



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد  
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed  
-----  
معهد الصيانة و الأمن الصناعي  
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

**Département de Maintenance en Instrumentation**

## **MÉMOIRE**

Pour l'obtention du diplôme de Master

**Filière : Génie Industriel**

**Spécialité : Ingénierie de la Maintenance en Instrumentation**

### **Thème**

**Estimation de la durée de vie restante d'un équipement industriel dans le cadre d'une maintenance prédictive**

Présenté et soutenu publiquement par :

**BENAMAR Madina Cherifa**

**BECHAR Nerimene**

Devant le jury composé de :

<b>Nom et Prénom</b>	<b>Grade</b>	<b>Etablissement</b>	<b>Qualité</b>
BOUHAFS Mohamed	MCB	Université d'Oran 2	Président
TITAH Mawloud	MCB	Université d'Oran 2	Examinateur
NOUREDDINE Rachid	Prof.	Université d'Oran 2	Encadreur

**Année 2021 / 2022**

## **Remerciements**

*En premier lieu, nous remercions le Dieu, tout puissant, de nous avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.*

*Nous remercions très particulier notre encadreur, Monsieur **NOUREDDINE Rachid**, Professeur à l'Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed, pour l'encadrement de ce travail, sa disponibilité, sa clarté d'explication, sa patience, sa détermination et la liberté de manœuvre qu'il nous a accordé et qui ont été pour nous un exemple et un soutien particulièrement efficaces dans les moments de doute, en plus de nous avoir fait prendre contact avec le monde de la recherche. Il nous a toujours encouragé et précieusement conseillé. Nous souhaitons tout d'abord lui exprimer notre profonde gratitude.*

*Nous voudrions aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui nous font le grand honneur de juger ce travail.*

*Nous tenons à remercier Monsieur BOUHAFS Mohamed Docteur à l'Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed de nous faire l'honneur de présider le jury de ce projet.*

*Nous remercions vivement Monsieur TITAH Mawloud Docteur à l'Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed pour la confiance dont il nous fait preuve en faisant parties de ce jury.*

*Ensuite, nous exprimons nos reconnaissances à tous nos enseignants d'avoir enrichi nos connaissances et de nous avoir guidé durant notre cursus de formation et aussi le personnel d'entreprise de nous avoir encadré en stage pratique industriel.*

*Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui d'une façon ou d'une autre ont contribué à ce travail.*

*BENAMAR Madina Chérifa*

*BECHAR Nerimene*

## ***Dédicace 1***

*Je dédie ce modeste travail à tous ceux et celles qui m'ont soutenu pour l'élaboration et la conception de ce travail.*

*Je dédie aussi ce mémoire à toute ma famille, ma grande mère, mon père, ma mère, mes frères : Zakariya, Nadjib et Tarik, ma belle-sœur, mes neveux : Manel et Nizare, ainsi que mon binôme BECHAR Nerimene.*

*BENAMAR Madina Chérifa*

## **Dédicace 2**

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut  
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude  
L'amour, le respect, la reconnaissance  
Aussi, c'est tout simplement que*

*Je dédie ce modeste travail*

*A **Ma chère mère** aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.*

*A **Mon cher père** que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices.*

*A **Mes chers grands parents** qui m'ont accompagné par leurs prières, leur douceur, puisse Dieu les prêter longue vie et beaucoup de santé et de bonheur dans les deux vies.*

*A mes chers et adorables frères et sœurs **Lamia, Melek, Anes et Oussama** que je les aime profondément.*

*A mes chères tantes **Soumia et Zahira**, chers oncles **Mohamed et Reda**.*

*A mes chers cousins et cousines **Bouchra, Douaa, Sirine et Ikram**.*

*A mon binôme **BENAMAR Madina Cherifa** et toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce travail.*

