



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن احمد
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والامن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Département de Maintenance en Electromécanique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Electromécanique

Spécialité : Electromécanique

Thème

Evaluation de la durée de vie résiduelle d'une structure fissurée

Présenté et soutenu publiquement par :

RAHMANI Ammar et SLAH Yacine

Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
ADJLOUA Abdelaziz	MCB	Université d'Oran2	Président
YAHIAOUI Reda	MCA	Université d'Oran2	Encadreur
BOUHAFS Mohamed	MCB	Université d'Oran2	Examineur

Année 2021-2022

Remerciement

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire, YAHIAOUI Reda. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Ce fut un plaisir de travailler avec lui. J'ai également apprécié la grande liberté qu'il m'a accordée pour finaliser ce mémoire ainsi que sa passion pour la recherche.

Merci également au Président du jury ADJLOUA Abdelaziz d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. Je remercie Monsieur BOUHAFS Mohamed d'avoir accepté d'examiner ce travail et pour sa participation au jury.

Je ne peux pas trouver les bons mots à adresser à ma famille. Pour ma mère et mon père.... .. .

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail, comme preuve de respect, de gratitude, et de reconnaissance à :

Nos chers parents : Qui n'ont jamais cessé de nous encourager et nous conseiller
Ils nous ont beaucoup aidé tout au long de notre chemin, grâce à leur amour, leur dévouement, leur compréhension et leur patience sans jamais nous quitter des yeux ni baisser les bras et leur soutien moral et matériel, on ne saurait jamais traduire ce qu'on ressent vraiment envers eux.

Nos frères et sœurs : Pour leur indulgence en notre faveur qu'ils touchent ici l'affection la plus intime qu'on ressent à leur égard.

Nos amis et collègues : Pour leur compagnie et bons moments passés ensemble.

Table des matières

Remerciement	1
Dédicace.....	2
Table des matières	3
Liste des figures	5
Liste des tableaux	6
Introduction générale	7
Chapitre I	8
I.1 Aperçu historique sur la mécanique de la rupture :.....	9
I.2 Rupture fragile et rupture ductile :	10
I.3 Les modes d'ouverture d'une fissure :.....	11
I.4 Zone de concentration de la contrainte :.....	12
I.5 Répartition des contraintes au voisinage d'une fissure :	14
I.6 Le facteur d'intensité de contrainte :	16
I.7 Zone plastifiée en fond de fissure :	17
I.8 Définition de la fatigue :.....	18
I.9 La courbe de Wöhler :	19
I.10 Propagation de fissures par fatigue :	20
I.10.1 Les différentes étapes de la fatigue :	20
I.10.2 Le faciès de rupture :.....	21
I.10.3 Fissure courtes :	21
I.10.4 Fissures longues :	22
I.11 Lois de propagation de fissures :.....	23
I.12 Conclusion :	25
Chapitre II.....	26
II.1 Introduction :.....	27
II.2 Historique :.....	27
II.3 Principes de la MEF :	27
II.4 Étapes de la méthode des éléments finis :	28
II.5 Propriétés d'un élément fini :	28
II.5.1 Les nœuds :.....	29
II.5.2 Les forces nodales :.....	29
II.5.3 Degrés de liberté :	29

II.5.4	Condition d'équilibre :	29
II.5.5	Condition de compatibilité :	29
II.6	Caractéristiques d'un élément fini :	30
II.6.1	Type des éléments finis :	30
II.6.2	Choix des éléments finis :	31
II.6.3	Qualité d'un élément fini :	31
II.7	Logiciel d'éléments finis	32
II.8	Modélisation et discrétisation	32
II.9	Discrétisation géométrique	33
II.10	Avantages et inconvénients de la MEF	34
II.10.1	Avantages de la méthode des éléments finis	34
II.10.2	Les inconvénients de la MEF	34
II.11	Généralité sur logiciel ABAQUS	34
II.12	Caractéristiques du logiciel ABAQUS :	35
II.12.1	Type d'analyse :	35
II.12.2	Les éléments utilisés par ABAQUS :	35
II.12.3	Les Modules	36
II.13	Conclusion	37
Chapitre III		38
III.1	Introduction:	39
III.2	Présentation de l'étude :	40
III.3	Présentation du maillage utilisé :	41
III.4	Calcul du facteur d'intensité de contrainte :	43
III.4.1	Facteur d'intensité de contraintes en absence de trous :	43
III.4.2	Facteur d'intensité de contraintes en présence de trous :	45
III.5	Estimation de la durée de vie résiduelle en fatigue :	47
III.6	Conclusion :	49
Conclusion générale		50
Références		51
Annexe A		54
Annexe B		55

Liste des figures

Chapitre I :

Figure I. 1 : Courbes contrainte-déformation	11
Figure I. 2: Modes d'ouverture d'une fissure.....	12
Figure I. 3: Lignes de force et concentration de contraintes.....	13
Figure I. 4 : Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure.....	13
Figure I. 5: Une fissure avec le repère polaire	14
Figure I. 6 : Plaque infinie contenant une fissure.....	16
Figure I. 7 : Répartition des contraintes élastiques et élastoplastiques dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité.....	18
Figure I. 8 : Représentation du chargement en fatigue.....	19
Figure I. 9 : La courbe de Wöhler	19
Figure I. 10 : Les différentes étapes de la fatigue	20
Figure I. 11 : Le faciès de rupture	21
Figure I. 12 : Zone plastique d'une fissure courte.....	21
Figure I. 13 : Variation du comportement en propagation des fissures courtes par rapport à la courbe de fissuration de fissures longues	22
Figure I. 14 : Courbe de fissuration par fatigue d'une fissure longue sur une échelle bi- logarithmique.....	23

Chapitre II :

Figure II. 1: Maillage du domaine en triangles à trois nœuds	28
Figure II. 2: Différents types d'éléments utilisés dans la MEF	31
Figure II. 3 : Étapes de l'analyse d'un problème aux limites	33
Figure II. 4 : Erreur de discrétisation géométrique	33

Chapitre III :

Figure III. 1: Structure d'aile d'avion d'entraînement léger.....	40
Figure III. 2: Géométrie et dimensions de la plaque étudiée	41
Figure III. 3: Représentation de la plaque.....	42
Figure III. 4 : Maillage utilisé pour la plaque et à la pointe de la fissure	42
Figure III. 5 : Evolution du facteur de correction géométrique analytique et numérique en fonction de la longueur de la fissure	44
Figure III. 6 : Evolution de KI en fonction des contours, cas de $a = 4\text{mm}$	44
Figure III. 7 : Distribution des contraintes dans le cas de l'absence des trous ($a = 4\text{mm}$)	45
Figure III. 8 : Distribution des contraintes dans le cas de présence de trou ($a = 4\text{mm}$)	46
Figure III. 9 : L'évolution du facteur Y(FEM) en fonction de (a/b)	47
Figure III. 10 : Evolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles.....	48

Liste des tableaux

Tableau III. 1: Propriétés et géométries de la plaque étudiée	41
Tableau III. 2: Les résultats analytiques et numériques des FIC	43
Tableau III. 3: Les valeurs analytiques et numériques du FIC	46

Introduction générale

Les méthodes de conception qui considèrent la rupture par fatigue sont en constante amélioration. Ainsi, pour améliorer l'estimation de la durée de vie en fatigue, il est plus judicieux d'utiliser des relations reliant la vitesse de propagation des fissures à l'étendu du facteur d'intensité de contrainte. La conception basée sur des critères de tolérance aux dommages traite souvent des composants entaillés donnant lieu à des concentrations de contraintes localisées qui, dans les matériaux fragiles, peuvent générer une fissure conduisant à une défaillance catastrophique ou à une réduction de la durée de vie estimée. Pour une mise en œuvre réussie de la philosophie de tolérance aux dommages dans la conception et le fonctionnement en service des structures soumises à des charges de fatigue, il est crucial de disposer d'outils fiables de prédiction de la propagation des fissures.

C'est dans ce cadre que cette étude est élaborée afin de prédire la durée de vie résiduelle des plaques fissurées. Une situation souvent rencontrée dans le domaine aéronautique, où les ailes d'avions sont particulièrement exposées à ce type de problème. Des solutions analytiques ne sont pas disponibles tout le temps, vu la particularité de chaque problème, et des solutions alternatives doivent être envisagées. L'utilisation de la méthode des éléments finis pour résoudre ce type de problèmes prend tout son intérêt dans ce cas, et permet de traiter divers problèmes avec des formes et des sollicitations beaucoup plus complexes.

Le présent mémoire s'articule autour de trois chapitres, qui sont :

Chapitre 1 : ce chapitre présente un état de l'art sur la mécanique de la rupture et l'endommagement par fatigue des matériaux.

Chapitre 2 : dans ce chapitre, les notions de base de l'analyse par éléments finis, ainsi qu'une description du logiciel utilisé « Abaqus » sont présentées.

Chapitre 3 : le dernier chapitre décrit le problème étudié et présente les différentes étapes suivies pour résoudre ce problème. La présentation et l'analyse des résultats obtenus clos ce chapitre.

Chapitre I

RAPPEL SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

I.1 Aperçu historique sur la mécanique de la rupture :

Durant les trois derniers siècles, le fer et l'acier ont progressivement remplacé le bois et le ciment comme matériaux structuraux de base. Malgré leurs hautes caractéristiques, les structures réalisées à partir de ces matériaux ont connu des accidents importants dès le milieu du 19^{ème} siècle. L'origine de ces accidents était la rupture inattendue de composants critiques de ces structures [1].

L'un des premiers incidents enregistrés sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu « Montrose » en mars 1830 en Grande Bretagne. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le « King's Bridge » à Melbourne (1962) ou encore le « Point Pleasant Bridge » en Virginie (1967). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. Entre 1860 et 1870, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande Bretagne s'élevait à environ 200 par an. De nombreux accidents sont également enregistrés sur des pipelines, ou encore sur des avions. Dans les années 30 et 40, plusieurs ponts franchissant le canal Albert, en Belgique, furent victimes de rupture. Cela ne fut qu'au cours de la seconde guerre mondiale que l'on commença à sérieusement considérer le problème de la rupture [2].

Ces risques d'accidents étaient d'autant plus grands que l'utilisation d'alliages à hautes caractéristiques mécaniques (ténacité, rigidité...), permettant la réalisation de structures de plus en plus sollicitées et de formes complexes, a énormément augmenté. En fait, les estimations de la tenue des structures, fondées sur les caractéristiques mécaniques classiques, ne tenaient pas compte de la ténacité des matériaux en conditions réelles de service, et les chercheurs étaient alors incapables d'expliquer le phénomène de rupture brusque sous des sollicitations bien inférieures à celles de la limite d'élasticité.

Si Griffith est souvent cité comme le premier chercheur à avoir introduit la mécanique de la rupture (en tant que science), ces travaux restent basés sur des études antérieures. On peut notamment citer l'article de Wiegardt, paru en 1907 et traduit en anglais [3], dans lequel l'existence de la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure dans un matériau élastique linéaire fut reconnue. A partir de ces résultats, Griffith s'est intéressé en 1920 au problème de la rupture, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard taux de restitution d'énergie) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau [1].

Irwin considéra que les outils fondamentaux pour étudier la rupture existaient et proposa en 1948, une extension de l'approche de Griffith aux matériaux ductiles en y incluant le terme de dissipation d'énergie due à l'écoulement plastique près des extrémités d'une fissure. Il développa ensuite en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures.

Chapitre I : RAPPEL SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard qui analysa les champs de déplacements et de contraintes élastiques près de l'extrémité d'une fissure sous chargement donné, Irwin montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique qui était relié au taux de restitution d'énergie; ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est le facteur d'intensité des contraintes (FIC).

Les nouveaux concepts de la mécanique de la rupture furent ensuite utilisés pour montrer que la plupart des ruptures dans les fuselages d'avions étaient dues à des fissures de fatigue qui atteignaient une taille critique. Ces fissures prenaient naissance près des hublots dans les coins qui constituent des zones de forte concentration des contraintes. Les ruptures qui se produisaient dans les essieux d'engins roulants ou encore dans les rotors des turbines à vapeur furent aussi expliquées grâce à l'application de ces nouveaux concepts. Le concept de FIC fut également utilisé par Paris pour décrire la propagation des fissures de fatigue et progressivement les courbes de propagation des fissures de fatigue proposées par ces auteurs remplacèrent les courbes d'endurance pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures [4].

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut citer par exemple celle de Rice [5] et Bui [6] qui introduisent la notion d'intégrales indépendantes du contour telles que l'intégrale J, dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de la fissure. Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques en pointe de fissure nécessaires à l'analyse et à l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à de nombreux problèmes de géométries simples, et peuvent donc être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes [2].

I.2 Rupture fragile et rupture ductile :

La rupture par fissuration est la création d'une surface de discontinuité, sous l'action d'une contrainte de nature statique, c'est-à-dire qu'elle est constante ou qu'elle varie peu avec le temps. Il peut s'agir d'une contrainte de traction, de compression, de cisaillement ou de torsion.

Les deux modes de rupture des matériaux à usage industriel sont la rupture ductile et la rupture fragile. Une telle classification repose sur la capacité d'un matériau à subir une déformation plastique. Le comportement lié entre la contrainte de traction et de la déformation de ces deux types de rupture est illustré dans la Figure I.1.

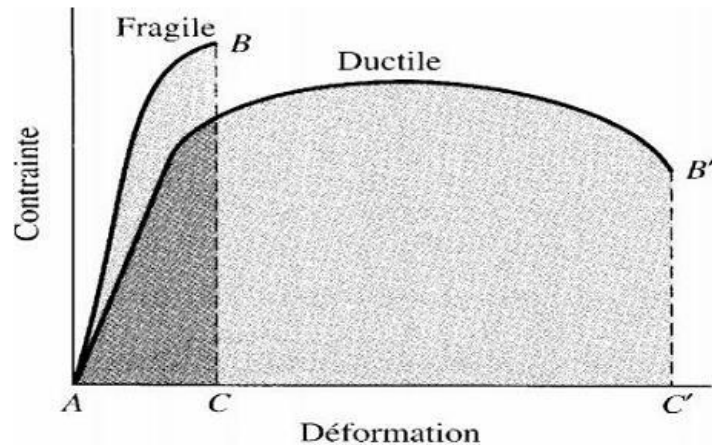


Figure I. 1 : Courbes contrainte-déformation

La rupture fragile est rapide, survient sans déformation notable et par une énergie d'absorption faible. La direction de cette propagation est presque perpendiculaire à la direction de la contrainte de traction appliquée et il en résulte une surface de rupture relativement unie. Les surfaces de rupture fragile d'un matériau possèdent des caractéristiques qui leur sont propres et sont exemptes de toute trace de déformation plastique.

La rupture ductile se caractérise par une vaste déformation plastique située à proximité d'une fissure qui se propage. Elle se déroule assez lentement, à mesure que s'allonge la fissure. Une telle fissure est dite stable, c'est-à-dire qu'elle résiste à toute propagation ne résultant pas d'un accroissement de la contrainte appliquée.

La rupture ductile est presque toujours un moindre mal, contrairement à la rupture fragile qui a un caractère soudain et brutal, et a des effets imprévus en raison de la propagation spontanée et rapide de la fissure. En revanche, la présence d'une déformation plastique signale l'imminence d'une rupture et rend donc possible l'application de mesures préventives [1].

I.3 Les modes d'ouverture d'une fissure :

IRWIN considère les fissures comme des surfaces de discontinuité des déplacements. Puisque chacune des trois composantes du vecteur déplacement peut être affectée, il a observé et défini trois modes indépendants possibles pour les mouvements respectifs des deux surfaces d'une fissure, Figure I.2 [7].

