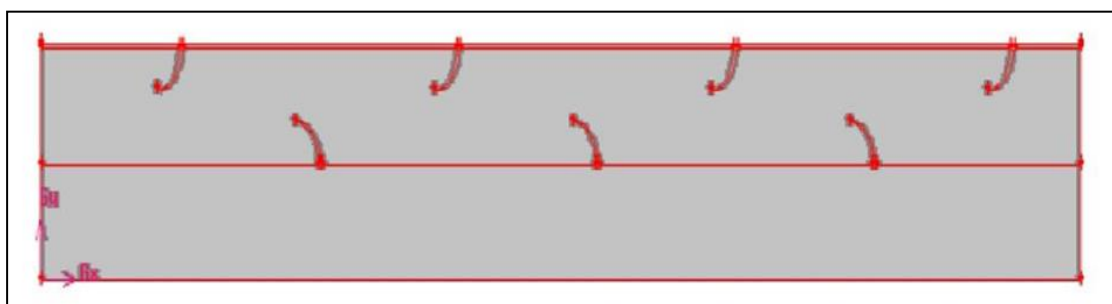


Figure I.12 Géométrie du problème.

S.Chouicha et al. [13] ont fait une étude expérimentale du séchage de la fève par un séchoir solaire indirect à convection forcée. Cette étude a été menée dans le but d'augmenter l'apport supplémentaire de l'énergie par l'utilisation d'un échangeur de chaleur alimenté par un simulateur de l'eau géothermique à  $T=50^{\circ}\text{C}$ .

L'application de l'échangeur de chaleur comme source d'énergie a permis de réaliser une opération de séchage en continue. L'objectif principal de ce travail étant l'étude du séchage solaire de la fève jusqu'à atteindre la teneur en eau finale de sa conservation par l'application de deux modes de séchage, le premier utilise l'énergie solaire provenant du capteur plan à air en régime variable et le deuxième mode utilise le séchage solaire en continue par couplage entre la source solaire et un échangeur de chaleur utilisé comme appoint énergétique.

Le calcul de l'efficacité énergétique du capteur et du séchoir a été fait pour analyser le fonctionnement du système par les deux modes de séchage proposés. Les résultats expérimentaux montrent que:

-Pour Le système de séchage solaire en régime variable, utilisant le capteur solaire comme source d'énergie, la durée de traitement était de 26 h tandis que l'application avec couplage énergie solaire/échangeur de chaleur a permis d'écourter la durée à 7h45mn.

-Le rendement du capteur solaire plan dans l'application étudiée varie entre 0.182 et 0.458, pour quatre de séchage en discontinu. L'efficacité énergétique du système hybride est de 52%.

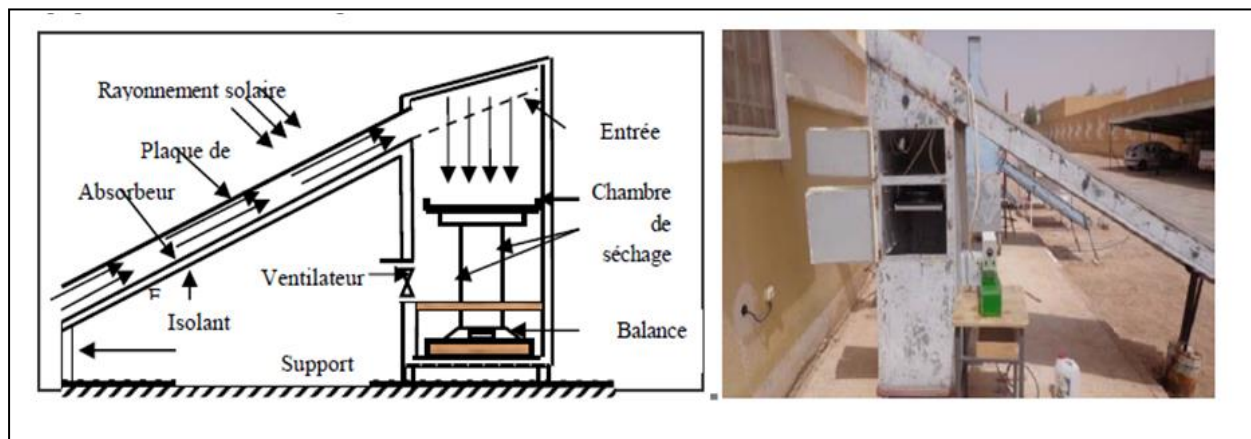


Figure I.13 Schéma descriptif du système de séchage.

B.Guendouz, C.Seladji, M.Bechouat. [14] Une investigation numérique est entamé afin d'optimisé l'énergie consommée dans le domaine de climatisation dans un bâtiment. Une température de confort comprise entre 20 et 26 °C est assurée par une installation hybride, au l'énergie fournie pour ce but a deux sources différentes.

La première source d'énergie est fournie par un capteur solaire à vide. Et la deuxième source assure le déficit entre l'énergie totale consommé et l'énergie solaire. Le bâtiment ayant une superficie de 11,5 X 6 m<sup>2</sup> situé à Tlemcen est modélisé sous TRNBuild afin d'estimé les besoins en chauffage et en rafraîchissement durant l'année d'étude.

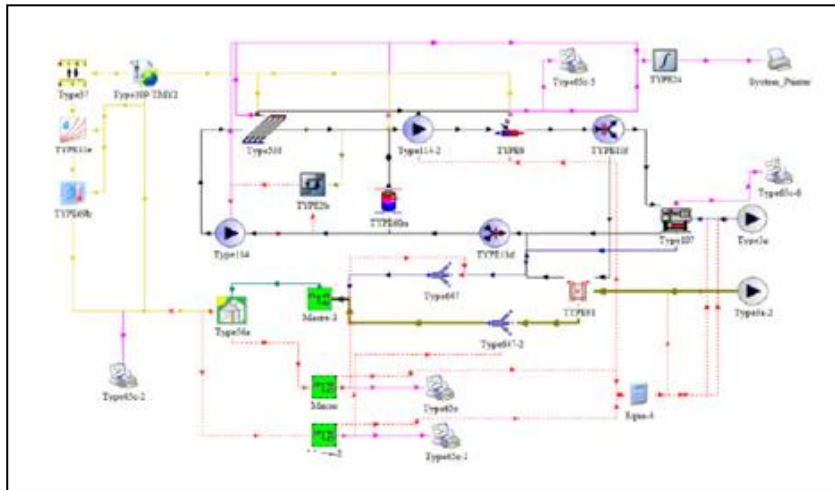


Figure I.14 Configuration de l'installation de climatisation solaire sous TRNSYS.

A. Youcef, R. Saim. [15] ont fait une étude numérique de la convection forcée d'un écoulement d'air à l'intérieur d'un capteur solaire avec un flux de chaleur uniforme sur la surface externe de l'absorber. Le fluide est considéré laminaire, Newtonien, incompressible avec des propriétés constantes. Les équations gouvernantes, ont été intégrées et discrétisées selon l'approche des volumes finis. La procédure Simple a été utilisée pour la résolution du système d'équations algébriques fortement couplées (température- vitesse et gradient axial de pression- vitesse). Pour une meilleure disposition des ailettes sur la plaque absorbante, les profils de vitesse axiale, les champs de vitesse et de température sont présentés pour un cas d'exemple type pour la ville de Tlemcen (Algérie). Cette étude a montré que l'usage des chicane dans la veine dynamique d'un capteur solaire plan demeure un moyen efficace pour l'amélioration de ses performances. L'ensemble des résultats présentés montre bien la nette amélioration apportée par l'utilisation des obstacles.

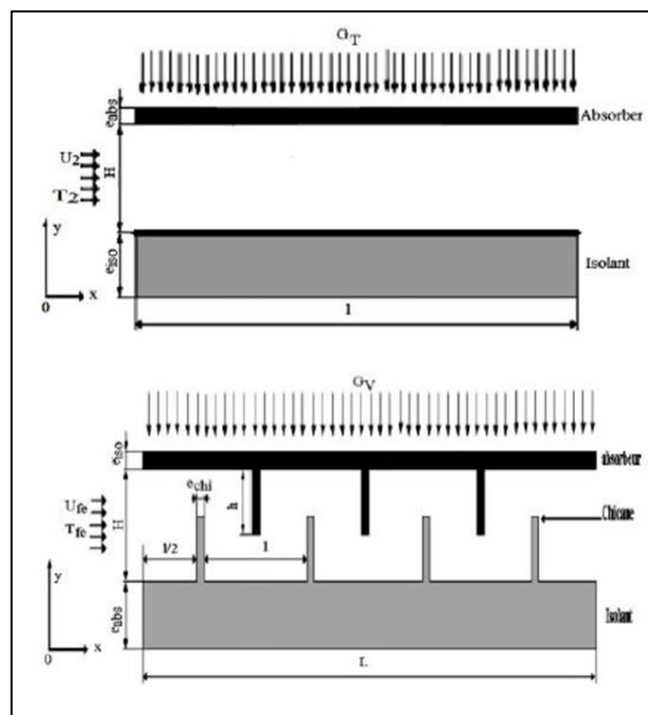
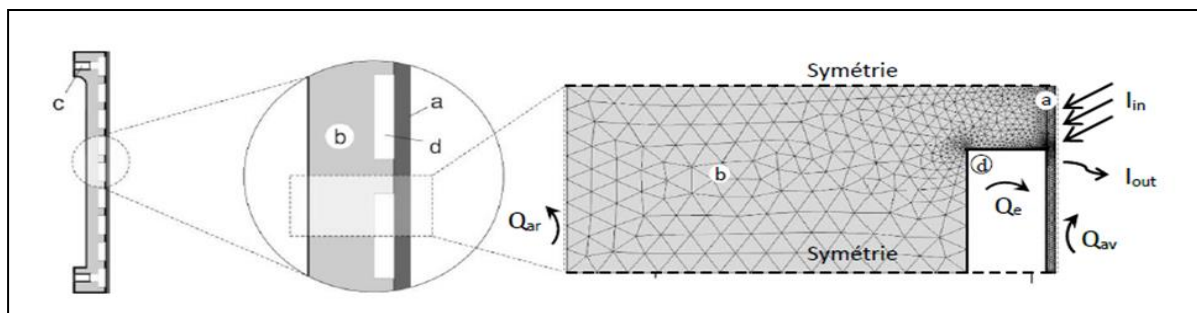


Figure I.15 : Géométrie du problème.



P.Bonnamy, S.Raji, J.Lopez, R.Garay. [16] Cette étude porte sur la modélisation et l'étude expérimentale de capteurs solaires développés et fabriqués par INEF4 dans le cadre du projet BATISOL. Ces capteurs sont modulaires, opaques, basse température, Low-Cost, et totalement intégrés en façade derrière une solution de bardage métallique. Dans une première partie est présenté le modèle de simulation thermique du capteur. Il s'agit d'un modèle pseudo 3D par éléments finis développé sous COMSOL Multiphysics. Un calcul sur une coupe 2D du capteur est répété  $n$  fois selon la direction du fluide afin de déterminer les variables d'état tout au long du capteur. Dans une deuxième partie est présenté le dispositif expérimental, les prototypes réalisés ainsi que les résultats des tests expérimentaux. La comparaison entre ces deux approches permet de valider l'utilisation d'un modèle pseudo 3D pour la simulation thermique des capteurs BATISOL. Les résultats expérimentaux ont permis de valider les résultats de simulation et des modèles numériques.



**Figure 1.16** Schéma d'une coupe du capteur BATISOL et maquette numérique 2D réalisée sous COMSOL Multiphysics.

### I.3 Conclusion

À travers cette étude bibliographique, il ressort que les capteurs solaires plans continuent de susciter un intérêt tout aussi important sur le plan fondamental et appliqué du domaine de la transformation de l'énergie solaire vers l'énergie thermique. Il s'agit maintenant d'approfondir l'analyse numérique et théorique permettant d'aborder la question du comportement thermique et dynamique de l'écoulement d'air sur de nouvelles bases, en utilisant l'effet des chicanes.



# Chapitre II

Généralités sur les capteurs solaires &  
transfert thermique

## II.1 Introduction

En raison de l'insuffisance de l'échange thermique réalisée dans le capteur solaire plan à air entre le fluide et l'absorbeur il est intéressant à apporter des améliorations pour de meilleures performances ou une meilleure efficacité thermique.

Le rendement d'un capteur solaire, conçu pour convertir l'énergie solaire en énergie thermique dépend de sa forme, de la technique choisie et de la façon dont on réduit les pertes de chaleur à la surface de celui-ci. Les capteurs solaires à air sont importants dans les applications nécessitant des températures basses et modérées, telles que le chauffage des locaux, et le séchage qui est une opération souvent nécessaire dans de nombreux processus (agro-alimentaire, matériaux de construction, bois...).

## II.2 Transferts de chaleur dans un écoulement dans un canal [17]

Le transfert de chaleur entre un canal chauffé uniformément et un fluide caloporteur qui s'écoule à l'intérieur provoque l'apparition de différents régimes d'échange. La courbe de Nukiyama (1934) ou courbe d'ébullition indique l'évolution de ces régimes en fonction du chauffage du canal.

Le premier mode d'échange est la convection forcée où le fluide pressurisé reste à l'état monophasique liquide. Lorsque le chauffage du canal devient suffisamment important, des bulles de vapeur se forment à la paroi du tube et le processus d'échange s'appelle l'ébullition.

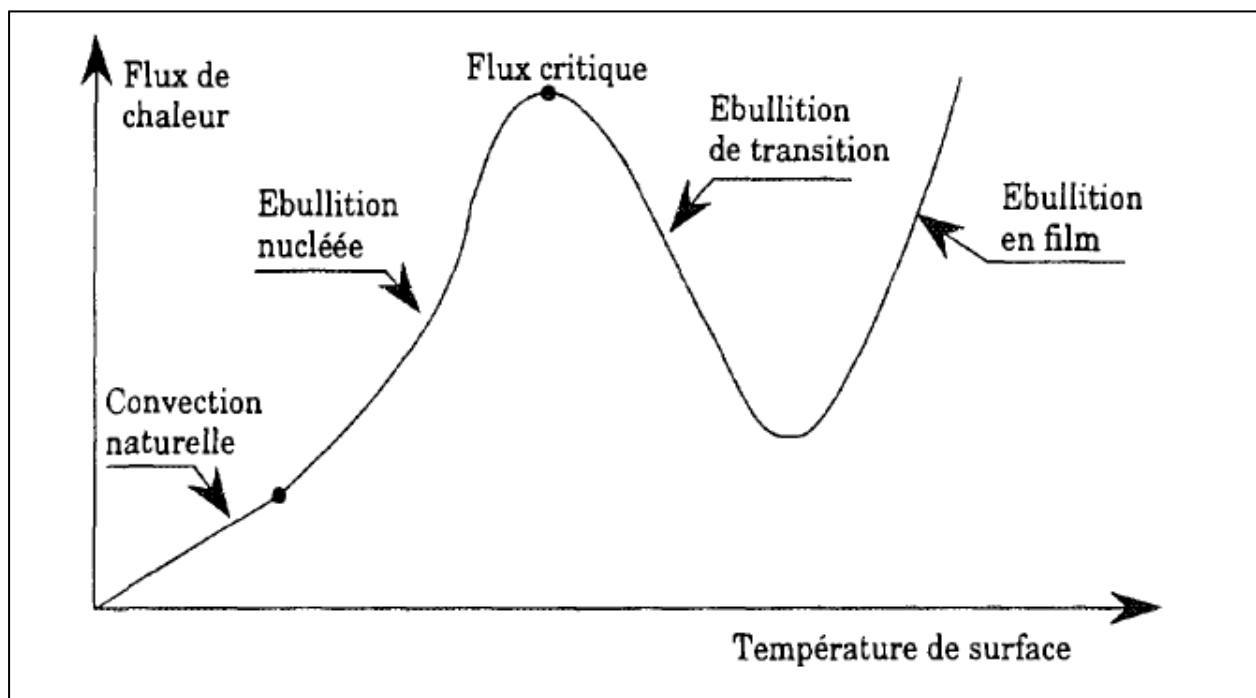


Figure II.1 Courbe d'ébullition ou courbe de Nukiyama (1934).