*BECHAR Nerimene*

## Sommaire

Remerciement	
Dédicace1	
Dédicace2	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Liste des abréviations	
Nomenclature	
Introduction Générale.....	1
<b>Chapitre 1 : TAUX DE DEFAILLANCE ET LOIS DE FIABILITE</b>	
1.1 Introduction.....	2
1.2 Durée de vie des matériels.....	2
1.2.1 Courbe en baignoire.....	2
1.2.2 Détermination empirique de la courbe en baignoire.....	3
1.2.3 Estimation des diverses fonction empiriques de fiabilité et études de leurs relations.....	4
1.3 Taux de défaillance instantanée et lois de fiabilité.....	5
1.3.1 mtbf ou MUT.....	6
1.3.2 Quelques précisions au sujet du MTBF-MUT-MDT-MTTR.....	7
1.4 Loi exponentielle.....	8
1.4.1 Cas d'un taux de défaillance $\lambda(t)$ linéairement constant $\lambda(t) = at + b$ .....	9
1.4.2 Estimation des paramètres de la loi exponentielle (Ajustement graphique).....	10
1.5 Loi normale.....	11
1.5.1 Estimation des paramètres de la loi normale (Ajustement graphique).....	13
1.5.1.1 Estimation de la moyenne $\mu$ (lorsque l'écart type $\sigma$ est connu).....	13
1.5.1.2 Estimation de la moyenne $\mu$ (lorsque l'écart type $\sigma$ est inconnu).....	13
1.5.1.3 Estimation de l'écart type $\sigma$ (lorsque la moyenne $\mu$ est inconnue).....	14
1.6 Loi log-normale.....	14
1.6.1 Estimation des paramètres de la loi log-normale (Ajustement graphique).....	15
1.7 Loi de weibull .....	16
1.7.1 Estimation des paramètres de la loi de weibull (Ajustement graphique).....	18
1.7.1.1 Cas $\gamma = 0$ .....	19
1.7.1.2 Cas ou $\gamma > 0$ (estimation par itération).....	21

## SOMMAIRE

1.7.1.3 Cas de $\gamma < 0$ (estimation par itération).....	22
1.7.1.4 Estimation de $\gamma$ par le calcul.....	22
1.8 Avantages et inconvénients et champs d'application des lois.....	25
1.9 Conclusion.....	26

### **Chapitre 2 : TESTS D'ADEQUATION**

2.1 Introduction.....	27
2.2 Test de Khi-deux ( $\chi^2$ ).....	27
2.2.1 Principe.....	27
2.2.2 Exemple.....	28
2.3 Test de Kolmogorov-Smirnov.....	29
2.3.1 Principe.....	29
2.3.2 Méthode graphique.....	30
2.3.3 Exemple.....	30
2.4 Test d'Anderson-Darling.....	32
2.4.1 Principe.....	32
2.4.2 Exemple - test d'un processus exponentiel.....	34
2.5 Test de Barlow-Proshan - Test spécifique pour la loi exponentielle dans le cas de données multi censurées.....	35
2.5.1 Principe.....	35
2.5.2 Exemple : vieillissement de garnitures d'étanchéité de pompes alimentaires.....	36
2.6 Conclusion.....	39

### **Chapitre 3 : TYPES DE DONNEES ET DETERMINATION DES MODELES**

3.1 Introduction à la problématique des censures.....	40
3.1.1 Cas de données censurées simples.....	41
3.1.2 Cas de données censurées multiples.....	42
3.2 Méthode proposée par Johnson.....	43
3.2.1 Principe.....	43
3.2.2 Exemple.....	44
3.3 Estimation de $F(t)$ par le << PRODUCT LIMIT ESTIMATOR >> de Kaplan Meier....	44
3.3.1 Principe.....	44

## SOMMAIRE

3.3.2 Exemple Sur données non censurées $\delta_j = 1$ .....	45
3.3.3 Principe du maximum de vraisemblance.....	46
3.4 Méthodes d'estimation du rang tenant compte du temps séparant les défaillances et les suspendus (Modélisation selon une loi uniforme, extrapolation linéaire)	
3.4.1 Principe.....	46
3.4.2 Recherche des rangs dans le cas des censures multiples en utilisant une itération - Loi uniforme / Loi de Weibull.....	48
3.5 Conclusion.....	50

### **Chapitre 4 : BANQUES DE DONNEES DE FIABILITE**

4.1 Introduction.....	51
4.2 Présentation générale des recueils de donnée.....	51
4.2.1 Source de données.....	52
4.3 Banques de données internes.....	52
4.3.1 D'où peuvent-elles provenir ?.....	53
4.3.2 Comment exploiter ces données ?.....	53
4.4 Banque de données externes.....	53
4.4.1 Recueils de données de fiabilité.....	53
4.4.2 Utilisation de recueils des données de fiabilité.....	54
4.5 Les composants électroniques.....	54
4.5.1 Données de fiabilité des composants électroniques.....	55
4.5.1.1 FIDES.....	56
4.5.1.2 Telcordia/Bel lcore .....	56
4.5.1.3 RDF (CNET).....	56
4.5.1.4 GJB.....	56
4.5.1.5 EPRD.....	56
4.5.1.6 BT-HRD.....	56
4.5.1.7 MIL-HDBK-217.....	56
4.5.1.8 IEEE STD.....	57
4.6 Les composants mécaniques.....	57
4.6.1 Données de fiabilité des composants mécaniques .....	57
4.6.1.1 AVCO .....	57
4.6.1.2 NPRD .....	58