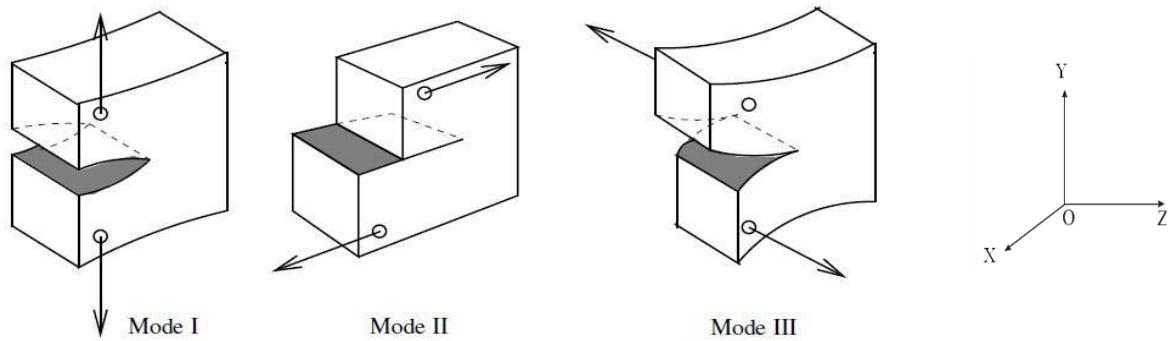


Figure I. 2: Modes d'ouverture d'une fissure

Mode I : un déplacement unique suivant Oy correspond à un problème plan particulier, désigné par le mode I. Ce mode est, le plus souvent, le plus dangereux. Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation rectiligne coin parallèle au front de la fissure.

Mode II : il est engendré par un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle à l'axe Ox . Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation rectiligne coin parallèle au front de la fissure.

Mode III : il est produit par un cisaillement antiplan, situé dans le plan de la fissure Oxx parallèle à l'axe Ox . Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation vis parallèle au front de la fissure [2].

Dans les modes I et II, on peut avoir soit un état de contrainte plane, soit un état de déformation plane. Dans le mode III, il n'existe que l'état de déformation plane. L'état de déformation plane existe au centre de plaques épaisses et l'état de contrainte plane dans des plaques minces et près des surfaces des plaques épaisses [8].

I.4 Zone de concentration de la contrainte :

Dans un matériau homogène soumis à une contrainte uni-axiale, l'effort se transmet d'un atome à l'autre en suivant des lignes de force qui sont parallèles (Figure I.3). Dans un matériau qui possède une entaille, les lignes de force doivent contourner cette entaille, ce qui conduit à une concentration de ces lignes au voisinage de la pointe de l'entaille, donc une concentration de la contrainte dans cette région, appelée tête ou pointe de fissure.

La mécanique de la rupture étudie l'interaction entre la discontinuité géométrique (fissure) et le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité. D'un point de vue mécanique, on peut distinguer schématiquement, dans un milieu fissuré, trois zones successives (Figure I.4).

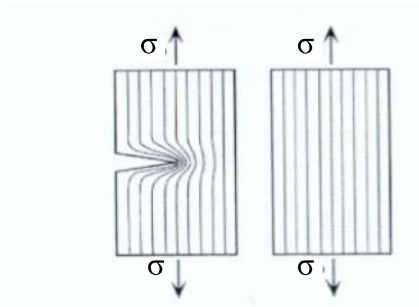


Figure I. 3: Lignes de force et concentration de contraintes

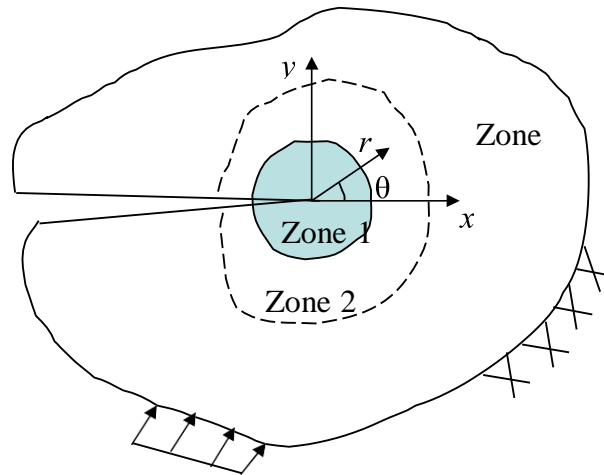


Figure I. 4 : Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure

La zone d'élaboration 1: elle se trouve à la pointe de fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. Elle est discontinue au sens de la mécanique des solides. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans et à une courbe pour les problèmes tridimensionnels.

La zone singulière 2: dans laquelle les champs de déplacements, déformations et contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. On démontre que dans cette zone, les composantes de champ de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ($r \rightarrow 0$). Plus exactement, la singularité est en $(r^{-\frac{1}{2}})$ en milieu élastique linéaire. Le matériau ayant une limite élastique, il existe un rayon r_p autour de la pointe de fissure qui détermine la forme de la zone plastique. En fonction de la valeur de r_p , on dira que la rupture est fragile pour r_p petit, et qu'elle est ductile pour r_p grand. Cette distinction sur la base du paramètre r_p est très importante car elle conditionne la validité de la théorie utilisée :

- La Mécanique Linéaire de la Rupture pour les ruptures fragiles
- La Mécanique Non Linéaire de la Rupture dans le cas de zone plastique non négligeable (rupture ductile)

La zone extérieure 3 : comprenant les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites en charges et en déplacements. Dans cette zone, les champs de déplacements, déformations et contraintes varient peu et peuvent être approximés par des polynômes communément utilisés dans la méthode des éléments finis [9].

I.5 Répartition des contraintes au voisinage d'une fissure :

Pour certaines configurations de structures contenant des défauts, si le matériau a un comportement isotrope et élastique linéaire, il est possible de déterminer, dans le cadre de la mécanique de la rupture, les expressions des champs de déformation et contrainte aux alentours de la pointe de la fissure.

Westergaard [10], Irwin [11], Sneddon [12] et Williams [13] ont démontré que si on considère un système de repère polaire (Figure I.5), avec une origine placée en pointe de la fissure, l'état de contrainte peut être décrit par la relation suivante [14]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_{ij}(r)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

Où : σ_{ij} est le tenseur des contraintes ;

r et θ sont les coordonnées du système de repère polaire ;

K est le facteur d'intensité des contraintes ;

f_{ij} est une fonction adimensionnelle, dépendant du mode de chargement et de la géométrie de la pièce.

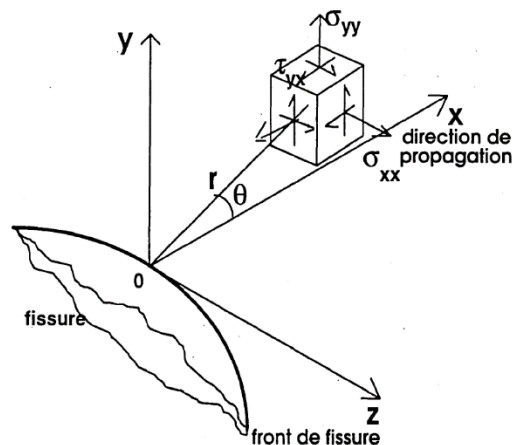


Figure I. 5: Une fissure avec le repère polaire

Chapitre I : RAPPEL SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

Solution asymptotique de l'état de contrainte et de déformation en mode I

(Composantes cartésiennes).

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \text{en déformation plan } (\mu_z = 0)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \text{En contraint plan } (\sigma_{zz} = 0)$$

$$\mu_x = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \dots$$

$$\mu_y = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots$$

$$\mu_z = -\frac{\nu}{E} \int (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) dz$$

Avec: k le coefficient de Kolossov : $k = 3 - 4\nu$ en déformation plan, $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ en contrainte plan, et μ le module de cisaillement du matériau.

Autre écriture :

$$\mu_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(k - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \dots$$

$$\mu_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \dots$$

Toutes les autres composantes sont nulles.

Comme les contraintes ne peuvent physiquement devenir infinies, une zone de plasticité se situe en fond de fissure. L'hypothèse de base de la mécanique de la rupture en élasticité linéaire est que son étendue est limitée en comparaison de la zone où le terme en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ domine le champ de contraintes. Le comportement de la fissure est déterminé par le facteur d'intensité de contrainte [7].

I.6 Le facteur d'intensité de contrainte :

Dans les expressions ci-dessus, le facteur K s'appelle le facteur d'intensité de contrainte (FIC). Il dépend de la géométrie du corps fissuré, de ses dimensions et du mode de sollicitation. Mais pour une valeur donnée du facteur K et pour un matériau de caractéristiques élastiques données, l'état de contrainte et de déformation au voisinage de la fissure est parfaitement connu. Donc, si cet état gouverne le comportement de la fissure, on mesure l'importance du facteur K .

A titre d'exemple, pour une fissure de longueur $2a$ dans une plaque de dimension infinie (Figure I. 6), soumise à une contrainte uniforme à l'infini, σ , perpendiculaire au plan de la fissure la solution est :

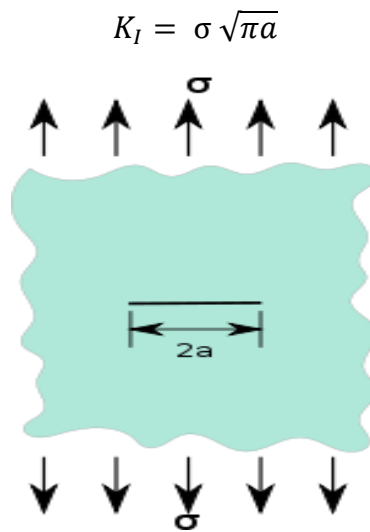


Figure I. 6 : Plaque infinie contenant une fissure

Dans le cas particulier de géométries simples et de systèmes simples de chargement ou de déplacement tels qu'ils existent par exemple dans les éprouvettes d'essai de la mécanique de la rupture, il est possible d'identifier la sollicitation à une contrainte σ ou à une charge P à définir et d'exprimer le facteur d'intensité de contrainte sous la forme :

$$K_I = Y \left(\frac{a}{w} \right) \sigma \sqrt{\pi a} \quad \text{O U} \quad K_I = Y \left(\frac{a}{W} \right) \frac{P}{B\sqrt{W}}$$

a Étant la longueur de la fissure, W la largeur de l'éprouvette et B son épaisseur. $Y(a/W)$ et $f(a/W)$ s'appellent les fonctions de forme [8].

D'une manière générale pour le cas d'un milieu fini, les coefficients d'intensité de contraintes peuvent s'écrire sous la forme :

$$K_I = Y(a) \sigma \sqrt{\pi a}$$

$Y(a)$ = facteur correcteur tenant compte de la géométrie de la fissure et des propriétés élastiques du matériau.

I.7 Zone plastifiée en fond de fissure :

Les expressions des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure, sont inversement proportionnelles à \sqrt{r} . Le calcul en élasticité qui aboutit à cette singularité en $1/\sqrt{r}$, prévoit donc qu'elles deviennent infinies lorsque $r \rightarrow 0$. Or nous savons très bien que dans les matériaux réels, les contraintes restent finies et qu'au-delà de la limite d'élasticité σ_E du matériau, il se forme une zone plastifiée dont le contour peut être déterminé.

L'approche la plus simple est celle d'Irwin. Cet auteur considère, en première approximation, que le contour de la zone plastique correspond au lieu des points où les contraintes atteignent la limite d'élasticité du matériau. Pour la détermination du rayon r_E pour lequel cette frontière coupe le plan d'une fissure en contraintes planes, il pose $\sigma_E = \sigma_y$, où σ_y est la limite d'élasticité en traction simple et σ_E est donnée par la relation de contrainte en mode I ; ce qui conduit à :

$$\sigma_y(r, \theta = 0) = \sigma_E = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_E}}$$

D'où

$$r_E = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2}$$

Pour représenter le rayon r_E (Figure I.7), on suppose que le comportement du matériau est élastique-plastique parfait, pour ensuite tout simplement tronquer le champ des contraintes à $\sigma_E = \sigma_y$.

Cette analyse fait cependant abstraction des forces non transmises représentées par l'aire hachurée de la Figure I.7. Pour tenir compte de ces forces, il convient d'assurer l'équilibre entre les deux répartitions (élastique et élastoplastique) des contraintes. Comme la taille r_p de la zone plastique doit donc être supérieure au rayon r_E , l'équilibre des forces entre les deux configurations conduit à :

$$\int_0^\infty \sigma_y dr = \sigma_E r_p + \int_{r_p}^\infty \sigma_y dr \Rightarrow \sigma_E r_p = \int_0^{r_p} \sigma_y dr$$

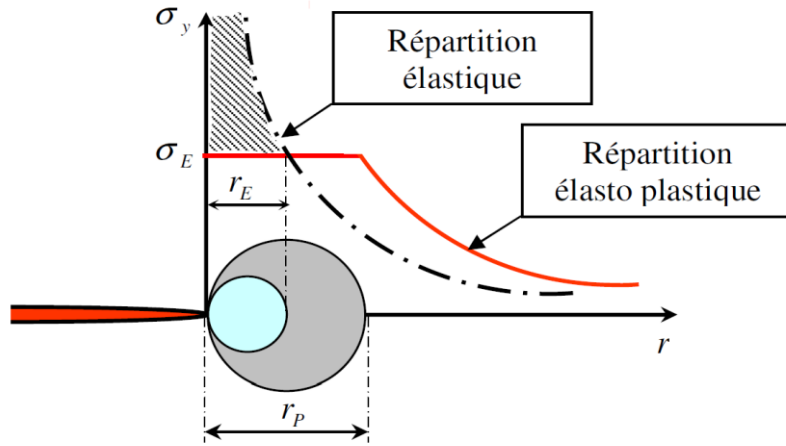


Figure I. 7 : Répartition des contraintes élastiques et élastoplastiques dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité

Soit, compte tenu de l'expression de σ_y :

$$r_p = \frac{K_I^2}{\pi \sigma_E^2} = 2 r_E$$

La distribution des contraintes dans la répartition élastoplastique pour $r > r_p$, est obtenue par une translation d'une distance r_E de la répartition élastique (Figure I.7). Irwin rend compte de cette translation en définissant un FIC effectif qu'il obtient en augmentant la longueur de fissure de r_E . Ce qui revient à considérer non pas la longueur réelle a de la fissure mais une longueur effective $a_{eff} = a + r_E$.

C'est ainsi que, dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie chargée en mode I, le FIC sans correction $K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ devient après correction [15] :

$$K_{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi(a + r_E)} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_E} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

I.8 Définition de la fatigue :

Le responsable de la ruine des structures est très souvent le phénomène de fatigue du matériau, phénomène qui se développe lentement dans le temps, sans modifications apparentes au niveau macroscopique des pièces et des structures et dans des zones souvent inaccessibles mais particulièrement sujettes à cet endommagement de par leur conception [14-16]. La fatigue intervient sous l'action de contraintes ou de déformations variables dans le temps, et pour des charges inférieures à la limite élastique du matériau, Figure I.8.

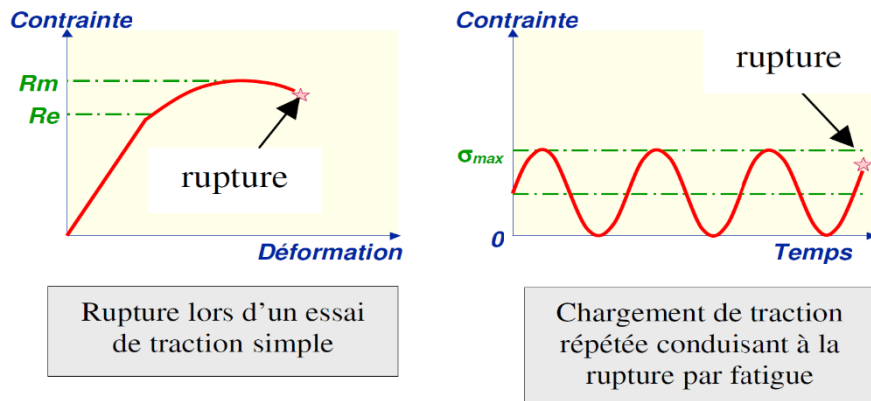


Figure I. 8 : Représentation du chargement en fatigue

I.9 La courbe de Wöhler :

Parmi les courbes qui définissent la durée de vie en fatigue d'un matériau, la courbe de Wöhler est celle qui est la plus connue. Elle définit une relation entre la contrainte appliquée σ et le nombre de cycles à rupture N_R , Figure I. 9. Elle permet de visualiser la tenue de la pièce ou des matériaux dans tous les différents domaines de sollicitations.