La convection forcée consiste dans le transfert de chaleur entre une paroi et un fluide mis en mouvement par une cause indépendante des différences de température, généralement

par des différences de pression. En écoulement turbulent, on distingue plusieurs régions caractérisées par des mécanismes d'échange différents :

- la sous-couche visqueuse, de faible épaisseur, qui est au contact de la paroi
- la zone turbulente de paroi régie par des conditions pariétales
- la zone turbulente externe qui, pour une conduite, est centrale.

Entre la paroi et la sous-couche visqueuse l'échange de chaleur s'effectue uniquement par diffusion moléculaire. Les particules fluides des zones turbulentes viennent statistiquement au voisinage de la sous-couche visqueuse, s'échauffent et se déplacent vers l'extérieur où elles se mélangent avec du fluide plus froid. C'est la diffusion turbulente qui domine. Pour un écoulement turbulent, le transfert de chaleur en convection forcée peut être décrit par une expression reliant le nombre de Nusselt  $Nu$  à d'autres nombres sans dimension, nombre de Reynolds  $Re$  ou nombre de Prandtl  $Pr$ . Le nombre de Nusselt exprime pour un même écart de température le rapport de la quantité de chaleur échangée par convection à une quantité de chaleur échangée par conduction. Le nombre de Reynolds exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité qui s'exercent par unité de volume du fluide. Le nombre de Prandtl exprime le rapport de la viscosité cinématique à la diffusivité thermique. Les relations généralement utilisées en convection forcée sont rassemblées dans le tableau II.2.

Corrélation	Expression	Domaine de validité
Colburn (1933) (I.1)	$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{1/3}$	$0,7 < Pr < 160 ; Re > 10^4 ; L/D > 60$
Dittus-Boelter (1930) (I.2)	$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n$ Si $T_p > T_m : n = 0,4$ Si $T_p < T_m : n = 0,3$	$0,7 < Pr < 160 ; Re > 10^4 ; L/D > 60$
Sieder & Tate (1936) (I.3)	$Nu = 0,027 Re^{0,8} Pr^{1/3} (\mu_L/\mu_p)^{0,14}$	$0,7 < Pr < 160 ; Re > 10^4 ; L/D > 60$
Pethukov (1970) (I.4)	$Nu = \frac{Re Pr}{X} \frac{f}{2} \left( \frac{\mu_L}{\mu_p} \right)^n$ $X = 1,07 + 12,7 (Pr^{2/3} - 1) (f/2)^{1/2}$ $1/\sqrt{f} = 4 \log_{10} (2 Re \sqrt{f}) - 1,6$ Si $T_p > T_m : n = 0,11$ Si $T_p < T_m : n = 0,25$	$0,5 < Pr < 200$ ( 5% d'erreur) $0,5 < Pr < 2000$ (10% d'erreur) $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6$

Tableau II.1 Ensemble des corrélations exprimant le transfert de chaleur en convection forcée.

### II.2.1 Transfert de chaleur par conduction [18]

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres. La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\varphi = -\lambda S \text{ grad } (T) \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Ou sous forme algébrique :} \quad \varphi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$\varphi$	Flux de chaleur transmis par conduction	(W)
$\lambda$	Conductivité thermique du milieu	(W m <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> )
$x$	Variable d'espace dans la direction du flux	(m)
$S$	Aire de la section de passage du flux de chaleur	(m <sup>2</sup> )

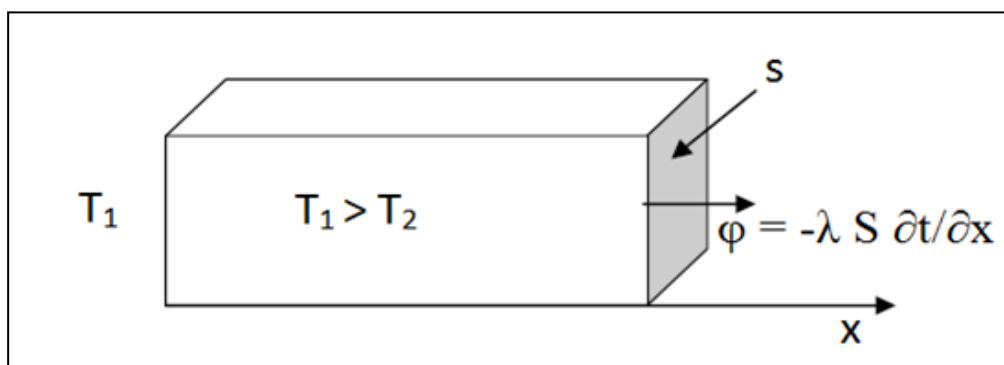


Figure II.2 Schéma du transfert de chaleur conductif.

Matériau	$\lambda$ (W.m <sup>-1</sup> . °C <sup>-1</sup> )	Matériau	$\lambda$ (W.m <sup>-1</sup> . °C <sup>-1</sup> )
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Brique terre cuite	1,1	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Verre	1,0	Polystyrène extrudé	0,028
Eau	0,60	Air	0,026

Tableau II.2 Conductivité thermique de certains matériaux.

La loi fondamentale de la transmission de la chaleur par conduction, a été proposée par le mathématicien et physicien Français, Jean Baptiste Joseph Fourier en 1822.

### II.2.2 Transfert de chaleur par Convection [18]

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$\varphi = h s (T_p - T_\infty)$$

$\varphi$	Flux de chaleur transmis par convection	(W)
$h$	Coefficient de transfert de chaleur par convection	(W m <sup>-2</sup> °C <sup>-1</sup> )
$T_p$	Température de surface du solide	(°C)
$T_\infty$	Température du fluide loin de la surface du solide	(°C)
$S$	Aire de la surface de contact solide/fluide	(m <sup>2</sup> )

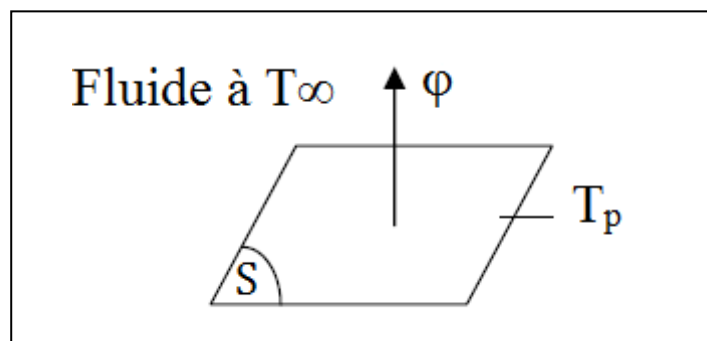


Figure II.3 Schéma du transfert de chaleur convectif.

### II.2.3 Transfert de chaleur par rayonnement [18]

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :

$$\varphi = \sigma \varepsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (\text{II.3})$$

Avec :

$\varphi$	Flux de chaleur transmis par rayonnement	(W)
$S$	Constante de Stefan	(5,67.10 <sup>-8</sup> W m <sup>-2</sup> K <sup>-4</sup> )
$\varepsilon_p$	Facteur d'émission de la surface	
$T_p$	Température de la surface (K)	
$T_\infty$	Température du milieu environnant la surface (K)	

S Aire de la surface (m<sup>2</sup>)

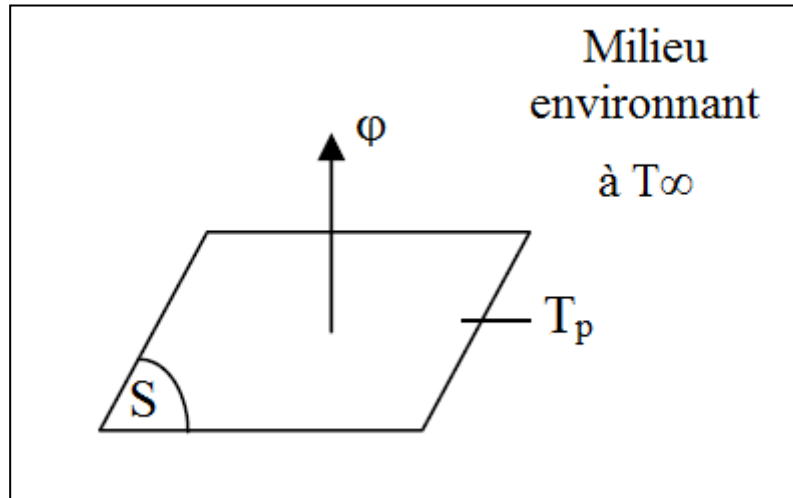


Figure II.4 Schéma du transfert de chaleur radiatif.

### II.3 Equations de conservation de quantité de mouvement [19]

Pour une variable générale ( $\varphi$ ), la forme conservatrice pour toutes les équations de transport de l'écoulement peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\varphi V) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\varphi) + S_\varphi \quad (\text{II.4})$$

Cette équation est utilisée comme base à toutes les méthodes de CFD en particulier, la méthode des volumes finis, où l'étape clé dans cette méthode consiste à intégrer l'équation sur un volume de contrôle. Nous obtenons alors la forme suivante :

$$\int_{V_C} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dV + \int_{V_C} \text{div}(\rho\varphi V) dV = \int_{V_C} \text{div}(\Gamma \text{grad}\varphi) dV + \int_{V_C} S_\varphi dV \quad (\text{II.5})$$

En utilisant le théorème de la divergence de Gauss, l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\varphi dV + \oint_A \rho\varphi V dA = \int_A \Gamma \nabla\varphi dA + \int_V S_\varphi dV \quad (\text{II.6})$$

L'équation ci-dessus est l'équation de transport générale et peut être facilement convertie en équation de flux ou d'énergie par la variable générale ( $\varphi$ ) avec :

$\varphi = 1$ , ce qui donnera l'équation de la continuité

$\varphi = u$ , qui donnera l'équation de la quantité de mouvement suivant l'axe x

$\varphi = v$ , qui donnera l'équation de la quantité de mouvement suivant l'axe y

$\varphi = w$ , qui donnera l'équation de la quantité de mouvement suivant l'axe z

$\varphi = T$ , qui va donner l'équation de l'énergie.

En effet, en prenant les valeurs de  $(\Gamma)$  et en choisissant des valeurs adéquates pour le coefficient de diffusion ( $\phi$ ) et le terme source, nous obtenons la formulation mathématique régissant le mouvement d'un fluide.

Le phénomène de la convection forcée repose sur les équations qui lient les différents paramètres, à savoir : la vitesse, la pression et la température. Ces équations sont obtenues à partir de :

- La loi de conservation de masse (équation de continuité)
- La loi de conservation de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes)
- La loi de conservation d'énergie (équation d'énergie)

Ces équations sont données sous la forme générale suivante:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F} \quad (\text{II.8})$$

$$(\rho C_p)_f \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k_f \nabla T) + q'' + \mu \phi \quad (\text{II.9})$$

Où est la dissipation visqueuse,  $\vec{F}$  représente les forces volumiques et  $\vec{V}$  le vecteur de la vitesse en coordonnées bidimensionnelles ou tridimensionnelles.

L'équation de la continuité est déduite du premier principe de la conservation de masse. Elle s'exprime selon Versteeg et Malalasekera [20], sous forme tensorielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (\text{II.10})$$

(Où  $j = 1, 2, 3$  : indice de sommation)

L'air est considéré comme étant un fluide incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ), devient alors :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{II.11})$$

L'équation de la quantité de mouvement est déduite de la deuxième loi de la dynamique, qui stipule que la variation de la quantité de mouvement d'une particule fluide est égale à la somme des forces extérieures sur cette particule.

Elle s'écrit selon Versteeg et Malalasekera [20], sous forme tensorielle comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial (\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{II.12})$$

Où :

$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i)$  : Représente le taux de variation de la quantité de mouvement.

$\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j}$  : Représente le taux de transport de la quantité de mouvement suivant la direction (i), par mouvement du fluide.

$F_i$  : Représente les forces de volume suivant la direction (i).

$\frac{\partial P}{\partial x_i}$  : Représente les forces dues à la pression.

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$  : Représente les forces de viscosité.

L'équation n'est autre que les équations de Navier-Stokes, qui représentent la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide visqueux incompressible pour le régime transitoire.

#### II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle physique considéré et les équations qui régissent le phénomène de la convection forcée en régime turbulent et stationnaire à l'intérieur d'une conduite horizontale de section rectangulaire.

Ensuite, nous avons spécifié les différents modes de transfert de chaleur et on a présenté les équations de conservation de quantité de mouvement.



# Chapitre III

Modélisation de l'équation de transfert  
Thermique

### III.1 Introduction

L'objectif des méthodes numériques est de fournir une solution approchée de comportement réel des phénomènes physiques. La physique possède des caractères tridimensionnels, temporels et non linéaires c'est à dire très complexe. Le rôle du modélisateur est de simplifier suffisamment le problème tout en conservant l'originalité du phénomène physique étudié.

En mécanique des fluides, les écoulements que ce soit en régime laminaire ou turbulent, sont décrits par le système d'équation aux dérivées partielles (E.D.P). Ainsi, tous les phénomènes physiques sont régis par ce système formé par les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie qu'il convient de résoudre pour les caractéristiques du champ d'écoulement et du champ thermique. Parmi les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées dans les problèmes d'écoulement et de transfert de chaleur on peut citer :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des volumes finis.

### III.2 Les méthodes utilisées dans les échanges thermiques

En analyse numérique basée sur la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles.

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales.

Le choix de l'utilisation de telle méthode numérique va dépendre essentiellement du type et de la complexité : la nature de fluide, le comportement thermodynamique de milieu et le problème stationnaire et instationnaire.

### III.3 Modélisation de la turbulence

La turbulence est un phénomène présent de manière très facilement visible dans la pratique industrielle et dans les systèmes naturels. Un très grand nombre d'écoulements est en fait turbulent (circulation atmosphérique, aérodynamique externe et interne, hydrodynamique, cinétique chimique, physique des plasmas, génie nucléaire, ...). Les grandeurs physiques d'un écoulement turbulent (vitesse, pression, ...) ne sont pas directement accessibles. Ainsi, l'état turbulent n'est connu qu'à travers des grandeurs moyennes et fluctuantes dont on peut toujours extraire quelques propriétés essentielles [21].

Définir la turbulence ou un écoulement turbulent n'est pas chose facile, car pour être précis, il faut déjà connaître un certain nombre de notions que nous verrons ultérieurement. On peut dire en premier lieu que l'aspect désordonné semble être la caractéristique principale des écoulements turbulents. Pour caractériser ce désordre, on utilise la notion de corrélation,

où la turbulence apparaît comme une dé-corrélation spatio-temporelle du mouvement du fluide, ou encore comme un chaos spatio-temporel.

### III.3.1 Modèles à viscosité turbulente (Eddy Viscosity Turbulence Models).

Modèles à viscosité turbulente tels que la norme bien connue Le modèle k-ε est basé sur la contrainte de déformation linéaire isotrope relation proposée par Boussinesq (1897), qui suppose que les flux turbulents inconnus sont proportionnels au taux de déformation. [22]

$$\frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} = \frac{2}{3} \delta_{ij} - 2 \frac{v_t}{k} S_{ij} \quad (\text{III.1})$$

La relation contrainte-déformation linéaire de Boussinesq ne fait pas différences entre les contraintes normales et donc il échoue dans prédire la turbulence anisotrope dans des cas d'écoulement réels. Non linéaire modèles tentent de combler cette lacune en proposant des relations non linéaires entre les contraintes de Reynolds et le taux de déformation.

Les modèles de viscosité turbulente non linéaire sont dans une classe intermédiaire entre les modèles linéaires de viscosité turbulente et les modèles Reynolds complets de transport de contraintes (RSM). Les modèles non linéaires décrivent la contrainte de Reynolds explicitement dans une expression algébrique en termes de vitesse de déformation et de tenseurs de tourbillon. Tous les modèles non linéaires ont la même formulation contrainte-déformation de base dans la forme générale de (Ehrhard et Moussiopoulos 2000).

#### III.3.1.1 Concept de la viscosité turbulente (Eddy Viscosity)

On rend compte de l'augmentation de la friction par la turbulence en introduisant un autre terme de viscosité,  $\nu_T$  appelé viscosité turbulente.