## SOMMAIRE

4.6.1.3 NSWC .....	58
4.6.1.4 EIREDA .....	59
4.6.1.5 FARADA .....	59
4.6.2 Limite d'utilisation des bases de données mécaniques.....	59
4.7 Conclusion.....	60
<b>Chapitre 5 : ETUDES DE CAS A L'AIDE DU LOGICIEL MINITAB</b>	
5.1 Introduction.....	61
5.2 Prise en main du logiciel Minitab.....	61
5.2.1 Description de l'environnement.....	61
5.2.2 Description des menus.....	62
5.3 Premier Cas : estimation des paramètres d'une loi de Weibull calculés par la méthode du maximum de vraisemblance (EMV) dans le cas de données multi censurées.....	64
5.4 Deuxième cas : Estimation des paramètres d'un modèle de Weibull à partir d'un retour d'expérience recueilli sur des pompes à eau brute.....	67
5.5 Troisième Cas : estimation des paramètres d'un modèle gaussien.....	71
5.6 Quatrième cas : Test d'un processus exponentiel.....	76
5.7 Cinquième cas : Modélisation des durées de vie des Turbocompresseurs de boucle de réfrigération 430/6201 du complexe gazier GP2Z.....	79
5.8 Conclusion.....	85
Conclusion Générale.....	86
Bibliographie.....	87



## Liste des figures

### Chapitre 1

Figure 1.1. Courbe en baignoire.....	3
Figure 1.2. Schématisation des états successifs que peut prendre un système réparable.....	7
Figure 1.3. Schématisation des états successifs que peut prendre un système non réparable..	8
Figure 1.4. Distribution des fonctions de la loi exponentielle.....	9
Figure 1.5. Représentation graphique sur semi-logarithmique.....	11
Figure 1.6. Densité de probabilité (La courbe rouge représente la fonction $\varphi$ , densité de probabilité de la loi normale centrée réduite).....	12
Figure 1.7. La droite de Henry représentées sur un papier gaussio-arithmétique.....	14
Figure 1.8. Courbe théorique de la loi log-normale.....	15
Figure 1.9. Distribution granulométrique de la loi log-normale.....	16
Figure 1.10. Allure de fiabilité de la loi de weibull.....	17
Figure 1.11. Allure de taux de défaillance de la loi de weibull.....	17
Figure 1.12. Graphe à échelles fonctionnelles d'Alan Plait.....	18
Figure 1.13. Graphe d'une loi de Weibull.....	20
Figure 1.14. Estimation de $\gamma$ (cas ou $\gamma > 0$ ).....	21
Figure 1.15. Estimation de $\gamma$ (cas ou $\gamma < 0$ ).....	22
Figure 1.16. Estimation de $\gamma$ par le calcul.....	24

### Chapitre 2

Figure 2.1. Modèle théorique de test de Kolmogorov-Smirnov.....	29
Figure 2.2. Méthode graphique de Kolmogorov-Smirnov.....	30
Figure 2.3. Graphique des distances calculées pour le test de K-S.....	33
Figure 2.4. Test KS (logiciel Rare).....	35
Figure 2.5. Comparaison du retour d'expression avec une distribution exponentielle.....	37
Figure 2.6. Test TTT.....	37

### Chapitre 3

Figure 3.1. Echantillon censuré multiple à droite.....	41
Figure 3.2. Différents types d'observation.....	42
Figure 3.3. Configuration des éléments classés par ordre croissant.....	42
Figure 3.4. Configuration des éléments classés après censure.....	47

## LISTE DES FIGURES

Figure 3.5. Les éléments suspendu ou défaillant.....48

### **Chapitre 4**

Figure 4.1. Chronologie d'application des recueils de fiabilité.....52

### **Chapitre 5**

Figure 5.1. Modèle de Weibull (premier cas).....65

Figure 5.2. Modèle Normale (premier cas).....65

Figure 5.3. Modèle Log-normal (premier cas).....66

Figure 5.4. Modèle Exponentielle (premier cas).....66

Figure 5.5. Modèle de Weibull (deuxième cas).....68

Figure 5.6. Les quatre modèles Weibull, Log Normal, Exponentielle et Normal.....69