Cette courbe est déterminée à partir d'un ensemble d'éprouvettes soumises chacune à un effort périodique d'amplitude maximale σ et de fréquence constante, la rupture se produisant au bout d'un nombre de cycles N_R . A chaque éprouvette correspond un point du plan (σ, N_R) . D'après la courbe de Wöhler, la rupture est atteinte après un nombre de cycles qui croît quand la contrainte décroît. Les résultats des essais de fatigue sont répartis de façon statistique, de telle sorte que l'on puisse définir des courbes correspondant à des probabilités de rupture données selon l'amplitude de contrainte et le nombre de cycles.

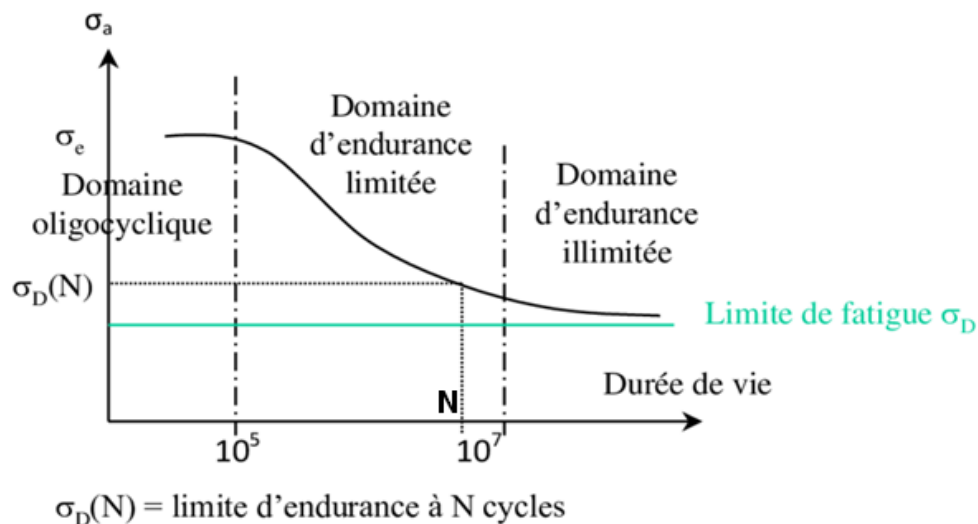


Figure I. 9 : La courbe de Wöhler

Chapitre I : RAPPEL SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

A partir de cette courbe (Figure I.9) on peut distinguer trois zones de fatigue :

- Zone de fatigue oligocyclique : la rupture apparaît après un faible nombre de cycles. Les contraintes appliquées y sont importantes et on peut observer une déformation plastique notable du matériau.
- Zone de fatigue polycyclique (ou d'endurance limitée) : la rupture apparaît après un nombre important de cycles de chargement. On n'observe aucune déformation plastique notable.
- Zone d'endurance illimitée (aussi appelée zone de sécurité) : la rupture n'apparaît pas avant un nombre très important de cycles [1- 16].

I.10 Propagation de fissures par fatigue :

I.10.1 Les différentes étapes de la fatigue :

Cet endommagement par la fatigue mené jusqu'à la ruine, comprend 3 périodes de durées variables suivant les matériaux et les caractéristiques des sollicitations (Figure I. 10):

- Période d'amorçage de fissures (d'habitude des défauts microstructuraux sont considérés préexistants dans la pièce) ;
- Période de propagation de fissures (courte) ;
- Propagation d'une fissure longue, jusqu'à la ruine de la pièce (rupture brutale).

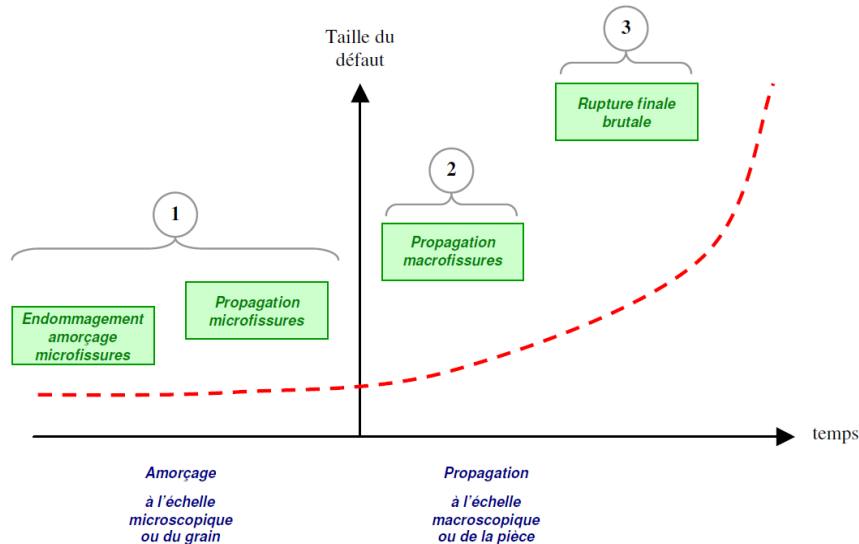


Figure I. 10 : Les différentes étapes de la fatigue

I.10.2 Le faciès de rupture :

Lors d'une rupture par fatigue, on observe à l'œil nu deux zones distinctes caractéristiques (voir Figure I.11):

- Une zone lisse et soyeuse, correspondant à la propagation en fatigue.
- Une zone à grains cristallins ou moins apparents, correspondant à la fissuration brutale.

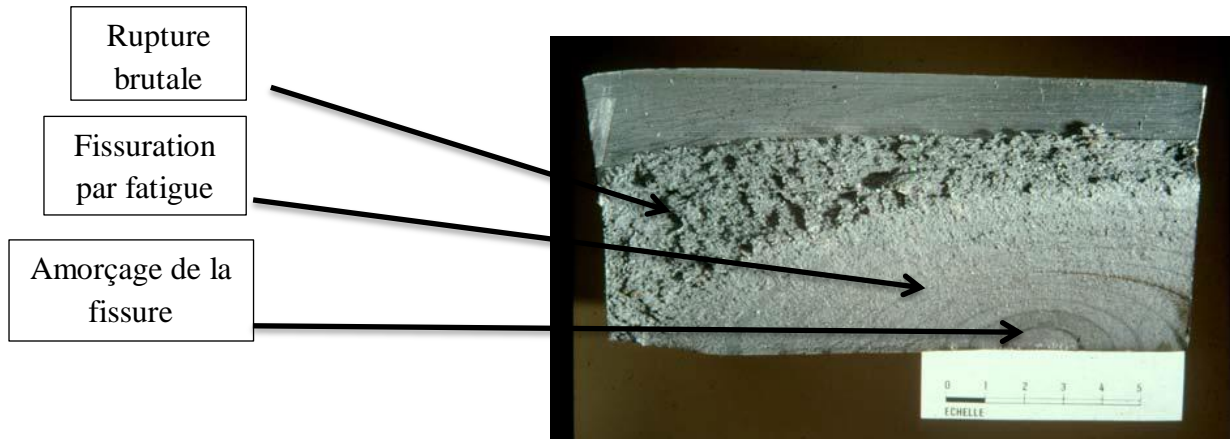


Figure I. 11 : Le faciès de rupture

Lorsque la fissure occupe une section de la pièce telle que la section résiduelle est trop faible pour supporter les sollicitations appliquées, il se produit la rupture brutale.

I.10.3 Fissure courtes :

La zone plastifiée en pointe de la fissure est importante devant la taille de la fissure, Figure I.12. On utilise alors la Mécanique de la Rupture Elasto-Plastique (MREP). La propagation de la fissure dans le milieu élasto-plastique est complexe et on considère que cette phase est en partie prise en compte dans l'étape d'amorçage de fissure.

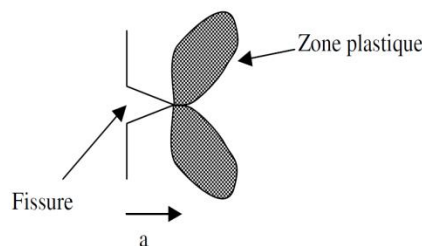


Figure I. 12 : Zone plastique d'une fissure courte

Toutefois de nombreuses études [17-18] ont montré un comportement atypique pour les fissures dites courtes, vis-à-vis du comportement décrit par Paris [19-20] pour les fissures longues, comme il est montré en Figure I.13.

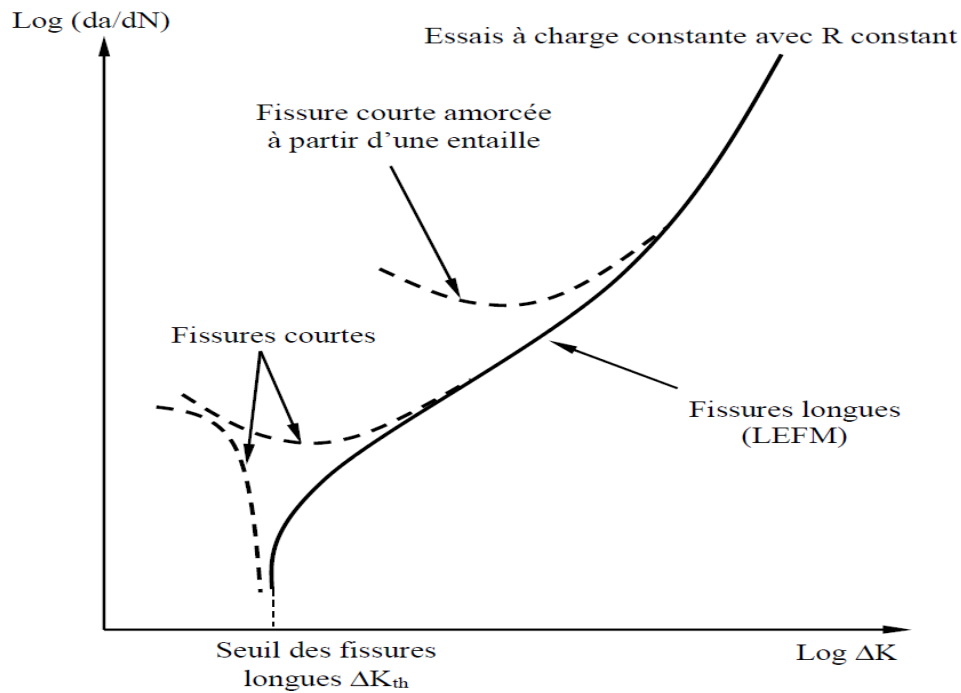


Figure I. 13 : Variation du comportement en propagation des fissures courtes par rapport à la courbe de fissuration de fissures longues

La figure I.13 montre des vitesses de propagation bien plus élevées pour des fissures courtes, par rapport à celles des fissures longues. On peut également noter une propagation des fissures courtes en-dessous de la valeur du seuil des fissures longues, ainsi que des ralentissements lorsque la taille de la fissure augmente pour rejoindre finalement la vitesse des fissures longues.

I.10.4 Fissures longues :

Une fissure est considérée comme longue si sa longueur est grande par rapport à la taille de la zone plastifiée en pointe de fissure. La mécanique linéaire de la rupture peut alors être appliquée dans cette condition de plasticité confinée. Paris et al. [19-20] ont proposé l'utilisation du seul facteur d'intensité de contraintes (FIC) d'Irwin pour décrire l'avancée de la fissure par cycle. Ils ont établi une relation empirique, dite *courbe de fissuration* (Figure I.14), qui relie l'amplitude de la variation du FIC (ΔK) (définie comme la différence entre les valeurs maximale et minimale associées au chargement lointain) et la vitesse de propagation da/dN .

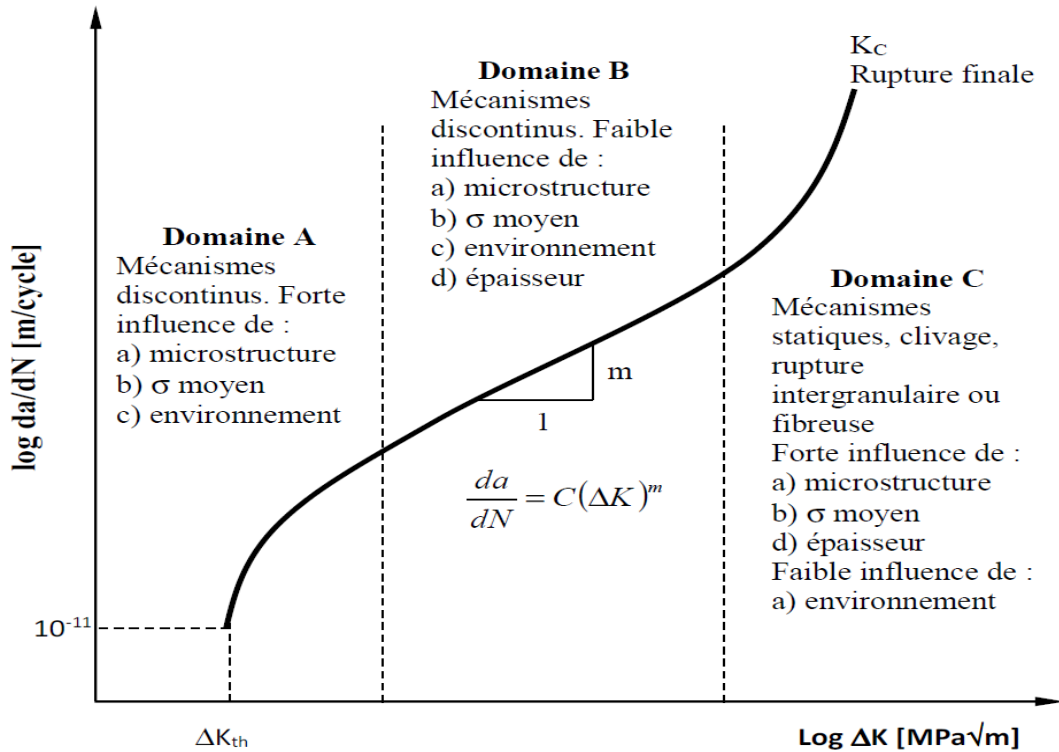


Figure I. 14 : Courbe de fissuration par fatigue d'une fissure longue sur une échelle bi-logarithmique

La figure I.14 présente schématiquement la courbe de propagation de fissures longues, où on distingue trois domaines principaux :

Le domaine A : est caractérisé par de faibles valeurs de ΔK . La propagation dépend fortement de la microstructure du matériau et de l'effet de l'environnement. ΔK_{th} est la valeur du FIC dite de seuil, en-dessous de laquelle il n'y a plus de propagation.

Le domaine B : est le domaine de Paris (ou linéaire), correspondant à une propagation stable, où la vitesse de propagation varie linéairement avec ΔK en échelle bi-logarithmique. La fissure se propage le plus souvent dans un plan perpendiculaire à la direction de l'effort appliqué. C'est le domaine où s'applique la loi de Paris.

Le domaine C : correspondant aux fortes valeurs de ΔK . La propagation s'accélère jusqu'à la rupture du matériau une fois que la ténacité K_c est atteinte [14-16].

I.11 Lois de propagation de fissures :

Pour décrire la partie linéaire de la courbe de fissuration par fatigue (domaine B, Figure I.14), Paris proposa la relation empirique :

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m$$

C et m sont des paramètres dépendant du matériau qui sont déterminés expérimentalement.