Ce concept fut introduit par Boussinesq (1890) et est basé sur une analogie avec l'expression du tenseur des contraintes totales  $\sigma_{ij} = 2\rho\nu e_{ij} - p\delta_{ij}$  des fluides Newtoniens. On décompose le tenseur de Reynolds en un tenseur de trace nulle et un tenseur ayant la trace du tenseur de Reynolds. La partie isotrope est  $\rho \frac{1}{3} \tau_{mm} \delta_{ij}$  où  $\tau_{mm} = 2\rho k$  et  $k$  est l'énergie cinétique des fluctuations turbulentes.  $k = 1/2(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ . L'hypothèse de Boussinesq est donc d'écrire le tenseur de Reynolds comme :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\rho\nu_T \overline{e_{ij}} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = \rho\nu_T (\partial_i \overline{u}_j + \partial_j \overline{u}_i) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (\text{III.2})$$

La partie du tenseur ayant  $\nu_T$  en pré facteur est à trace nulle car la divergence de l'écoulement moyen est nulle. La déception pour ce modèle réside dans la constatation que la viscosité turbulente  $\nu_T$  n'est pas universelle, elle dépend non seulement de l'écoulement mais aussi de l'espace et éventuellement du temps si on considère des moyennes dépendantes du temps :  $\nu_T(\vec{r}, t)$ . Il en résulte donc qu'il faut faire un modèle pour  $\nu_T$ . [23]

En fait, ce qui est séduisant dans cette méthode c'est que la viscosité turbulente vient s'ajouter à la viscosité du fluide et l'équation de l'écoulement moyen retrouve une forme identique à l'équation de Navier Stokes donnée par :

$$D_t \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left( P + \frac{2}{3} \rho k \right) + \nu_{eff}(\vec{r}, t) \Delta \vec{U} \quad (\text{III.3})$$

### III.3.1.2 Modèle aux tensions de Reynolds (Reynolds Stress Turbulence Models)

En incompressible, les équations de transport des tensions de Reynolds, obtenues à partir des équations du mouvement, se mettent sous la forme suivante :

$$\frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} = P_{ij} - \Pi_{ij} + D_{ij} + D_{ij}^v \quad (\text{III.4})$$

Où :

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \quad (\text{Production})$$

$$\Pi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{Redistribution})$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \quad (\text{Dissipation})$$

$$D_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{p'}{\rho} (u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) \right) \quad (\text{Diffusion})$$

$$D_{ij}^v = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} \quad (\text{Diffusion moléculaire})$$

Les termes  $\varepsilon_{ij}$ ,  $D_{ij}$  et  $\Pi_{ij}$  nécessitent une fermeture. Une analyse dimensionnelle montre que tous ces termes sont de la dimension suivante :

$$\left[ \frac{u^{*2}}{\tau^*} \right] = \left[ \frac{u^{*3}}{l^*} \right] \quad (\text{III.5})$$

et donc que la fermeture des corrélations  $D_{ij}$ ,  $\Pi_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  est envisageable via la connaissance d'une échelle de temps  $\tau^*$  ou de longueur  $l^*$  caractéristique de la turbulence, l'échelle de vitesse étant donnée par le tenseur de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ . Le tenseur de dissipation  $\varepsilon_{ij}$ , sous l'hypothèse d'équilibre de la turbulence, est en effet relié aux grosses structures.

L'échelle de longueur caractéristique de la turbulence est calculée pour les modèles RSM via une équation de transport désignée par la suite par le terme d'équation d'échelle. La fermeture de cette équation de transport est donc un des points essentiels des modèles de turbulence en un point et c'est sur cette fermeture que nous nous sommes particulièrement concentré.

L'intérêt des modèles RSM par rapport aux modèles du premier ordre est qu'ils permettent de s'affranchir d'une relation locale entre les tensions de Reynolds et l'écoulement moyen. Ces modèles permettent donc de mieux prendre en compte les effets d'histoire ou encore d'anisotropie de la turbulence.

Des modèles d'ordre supérieur, basés sur la fermeture d'équations de transport d'ordre égal ou supérieur à trois, sont difficilement envisageables, d'une part par le manque de données expérimentales sur ce type de corrélations, et d'autre part par la lourdeur de la démarche engagée. Les modèles RSM constituent donc un bon intermédiaire entre les modèles à viscosité turbulente et les méthodes du type LES. [24]

### III.3.2 Le modèle k-ε

Ce sont les modèles à deux équations les plus utilisés, sous ces trois variantes : Standard, RNG et Realizable. Cependant, ces trois modèles ont les mêmes équations de transport pour (k) et (ε) avec quelques différences dans :

- La méthode de calcul de la viscosité turbulente.
- Le nombre de Prandtl turbulent, qui régit la diffusion turbulente de (k) et (ε).
- Les termes de génération et de destruction dans l'équation de (ε) :

Les équations de transport, les méthodes de calcul de la viscosité turbulente ainsi que les constantes du modèle sont présentées séparément pour chaque modèle. Par ailleurs, les caractéristiques essentiellement communes pour tous ces modèles, tiennent en considération la génération turbulente due au cisaillement de flottabilité, les effets de la compressibilité ainsi que la modélisation de transfert de chaleur et de masse [25].

#### III.3.2.1 Le modèle k-ε standard [26]

Le modèle k-ε standard de Launder et Spalding (1974) est basé sur la loi de comportement linéaire, cette version standard est le modèle le plus répandu, dans les codes industriels en particulier, est le modèle à 2 équations k-ε, basé sur le concept de la viscosité turbulente,  $\nu_t$ . Les termes des contraintes de Reynolds sont exprimés par la relation suivante (dans un écoulement incompressible) :

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\text{III.6})$$

L'énergie cinétique de turbulence k et son taux de dissipation sont déterminées respectivement par leurs propres équations de transports :

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + U_l \frac{\partial k}{\partial x_l} = \frac{\partial y}{\partial x_l} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right\} + P_k - \varepsilon \quad (\text{III.7})$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \text{ et } P_k = \nu_t \left( \frac{\partial U_m}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) \frac{\partial U_m}{\partial x_l} \quad (\text{III.9})$$

Il faut noter que celle de ε est identique à son équation pour le modèle RSM et que la variation de l'énergie cinétique de la turbulence est due aux effets des termes du second

membre : production d'énergie par action des gradients de vitesse moyenne sur la turbulence, transport par diffusion sous l'action des fluctuations de vitesse et de pression, diffusion visqueuse et enfin dissipation visqueuse. Les valeurs des constantes sont spécifiées dans le tableau ci-dessous. Ces constantes sont calées sur des situations d'écoulements simples et parfaitement maîtrisés du point de vue expérimental.

$\sigma_\varepsilon$  Et  $\sigma_k$  sont des constants empiriques représentant le nombre de Prandtl gouvernant la diffusion turbulente de  $\varepsilon$  et  $k$  respectivement, sont évalués pour faciliter la propagation de la turbulence à proximité d'une frontière libre.

$C_{\varepsilon 1}$  : est calculée à partir de la zone logarithmique d'une couche limite turbulente.

$C_{\varepsilon 2}$  : est déterminée grâce à un écoulement turbulent homogène et isotrope.

$C_\mu$  : est déduite d'une configuration de couche limite turbulente bidimensionnelle qui est supposée en équilibre énergétique entre la production de la turbulence et les effets de dissipation.

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

*Tableau III.1 Constantes du modèle k-ε standard.*

### III.3.2.2 Le modèle k-ε RNG [27]

Le modèle RNG, développé par le groupe de normalisation (Yakhot & Smith, 1992) consiste en une estimation au cours du calcul de la constante  $C_{\varepsilon 1}$ , remplacée dans l'équation de dissipation par  $C_{\varepsilon 1}''$  donnée par l'expression. Cette expression ajoute un terme fonction du taux de déformation  $\eta$  à l'équation du taux de dissipation le rendant ainsi moins diffusif

$$C_{\varepsilon 1}'' = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{p}{\eta_t}} \quad (\text{III.10})$$

Les constantes du modèle RNG ont pour valeur, Tableau 2.

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_\varepsilon$	$\eta_0$	$\beta$
0.085	1.42	1.62	0.7179	4.38	0.015

*Tableau III.2 Valeurs des constantes du modèle RNG k-ε*

La différence principale entre la version standard et RNG k-ε est dans l'équation du taux de la dissipation turbulente d'énergie. Dans les écoulements à taux de contraintes élevés, le modèle RNG prévoit une faible viscosité turbulente (c'est-à-dire un taux de dissipation  $\varepsilon$  élevé et une production de turbulence  $k$  faible) que le modèle standard. Bien que le modèle RNG k-ε a été découvert pour faire mieux que le modèle standard pour les écoulements avec une grande courbure des lignes de courant, et aussi non encore validé intensivement par les

chercheurs que le modèle  $k-\varepsilon$ . La version standard de  $k-\varepsilon$  et RNG  $k-\varepsilon$  est valide pour les écoulements turbulents loin des parois.

### III.3.2.3 Le modèle $k-\varepsilon$ réalisable [26]

Le dernier modèle de la famille  $k-\varepsilon$  diffère du modèle standard principalement par deux choses importantes :

- Une nouvelle formulation pour la viscosité turbulente.
- Une nouvelle équation pour le taux de dissipation  $\varepsilon$ .

Le terme « Réalisable » ou réalisable que le modèle satisfait certaines contraintes mathématiques sur les contraintes de Reynolds, logiques avec la physique des écoulements turbulents. Ainsi, ce modèle prédit avec plus de précision le taux de propagation des jets. Il procure aussi des performances supérieures dans les écoulements impliquant la rotation, les couches limites sous de forts gradients de pression adverses, la séparation et les recirculations.

Là aussi, la viscosité turbulente est calculée à partir de l'équation, sauf que  $C_\mu$  n'est plus constant. Il est fonction de la déformation moyenne, des taux de rotation, de la vitesse angulaire de la rotation du système et des champs de la turbulence ( $k$  et  $\varepsilon$ ).

Ce modèle paraît bien adapté aux jets circulaires, couches limites avec fort gradient de pression adverse, écoulements à forte courbure et écoulements tourbillonnaires.

### III.3.3 Le modèle $k-\omega$ SST [26]

Est nommé parce que la définition de la viscosité turbulente est modifiée pour tenir compte du transport de la principale contrainte de cisaillement turbulente. C'est cette fonctionnalité qui donne la SST  $k-\omega$  Modèle un avantage en termes de performance à la fois sur le modèle  $k-\varepsilon$  standard et le modèle  $k-\omega$  standard. D'autres modifications incluent l'addition d'un terme de diffusion croisée dans l'équation de  $\omega$  et une fonction de fusion pour s'assurer que les équations du modèle se comportent de manière appropriée dans les zones proches de la paroi et des zones lointaines.

Equation d'énergie cinétique turbulente  $k$  :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \widetilde{P}_k - \rho \beta^* k \omega \quad (\text{III.11})$$

Equation du taux de dissipation spécifique  $\omega$  :

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho \omega U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\alpha}{\mu_t} P_k - \rho \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \rho \frac{\sigma_{w2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (\text{III.12})$$

### III.4 Représentation du code de calcul [28]

La discrétisation des équations du chapitre précédent consiste à transformer ces équations différentielles en un ensemble d'équations algébriques en utilisant des

approximations de dérivées. Les méthodes utilisées au cours des résolutions numériques sont les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

### III.4.1 La méthode des éléments finis [29] [30]

La méthode des éléments finis est plus générale car elle est mieux adaptée aux géométries complexes et aux matériaux non linéaires. La méthode des éléments finis consiste à subdiviser le domaine d'étude en domaines élémentaires appelés éléments finis, et à exprimer l'inconnue sur chaque élément par les fonctions d'interpolation simples en fonction des valeurs de l'inconnue en chacun des sommets de cet élément. L'inconnue devra vérifier globalement les conditions de continuité à l'interface et au passage d'un milieu à un autre.

Pour des structures bidimensionnelles, les éléments de maillage sont souvent des triangles, tandis que dans les problèmes tridimensionnels, les éléments sont de forme tétraédrique ou prismatique. L'avantage de s'adapter aux géométries complexes et la prise en considération des non linéarités ont fait que la méthode des éléments finis soit très utilisée en électromagnétisme bien qu'elle soit quelque peu difficile à mettre en œuvre puisqu'elle requiert une grande capacité de mémoire et un temps de calcul important.

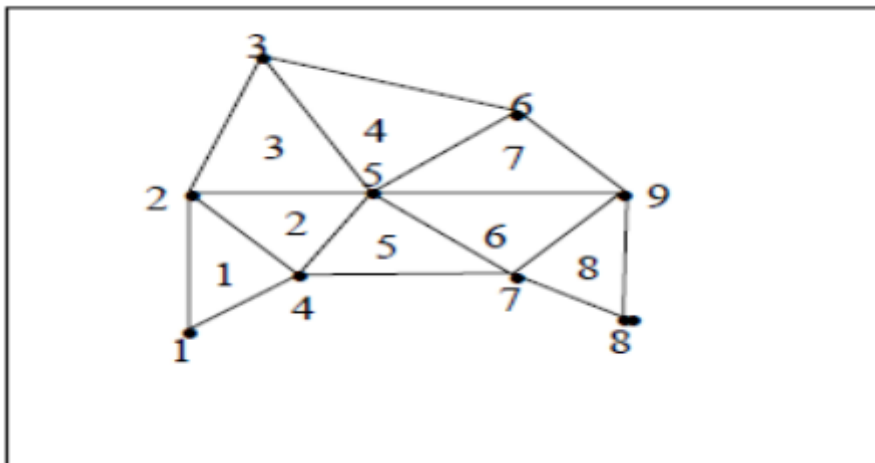


Figure III.1 Un domaine d'étude discrétisé en éléments finis

### III.4.2 Principe de la méthode des éléments finis [31] [32]

Considérons un domaine  $\Omega$  (typiquement une portion de l'espace) dont la frontière est notée  $\delta\Omega$  ou  $\Sigma$ . Nous cherchons à déterminer une fonction  $u$  définie sur  $\Omega$ , qui est une solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) pour des conditions aux limites données. L'EDP décrit le comportement physique du système, il s'agit par exemple des lois de l'élasticité pour un problème de résistance des matériaux ou des équations de Maxwell pour les problèmes d'électromagnétisme. Les conditions aux limites sont les contraintes s'exerçant sur le système. Par exemple, pour un problème de résistance des matériaux, on impose le déplacement de certaines parties du système, par exemple, on impose qu'une zone d'appui soit immobile, et on impose des efforts sur d'autres zones (poids, pression de contact...).



La méthode des éléments finis (MEF) permet de résoudre de manière discrète et approchée ce problème ; on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable.

La discrétisation consiste à « découper » le domaine  $\Omega$ , c'est-à-dire à chercher une solution du problème sur un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux ; il y a donc une redéfinition de la géométrie. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème. Dans la MEF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie). Le maillage du domaine permet d'en définir un pavage dont les pavés sont les éléments finis.

Sur chacun des éléments finis, il est possible de linéariser l'EDP, c'est-à-dire de remplacer l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations linéaires, par approximation. Ce système d'équations linéaires peut se décrire par une matrice ; il y a donc une matrice par élément fini. Cependant, les conditions aux frontières sont définies sur les frontières du système global et pas sur les frontières de chaque élément fini ; il est donc impossible de résoudre indépendamment chaque système. Les matrices sont donc réunies au sein d'une matrice globale. Le système d'équations linéaires global est résolu par l'ordinateur (des systèmes simples peuvent être résolus à la main et constituent en général des exercices d'apprentissage).

L'EDP est résolue aux nœuds du maillage, c'est-à-dire que la solution est calculée en des points donnés (résolution discrète) et non en chaque point du domaine  $\Omega$ . Cela nécessite de pouvoir interpoler, c'est-à-dire déterminer les valeurs en tout point à partir des valeurs connues en certains points. On utilise en général des fonctions polynomiales.

Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation dont le support est l'élément, et définies de manière à être interpolant).

Nous voyons ici poindre trois sources d'erreurs, c'est-à-dire d'écart entre la solution calculée et les valeurs réelles : la modélisation de la réalité : le domaine  $\Omega$  correspond en général à des pièces matérielles, le calcul se fonde sur des versions idéales (sans défaut) des pièces, de la matière et des conditions aux limites ; cette source d'erreur n'est pas spécifique à la méthode des éléments finis, et peut être prise en compte par la méthode contrainte-résistance ; la géométrie idéale et continue est remplacée par une géométrie discrète, et les valeurs sont interpolées entre des points ; plus les points sont espacés, plus la fonction d'interpolation risque de s'écarter de la réalité, mais à l'inverse, un maillage trop fin conduit à des temps de calculs extrêmement longs et nécessite des ressources informatiques (en particulier mémoire vive) importantes, il faut donc trouver un compromis entre coût du calcul et précision des résultats ; s'agissant de calculs numériques, il se produit inévitablement des erreurs d'arrondi, les nombres étant représentés par un nombre fini d'octets. Toute l'habileté de l'ingénieur consiste à maîtriser ces erreurs notamment : en simplifiant la géométrie (defeaturing), en enlevant des détails qui se situent loin des zones que l'on veut étudier et ayant une faible influence sur le résultat ; en choisissant des maillages adaptés, par exemple, des maillages de type poutre pour des pièces élancées, ou de type coque pour des pièces fines,

en découpant la pièce pour pouvoir faire des maillages réguliers sur certaines zones, en affinant le maillage dans les zones critiques... en ayant un regard critique sur le résultat.