Figure 5.7. Ajustement selon modèle Normale (troisième cas).....72

Figure 5.8. Modèle Log-normal (troisième cas).....73

Figure 5.9. Test Anderson Darling (troisième cas).....73

Figure 5.10. Test Kolmogorov-Smirnov (troisième cas).....75

Figure 5.11. Modèle Exponentielle (quatrième cas).....76

Figure 5.12. Ajustement selon : (a) Modèle de Weibull, (b) Modèle exponentielle, (c)  
Modèle log-normal, (d) Modèle normale.....83

## LISTE DES TABLEAUX

### Liste des tableaux

#### Chapitre 1

Tableau 1.1. Loi de Gamma ( $\Gamma$ ).....	21
Tableau 1.2. Loi de Weibull (calcul de mtbf).....	24
Tableau 1.3. Les lois de fiabilité.....	26

#### Chapitre 2

Tableau 2.1. Un exemple sur des résultats regroupés par classe.....	28
Tableau 2.2. Un tableau représente les nombres d'individus et probabilité de se trouver dans la classe et les nombres d'individus attendu théoriquement dans la classe $i$ .....	29
Tableau 2.3. Un tableau représente les temps entre défaillances et leur fonction de répartition réelle et théorique et l'écart point par point entre ces deux fonctions.....	31
Tableau 2.4. Loi Kolmogorov-Smirnov.....	32
Tableau 2.5. Table d'Anderson-Darling. Valeurs $A^2_{crit}(\alpha)$ critiques pour la loi normale et log normale.....	34
Tableau 2.6. Valeurs critiques d'Anderson-Darling pour la loi de Weibull.....	34
Tableau 2.7. Valeurs critiques d'Anderson-Darling pour la loi exponentielle.....	34
Tableau 2.8. Valeurs critiques du test TTT (totale time on test) de Barlow-Proschan.....	36
Tableau 2.9. Calcul des coordonnées des points du graphe TTT.....	38

#### Chapitre 4

Tableau 4.1. Recueils de données de fiabilité en électronique.....	55
Tableau 4.2. Recueil de données de fiabilité en mécanique.....	58

#### Chapitre 5

Tableau 5.1. Résultats obtenus par le logiciel RelCode.....	67
Tableau 5.2. Les valeurs du test Anderson Darling et le coefficient de corrélation des quatre lois étudiées.....	69
Tableau 5.3. Les résultats de la MTTF des différentes lois.....	70
Tableau 5.4. Un tableau qui représente les temps entre défaillances et leur fonction de répartition réelle et théorique et l'écart point par point entre ces deux fonctions.....	71
Tableau 5.5. Caractéristiques de la distribution.....	77
Tableau 5.6. Analyse de distribution paramétrique (Minitab).....	78
Tableau 5.7. Dates d'interventions sur les équipements A, B et C.....	79

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 5.8. tbf de l'équipement A.....	80
Tableau 5.9. tbf de l'équipement B.....	80
Tableau 5.10. tbf de l'équipement C.....	81
Tableau 5.11. MTTF.....	84
Tableau 5.12. Analyse de distribution paramétrique (Minitab).....	85

## LISTE DES ABREVIATIONS

### Liste des abréviations

tbf : Temps de bon fonctionnement

mtbf : Moyenne de temps de bon fonctionnement

MTTF (Mean Time To First Failure) : temps moyen avant-première défaillance

MUT (Mean Up Time) : temps moyen de disponibilité

MTBF (Mean Time Between Failure) : temps moyen entre deux défaillances successives

MDT (Mean Down Time) : temps moyen d'indisponibilité ou temps moyen d'arrêt propre

MTTR (Mean Time To Repair) : temps moyen de réparation

## NOMENCLATURE

### Nomenclature

$F(t)$  : La fonction de répartition

$R(t)$ : La fonction de fiabilité

$F(t)$ : La probabilité de défaillance

$t$  : Temps

$f(t_i)$  : La fonction de défaillance

$F(t_i)$  : La fonction de défaillance cumulée

$r$  : le nombre de classes

$\sigma^2$  : Variance

$N_0$  : Nombre d'éléments bons à  $t_0$  (instant initiale)

$N_i$  : Nombre d'éléments bons à  $t_i$

$n_i$  : Nombre d'élément défaillants entre  $t_i$  et  $t_{(i+1)}$ , noté aussi  $\Delta N_i$