Chapitre I : RAPPEL SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

Toutefois, la loi de Paris n'est pas universelle, elle ne prend pas en compte l'effet de l'environnement, l'histoire du chargement, ni l'effet du rapport de charge $R = P_{min} / P_{max}$.

Cette loi ne décrit pas la totalité de la courbe ; cependant, d'autres lois empiriques ou analytiques ont été proposées pour décrire l'ensemble de la courbe de propagation. Forman, pour tenir compte de l'augmentation asymptotique de la vitesse de fissuration lorsque $K_{max} \rightarrow K_{IC}$, proposa une amélioration de la relation de Paris pour décrire les domaines B et C de la courbe de propagation:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^m}{(1 - R)(K_{IC} - K_{max})}$$

Où, C est une constante dépendant du matériau, pour les aciers m est de l'ordre de 4. Cette relation ne tient pas compte de l'existence d'un seuil de fissuration mais fait intervenir l'influence du rapport de charge R sur la vitesse de fissuration.

Pour rendre compte de l'effet du seuil dans la région A, Klesnil et Lucas [21] proposèrent quant à eux une modification de la relation sous la forme :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K^m - \Delta K_{seuil}^m)$$

Frost a alors proposé une relation qui rend compte de l'ensemble de la courbe de propagation, établie pour des aciers ferrito-perlitiques [22] :

$$\frac{da}{dN} = B \left[\frac{(\Delta K - \Delta K_{seuil})^4}{R_m^2 (K_{IC}^2 - K_{max}^2)} \right]^n$$

K_{IC} désignant la valeur critique du facteur d'intensité de contraintes, ΔK_{seuil} est la valeur de ΔK au seuil de propagation pour un rapport de charge R donné, R_m est la résistance à la traction du matériau, B et n sont des constantes caractéristiques du matériau.

Les durées de vie en fatigue peuvent alors être calculées en intégrant ce type de lois de propagation. Par exemple, le modèle de Kaynak [23] pour les fissures longues suppose que la durée de vie totale en fatigue est seulement égale à la durée totale de propagation des fissures longues, qui peut être déterminée en intégrant la loi de Paris relative aux fissures longues :

$$N_{tot} = N_{FL} = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C_{FL} \Delta K^{m_{FL}}}$$

Où a_f est la taille critique de la fissure et a_i la taille initiale de fissure [14-24].

I.12 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons introduit les notions de base de la mécanique de la rupture, telles que : la concentration des contraintes en fond de fissure, la répartition des champs de contraintes et des déplacements en voisinage de la fissure et le paramètre principal qui caractérise l'état de sollicitation : le facteur d'intensité de contrainte (FIC). Le phénomène de la fatigue est également introduit ainsi que les lois de propagation qui régissent la croissance des fissures. L'utilisation de ces lois permet d'évaluer la durée de vie résiduelle des structures contenant des fissures et qui sont sollicitées à des chargements cycliques.

Chapitre II

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II.1 Introduction :

Des problèmes, qui dans un passé récent ont été considérés comme insolubles par les méthodes analytiques classiques, sont maintenant aisément résolus par les méthodes numériques dont la plus utilisée est la Méthode des Eléments Finis ou 'MEF'. De ce fait, la complexité des calculs n'est plus d'actualité scientifique, surtout par l'avènement de l'ordinateur qui a amené les sciences de l'ingénieur au summum jamais atteint auparavant.

II.2 Historique :

Les bases théoriques de la MEF reposent d'une part sur la mécanique des structures de la formulation énergétique et d'autre part sur les méthodes d'approximations. La MEF est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'ailes d'avion). On y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956). Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites par exemple celui de la torsion de Saint Venant en divisant la section en triangles, mais elles restèrent sans suite.

L'expression élément finie a été inventée par Slough en 1960, la MEF s'attaque à tous les domaines du calcul de structures. On trouve des programmes de la MEF principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures, et qui sont conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs tels que : ABAQUS, SAP2000, CATIA, FORTRAN, etc.

C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement gigantesque et les possibilités d'application augmentent sans cesse [25].

II.3 Principes de la MEF :

La méthode des éléments finis repose sur les principes suivants :

- La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds (Figure II.1).
- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

Chapitre II : LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.
- Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation [26].

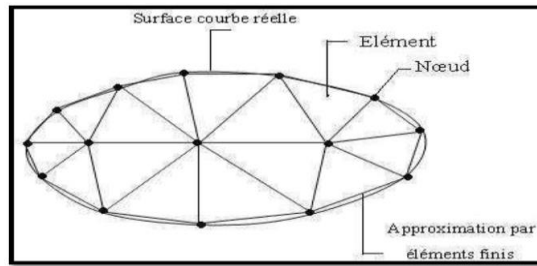


Figure II. 1: Maillage du domaine en triangles à trois nœuds

II.4 Étapes de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est considérée comme un outil de mathématiques appliquées destiné à résoudre les équations différentielles. Néanmoins, les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes. On peut les résumer en sept étapes :

1. Découpage du domaine en un maillage d'éléments finis ;
2. Interpolation en respectant les critères de convergence ;
3. Calcul des caractéristiques de chaque élément ;
4. Assemblage ;
5. introduction des conditions aux limites essentielles et résolution ;
6. Évaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, déplacements...)
7. Jugement de manière critique les résultats obtenus.

II.5 Propriétés d'un élément fini :

Le découpage en éléments finis permet d'isoler un élément fini pour l'étudier tout en établissant son état de contrainte, de déformation ou de déplacement.

Un élément fini peut être 1D, 2D ou 3D, avec des formes qui peuvent être simples, comme :

- segment d'une droite ou de courbe (plan ou courbe)
- triangle ou quadrilatère
- tétraèdre, prisme ou hexaèdre

Chapitre II : LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke dans le cas de l'élasticité), avec des propriétés mécaniques qui dans le cas d'un matériau isotrope se réduisent à deux paramètres : E et ν .

II.5.1 Les nœuds :

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres, ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces.

II.5.2 Les forces nodales :

À travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, selon les unes sont les réactions internes, les autres les forces F dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...).

II.5.3 Degrés de liberté :

Pour tout élément fini, on doit faire le choix d'une ou de plusieurs fonctions (en général le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds. Ces valeurs deviennent les inconnues nodales, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents et qui permettent de reconstituer la solution complète (ASSEMBLAGE), tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

II.5.4 Condition d'équilibre :

Pour chaque élément on doit établir :

- sa matrice de rigidité K
- son vecteur force F

Ainsi, pour chaque élément on a une relation entre la force et les déplacements :

$$F = KU$$

Les forces agissant sur toute la structure ou sur chacun des éléments doivent être en équilibre.

II.5.5 Condition de compatibilité :

Les déplacements de l'ensemble de la structure ou de chacun de ses éléments doivent être compatibles. En d'autres termes, les déplacements des extrémités des éléments, qui sont connectés entre eux, sont identiques. On peut encore dire que si on effectue une section sur un élément, les déplacements d'élément à gauche et à droite de cette section doivent être égaux. Pour que cette cohésion soit respectée (c.à.d. pour que les volumes élémentaires ; auxquels ont été appliquées les déformations, continuent de rester accolés), il faut que le champ de déformation dérive d'un champ de déplacement, continûment dérivable, tel que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right)$$

Les équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle sont données par [27] :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varepsilon_{ii} = \frac{\partial^3}{\partial x_j^2 \partial x_i} \mu_i$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varepsilon_{jj} = \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varepsilon_{jj} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varepsilon_{ii} = 2 \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} \varepsilon_{ij}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ki}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ji}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

II.6 Caractéristiques d'un élément fini :

II.6.1 Type des éléments finis :

La sélection de l'élément sera généralement fonction du type de problème à résoudre. Ils sont groupés en quatre classes :

- 1- les déplacements et les déformations planes.
- 2- la flexion des plaques.
- 3- les coques.
- 4- l'analyse des solides (3D).

Nous distinguons trois familles correspondantes à des différents type d'éléments finis à une, deux, trois dimensions, Figure II.2 :

- **Les éléments unidimensionnels (1D)** : barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques.
- **Les éléments bidimensionnels (2D)** : élasticité plane (en déformation ou en contrainte), plaque en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- **Les éléments tridimensionnels (3D)** : éléments de volume ou coques épaisses.
- **Les éléments axisymétriques** : qui constituent une classe bien particulière.

Toutes à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique ou méridienne courbe, (éléments de volume ou coques épaisses) [26].






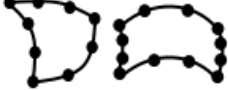



Eléments	linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			

Figure II. 2: Différents types d'éléments utilisés dans la MEF [28]

II.6.2 Choix des éléments finis :

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire, respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation. Certains programmes offrent un choix très vaste, d'autres très limité. Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles :

- Modèle (déplacement, équilibre, mixte, ...) ;
- Convergence (critères et taux) ;
- Degré (des divers champs) ;
- Nœuds, et inconnues aux divers nœuds ;
- Compatibilité des éléments les uns avec les autres ;
- Performances et limitations [29].

II.6.3 Qualité d'un élément fini :

Un bon élément fini doit réunir les propriétés suivantes :

- Aucun défaut de base (mécanisme...) ;
- Convergence rapide ;
- Bonne précision, déjà dans un maillage grossier ;
- Qualités de convergence et précision conservée pour une distorsion raisonnable ;
- Vecteurs forces consistants ;
- souplesse d'emploi ;

- Connexion (conforme) possible avec d'autres modèles ;
- Dérivation théorique simple et claire ;
- Programmation efficace et limpide [29].

II.7 Logiciel d'éléments finis

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant de pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels: NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, FORTRAN, etc. ...

Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses, telles que :

- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu.
- Analyse statique ou dynamique.
- Prise en compte de lois de comportement complexes.
- Prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement, etc. ...).
- Problèmes d'optimisation.

L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base minimum, suivie d'applications pratiques sur des problèmes simples.

II.8 Modélisation et discrétisation

La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Donc pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, il faut effectuer deux opérations essentielles : la modélisation et la discrétisation. Ces opérations se font en deux temps comme indiqué sur la figure II.3 [27].

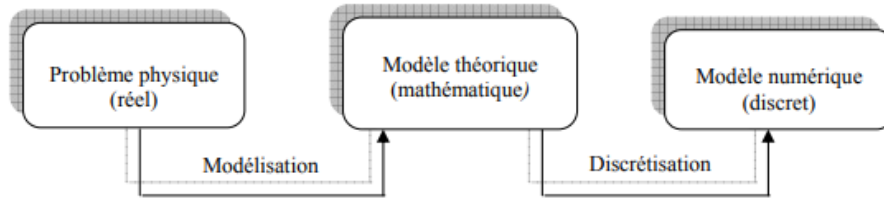


Figure II. 3 : Étapes de l'analyse d'un problème aux limites

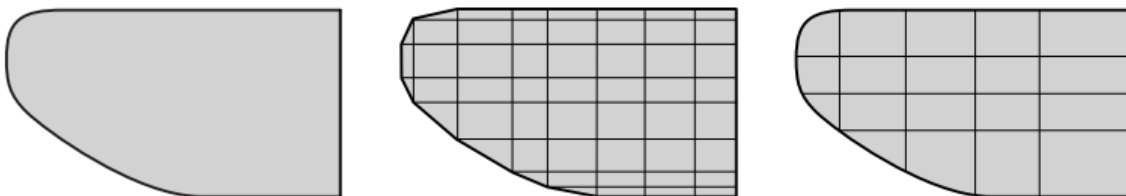
II.9 Discrétisation géométrique

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines :

$$D = \sum_{e=1}^{n_e} D_e \text{ tel que } \lim_{e \rightarrow 0} \left(\bigcup_e D_e \right) = D$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.

Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure II. 4 Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution [27].



(a) pièce à étudier et présentant des congés de raccordement (b) modifier la taille des éléments et raffiner au niveau des courbures (c) utiliser des éléments à frontière courbe

Figure II. 4 : Erreur de discrétisation géométrique

II.10 Avantages et inconvénients de la MEF

II.10.1 Avantages de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis offre plusieurs avantages, tels que :

- On peut représenter un grand nombre de formes de structures à l'aide du modèle analytique général commun.
- La possibilité de définir des maillages très irréguliers est l'un des grands avantages de la méthode des éléments finis.
- On peut utiliser des lois complexes de propriétés intrinsèques des matériaux si l'on compare aux possibilités des méthodes classiques de résolution, et elle offre de plus vastes perspectives en analyse non linéaire [29].

II.10.2 Les inconvénients de la MEF

La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients :

- Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique.
- Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple.
- Un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires.
- Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés [25].

II.11 Généralité sur logiciel ABAQUS

Le logiciel ABAQUS se compose de trois produits :

ABAQUS/Standard : est un solveur généraliste qui a recourt à un schéma traditionnel d'intégration implicite.

- Résolution basée sur l'algorithme de Newton-Raphson et la méthode de Riks;
- Problèmes linéaires et non linéaires ;
- Géométrie diversifiée : 1D, 2D, 3D et Axisymétrique ;
- Nombreuses procédures d'analyse dans le domaine temporel et fréquentiel.

ABAQUS/ Explicite : un schéma d'intégration explicite pour résoudre des problèmes dynamiques ou quasi-statiques non-linéaires.

- Analyse non linéaire (discrétisation spatiale et temporelle) ;
- Problème transitoire et dynamique des structures ;
- Résolution basée sur la méthode explicite d'intégration en temps.

ABAQUS /CAE : il constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour lesdits solveurs. Chacun de ces produits est complété par des modules additionnels et optionnels, spécifiques à certaines applications [30].

II.12 Caractéristiques du logiciel ABAQUS :

II.12.1 Type d'analyse :

Domaines physiques :

- Mécanique.
- Thermique.
- Electrique (piézoélectrique et thermique).
- Problèmes couplés.
- Une bibliothèque de matériaux de pointe, y compris l'habituel élastique et solides plastique, élastique ; modèles pour les mousses, le béton, les sols, les géo synthétiques.

Problèmes :

- Statique et dynamique.
- Linéaires et non linéaires.
- Dynamique des corps rigides.

II.12.2 Les éléments utilisés par ABAQUS :

On distingue différentes grandes classes d'éléments :

- **Les éléments unidimensionnels (1D)** : barre; poutre, rectiligne ou courbe
- **Les éléments bidimensionnels (2D)** : élasticité plane (contrainte ou déformation plane), plaques en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou rectangulaire.
- **les éléments tridimensionnels (3D)** : de forme tétraédrique, hexaédrique...etc.
- **les éléments axisymétriques** : (pour les pièces présentant une symétrie de révolution au niveau de la géométrie et du chargement).
- **les autres éléments** : ressorts, amortisseurs, rigides [31].

II.12.3 Les Modules

ABAQUS CAE est divisé en unités fonctionnelles appelées modules. Chaque module contient les outils qui sont propres à une partie de la tâche de modélisation.

Le module « PART » : Le module Part permet de créer tous les objets géométriques nécessaires à notre problème, soit en les dessinant dans ABAQUS CAE, soit en les important d'un logiciel de dessin tiers.

Le module « PROPERTY » : Le module Property permet, comme son nom l'indique, de définir toutes les propriétés d'un objet géométrique ou d'une partie de ces objets.

Le module « ASSEMBLY » : Ce module permet d'assembler les différents objets géométriques créés dans un même repère de coordonnées global. Un modèle ABAQUS contient un seul assemblage.

Le module « STEP » : Ce module permet de définir toutes les étapes et les requêtes pour le post traitement, c'est à dire le moment (temps) à partir duquel une force est appliquée et jusqu'à quand, il est aussi possible de créer des forces ou des conditions limites qui s'activent à des moments donnés.

Le module « INTERACTION » : Grâce à ce module, il est possible de spécifier toutes les interactions entre les différentes parties et régions du modèle, qu'elles soient mécaniques, thermiques ou autres. Il faut savoir qu'ABAQUS ne prend en compte que les interactions explicitement définies, la proximité géométrique n'étant pas suffisante.