Bien qu'il existe de nombreux logiciels exploitant cette méthode et permettant de « résoudre » des problèmes dans divers domaines, il est important que l'utilisateur ait une bonne idée de ce qu'il fait, notamment quant au choix du maillage et du type d'éléments qui doivent être adaptés au problème posé : aucun logiciel ne fait tout pour l'utilisateur, et il faut toujours garder un œil critique vis-à-vis de solutions approchées. Pour cela il existe des indicateurs d'erreur et des estimateurs d'erreur qui permettent d'ajuster les différents paramètres. La solution trouvée, il reste cependant à déterminer les caractéristiques de la méthode ainsi développée, notamment l'unicité de l'éventuelle solution ou encore la stabilité numérique du schéma de résolution. Il est essentiel de trouver une estimation juste de l'erreur liée à la discrétisation et montrer que la méthode ainsi écrite converge, c'est-à-dire que l'erreur tend vers 0 si la finesse du maillage tend elle aussi vers 0.

Dans le cas d'une EDP linéaire avec opérateur symétrique (Laplacien), il s'agit finalement de résoudre une équation algébrique linéaire, inversible dans le meilleur des cas.

Soit un domaine (ouvert borné et connexe)  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , de bord  $\delta\Omega$ , et d'adhérence (compacte) $\bar{\Omega}$ . Pour simplifier les représentations, on suppose le bord polygonal.

Soient les fonctions de  $\bar{\Omega}$  dans  $\mathbb{R}^2$  différentiables sur  $\bar{\Omega}$  (compact) et deux fois différentiables sur  $\Omega$  (ouvert). De telles fonctions sont continués et différentiables sur le bord du compact. Soit  $V(\Omega)$  l'ensemble de ces fonctions ( $V$  est un espace vectoriel de dimension infinie et  $V_0$  est le sous-espace vectoriel de fonctions de  $V$  nulles sur le bord  $\delta\Omega$ ). Soient les applications continues sur  $\bar{\Omega}$  et différentiables sur  $\Omega$ , de carré sommables sur  $\bar{\Omega}$  et de gradient de carré sommable sur  $\bar{\Omega}$  (ou de dérivées partielles de carré sommable, ce qui revient au même avec le support de dimension finie). Nommons cet espace. Cet espace  $H_1(\Omega)$  est un espace de Sobolev. On dote cet espace vectoriel d'un produit scalaire issu de celui de  $L^2$  tel que si  $(u, v)$  appartiennent à cet espace alors le produit scalaire de  $u$  et  $v$  est :

$$\langle u/v \rangle_{H_1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) d\omega \quad (\text{III.13})$$

On note  $H_1^0(\Omega)$  le sous-espace vectoriel de  $H_1(\Omega)$  dont les fonctions sont nulles sur le bord  $\delta\Omega$ . L'opérateur  $(x,y) \mapsto x.y$  est un produit scalaire sur l'espace  $\mathbb{R}^2$ .

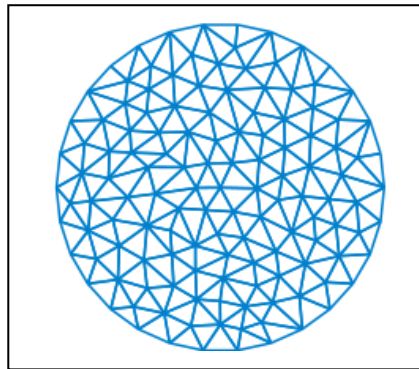


Figure III.2 Exemple de maillage triangulaire

### III.4.3 Mise en œuvre numérique

Nous avons décrit auparavant les méthodes de discrétisation des équations qui gouvernent l'écoulement turbulent et le transfert thermique, qui peuvent se mettre pour la variable ( $\varphi_f$ ) en chaque volume de contrôle élémentaire, sous la forme suivante :

$$a_P \varphi_{i,j} = a_E \varphi_{i+1,j} + a_W \varphi_{i-1,j} + a_N \varphi_{i,j+1} + a_S \varphi_{i,j-1} + b \quad (\text{III.14})$$

Ce processus conduit à un système d'équations algébriques linéaires qui doit être résolu. La complexité et la dimension de l'ensemble d'équations dépendent du dimensionnement du problème, du nombre de nœuds de la grille et de la méthode de discrétisation. Il y a deux méthodes pour la résolution des équations algébriques linéaires : les méthodes directes et les méthodes indirectes ou itératives. Les exemples simples des méthodes directes sont la règle de Cramer par l'inversion de la matrice et la méthode de Gauss.

Les méthodes itératives sont basées sur une application répétée d'un algorithme relativement simple qui mène à la convergence éventuelle après un certain nombre de répétitions. Les exemples les plus connus sont de Jacobi et Gauss Seidel, méthodes d'itération point par point. Les méthodes itératives sont plus économiques que les méthodes directes.

### III.5 Descriptions des logiciels utilisés pour la simulation COMSOL Multiphysics [33] [34]

COMSOL Multiphysics est un logiciel de simulation numérique basé sur la méthode des éléments finis. Ce logiciel permet de simuler de nombreuses physiques et applications en ingénierie, et tout particulièrement les phénomènes couplés ou simulation multi-physiques.

Le logiciel COMSOL Multiphysics et la société correspondante ont été créés en 1986 par des étudiants de Germund Dahlquist, dans la suite de son cours consacré à la simulation numérique à l'Institut royal de technologie (KTH) à Stockholm en Suède. La première version de COMSOL Multiphysics est sortie en 1998. La version initiale (avant 2005) de COMSOL Multiphysics s'appelait FEMLAB.

L'utilisateur définit ses couplages ou sélectionne les interfaces prédéfinies. Les différentes étapes du processus de modélisation - définir la géométrie, les propriétés matériaux, le maillage, choisir la ou les physiques, résoudre et afficher les résultats - sont intégrées dans une seule interface. Des modules d'applications optionnels offrent des interfaces spécialisées notamment en mécanique linéaire et non linéaire, acoustique, écoulement, transfert de chaleur, génie chimique, géophysique, électromagnétisme basse et haute fréquence, corrosion, plasma, suivi de particules, optimisation, MEMS, ainsi qu'avec les logiciels de CAO et Matlab.

Ce logiciel est multiplateforme (Windows, Mac, Linux). En plus des physiques précitées, COMSOL Multiphysics autorise l'utilisateur à définir ses propres systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP), soit sous forme différentielle, soit sous formulation

faible. Les couplages avec des équations aux dérivées ordinaires (EDO) et des équations algébro-différentiels (EAD) sont également possibles.



Figure III.3 Informations sur le logiciel COMSOL Multiphysics.

### III.6 Description du problème physique

L'utilisation des méthodes CFD nous permet d'ériger un modèle numérique capable de traiter et de résoudre la dynamique générée dans un espace rectangulaire (veine d'air dynamique) compris entre deux plaques. La plaque inférieure est considérée comme plaque adiabatique (isolant), et maintenu fixe. Par contre la plaque supérieure est considérée comme un absorbeur qui génère un flux de chaleur et les autres parois sont supposées adiabatiques. Nous nous sommes intéressés, de façon particulière, à déterminer l'apparition des tourbillons et les modes d'instabilités ainsi qu'à leurs réponses aux obstacles imposées. Afin d'évaluer les valeurs critiques caractérisant l'écoulement, le maillage doit être conforme à certaines exigences en termes de dimensionnements et type de mailles. Par la suite, la modélisation passe par un choix des différents paramètres du code de calcul. Les bons ajustements étant effectués, on lance les simulations sur ordinateur. A chaque fois on atteindra la convergence de la solution pour pouvoir traiter les résultats et en déduire les différents paramètres physiques, telles que la pression, la température, la vitesse, etc.

#### III.6.1 Représentation schématique

La veine dynamique dans notre cas d'étude est de forme rectangulaire, elle suggère tout naturellement une description en coordonnées cartésiennes. Pour autoriser une comparaison plus directe avec les résultats expérimentaux, elle est particulièrement de longueur 1.5m et de 0.5m de largeur. Les chicanes sont de forme rectangulaire avec une partie supérieure inclinée. La partie encastrée orthogonalement sur le plan d'écoulement est d'une hauteur de 0.01m et la partie inclinée est de 0.015m. La hauteur de la cavité rectangulaire,  $H = 0.025$  m, comme.

L'air qui représente le fluide utilisé est de propriétés physiques suivantes : la densité  $\rho = 1.225$  kg/m<sup>3</sup> et la viscosité  $\nu = 1.7894$  kg/m.s .

La géométrie étudiée a pour dimensions :

- Un absorbeur de longueur  $L = 1.50 \text{ m}$ .
- Une paroi inférieure isolante de longueur  $L = 1.50 \text{ m}$ .
- Une hauteur  $H$  égale à  $0.025 \text{ m}$ .

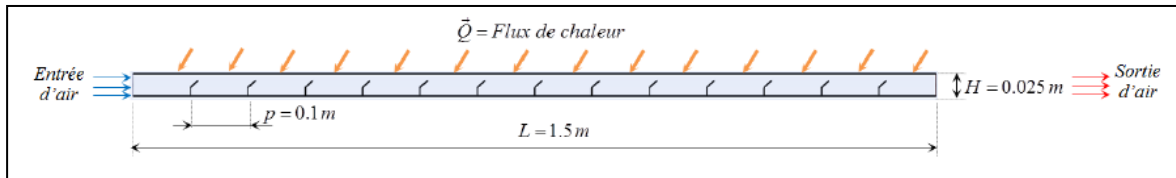


Figure III.4 Schéma de la veine d'air dynamique en configuration 2D.

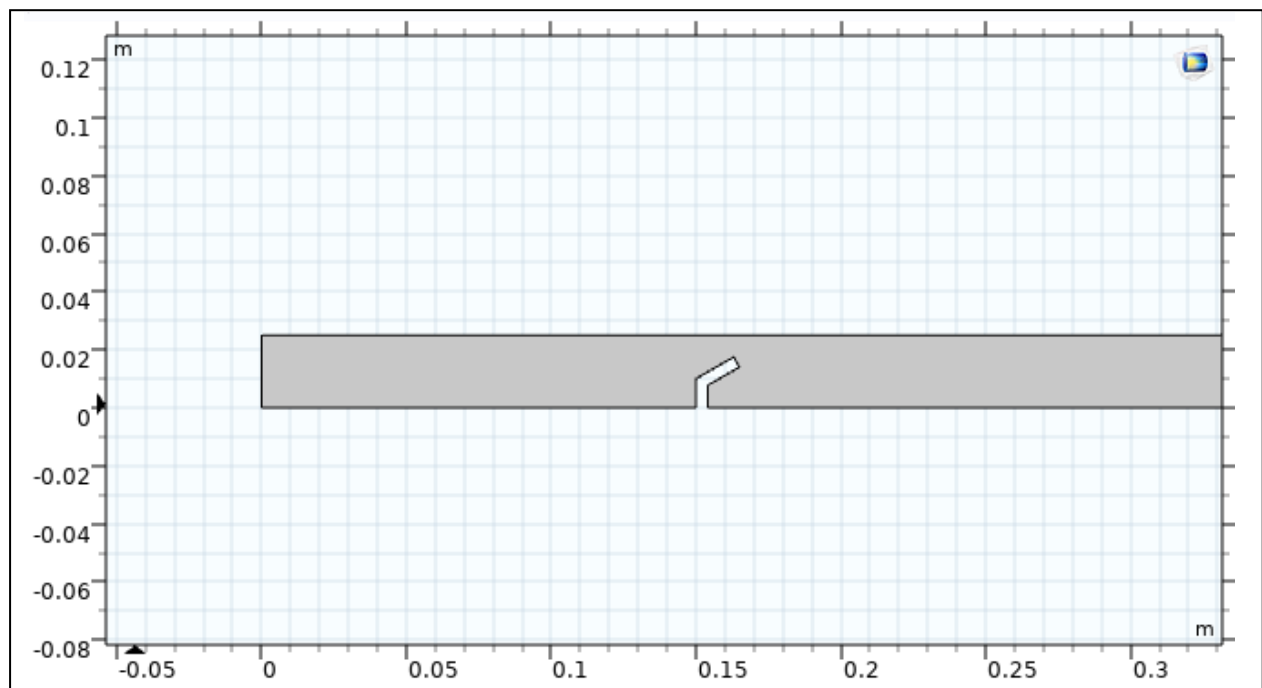


Figure III.5 Représentation de l'entrée de la veine du capteur avec une seule chicane.

### III.6.2 Hypothèses simplificatrices

Pour la modélisation de l'écoulement, nous avons posé les hypothèses suivantes :

- Le régime d'écoulement est considéré comme stationnaire.
- L'écoulement est bidimensionnel (2D).
- Le régime est complètement turbulent.
- L'air qui est le fluide caloporteur est incompressible.
- Les propriétés des milieux fluide et solide sont invariables.

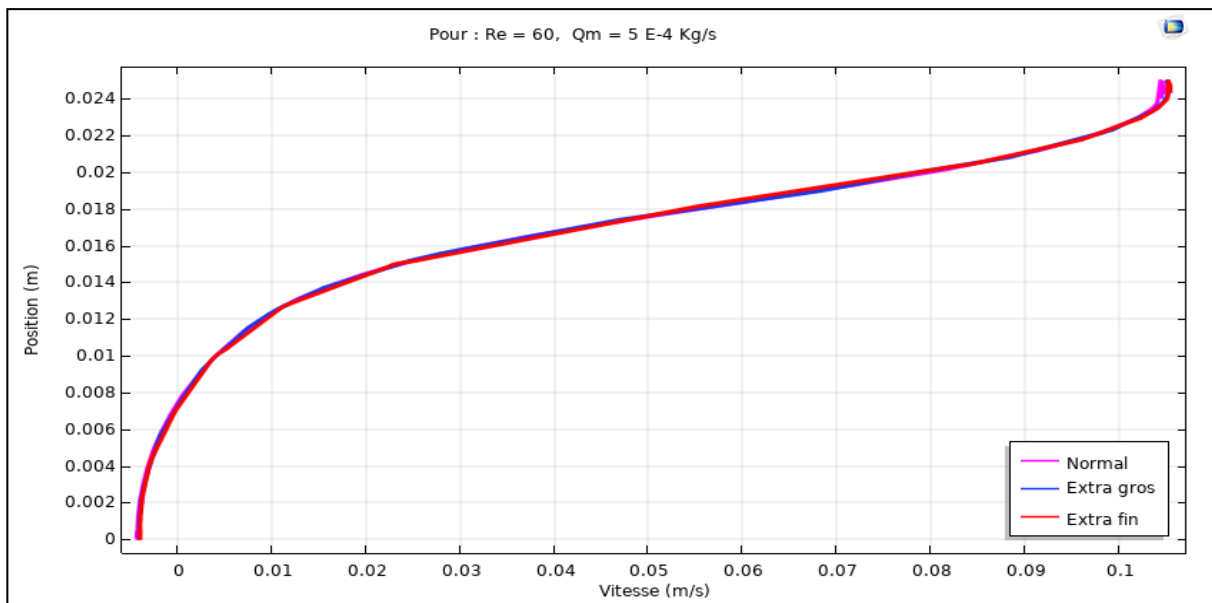
### III.7 Optimisation du maillage

Le choix du maillage est une étape importante de la simulation numérique. Il est donc important de bien choisir un maillage qui s'adapte au mieux aux problèmes considérés.

Il y'a 9 types de maillage dans le logiciel COMSOL Multiphysics :

Type de maillage
Extrêmement fin
Extra fin
Plus fin
fin
Normal
Gros
Extra gros
Extrêmement gros

**Tableau III.3** Différents types de maillage



**Figure III.6** Différents types de maillage

Afin d'optimiser et choisir le maillage adéquat, on a utilisé 3 types de maillage, il s'agit de : extra gros, normal et extra fin pour le même débit  $Q_m = 0.0005 \text{ Kg/s}$  avec la même valeur de nombre de Reynolds  $Re = 60$ . Cette manœuvre numérique nous permet d'économiser du temps, et ne pas charger notre micro processeur avec un élancé calcul. On remarque que les résultats sont très proches donc, on utilise le maillage extra gros pour le reste de notre étude.