$\Delta t_i$  : Intervalle de temps observé égal à  $t_{(i+1)} - t_i$

$\alpha$  (alpha) : Niveau de signification

$\beta$  (beta) : Paramètre de forme de la loi de Weibull

$\Gamma$  (gamma majusc.) : Fonction gamma

$\gamma$  (gamma minusc.) : Décalage d'origine de la loi de Weibull

$\lambda$  (lambda) : Taux de défaillance constant

$\lambda(t)$  : Taux de défaillance dépendant du temps

$\Phi$  : La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$\eta$  (êta) : Paramètre d'échelle de la loi de Weibull

$f_X$  : La densité de probabilité de X

$k$  : degrés de liberté

$\nu$  (nu) : Degrés de liberté

$\lambda_0(t)$  : Taux de défaillances établi dans des conditions environnementales dites normales

$Z_i$ : Facteur d'environnement

$u$  : Variable aléatoire centrée réduite

# **Introduction générale**

### Introduction générale

L'exécution de la maintenance dans une entreprise industrielle est d'une importance capitale pour maintenir les équipements en état de bon fonctionnement. La maintenance, dans sa plus large définition, est l'ensemble de toutes les opérations de gestion, de programmation et d'exécution. Le calcul de la fiabilité d'un équipement constitue un outil incontournable pour évaluer l'efficacité de n'importe quelle entité. Le but de la maintenance c'est de mettre en œuvre les objectifs (coûts, délai, qualité, etc.) fixés par la direction de production en tenant compte des événements (perturbations, aléas, etc.) de l'environnement.

La maintenance prédictive (prévisionnelle) ne doit être confondue ni avec la maintenance corrective qui se contente de réagir lorsqu'un dysfonctionnement survient, ni avec la maintenance préventive classique, qui est appliquée périodiquement, quel que soit l'état du système. Pour effectuer cette maintenance, les données de productions sont analysées afin d'identifier des modèles et prévoir les problèmes potentiels. C'est ce que nous allons essayer d'aborder dans ce travail.

Le mémoire est structuré de la manière suivante :

Le **premier chapitre** rappelle les aspects de la fiabilité et présente ses principales lois utilisées et leurs paramètres ainsi que leurs champs d'application : loi exponentielle, loi normale, loi log-normale et loi de Weibull.

Le **deuxième chapitre** est consacré aux tests d'adéquation, qui se composent de : test de Khi-deux, de Kolmogorov-Smirnov, d'Anderson-Darling et test de Barlow-Prochan, avec des exemples.

Le **troisième chapitre** présente les types de données (données de défaillance et censurées) et les méthodes de : Johnson, Kaplan Meier et la méthode d'estimation du rang qui tient compte du temps.

Le **quatrième chapitre** est consacré aux banques de données de fiabilité. Nous avons fait une présentation générale des recueils de données et de leur utilisation pour les composants électroniques et mécaniques.

Dans le **cinquième chapitre** nous avons fait l'étude de quatre cas académiques et un cas réel industriel, de turbocompresseurs de boucles de réfrigération 430/6201, du complexe gazier GP1Z. Nous avons modélisé les données traitées, selon des lois de fiabilité, à l'aide du logiciel Minitab.



# **Chapitre 1**

## **Taux de défaillance et lois de fiabilité**

## CHAPITRE 1 – TAUX DE DEFAILLANCE ET LOIS DE FIABILITE

### 1.1 Introduction

Une entreprise est tenue toujours d'assurer des produits de meilleures qualités et au coût le plus réduit possible afin de rester compétitive. Pour minimiser ce coût, on doit fabriquer plus vite, et sans perturbation de la chaîne suite à des défauts afin de réaliser une production maximale par unité de temps. Ceci est l'objectif principal de la fonction maintenance dans une entreprise. L'accent est mis sur l'intégration d'éléments mathématiques dans la maintenance pour évaluer le comportement du matériel en service. L'automatisation et l'informatique ont permis d'accroître considérablement cette rapidité de production. Exceptés certains arrêts forcés dus à la production elle-même (changement de production, montée en température, entretien programmé, etc.), les machines ne doivent jamais (ou presque) tomber en panne à cause des défaillances et doivent fonctionner à un régime nominal permettant un rendement optimal (Vernier, 2010).

### 1.2 Durée de vie des matériels

#### 1.2.1 Courbe en baignoire

Pour mettre en place une politique de maintenance efficace, il est important de comprendre les phénomènes de défaillances ou de dégradations des matériels. D'une manière très générale, la classification des défaillances s'établit en deux catégories (Lyonnet, 2000) ; (Ernoul, 2018).