Le module « LOAD » : Le module Load permet de spécifier tous les chargements, conditions limites et champs. Il faut savoir que les chargements et les conditions limites sont dépendants des steps, par exemple une force est appliquée au step 1 mais inactive au step 2.

Le module « MESH » : Ce module contient tous les outils nécessaires pour générer un maillage élément fini sur un assemblage.

Le module « JOB » : Une fois que toutes les tâches de définition du modèle ont été réalisées, il faut utiliser le module Job pour analyser ce modèle. ABAQUS va alors réaliser tous les calculs nécessaires et en tirer des résultats.

Le module « VISUALIZATION » : Ce module permet de visualiser le modèle et les résultats, les courbes des contraintes, des déformations, etc.

Le module « SKETCH » : Ce module permet de créer des formes bidimensionnelles qui ne sont pas associés à un objet. Il peut être utilisé pour des extrusions par exemple.

II.13 Conclusion

La méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base : la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée. Cette méthode permet de résoudre des problèmes mécaniques complexes. Dans notre étude elle permettra de déterminer la valeur du facteur d'intensité de contraintes développé à la pointe de la fissure.

Chapitre III

ETUDE DE CAS ET DISCUSSIONS

III.1 Introduction:

L'endommagement par fatigue des structures est un grand problème dans l'ingénierie. Les concepteurs sont souvent obligés d'utiliser au mieux les propriétés des matériaux. Les concepts de prévision de la durée de vie à la fatigue peuvent être différenciés par le critère de défaillance appliqué, c'est-à-dire l'initiation (amorçage) de la fissure, la propagation de la fissure et la durée de vie totale [32]. Une façon d'améliorer les prédictions de durée de vie en fatigue peut être d'utiliser des relations entre la vitesse de propagation des fissures et le facteur d'intensité de contrainte.

Pour déterminer la durée de vie résiduelle des composants structurels endommagés, deux méthodes de propagation des fissures sont utilisées : la méthode de propagation des fissures conventionnelle de Forman [33] et le modèle de propagation des fissures basé sur la méthode de densité d'énergie de déformation [34,35]. La dernière méthode utilise les propriétés de la fatigue oligocyclique dans le modèle de croissance de fissure.

Dans de nombreuses applications d'ingénierie, les études expérimentales sur les structures fissurées sont souvent très coûteuses et difficiles en raison de la géométrie compliquée et des conditions aux limites. Par conséquent, l'analyse numérique utilisant la méthode des éléments finis est souvent utilisée pour étudier les paramètres de rupture de ces structures. La détermination analytique du facteur d'intensité de contraintes est extrêmement difficile. En conséquence, la modélisation numérique semble être une bonne alternative. Pour les problèmes de mécanique du solide, la méthode de modélisation numérique la plus fréquente est celle basée sur l'utilisation des éléments finis.

Dans notre étude, on va déterminer la durée de vie résiduelle d'une structure fissurée et mettre en évidence l'influence de la présence des trous au voisinage d'une partie fissurée de l'aile d'avion. Cette influence est quantifiée par le calcul du facteur d'intensité de contrainte qui va être utilisé dans le modèle de propagation de fissures. Un modèle basé sur la méthode de densité d'énergie de déformation. Le facteur d'intensité de contrainte sera obtenu par modélisation par éléments finis en utilisant le logiciel de simulation «Abaqus ».

III.2 Présentation de l'étude :

Cette étude porte sur l'estimation de la durée de vie résiduelle en fatigue des composants structurels fissurés d'un avion léger d'entraînement. La zone fissurée est située au niveau du revêtement de l'aile d'avion, Figure III.1.

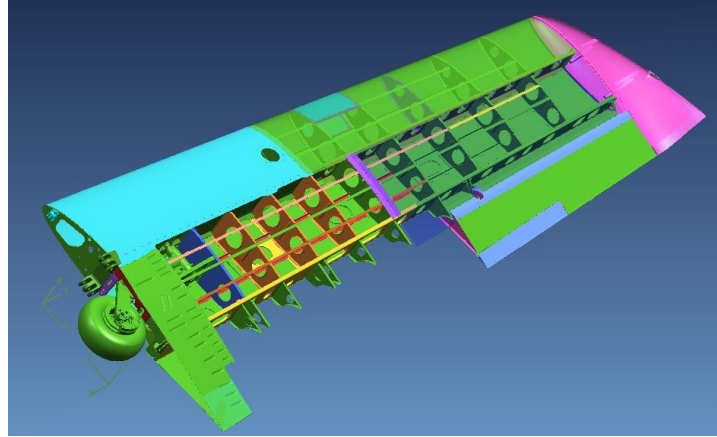


Figure III. 1: Structure d'aile d'avion d'entraînement léger

L'estimation de la durée de vie résiduelle en fatigue est menée sur une plaque métallique de forme rectangulaire, représentant une partie du revêtement de l'aile, et contenant une fissure de longueur $2a$ située entre deux trous circulaires de rayon R . La plaque est soumise à une contrainte de traction uniforme σ dans une direction perpendiculaire à celle de la fissure, Figure III. 2. On considère que le matériau est isotrope avec un module d'élasticité E et un coefficient de poisson ν , de valeurs indiquées dans le tableau III.1.

L'évaluation de la durée de vie résiduelle de la plaque fissurée est basée sur l'utilisation de la méthode de densité d'énergie de déformation, qui repose sur l'évaluation du facteur d'intensité de contraintes. Ainsi, il est essentiel d'avoir une bonne estimation de l'expression analytique du facteur de correction géométrique du facteur d'intensité de contraintes. Celle-ci pourra être obtenue en calculant, par la méthode des éléments finis, la valeur du facteur d'intensité de contraintes pour différentes longueurs de fissures.

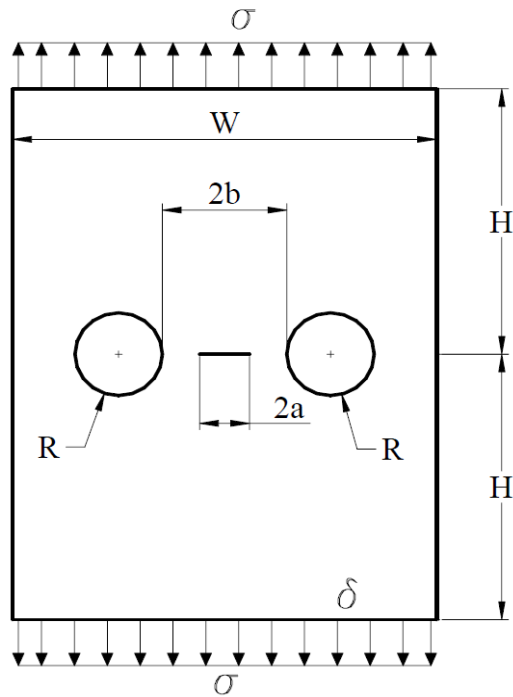


Figure III. 2: Géométrie et dimensions de la plaque étudiée

Tableau III. 1: Propriétés et géométries de la plaque étudiée

Paramètres	Valeur
R	2 mm
b	6 mm
W	26 mm
H	26 mm
δ	1 mm
E	$7.1 \cdot 10^4$ MPa
ν	0.3

III.3 Présentation du maillage utilisé :

La modélisation numérique est réalisée en deux dimensions avec un état de contraintes planes (Figure III.3), et en supposant que le matériau a un comportement linéaire élastique. Vu la symétrie observée par rapport au plan médian vertical, on peut simplifier notre modèle et modéliser seulement la moitié de la plaque.

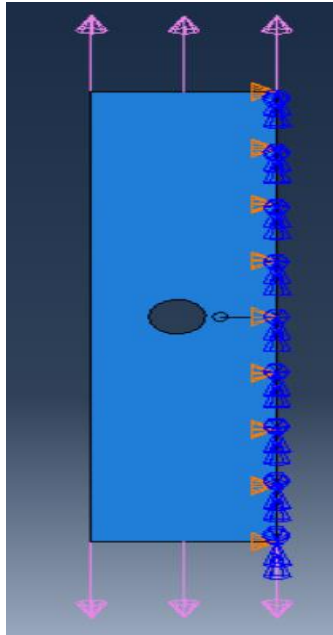


Figure III. 3: Représentation de la plaque

Un ensemble de 8593 éléments est utilisé pour discrétiser la plaque. Des éléments quadrilatères en contraintes planes biquadratiques à 8 nœuds et à intégration réduite sont utilisés « CPS8R » (Figure III.4).

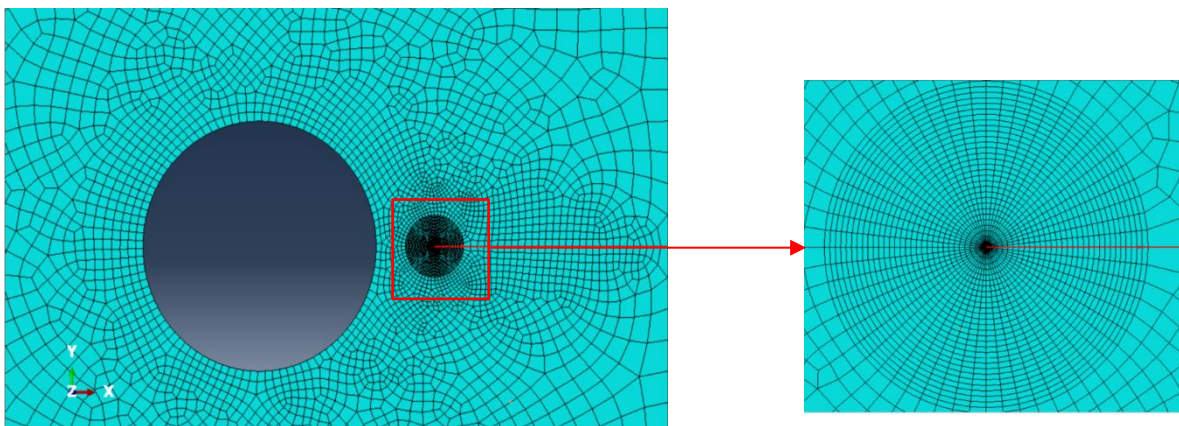


Figure III. 4 : Maillage utilisé pour la plaque et la pointe de la fissure

Un maillage plus fin et concentrique est utilisé autour de la pointe de la fissure pour avoir une meilleure évaluation du facteur d'intensité de contrainte (Figure III.4).

III.4 Calcul du facteur d'intensité de contrainte :

Deux situations sont à considérer pour l'obtention du facteur d'intensité de contrainte. La première correspond à celle où la plaque ne contient que la fissure au centre, et pour laquelle, le facteur d'intensité de contrainte est obtenu analytiquement et par la méthode des éléments finis. La deuxième situation par contre considère la présence de deux trous symétrique par rapport au centre de la fissure.

III.4.1 Facteur d'intensité de contraintes en absence de trous :

Tout d'abord, le calcul analytique et numérique du facteur d'intensité de contrainte est effectué en considérant la plaque comme étant infinie. Dans ce cas, on a :

$$K_{I,inf} = \sigma \sqrt{\pi a}$$

Avec σ : la contrainte appliquée, a : la longueur de la fissure.

On considère ensuite que la plaque est finie, et on calcule le facteur d'intensité de contrainte à partir la relation suivante :

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a}$$

Avec α : le coefficient de correction géométrique, qui est donné par :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1.77 + 0.277 \left(\frac{a}{h} \right) - 0.51 \left(\frac{a}{h} \right)^2 + 2.7 \left(\frac{a}{h} \right)^3 \right]$$

Avec a : la taille de la fissure ; h : la largeur de la plaque

Les valeurs obtenues du facteur d'intensité de contrainte analytique et numérique, sont regroupées dans le tableau III.2.

Tableau III. 2: Les résultats analytiques et numériques des FIC

a [mm]	2	2.5	3	3.5	4
$K_{I,inf}(anal) = \sigma \sqrt{\pi a}$ [N/mm ^{3/2}]	250.6	280.18	306.92	331.51	354.40
α	1.0217	1.0291	1.0383	1.0498	1.0641
$K_I(anal) = \alpha \sigma \sqrt{\pi a}$ [N/mm ^{3/2}]	256.03	288.33	318.68	348.02	377.12
$K_I(FEM)$ [N/mm ^{3/2}]	254.3	286.7	317.3	346.9	376.3
$Y_0 = K_I(FEM) / K_{I,inf}(anal)$	1.0148	1.0233	1.0338	1.0464	1.0618

Chapitre III : ETUDE DE CAS ET DISCUSSIONS

La figure III. 5 montre la variation du facteur géométrique du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de la fissure. Les valeurs obtenues par la modélisation en MEF sont en bon accord avec celles calculées analytiquement, et l'écart observé est inférieur à 1%.

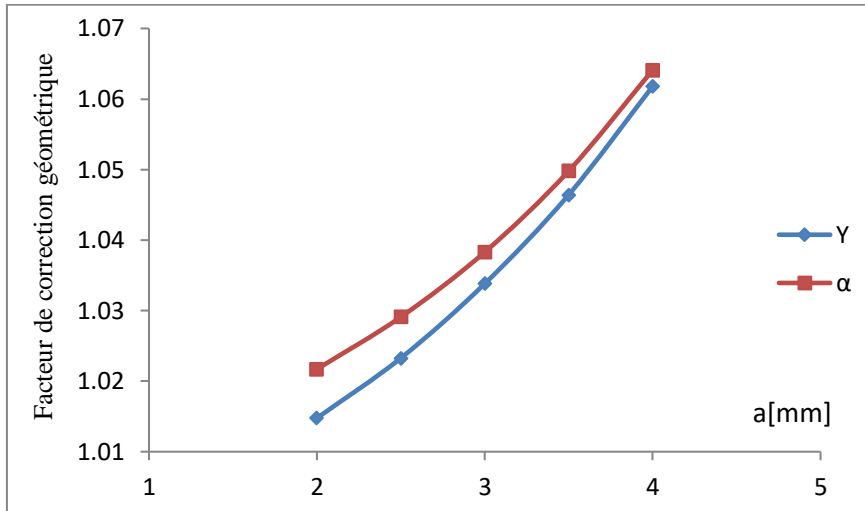


Figure III. 5 : Evolution du facteur de correction géométrique analytique et numérique en fonction de la longueur de la fissure

L'indépendance du contour utilisé pour l'obtention du facteur d'intensité de contrainte a tout d'abord été vérifiée. Pour cela, nous avons effectué un calcul sur les 6 premiers contours, de telle sorte que chaque contour présente une couche d'éléments autour de la fissure. Les valeurs trouvées sont stables pratiquement à partir du premier contour (Figure III.6). La documentation d'ABAQUS suggère de prendre la moyenne des calculs issue des différents contours sans prendre en compte la valeur du premier contour.

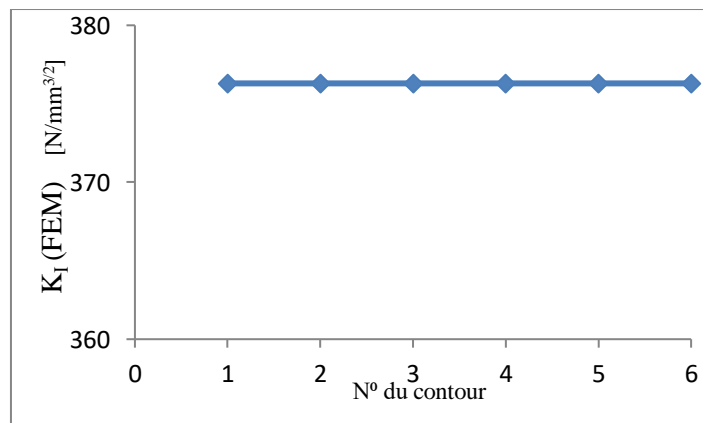


Figure III. 6 : Evolution de KI en fonction des contours, cas de $a = 4$ mm

La figure III.7 montre la distribution des contraintes au sein de la plaque. On distingue deux zones, celle qui est près de la pointe de la fissure présentant une forte concentration de contrainte, et celle qui est loin de la fissure les contraintes sont pratiquement du même ordre de grandeur que celle de la contrainte appliquée.