**III.8 Conclusion**

Après avoir présenté les principes de base de la procédure de résolution numérique et le logiciel qui réalise la géométrie et le maillage COMSOL Multiphysics.

Nous avons spécifié les conditions aux limites de toutes les frontières du domaine d'écoulement pour résoudre les équations régissant le mouvement d'un fluide en écoulement d'air turbulent à l'intérieur d'un canal rectangulaire muni des chicanes.

La résolution qui effectuée par le logiciel COMSOL Multiphysics donne des résultats qui sont présentés dans le chapitre suivant.

# Chapitre IV

Résultats et discussions



## IV.1 Introduction

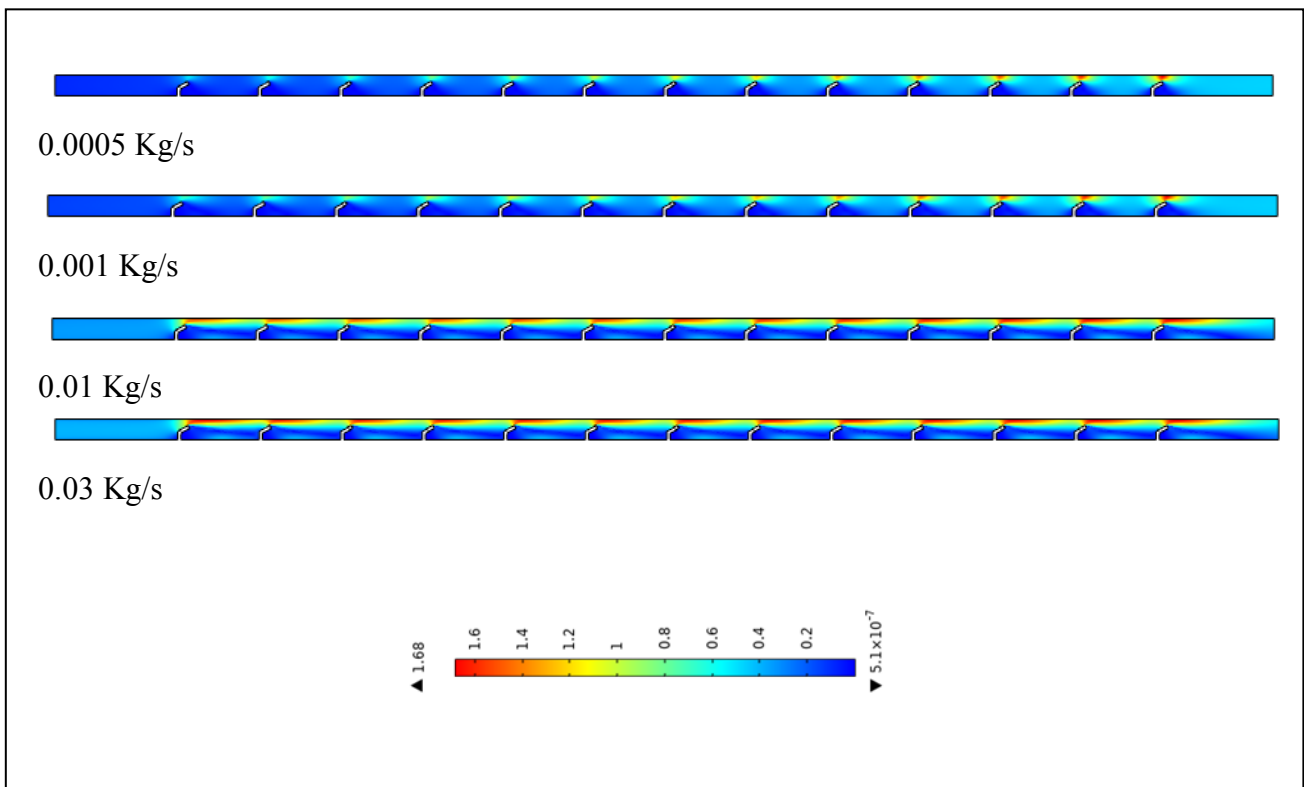
Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à l'étude numérique du comportement dynamique et thermique d'un écoulement d'air turbulent et stationnaire dans un canal rectangulaire d'une longueur de  $L = 1.5$  m et une hauteur d'une  $H = 0.025$  m muni de chicanes.

Nous verrons en premier lieu, la validation des résultats de notre simulation numérique obtenus à l'aide du logiciel COMSOL Puis nous procédons le traçage de profil de vitesse et le profil de la température.

## IV.2 Profile de vitesse

Nous remarquons sur la Figure IV.4, un changement significatif de la vitesse axiale dans la veine d'air dynamique, notamment autour des chicanes. Nous observons une diminution de la vitesse axiale en amont de la partie inférieure orthogonale des chicanes et une accélération enregistrée au-dessus de la partie supérieure inclinée des chicanes, où elle atteint son maximum sur le bord de fuite.

Cela signifie que la forme convergente du passage formé par la partie inclinée de la chicane et l'absorbeur joue un rôle crucial sur l'évolution de la vitesse et induit une augmentation de cette dernière à la sortie du passage. Il est remarqué que, ces zones représentent une survitesse qui peut atteindre 200 % la vitesse d'entrée.



*Figure IV.1* Champ de la vitesse axiale pour 13 chicanes à différentes valeurs de débit

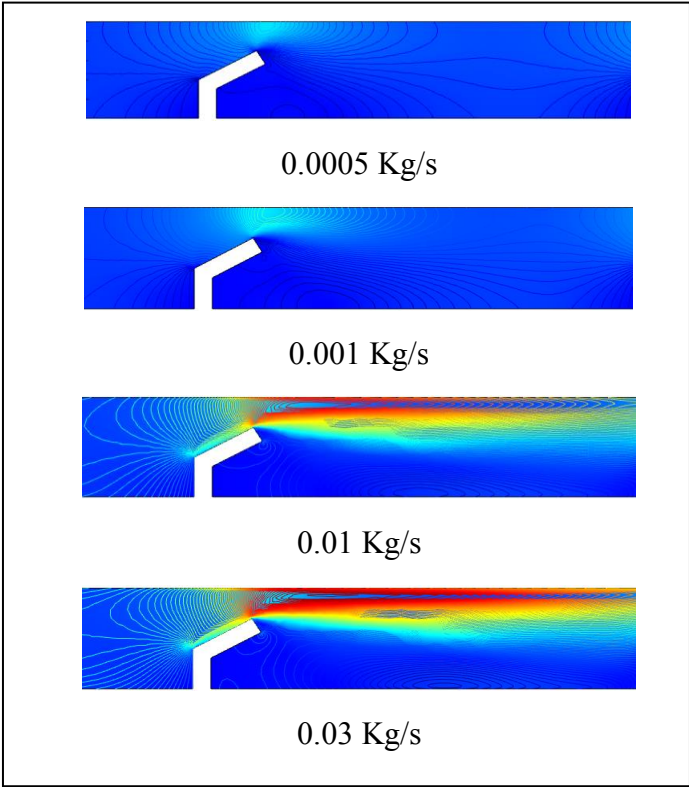


Figure IV.2 Contours de la vitesse axiale pour 1 chicane à différentes valeurs de débit

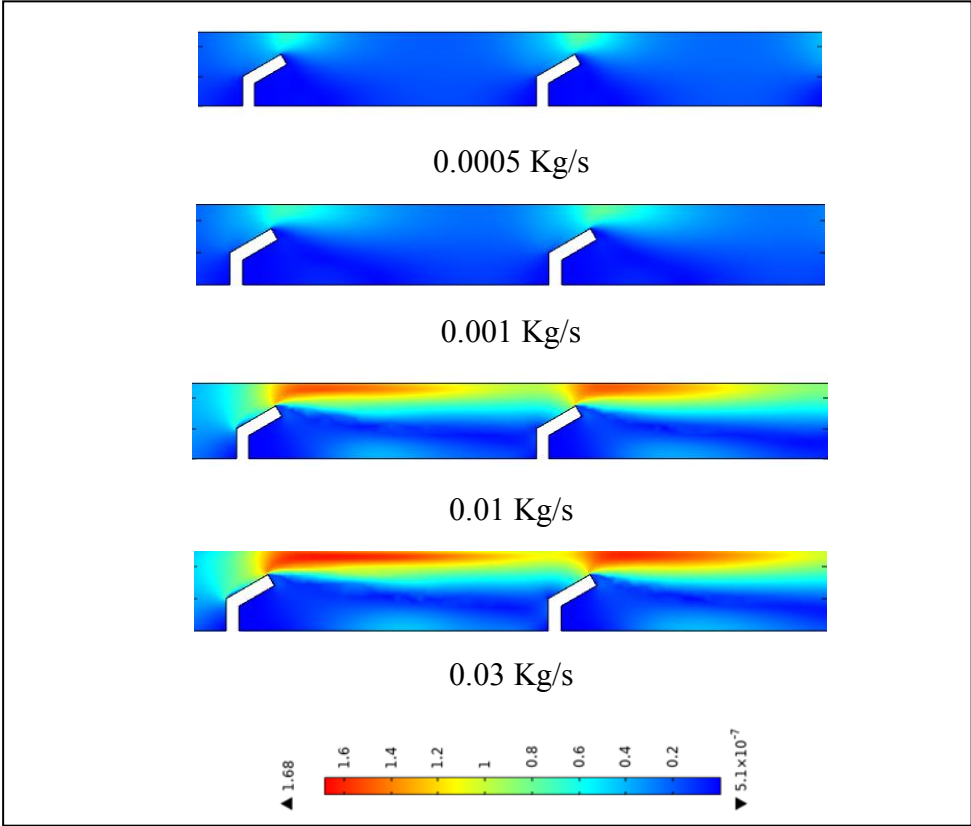


Figure IV.3 Champ de la vitesse axiale pour 2 chicanes à différentes valeurs de débit

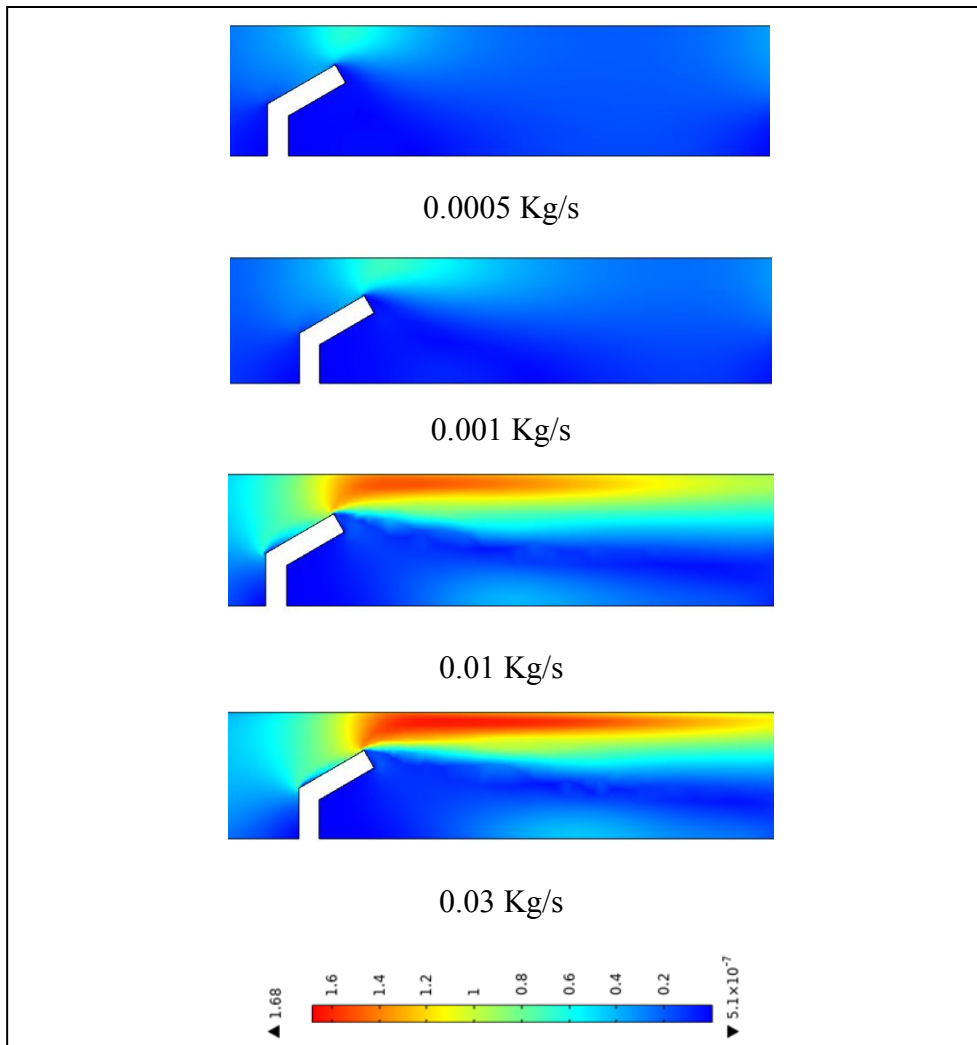


Figure IV.4 Champ de la vitesse axiale pour 1 chicane à différentes valeurs de débit