- **Les défaillances catalectiques :**

Ces types de défaillances sont complètes et soudaines : c'est, par exemple, la rupture brusque d'une pièce mécanique, le court-circuit d'un système électrique ou électronique. Dans ce cas, il est très difficile d'observer la dégradation. Par conséquent, il n'est pas possible de mettre en place une maintenance conditionnelle, le préventif systématique ou le correctif sera envisagé.

- **Les défaillances par dérives :**

Dans ce cas de défaillances, on voit progresser la dégradation : ce sont les phénomènes d'usure en mécanique, l'augmentation du frottement, ou l'augmentation de la valeur des résistances pour le système électronique. Ce type de défaillance se prête particulièrement bien aux techniques de surveillance utilisées en maintenance conditionnelle ou prédictive.

Par ailleurs, ces défaillances ont une probabilité d'apparition plus ou moins grande tout au long de la vie d'un matériel.

- **Caractéristiques de la courbe en baignoire (Figure 1.1.) :**

Dans cette courbe on distingue trois phases :

- Phase I :

Cette première phase représente les défaillances de jeunesse. Elle se caractérise par un taux de défaillance décroissant en fonction du temps.

- Phase II :

Cette deuxième phase représente les défaillances de maturité, à taux de défaillance sensiblement constant : envisager du correctif si  $\lambda(t)$  est légèrement croissant.

- Phase III :

Cette troisième phase représente les défaillances de vieillesse, avec un taux de défaillance croissant et concerne la période d'usure.

L'évolution du taux de défaillance  $\lambda(t)$  se représente sous la forme d'une courbe baignoire.

$\lambda(t)$  : Probabilité d'avoir une défaillance du système ou de l'élément entre les instants  $t$  et  $(t+dt)$  à condition que le système ait vécu jusqu'à  $t$ .

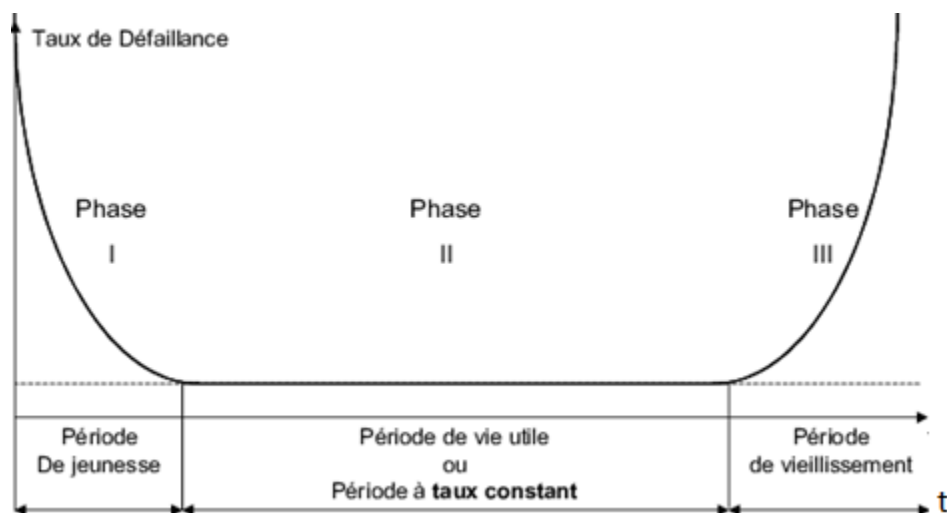


Figure 1.1. Courbe en baignoire. (Ernoul, 2018)

### 1.2.2 Détermination empirique de la courbe en baignoire

La détermination de façon expérimentale de cette courbe nécessite un grand nombre de données, s'étalant sur une période couvrant la plage de durée de vie des matériels. Ainsi, cette courbe ne pourra être déterminée, dans sa totalité, pour des mécanismes de technologie récente, ou pour des systèmes ne présentant pas de patrimoine statistique suffisant ; seule une partie de cette courbe sera mise en évidence. Néanmoins, il peut sous certaines conditions être tiré des conclusions de politique de maintenance à suivre pour de faible patrimoine statistiques (Lyonnet, 2000).