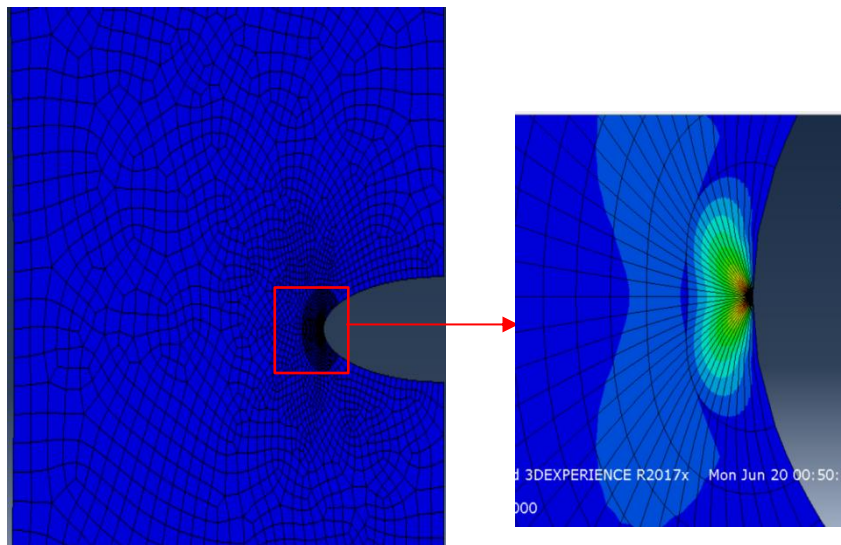


Figure III. 7 : Distribution des contraintes dans le cas de l'absence des trous ($a= 4\text{mm}$)

III.4.2 Facteur d'intensité de contraintes en présence de trous :

Dans le cas de la plaque fissurée en présence de deux trous symétriques par rapport au centre de la fissure, on ne dispose pas d'expression analytique du facteur de correction géométrique pour le calcul de K_I . Ainsi, la seule alternative possible et de l'obtenir à partir des valeurs de K_I pour différentes valeurs de longueurs de fissures, obtenues par modélisation en MEF.

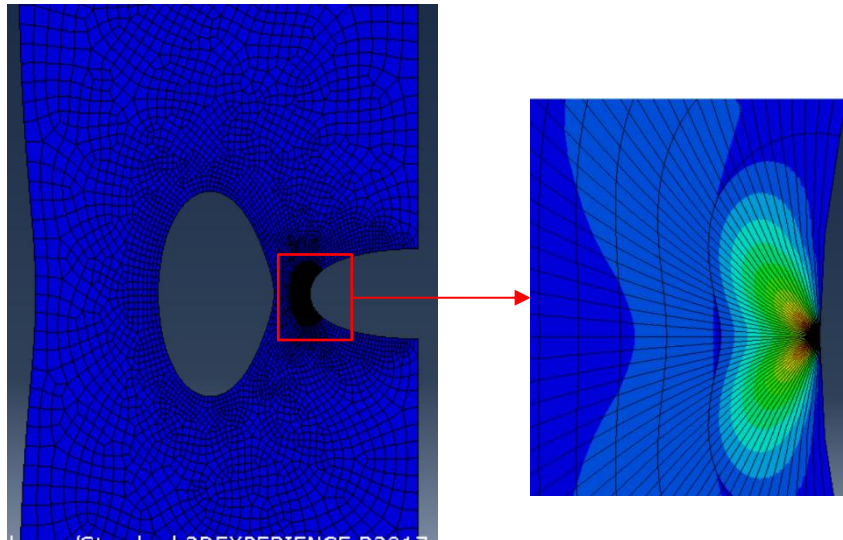


Figure III. 8 : Distribution des contraintes dans le cas de présence de trou (a= 4mm)

La figure III.8 présente la distribution des contraintes au sein de la plaque, où elles sont fortement localisées au voisinage de la pointe de la fissure.

Le tableau III.3 présente les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte, obtenues analytiquement et numériquement par la modélisation par éléments finis pour différentes longueurs de la fissure.

Tableau III. 3: Les valeurs analytiques et numériques du FIC

a [mm]	2	2.5	3	3.5	4
a/b	0.333	0.417	0.500	0.583	0.667
$K_{I, tr}$ (FEM) [N/mm ^{3/2}]	306 .0	353.9	407.6	475.5	577.3
K_I (FEM) [N/mm ^{3/2}]	254.3	286.7	317.3	346.9	376.3
K_I (anal) = $\alpha \sigma \sqrt{\pi a}$ [N/mm ^{3/2}]	256.03	288.33	318.68	348.02	377.12
Y (FEM) = $K_{I, tr}$ (FEM) / K_I (FEM)	1.203	1.234	1.285	1.371	1.534
Y (ANAL) = $K_{I, tr}$ (FEM) / K_I (anal)	1.195	1.227	1.279	1.366	1.531

La figure III.9 présente l'évolution du facteur de forme de correction géométrique Y(FEM) en fonction du rapport (a/b). On remarque que plus la taille du ligament séparant la pointe de la fissure et le trou devient faible, plus Y(FEM) augmente.

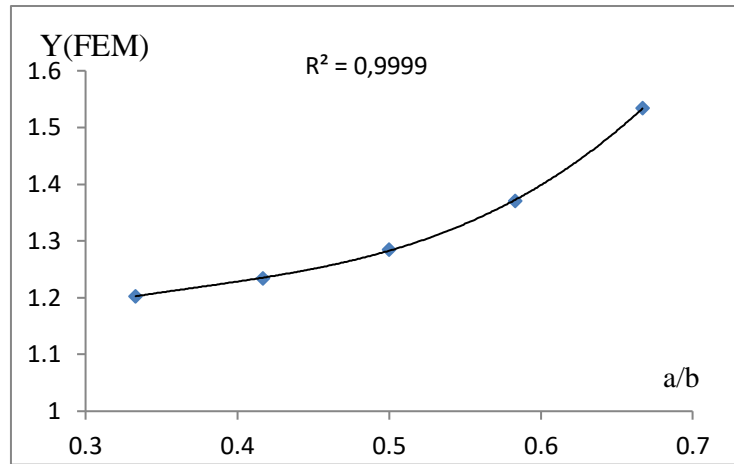


Figure III. 9 : L'évolution du facteur Y(FEM) en fonction de (a/b)

Le facteur de correction géométrique, qui sera désigné par $Y(a/b)$, peut être décrit par la relation suivante :

$$Y\left(\frac{a}{b}\right) = 7.8913\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 8.7786\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3.6311\left(\frac{a}{b}\right) + 0.6756$$

III.5 Estimation de la durée de vie résiduelle en fatigue :

Le suivi de la propagation de la fissure est indispensable pour estimer la durée de vie résiduelle de la plaque fissurée subissant un chargement cyclique. Pour cela, le modèle de propagation de fissure basé sur la méthode de la densité d'énergie de déformation est utilisé, et qui est défini par :

$$\frac{da}{dN} = \frac{(1 - n')\Psi}{4 E I_{n'} \sigma_f' \varepsilon_f'} (\Delta K_I - \Delta K_{th})^2$$

Avec,

E : module d'élasticité,

σ_f' : limite d'élasticité cyclique,

ε_f' : coefficient de ductilité à la fatigue,

ΔK_I : étendue du facteur d'intensité des contraintes,

Ψ : constante en fonction de l'exposant d'érouissage n' ,

$I_{n'}$: paramètre adimensionnel en fonction de n' .

ΔK_{th} : étendue du facteur d'intensité de contrainte seuil, défini par :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0}(1-R) \gamma$$

Chapitre III : ETUDE DE CAS ET DISCUSSIONS

Où, ΔK_{th0} est l'étendue du facteur d'intensité de contrainte seuil pour le rapport de chargement $R = 0$, et γ est un coefficient (généralement $\gamma = 0,71$).

Le nombre de cycles jusqu'à la rupture peut être obtenu dès lors par :

$$N = B \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{(\Delta K_I - \Delta K_{th})^2} ; \quad B = \frac{(1-n')\Psi}{4 E I_n' \sigma_f' \varepsilon_f'}$$

Avec,

$$\Delta K_I = Y \left(\frac{a}{b} \right) \sigma \sqrt{\pi a}$$

Les valeurs des différents paramètres sont données comme suit :

n'	Ψ	σ_f'	I_n'	E	ΔK_{th}	ε_f'
0.121	0.95152	613 MPa	3.067	$7.1 \cdot 10^4$ MPa	$\Delta K_{th0} = 8 \text{ MPa m}^{1/2}$	0.35

La figure III.10 montre l'évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles pour une contrainte cyclique $\sigma_{\max} = 100$ MPa, avec un rapport de chargement $R = 0$.

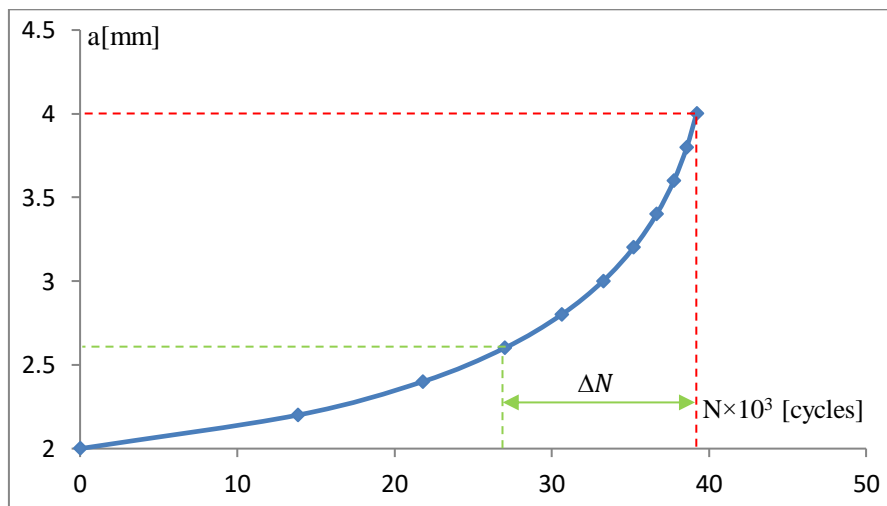


Figure III. 10 : Evolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles

En prenant la taille critique de la fissure $a_c = 4$ mm, on peut déterminer pour un nombre de cycles donné la durée de vie résiduelle ΔN avant d'atteindre le seuil critique de longueur de fissure.

III.6 Conclusion :

La modélisation par éléments finis de la plaque fissurée nous a permis de constater qu'il existe une forte localisation de la contrainte aux alentours de la pointe de la fissure. D'autre part, la valeur du facteur d'intensité de contrainte est affectée par la présence des trous au voisinage de la fissure. En l'absence d'une expression analytique caractérisant cet effet, la modélisation par éléments finis nous a permis d'établir une approximation polynomiale du facteur de correction géométrique pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Cela nous permet d'évaluer par la suite la durée de vie résiduelle avant d'atteindre le seuil critique de la longueur de la fissure.

Conclusion générale

L'estimation de la durée de vie résiduelle des équipements endommagés, sollicités en fatigue, est essentielle pour assurer leur bon fonctionnement et le niveau de sécurité requis. Notre étude s'est intéressée au cas du revêtement d'aile d'avion léger d'entraînement contenant une fissure. Etant donné que le revêtement possède des trous, cela affecte la répartition des contraintes et des déformations. La modélisation par éléments finis permet d'obtenir le niveau des contraintes aux alentours des trous et la valeur du facteur d'intensité de contrainte de la fissure. D'autant plus qu'une forme analytique du facteur de correction géométrique nécessaire pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte est non disponible. L'utilisation du logiciel Abaqus pour conduire ces modélisations nous a permis de :

- Obtenir la répartition des contraintes au voisinage de la fissure et des trous.
- Déterminer le facteur d'intensité de contrainte pour différentes longueurs de la fissure.
- Etablir une approximation polynomiale d'ordre 3 du facteur de correction géométrique.
- Estimer la durée de vie résiduelle de l'utilisation du revêtement avant que la fissure n'atteint une taille critique conduisant à la rupture.

Les résultats obtenus montrent l'intérêt de la modélisation par éléments finis et qu'elle peut être une bonne alternative dans le cas où on ne dispose pas de formes analytiques du facteur de correction géométrique nécessaire pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte.

Les perspectives que l'on peut dégager pour la poursuite de ce travail sont les suivantes :

1. Le calcul du FIC en mode I dans le domaine de la mécanique non linéaire de la rupture pour mieux tenir en compte le comportement élasto-plastique du matériau.
2. Etude d'autres problèmes impliquant le calcul du FIC pour différents modes de sollicitations.

Références

- [1] SALMI ABDALLAH. Etude de la propagation de fissures sous chargement thermomécanique. Université DjillaliLiabes, Sidi Bel Abbès Département de Génie Mécanique 2019/2020.
- [2] Ba Danh LE. Modélisation discrète en mécanique de la rupture des matériaux fragiles. UNIVERSITÉ DE STRASBOURG ÉCOLE DOCTORALE MSII (ED n°269) INSA de Strasbourg 07 Juin 2013.
- [3] Baker AA. Jones R. (Eds.), (1988), “Bonded Repair of Aircraft Structures”, MartinusNijhoff Publishers.
- [4]. Mr Ahmed BENHAMOUDA. Etude du comportement des fissures dans les tubes sous pression interne. UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE département de génie mécanique. 2009-2010.
- [5] J.R. Rice a independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and craks. Journal of Applied mechanics, 35 : 379-386 1968.
- [6] H.D.Bui. Dual path-independent integral in the boundary value problems of craks. Eng .Fract.mech,6:287, 1973.
- [7]. Pierre CHAUCHOT et Jacques LABEYRIE/ rupture fragile des pièces minces et méthodes des équations intégrales/ publications du centre national pour l'exploitation des océans (C N E X O) 1982.
- [8] D.MIANNAY. Mécanique de la rupture. 1995.
- [9] Shixiang MA. Propagation de fissure en mode mixte dans un milieu élasto-plastique avec prise en compte des contraintes résiduelles. Université BLAISE PASCAL – Clermont II Ecole Doctorale (Spécialité : Génie Mécanique) 13 Janvier 2005.
- [10] Westergaard H.M. Stresses at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete, Proc. American Concrete Institute 1934; 30: 93-102.
- [11] Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, Journal of Applied Mechanics 1957; 24: 361–36.
- [12] Sneddon I.E. The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid, Proc. R. Soc. Lond. A. 1946, 187: 229-260.
- [13] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack, ASME Trans. J Appl. Mech. 1957; 24:109-114.