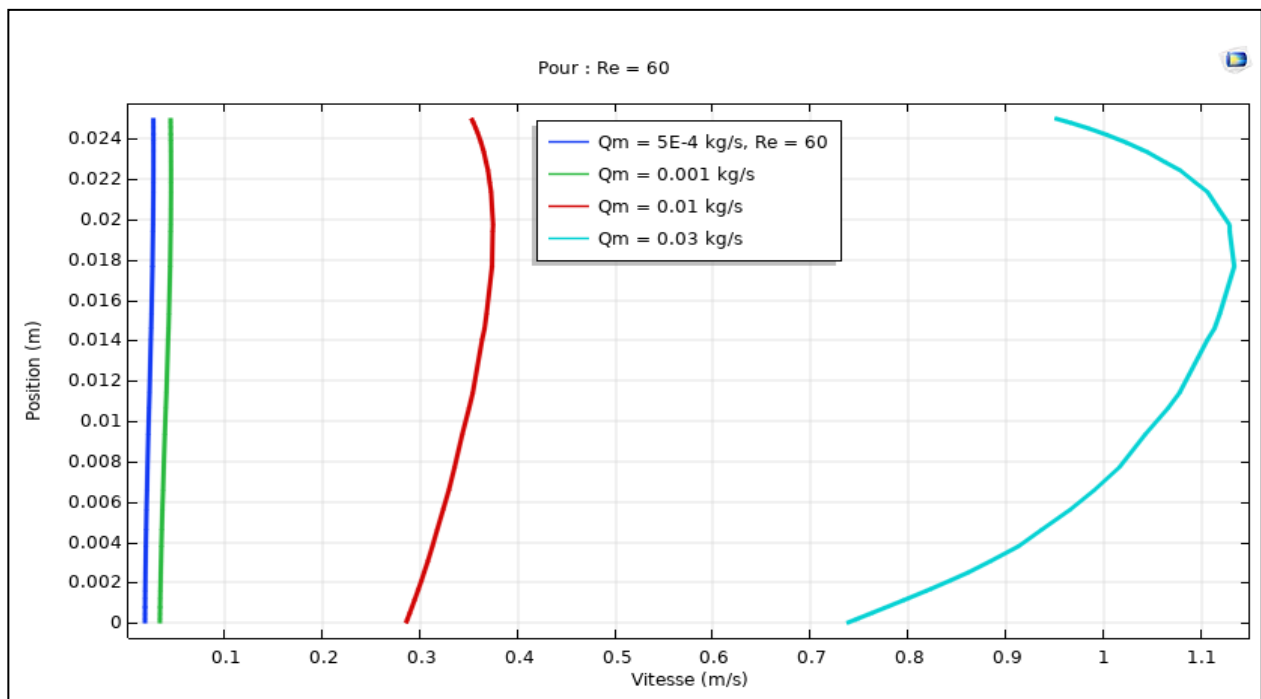


Figure IV.5 Profil de la vitesse à la position  $x = 0.08$  m

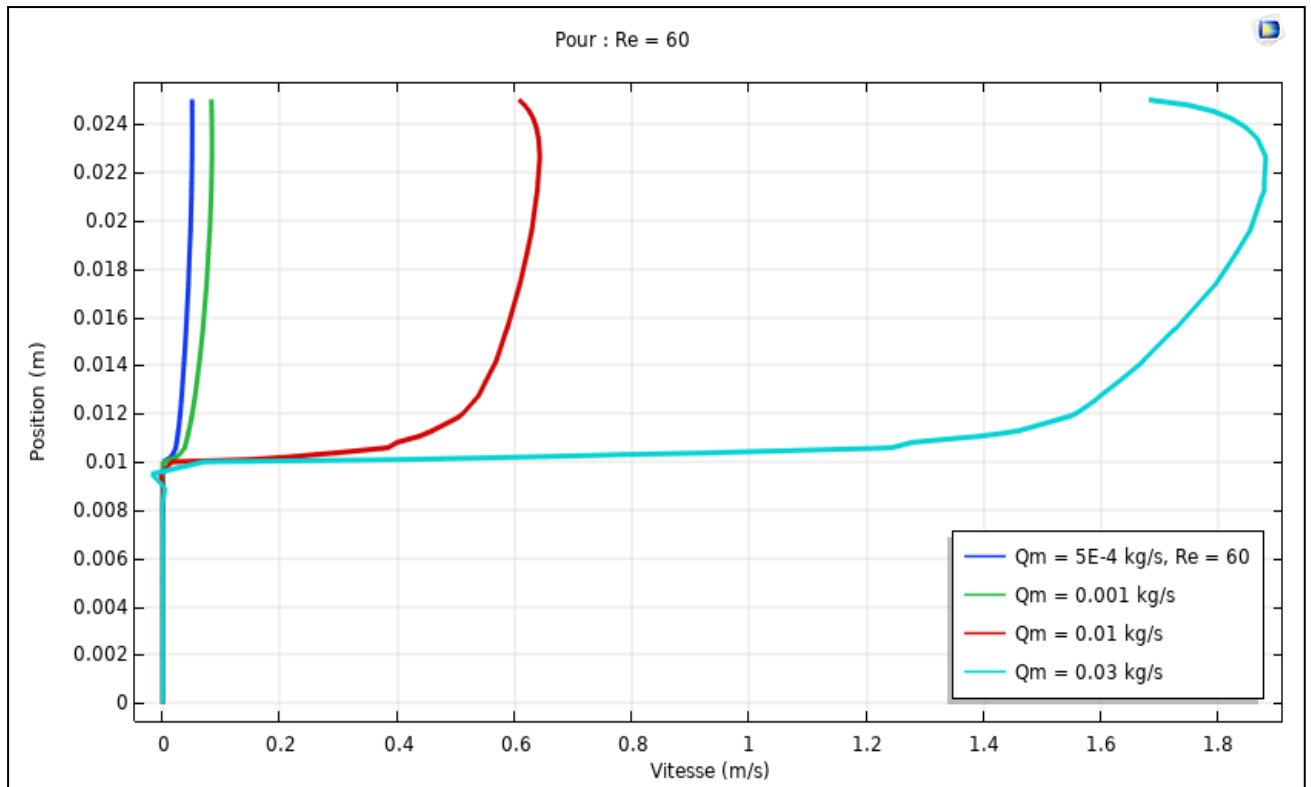


Figure IV.6 Profil de la vitesse à la position  $x = 0.1\text{ m}$

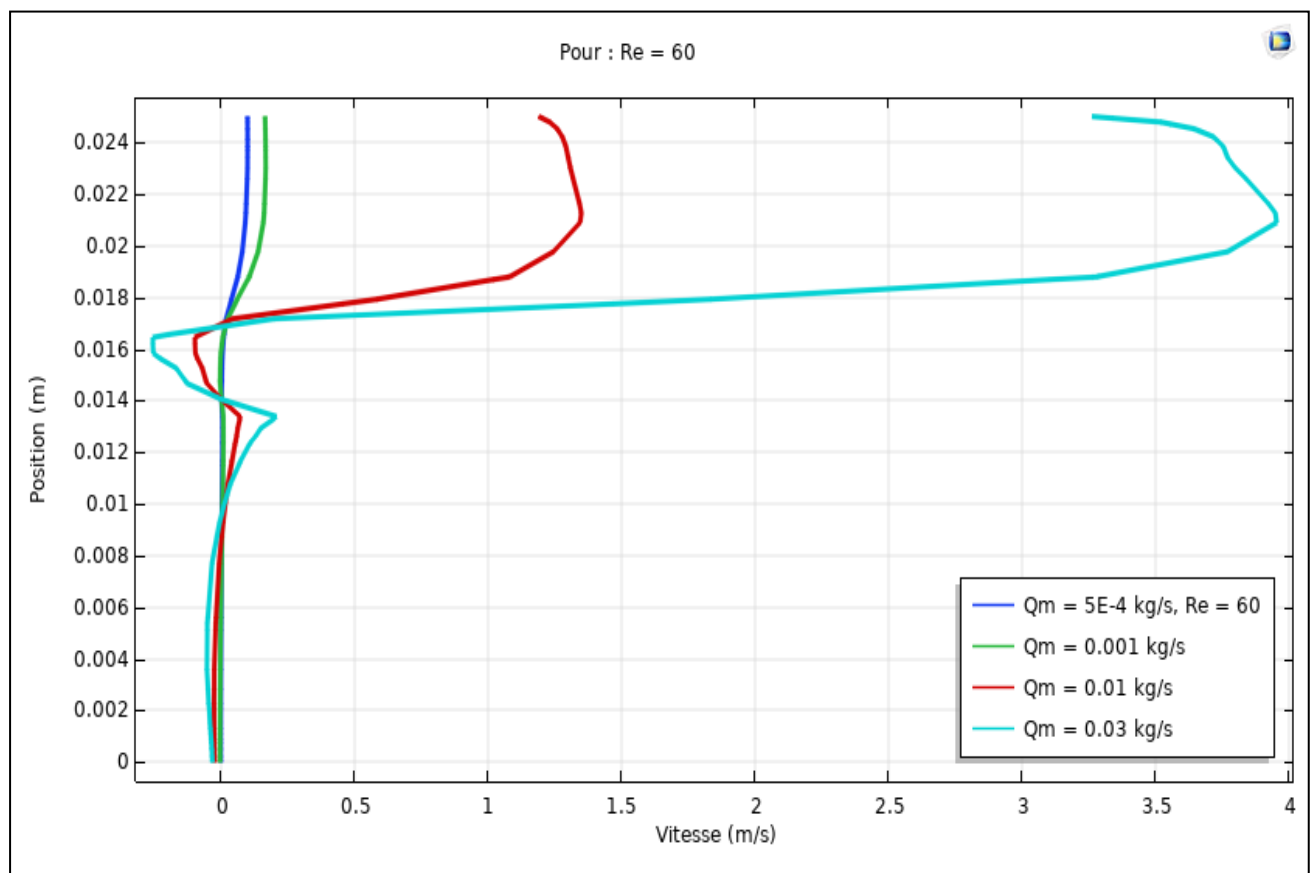


Figure IV.7 Profil de la vitesse à la position  $x = 0.1134\text{ m}$

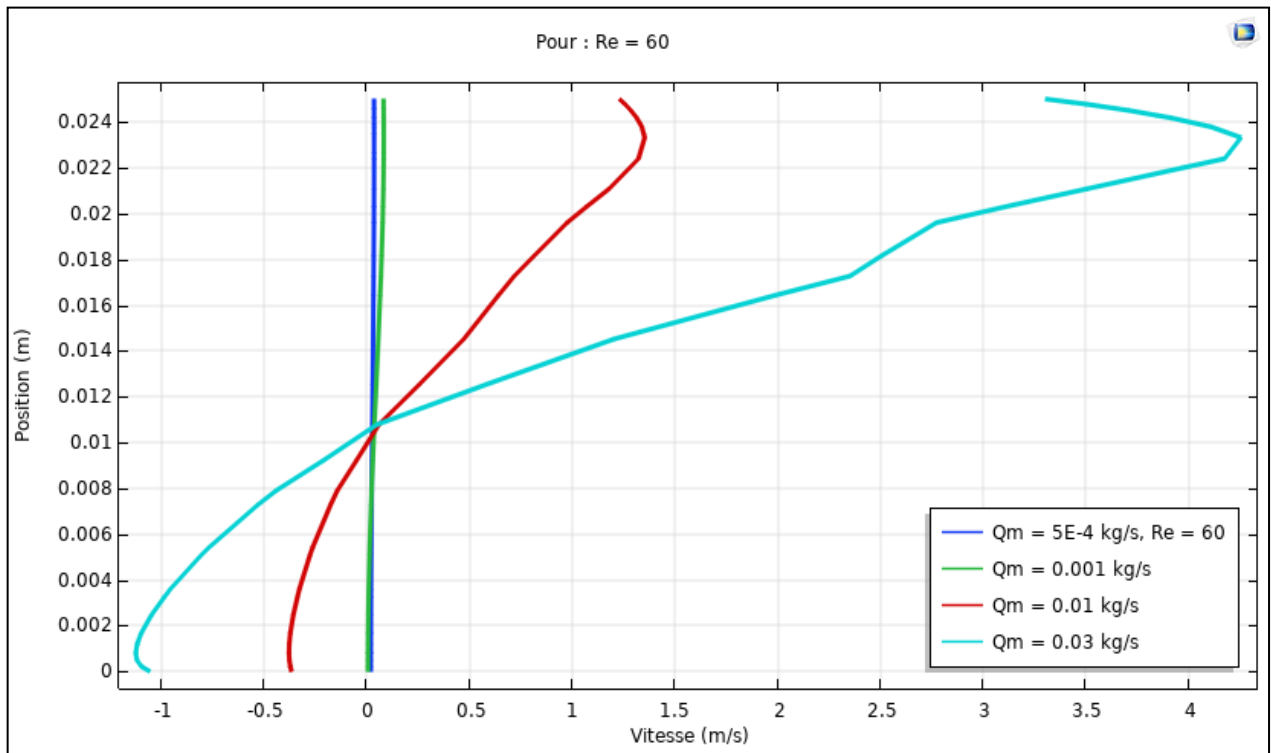


Figure IV.8 Profil de la vitesse à la position  $x = 0.15$  m

#### IV.2.1 Effet du nombre de Reynolds sur l'évolution de la vitesse

À la position  $x = 0.15$ , l'écoulement se trouve entre deux chicane, où le profil de la vitesse axiale est significativement perturbé et perd sa forme parabolique, dû à la zone de recirculation, avec une légère perturbation vers le bas Figure IV.9. Il est important de noter que la vitesse axiale s'annule à une hauteur 0.01 m qui correspond à la hauteur de la partie orthogonale de la chicane. Par ailleurs, au-dessous de cette hauteur, les valeurs de la vitesse sont de signe négatif avec une amplitude importante.

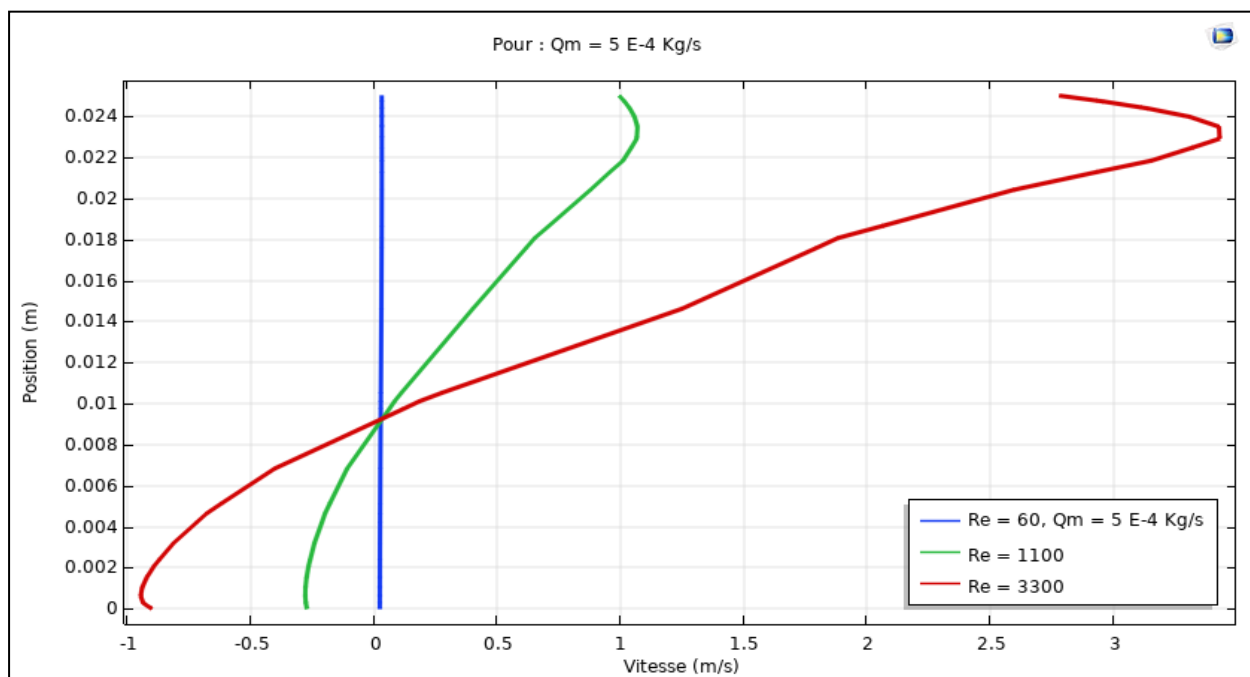


Figure IV.9 Profil de la vitesse en fonction de nombre de Reynolds à la position  $x = 0.15$  m

### IV.3 Profil de température

La Figure IV.10, illustre le champ de la température engendré par le flux de chaleur ( $482 \text{ W/m}^2$ ) imposé sur la paroi supérieure (absorbeur) de la veine d'air dynamique pour plusieurs valeurs du débit à l'entrée. Nous remarquons l'augmentation de la température à la sortie par rapport à la température d'entrée où elle atteint 370%, 208%, 30% pour les valeurs de débit de 0.0005, 0.002, 0.01 (Kg/s) respectivement. Cela, mène à conclure que l'augmentation du débit à l'entrée de la veine d'air dynamique influe inversement sur la valeur de la température à la sortie de la veine d'air dynamique. Ce constat est dû à la diminution du temps de séjour de l'air qui circule à l'intérieur de la veine en augmentant le débit.