Sous l'hypothèse que les données : Temps de Bon Fonctionnement (TBF) et que le nombre (N) d'éléments mis en fonctionnement soit suffisants, il existe une méthode pour déterminer cette courbe, présentée ci-après :

- Méthode de l'actuariat

Il s'agit donc de déterminer de façon expérimentale le taux de défaillance  $\lambda(t)$  et correspond à la probabilité d'avoir une défaillance dans les différents intervalles de temps constituant la vie du matériel étudié. Une estimation de  $\lambda(t)$  par tranche de temps est déterminée par le calcul suivant, (Lyonnet, 2000) :

$$\lambda(t_i) = \frac{n_i}{N_i \Delta t_i} \quad (1.1)$$

Avec :

$n_i$  : Nombre de défaillements pendant le temps de fonctionnement

$N_i$  : Nombre de survivants au début de la tranche de temps  $t$  ( $i$ )

$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  : intervalle de temps observé

La détermination du nombre de classes doit être telle que la courbe ne soit pas trop déformée, il dépend du nombre total de défaillements ; on peut déterminer le nombre de classes  $r$  tel que :

$$r = \sqrt{\sum n_i} \quad (1.2)$$

Où  $r = 1 + 3,3 \log \sum n_i$

Le nombre de classes étant déterminé. Il est possible de construire la courbe en baignoire à partir de données réelles.

### 1.2.3 Estimation des diverses fonction empiriques de fiabilité et études de leurs relations

La fiabilité caractérise l'aptitude d'un système ou d'un matériel à accomplir une fonction requise dans des conditions données pendant un intervalle de temps donné (Bellaouar et Beleulmi, 2013). En d'autre terme la fiabilité est l'aptitude d'une entité à assurer cette fonction (AFNOR, 1988).

Cette aptitude se mesure par la probabilité que l'entité remplisse sa fonction sur une période de temps donnée (Smith, 1997). Enfin, quand un dysfonctionnement apparaît sur l'entité et qu'il faut intervenir pour rétablir ses fonctionnalités, le concept de la maintenabilité est introduit

- **Notations**

$N_0$  : Nombre d'éléments bons à  $t_0$  (instant initiale)

$N_i$  ; Nombre d'éléments bons à  $t_i$

$n_i$  : Nombre d'élément défaillements entre  $t_i$  et  $t_{(i+1)}$ , noté aussi  $\Delta N_i$

$\Delta t_i$  : Intervalle de temps observé égal à  $t_{i+1} - t_i$

On estime  $\lambda(t)$  le taux défailance par tranche  $\Delta t$  par l'équation (1):

$$\lambda(t_i) = \frac{n_i}{N_i \Delta t_i} \quad (1.1)$$

La fonction de défailance  $f(t_i)$ , (Lyonnet, 2000) :

$$\hat{f}(t_l) \Delta t_l = \frac{n_l}{N_0} \quad (1.3)$$

$(\hat{f}(t_l) \Delta t_l)$  : Fonction de défaillance sur l'intervalle  $\Delta t_l$

La fonction de défaillance cumulée  $F(t_l)$  :

$$\hat{F}(t_l) = \sum_0^l f(t_l) \Delta t_l = \frac{\sum_0^l n_l}{N_0} = \frac{N_0 - N_l}{N_0} = 1 - \frac{N_l}{N_0} \quad (1.4)$$

La fonction de fiabilité  $R(t_l)$  ;

$$\hat{R}(t_l) = \frac{N_l}{N_0} = 1 - \hat{F}(t_l) \quad (1.5)$$

Par suite :

$$\frac{\hat{f}(t_l)}{\hat{R}(t_l)} = \frac{\frac{n_l}{(N_0 \cdot \Delta t_l)}}{\frac{N_l}{N_0}} = \frac{n_l}{N_l \cdot \Delta t_l} = \hat{\lambda}(t_l) \quad (\text{Par intervalle } \Delta t) \quad (1.6)$$

Par suite :

$$\hat{\lambda}(t_l) \cdot \Delta t_l = \frac{\hat{f}(t_l)}{\hat{R}(t_l)} \Delta t_l \quad (1.7)$$

C'est la relation servant au calcul des lois de Fiabilité

On peut également estimer la mtbf

$$mtbf = \sum_0^\infty t_l \cdot f(t_l) \Delta t_l = \sum_0^\infty t_l \cdot \frac{n_l}{N_0} \quad (1.8)$$

En général  $t_0 = 0$

$$mtbf = [n_1 t_1 + n_2 t_2 + \dots + n_\infty t_\infty] \cdot \frac{1}{N_0} \quad (1.9)$$

### 1.3 Taux de défaillance instantanée et lois de fiabilité

Par hypothèse on dit que :

$$\lambda(t) dt = \frac{F(t+dt) - F(t)}{R(t)} \quad (1.10)$$

C'est la probabilité conditionnelle de défaillance entre  $t$  et  $t + dt$ , notons que  $\lambda(t)$  et aussi appelé fonction de hasard ( $h(t)$ ) ;

Et

$$\lambda(t) dt = \frac{dF(t)}{1-F(t)} \quad (1.11)$$

$F(t)$  et  $R(t)$  sont respectivement la fonction cumulée de défaillance et la fonction fiabilité. C'est ce que l'on cherche à connaître à partir de  $\lambda(t)$ . Pour cela, on intègre les deux membres de l'expression précédente, avec comme condition initiale  $F_{(t=0)} = 0$  (Lyonnet, 2000).