- [14]. Saverio FIORDALISI, Catherine GARDIN et Christine SARRAZIN-BAUDOUX/ Modélisation tridimensionnelle de la fermeture induite par plasticité lors de la propagation d'une fissure de fatigue dans l'acier 304L/ institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE ET D'AEROTECHNIQUE 24/11/2014.
- [15] Zaghloul A /Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture/ Université de Lorraine, 2016/2017.
- [16] David LEBAILLIF. Fissuration en fatigue des structures mécano-soudées soumises à un environnement mécanique complexe. Université BLAISE PASCAL – Clermont II 13 septembre 2006.
- [17] Frost N.E., Dixon J.R. A theory of Fatigue crack growth. International Journal of Fracture Mechanics December 1967; 3 (4): 301-316.
- [18] Taylor D., Knott J.F. Fatigue crack propagation behaviour of short cracks – the effect of microstructure. Fatigue of Engineering Materials and Structures 1981; 4(2):147-155.
- [19] Paris P., Gomez M., Anderson W. A rational analytic theory of fatigue. Trends Eng 13 1961: 9-14.
- [20] Paris P, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation law. J Basic Eng Trans ASME 1963: 528-534.
- [21] M. Klesnil and P. Lucas, Effect of stress cycle asymmetry on fatigue crack growth material science and engineering, 9, p. 231-240, 1972.
- [22] N.E. Frost, L.P. Pook and K. Denton, eng.fract.mech., vol.5,P1061,1973.
- [23] C. Kaynak, A. Ankara and T.J. Baker, Effects of short cracks on fatigue life calculations Int. J. Fatigue, Vol. 18, N° 1, p. 25-31, 1996.
- [24] Aboulghit EL MALKI ALAOUI. Influence du chargement sur la propagation en fatigue de fissures courtes dans un acier de construction navale. Institut supérieur de génie mécanique et productique. L'Université de Metz.
- [25] BEN ABDERRAHMANE Prénom: Abdelfattah/ Modélisation numérique de l'interaction des fissures /Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle 2020.
- [26] R.S. Barsoum – On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, Int. J. for Num. Meth. In Engng, Vol. 10, pp. 25-37, 1976.
- [27] NACER Abdelaziz et BENDJAOUANE Aymen /modélisation par élément finis d une structure a fressure multiples : cas de la flexion Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle 2021.

- [28] Dr. AMIRAT Mohamed / Dr BELOUFA Mohammed Amine. «COURS ET APPLICATIONS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS». Universitaire d'Ain Témouchent Département de Génie Mécanique Polycopiés MEF 2021.
- [29] <http://thesis.univ-biskra.dz/2294/4/Chapitre%2002.pdf>.
- [30] Bouleftour Abderrahmane /Evaluation d'éléments finis volumiques dans Abaqus sur des cas tests non linéaires géométriques /Université de Biskra Département de Génie Mécanique Juin 2014
- [31] BERDJI MOHAMED EL BACHIR GHERIBI NOUREDDINE / Modélisation d'une structure en matériaux isotropes par la méthode des éléments finis / Université KasdiMerbah Ouargla Département Génie Mécanique 2018/2019
- [32] Maksimović S, Posavljak S, Maksimović K, Nikolić-Stanojević V and Djurković V, Total Fatigue Life Estimation of Notched Structural Components Using Low-Cycle Fatigue Properties, *J. Strain*, (2011), 47 (suppl.2), pp 341-349.
- [33] Forman, R.G., et al.: Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures, *J. Bas. Engng. Trans. ASME* 89, 459, 1967.
- [34] Maksimović S., Vasović I., Maksimović M., Đurić M.: Residual life estimation of damaged structural components using low-cycle fatigue properties, Third Serbian Congress Theoretical and Applied Mechanics, Vlasina Lake, 5-8 July 2011, pp. 605-617.
- [35] Sehitoglu, H., Gall, K., Garcia, A.M.: (1996), Recent Advances in Fatigue Crack Growth Modeling, *Int. J. Fract.*, **80**, pp. 165-192.
- [36] R.D. Henshell, K.G. Shaw – Crack tip finite elements are unnecessary, *Int. J. for Num. Meth. In Engng*, Vol. 10, pp. 25-37, 1976.
- [37] H.D. Hibbitt – Some properties of singular isoparametric elements, *Int. J. for Num. Meth. In Engng*, Vol. 11, NO 1, pp. 180-184, 1977.
- [38] 11 janv. 2008 ... Mécanique des Structures Navales de l'ENSIETA, le Laboratoire de Physique et ... Aussi, je voudrais remercier Abderrahim ZEGHLOUL, Professeur à l'Université de Metz. Je lui.....VII-1-1 Mécanique linéaire de la rupture. P-155-159).
- [39] P. Tong, T.H.H Pian, S.J. Lasry – A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity. *Int. J. for Num. Meth. In Engng*, Vol. 7, pp. 297-308, 1973.

Annexe A :

Eléments singuliers

L'utilisation standard de la méthode des éléments finis ne permettant pas de rendre compte des singularités des champs de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure, il a été nécessaire d'effectuer quelques modifications. Plusieurs idées ont été proposées : du raffinement de la zone singulière à l'introduction brutale de la singularité dans les fonctions de forme, la plupart de ses techniques ont peu à peu été abandonnées.

Ce sont Henshell et Shaw [36] d'une part, et Barsoum [17] d'autre part, qui finirent par trouver une solution préservant à la fois les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation. Le fait de déplacer les nœuds milieux des côtés correspondant à la pointe de la fissure (arêtes 1-2 et 1-4) au quart de la longueur (Figure A.a) permet de forcer la singularité, tout en représentant correctement un champ constant de déformation, et un déplacement d'ensemble.

Toutefois, si la singularité existe le long des côtés en contact avec la pointe de la fissure, elle disparaît sur les autres rayons émanant du nœud 1. Hibbitt [37] a de plus montré en 1977 que l'énergie de déformation (et donc la raideur) n'était plus bornée lorsque l'on tendait vers la pointe de fissure. Il a alors fallu introduire le triangle à 8 nœuds avec nœuds au quart (Figure A.b), la pointe de fissure se trouvant aux trois nœuds confondus 1-8-4. Cet élément garantit alors la singularité pour toutes les arêtes émanant du nœud 1, ainsi qu'une énergie de déformation bornée lorsqu'on tend vers la pointe de fissure [38]. Tong et Pian [39] ont également proposé un super-élément mixte à 9 ou 17 nœuds, avec présence d'une fissure centrée et qui permet de prendre en compte la singularité.

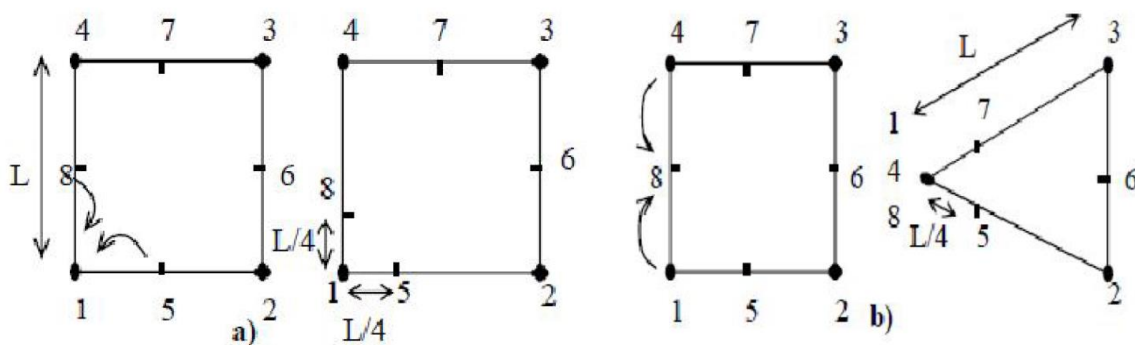


Figure (A). – a) Élément quadrangle singulier – b) Élément triangulaire singulier [38].

Annexe B

Construction du modèle dans ABAQUS:

La réalisation complète du modèle s'effectue après un passage successif dans les modules : Part, Property, Assembly, Step, Interaction, Load, Mesh, Job.