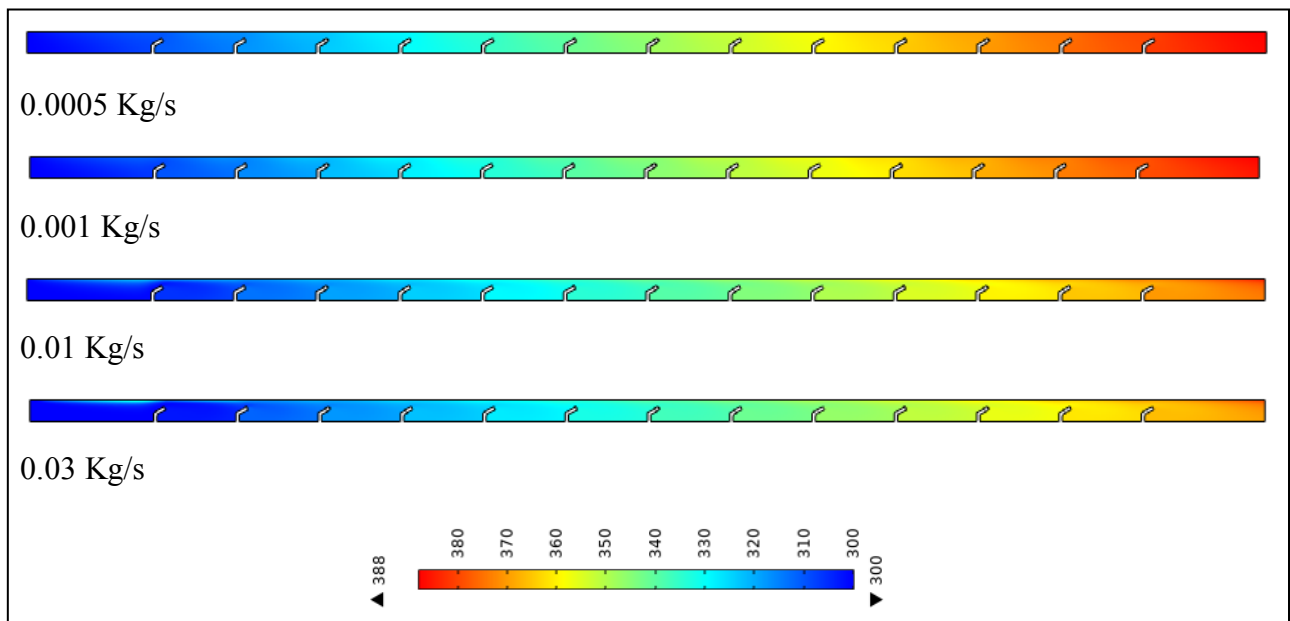


Figure IV.10 Contours de la température pour différentes valeurs de débit

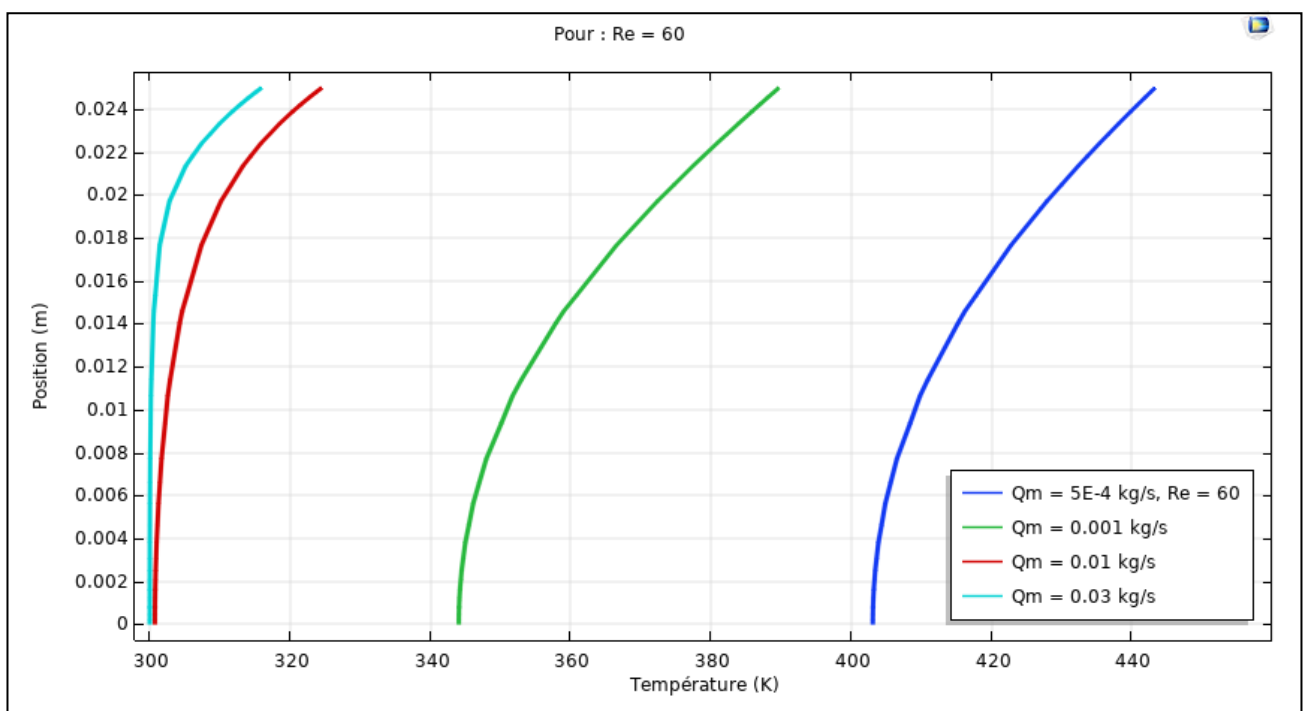


Figure IV.11 Profil de la température à la position  $x = 0.08 \text{ m}$

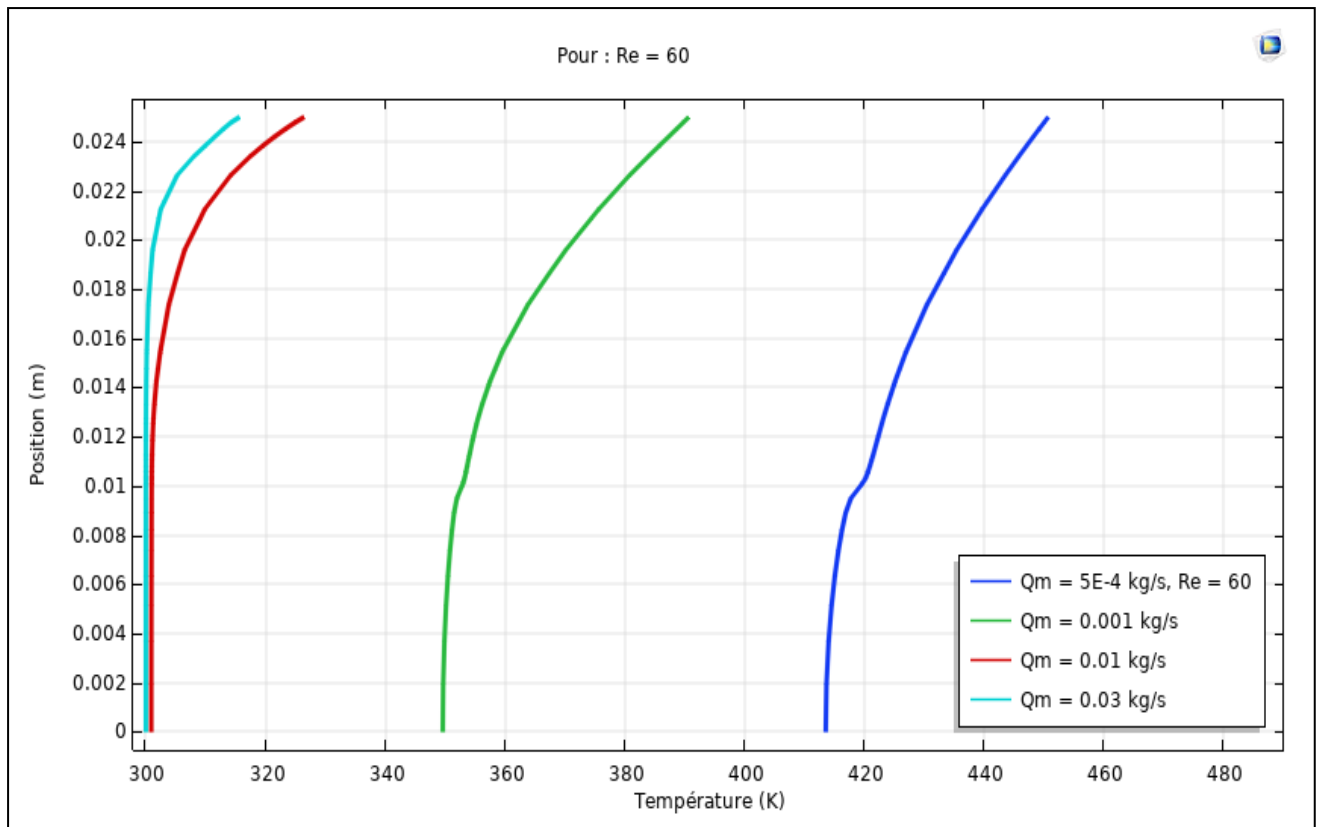


Figure IV.12 Profil de la température à la position  $x = 0.1$  m

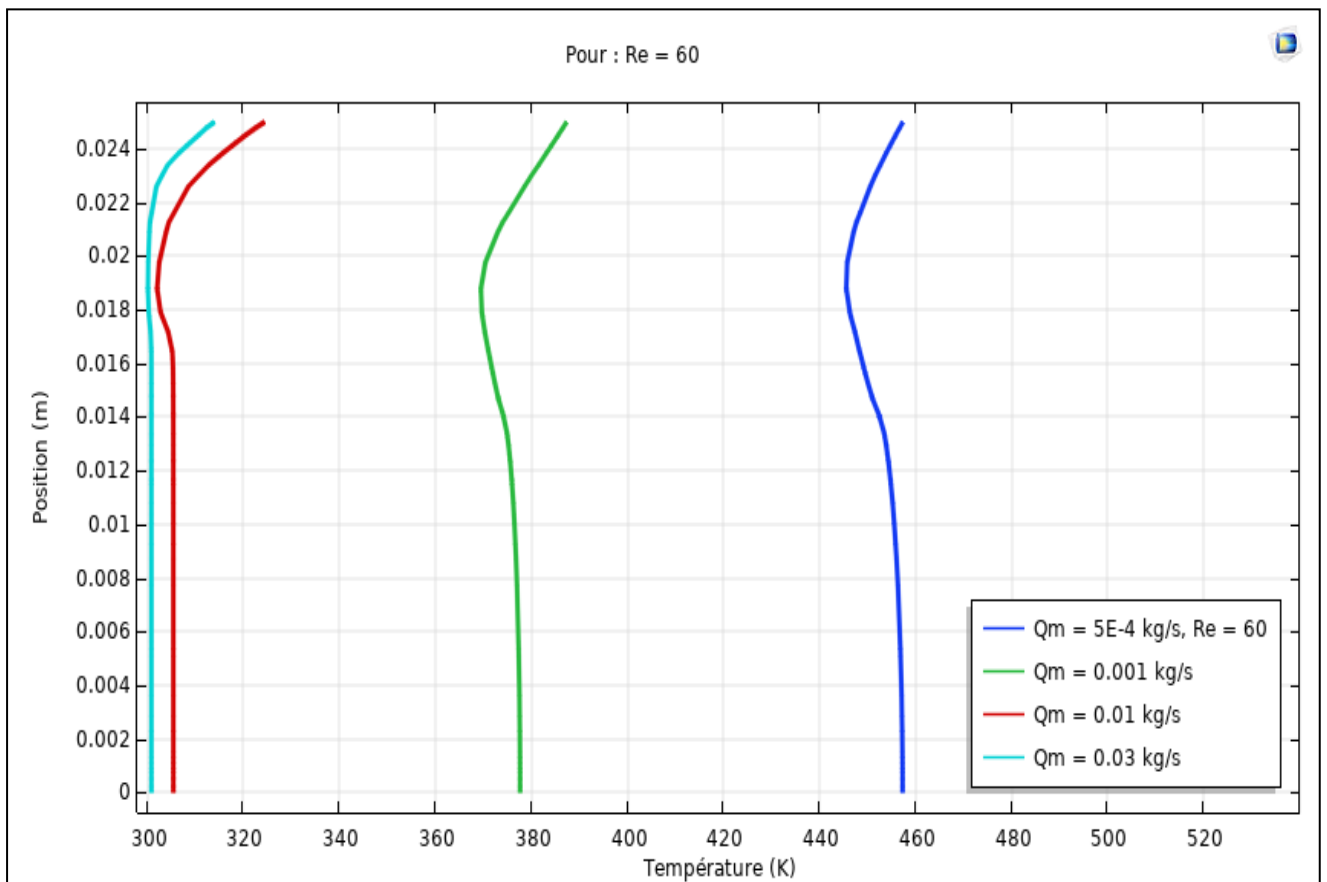


Figure IV.13 Profil de la température à la position  $x = 0.1134$  m

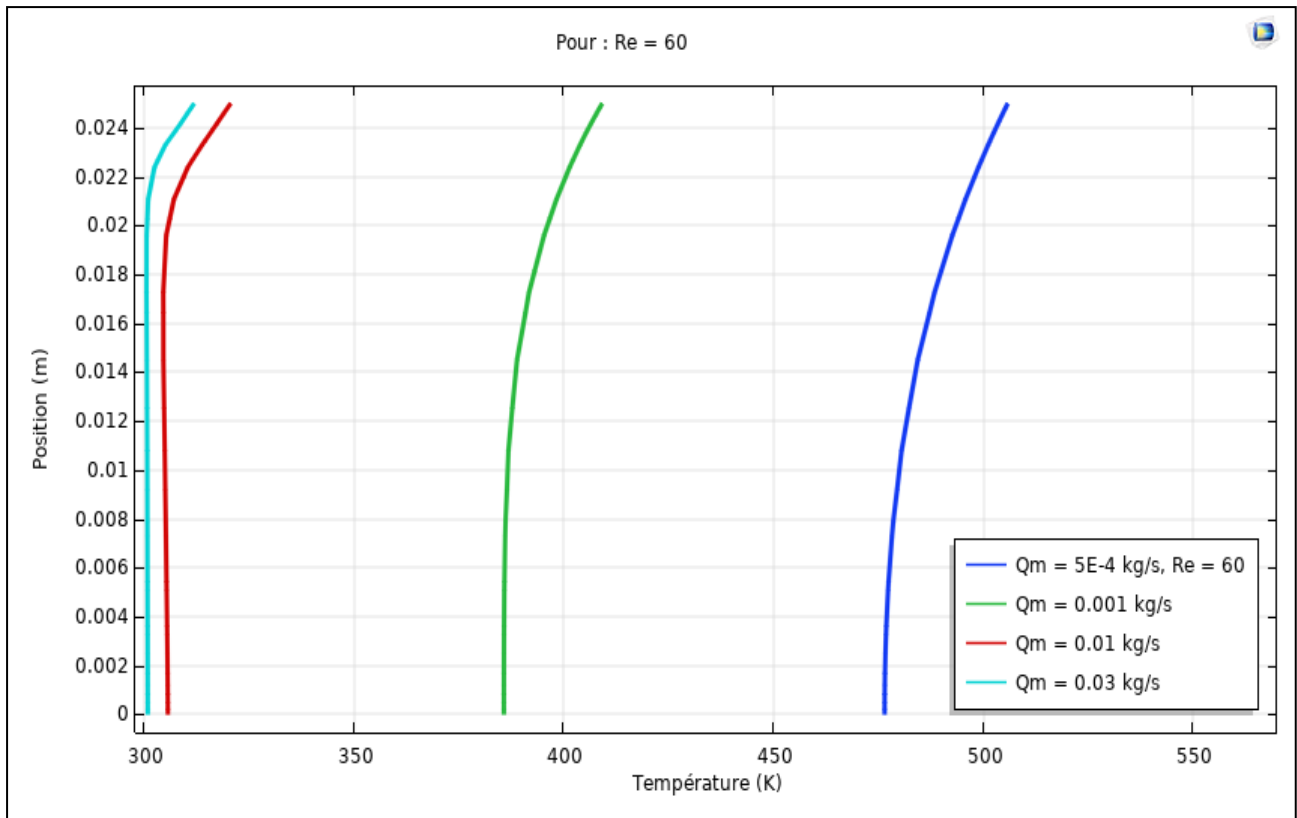


Figure IV.14 Profil de la température à la position  $x = 0.15$  m

### IV.3.1 Effet du nombre de Reynolds sur la distribution de la température

Les plus importantes températures sont enregistrées à la sortie de la veine d'air dynamique pour des faibles nombres de Reynolds et ce, en raison des faibles vitesses de l'écoulement correspondants.

En effet, en régime laminaire la vitesse de l'écoulement est négligeable au niveau de la paroi interne de l'absorbeur, ainsi le maximum de flux de chaleur est maintenu à cette surface. Par ailleurs, le temps de séjour de l'air à l'intérieur du canal est plus important pour ces conditions, ce qui permet un temps plus important pour l'échange thermique entre la paroi et l'air en écoulement.

L'augmentation de la température au niveau de l'absorbeur est relativement moins prononcée pour des nombres de Reynolds supérieurs à 2100. A cet effet, le renouvellement rapide de l'air sur l'absorbeur ne permet pas d'assurer une importante élévation de la température dans ces conditions.

La Figure IV.15, donne un aperçu sur les profils de la température en fonction de la hauteur de la veine d'air dynamique et ceci pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Nous remarquons en général que, le nombre de Reynolds a une importante influence sur la température; cette dernière diminue quand le nombre de Reynolds augmente.

Ces résultats, nous mènent à confirmer que l'utilisation de la chicane crée de la turbulence et augmente la température de l'air à l'intérieur de la veine d'air dynamique.



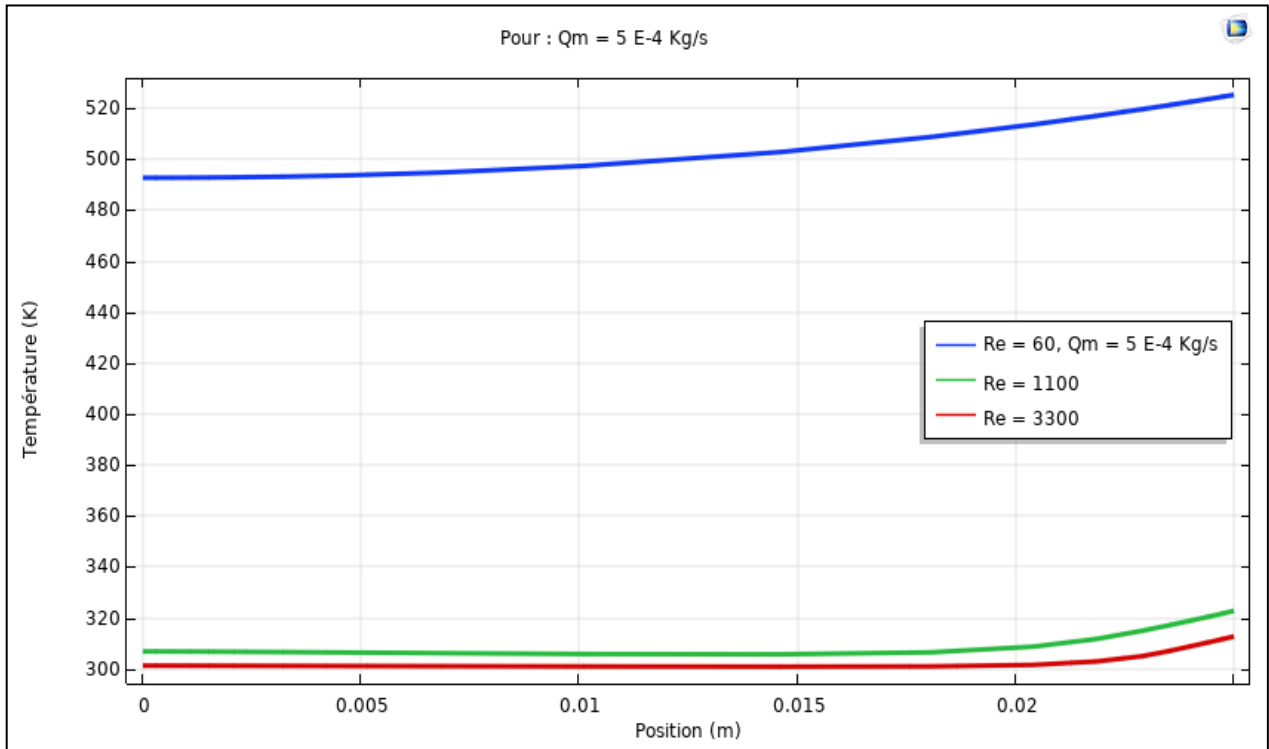


Figure IV.15 Evolution axiale de la température en fonction du nombre de Reynolds à la position  $x = 0.15 \text{ m}$

#### IV.4 Profile de pression

La Figure IV.16, illustre les contours du champ de pression engendrés par les chicanes, où ils dévoilent la surpression au-dessus de la partie supérieure inclinée des chicanes. La pression est plus importante sur le bord de fuite de chaque chicane où la vitesse est plus forte. Ceci, est dû à la forme convergente du passage formé par la partie inclinée des chicanes et l'absorbeur. Par ailleurs, une diminution de la pression est observée tout au long de la veine d'air dynamique, ainsi ces pertes en pression sont proportionnelles à l'augmentation du débit de l'air.

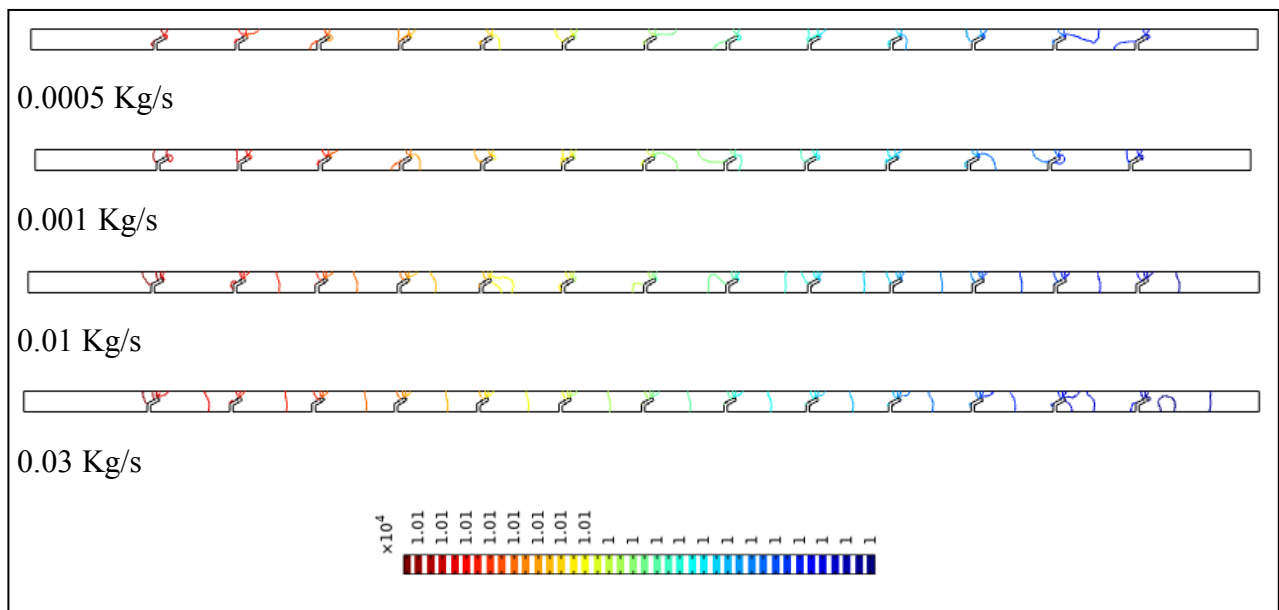


Figure IV.16 Contours de la pression pour différentes valeurs de débit

## IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et interprété les résultats obtenus par la simulation numérique du champ de l'écoulement, Il s'agit de l'écoulement de l'air à l'intérieur d'un capteur solaire à air dont la veine d'air dynamique est munie de rugosités artificielles (chicanes).

Les résultats ont permis de visualiser les contours de la vitesse, la température, la pression et la turbulence. Les profils ont été tracés afin de mettre en évidence l'effet des rugosités sur le comportement de l'écoulement. Les résultats obtenus à l'issue des simulations numériques effectuées en (2D), ont permis de constater plusieurs constatations en ce qui concerne l'effet que subissent les structures hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement de l'air, suite à la variation des paramètres considérés dans l'étude. Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

Les lignes de courants ont montré la présence de petites zones de recirculations en amont, en aval ainsi qu'au-dessous des parties inclinées des chicanes. La présence des zones de recirculations est relativement intense où sont responsables à des variations locales de la pression et de la température.

La variation du débit de l'air à l'entrée du canal, influe clairement sur les dimensions des tourbillons, ainsi que sur les points de séparation et de rattachement de l'écoulement

La forme du passage formé entre la partie supérieure de la chicane et l'absorbeur, influe clairement sur l'évolution de la vitesse axiale et verticale où est observée la présence de régions en survitesse sur le bord de fuite de la chicane.

L'augmentation du débit à l'entrée de la veine d'air dynamique influe inversement sur la valeur de la température à la sortie de la veine d'air. Ce constat est dû à la diminution du temps de séjour de l'air circulant à l'intérieur de la veine en augmentant le débit.

## **Conclusion générale**

Le présent travail constitue une contribution à l'étude des systèmes des collecteurs solaires à air, qui traitent les propriétés et les mécanismes attachés au champ hydrodynamique, afin de déterminer et de contrôler l'apparition des instabilités et le développement de la turbulence au sein de la veine d'air dynamique. La stratégie de contrôle est basée sur l'adjonction des rugosités artificielles de types chicanes.

Au premier lieu, nous avons présenté une revue bibliographique des travaux disponibles dans la littérature qui traitent la perspective thermique et dynamique, en particulier, les modifications géométriques effectuées sur les capteurs solaires plans à air. Nous avons aussi, détaillé la stratégie de la création de la géométrie ainsi que la stratégie du choix d'un maillage de qualité.

L'objectif principal de cette étude numérique était de décrire quantitativement et qualitativement la vitesse, la température, la pression et les caractéristiques reliées à l'intensité de la turbulence. Sachant que ces renseignements sont indispensables voir nécessaires pour déduire les informations concernant le comportement dynamique et thermique de l'air en présence des rugosités artificielles.

L'évolution de la vitesse, la distribution de la température et de la pression avec le taux du transfert thermique ont été traités le long de la veine d'air dynamique et pour différents nombres de Reynolds.

Les lignes de courants montrent la présence de petites zones de recirculations en amont et au-dessous des parties inclinées des chicanes, ainsi en aval des chicanes, la présence des zones de recirculations est relativement intense. Ces zones tourbillonnaires sont responsables des variations locales de la pression et de la température.

Les résultats de ce travail constituent un apport important pour l'enrichissement des connaissances et des travaux de recherche sur la convection forcée turbulente à l'intérieur des conduites munies de chicanes et plus particulièrement dans les collecteurs solaires à air.

L'ensemble des résultats présente un caractère original et révèlent une grande richesse phénoménologique. Ces résultats ouvrent des perspectives intéressantes afin de pouvoir mieux appréhender les mécanismes liés aux phénomènes examinés.

**Références bibliographiques**

- [1] **Faris Aissaoui et al**, "Experimental and Theoretical Analysis on Thermal Performance of the Flat Plate Solar Air Collector", Université de Batna, Algérie, Thèse de doctorat; 2016.
- [2] **K.Aliane, M.Henaoui**, "Introduction de chicanes perforées dans la veine d'écoulement d'un capteur solaire", Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen, Algérie, Thèse de doctorat; 2015.
- [3] **R.Khama, F.Aissani, R.Alkama**, "Étude d'un capteur plan à air destiné à un séchoir solaire : Comparaison du mode passif au mode actif", Université de Bejaia, Algérie, Thèse de doctorat; 2016.
- [4] **M.Zedairia et al**, "Effet des Paramètres Géométriques sur les Performances Thermiques des Capteurs Solaires Plans à Air", Université Constantine I, Constantine, Algérie, Thèse de doctorat; 2015.
- [5] **M. Sandali, A.N. Korti**, "Amélioration des performances thermiques du capteur solaire", Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen, Algérie, Thèse de doctorat; 2016.
- [6] **A.Moumeni, B.Bouhekima**, "L'étude numérique d'un capteur solaire vertical muni de chicanes (simulation numérique)", Université Kasdi Merbah, Ouargla, Algérie, Thèse de doctorat; 2015.
- [7] **A.N.C.Noël, D.Noël, A.Zaatri** "Modélisation et étude comparative des capteurs solaires plans et a tubes dans les régions Soudano-Sahéliennes du Cameroun", Université Constantine I, Constantine, Algérie, Thèse de doctorat; 2018.
- [8] **S.Kherris et al**, "Étude et caractérisation d'un capteur solaire destiné aux applications à basse température", Université Amar Tilidji, Laghouat, Algérie, Thèse de doctorat; 2018.
- [9] **S. Haddad, K. Touafek, M. Mordjaoui, H.Bougarouche**, "Conception et étude expérimentale d'un nouveau capteur solaire hybride", Université 20 août 1955, Skikda, Algérie, Thèse de doctorat; 2017.
- [10] **M. H. Benzaama, M. Lachi, A. Mokhtari, C. Maalouf**, "Etude expérimentale de l'efficacité énergétique d'un plancher solaire direct", Université de Reims Champagne-Ardenne, Reims, France; 2016.
- [11] **S. Youcef-Ali, J. Y. Desmons, E. H. Mezaache, M. Daguinet**, "Étude des performances d'une chaîne énergétique capteur plan-séchoir fonctionnant en convection forcée", Université 20 août 1955, Skikda, Algérie, Thèse de doctorat; 2015.
- [12] **A. Youcef**, "Simulation numérique du comportement dynamique et thermique d'un écoulement d'air à travers un canal muni des chicanes sous forme aile (Application aux capteurs solaires plans à air)", *Revue des Energies Renouvelables* Vol. 20 N°3, 521 -529; 2017.

- [13] **S.Chouicha et al**, "Contribution à l'amélioration des performances d'un séchoir solaire indirect en convection forcée destiné à la valorisation des grains de fève", Université Kasdi Merbah d'Ouargla, Algérie, Thèse de doctorat; 2015.
- [14] **B.Guendouz, C.Seladji, M.Bechouat**, " Prédiction de la surface de collecteur thermique d'une installation de climatisation solaire d'un bâtiment à Tlemcen", Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen, Algérie, Thèse de doctorat; 2015.
- [15] **A. Youcef, R. Saim**, "Etude numérique de l'influence de disposition des chicane sur le comportement dynamique et thermique d'un écoulement dans un échangeur de chaleur", Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen, Algérie, Thèse de doctorat; 2016.
- [16] **P.Bonnamy, S.Raji, J.Lopez, R.Garay**, "Expérimentation et modélisation d'un capteur solaire opaque pour préchauffage de l'eau", Collège Sciences et Technologies pour l'énergie et l'Environnement (STEE) d'Anglet, France, Thèse de doctorat; 2016.
- [17] **Jean Boscary**, "Transfert thermique et flux critique dans un écoulement hélicoïdal en tube chauffé asymétriquement", École polytechnique, Toulouse, France, Thèse de doctorat; 1995.
- [18] **Yves Jannot, Christian Moyne**, "Transferts thermiques", Édilivre; 2016.
- [19] **Friess C**, "Modélisation hybride RANS/LES temporelle des écoulements turbulents", Université de Poitiers, France, Thèse de doctorat; 2010.
- [20] **Versteeg HK, Malalasekera W**, "An Introduction to Computational Fluid Dynamics", Pearson Education Limited; 2007.
- [21] **Lesieur M**, "Turbulence in Fluids", Springer 4th Revised and Enlarged Edition; 2008.
- [22] **Bazdidi Tehrani, F. Mohammadi Ahmar, A. Kiamansouri et M.Jadidi**, "Investigation of various non-linear eddy viscosity turbulence models for simulating flow and pollutant dispersion on and around a cubical model building", Simul, 149–166; 2014.
- [23] **Olivier Cadot**, "Introduction à la turbulence, cours de l'ENSTA-Paris Tech 2A", ENSTA-ParisTech, France; 2015.
- [24] **Paul Ferrey**, "Modèles aux tensions de Reynolds avec prise en compte de l'intermittence de frontière", Université de Poitiers, France, Thèse de doctorat; 2004.
- [25] **John.E.Matsson**, "An Introduction to ANSYS Fluent", SDC publications; 2021.
- [26] **A.Antar**, " Prédiction numérique de l'échange de chaleur autour d'une aube de turbine ", Université Larbi Ben M'hidi d'Oum El Bouaghi, Algérie, Thèse de Master; 2011.
- [27] **A. Zeghib, K Talbi**, "Comparaison des différents modèles de turbulence d'un écoulement aérodynamique dans un cyclone", Université Mentouri, Constantine, Algérie, Thèse de Master; 2007.
- [28] **Patankar SV**, "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemi sphere; 1980.

- [29] **H. Becha**, "Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques Couplés par la des Volumes Finis et de la Par métrisation dans les Systèmes Amagnétiques de chauffage par Induction", Université de Biskra, Algérie, Thèse de Magister; 2001.
- [30] **A.Lotfi**, "Modélisation Tridimensionnelle par la Méthode des Volumes finis des Phénomènes Electromagnétiques et Thermiques Couplés dans les Dispositifs de Chauffage Par Induction", Université de Biskra, Algérie, Thèse de Magister; 2003.
- [31] **G. Allaire and A. Craig**, "Numerical Analysis and Optimization: An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation", University press; 2007.
- [32] **K. J. Bathe**, "Numerical methods in finite element analysis", Prentice-Hall; 1976.
- [33] **Eugenio Aulisa, David Gilliam**, "A Practical Guide to Geometric Regulation for Distributed Parameter Systems", CRC press; 1980.
- [34] **Arti Agrawal, B. M. Azizur Rahman**, "Finite Element Modeling Methods for Photonics", Artech house; 1985.