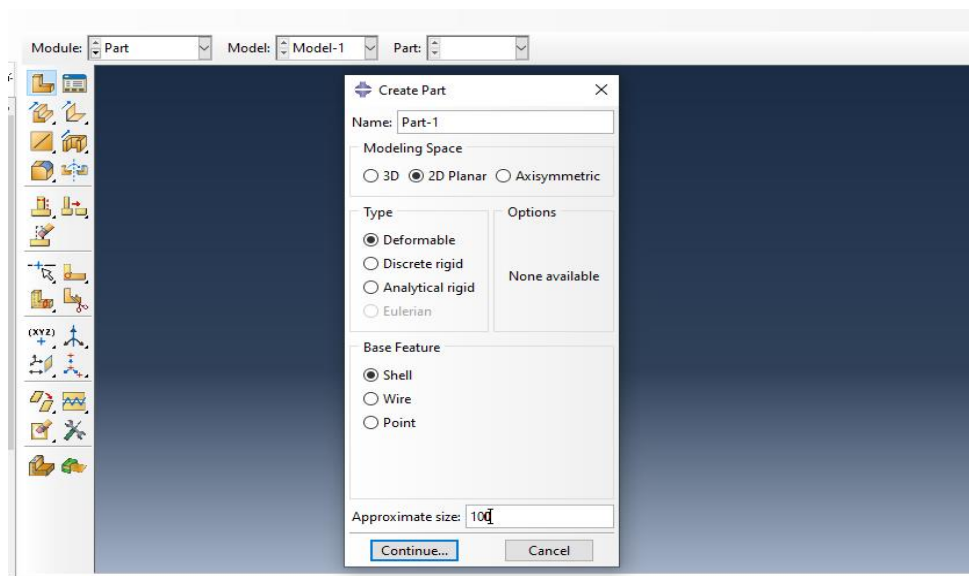


Figure B.1. Création de la géométrie

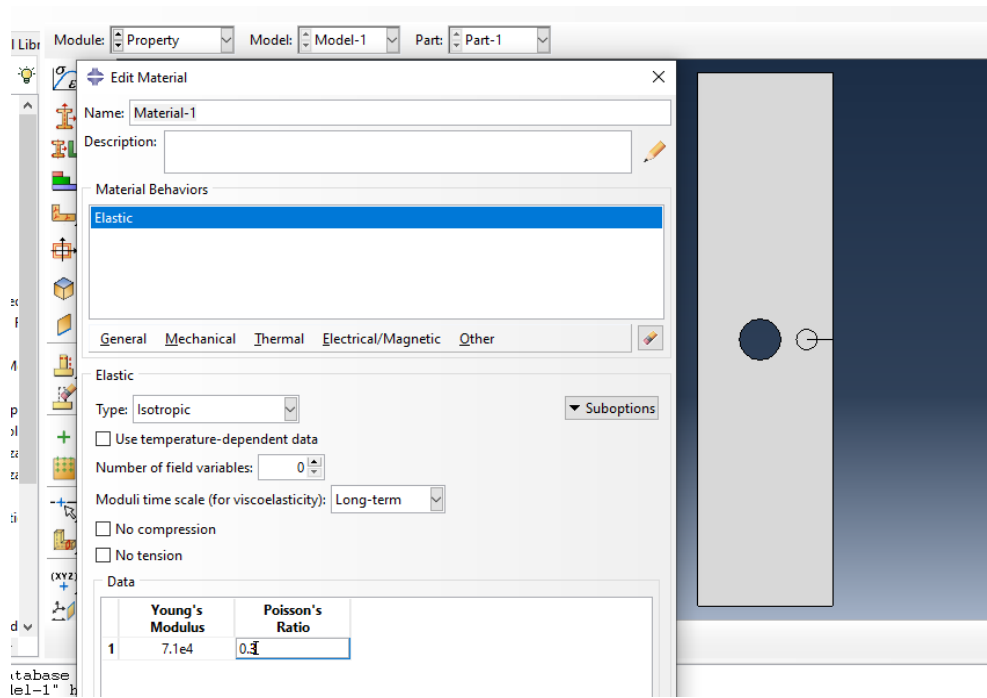


Figure B.2. Définition du matériau

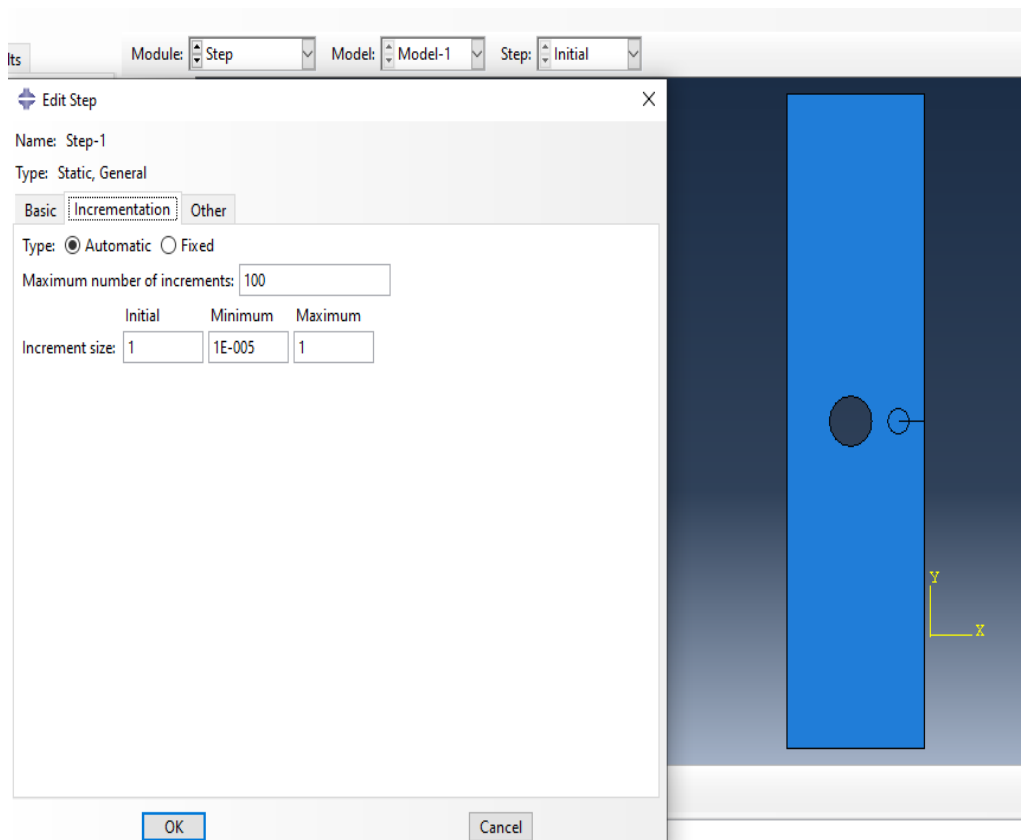


Figure B.3. Création des étapes

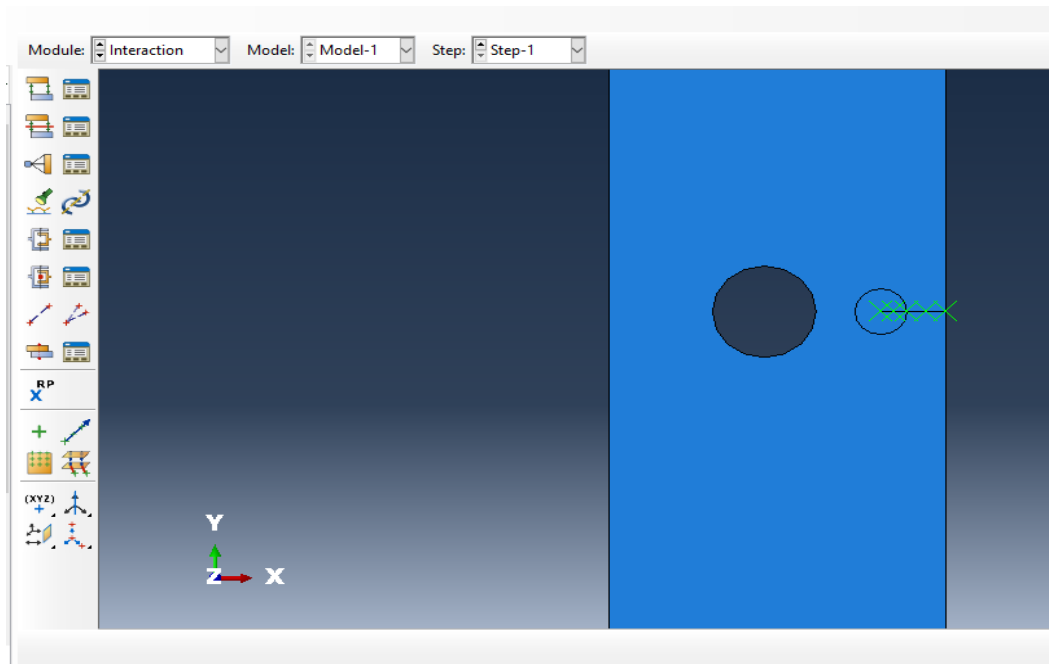


Figure B.4. Définition de la fissure

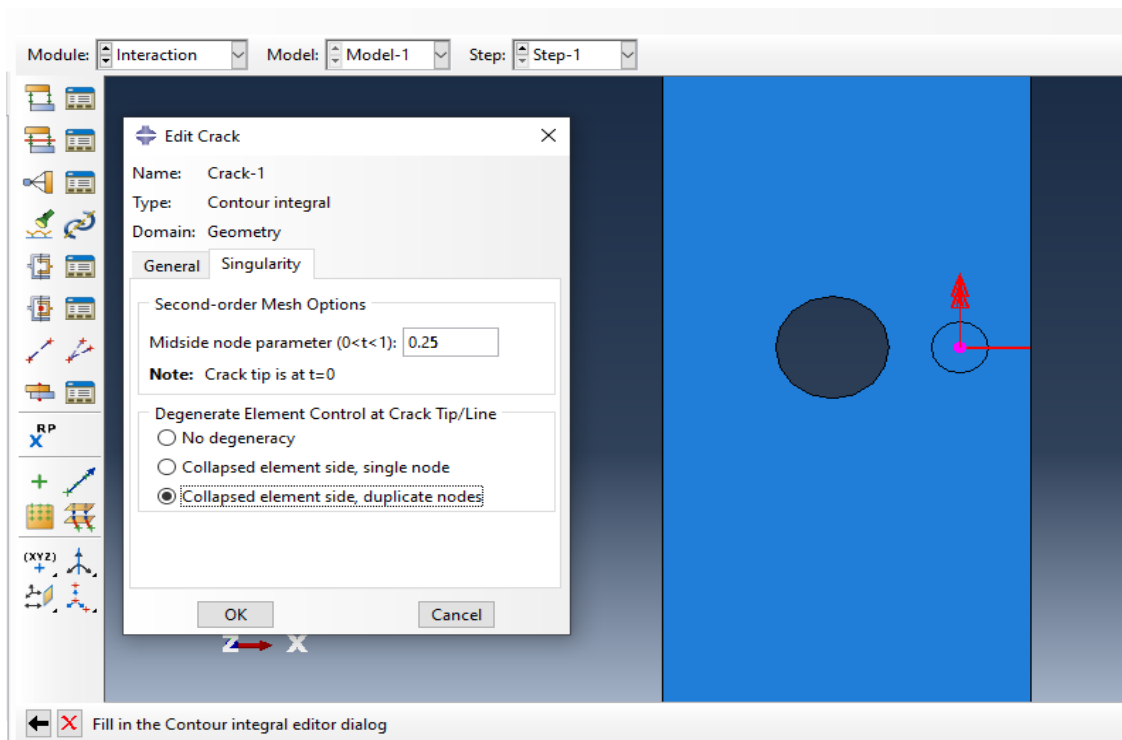


Figure B.5. Définition de la singularité de la fissure

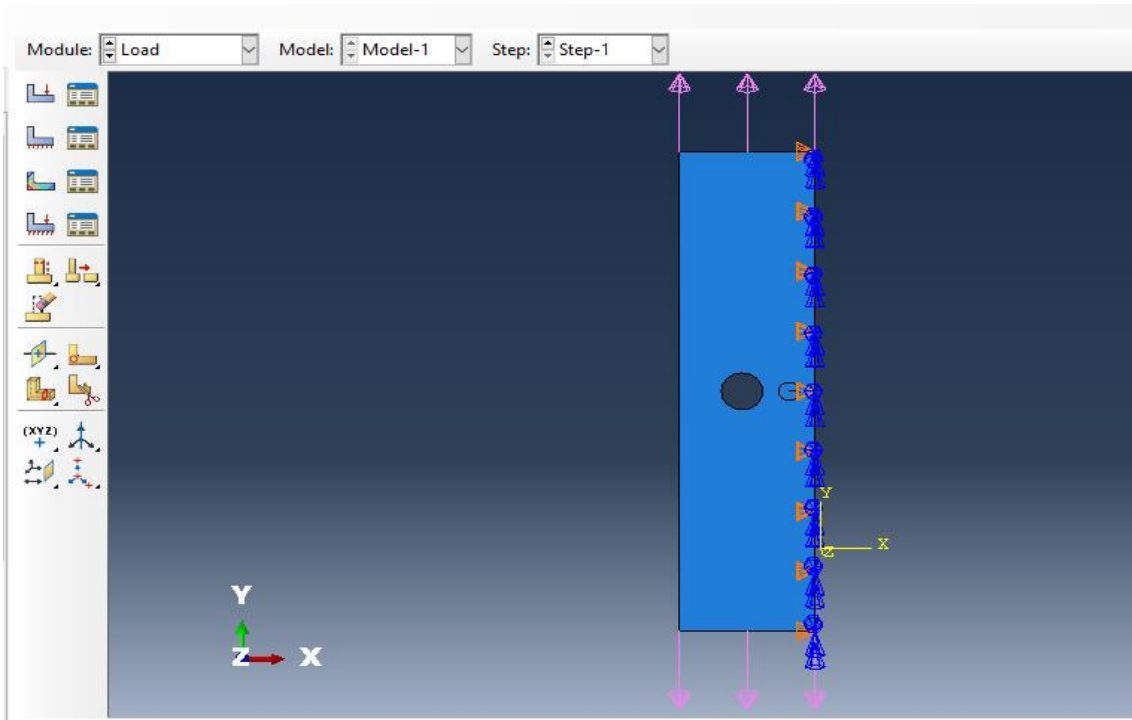


Figure B.6. Définition de la contrainte et des conditions limites

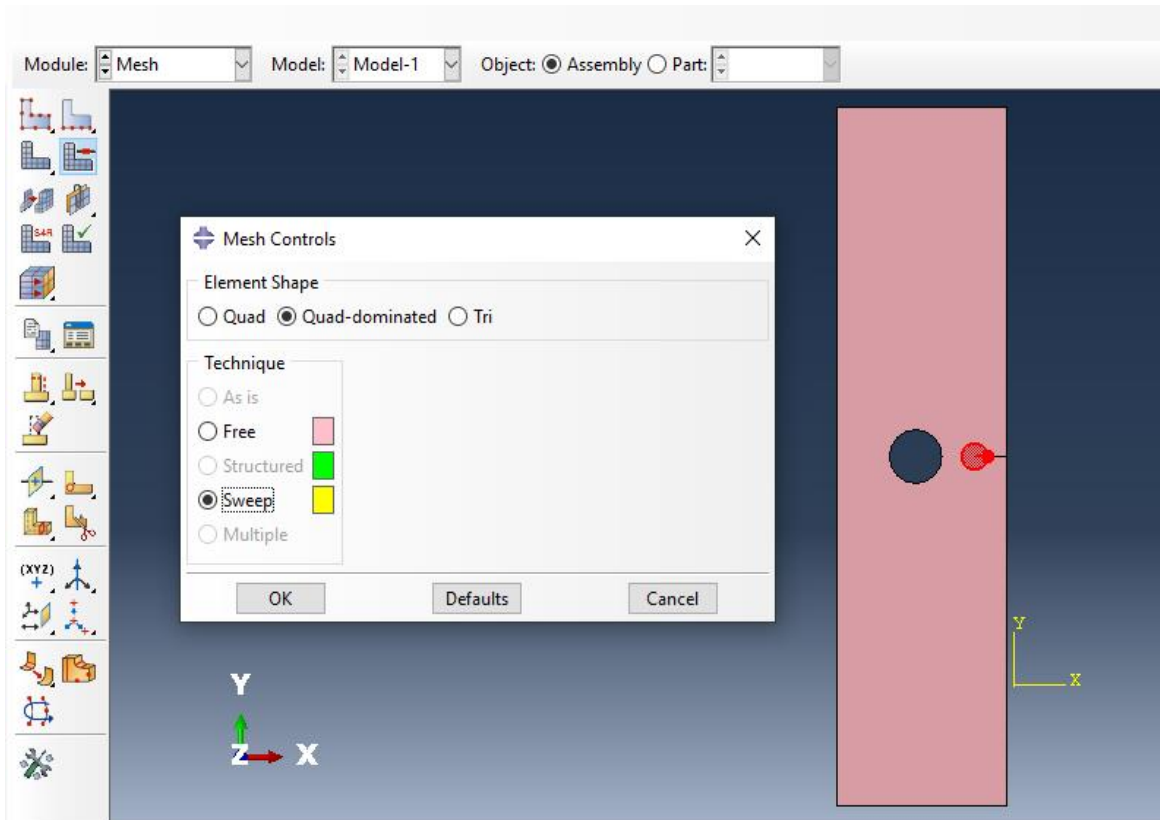


Figure B.7. Choix du type de maillage

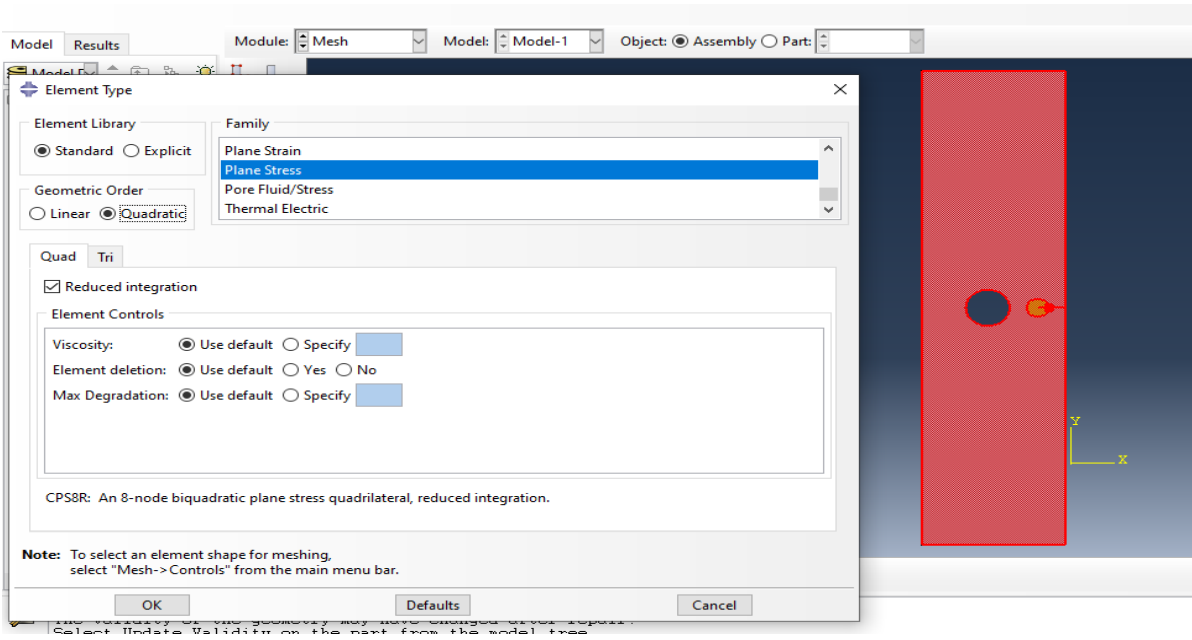


Figure B.8. Choix du type d'éléments

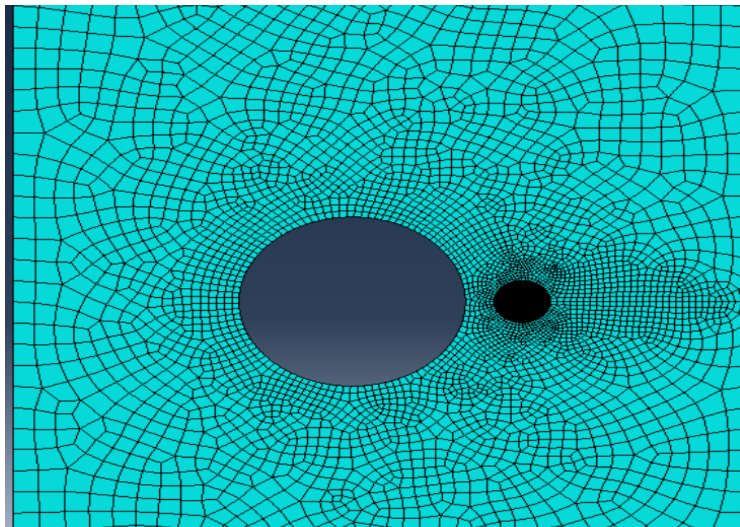


Figure B.9. Maillage de la plaque

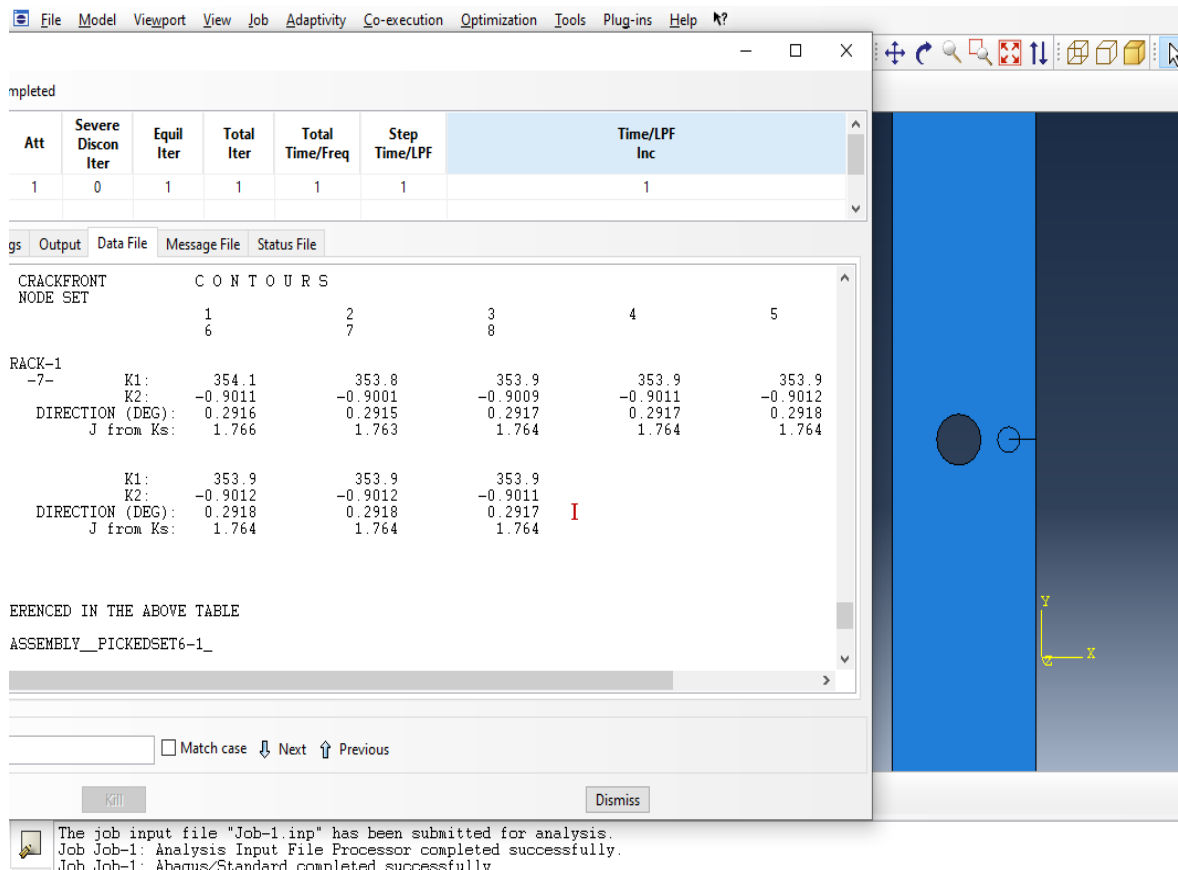


Figure B.10. Valeur du facteur d'intensité de contrainte