On obtient :

$$\int_0^t \lambda(t) dt = \int_0^t \frac{dF(t)}{1-F(t)} \quad (1.12)$$

$$-\int_0^t \lambda(t) dt = \int_0^t \frac{-dF(t)}{1-F(t)} \quad (1.13)$$

$$-\int_0^t \lambda(t) dt = [\ln(1 - F(t))]_0^t \quad (1.14)$$

$$-\int_0^t \lambda(t) dt = \ln(1 - F(t)) \quad (1.15)$$

$$-e^{\int_0^t \lambda(t) dt} = 1 - F(t) \quad (1.16)$$

D'où :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (1.16)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (1.17)$$

$$f(t) = \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (1.18)$$

On a ici les expressions les plus générales liant les lois de fiabilité et le taux instantané de défaillance.

Remarque aussi que l'on peut obtenir le taux de défaillance en partant de  $R(t)$ . En effet :

$$\frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}}{e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}} = \lambda(t) \quad (1.19)$$

D'où :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (1.20)$$

### 1.3.1 mtbf ou MUT

La moyenne des temps de bon fonctionnement (mtbf) est aussi un indicateur de fiabilité. Elle est liée aux lois de fiabilité par le taux de défaillance. La mtbf est l'espérance mathématique des défaillances.

$$mtbf = E(t) = \int_0^{+\infty} tf(t)dt \quad (1.21)$$

On peut aussi montrer qu'elle est égale à :

$$mtbf = \int_0^{+\infty} R(t)dt \quad (1.22)$$

En intégrant par partie.

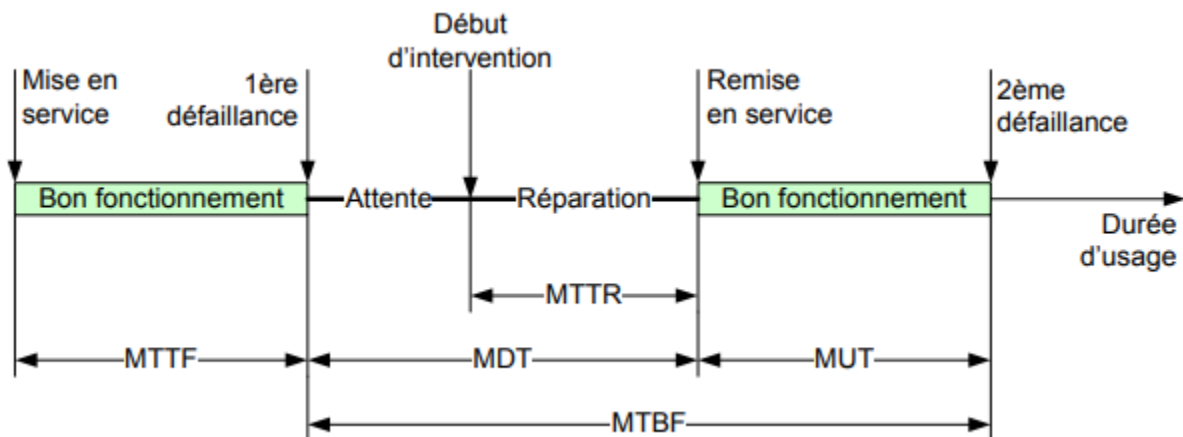
Physiquement la mtbf peut être exprimé par le rapport des temps :

$$mtbf = \frac{\text{somme des temps de bon fonctionnement entre les (n) defaillances}}{\text{nombre d'intervention de maintenance avec immobilisation}} \quad (1.23)$$

Par définition le mtbf est la durée de vie moyenne du système.

### 1.3.2 Quelques précisions au sujet du MTBF-MUT-MDT-MTTR

Il est nécessaire de rappeler et de s'accorder sur les termes employés en particulier, pour les MTTF, MTBF, MUT, MTTR, MDT qui souvent sont confondus. Pour les matériels réparables, on a le chronogramme suivant (Figure 1.2.) :



**Figure 1.2.** Schématisation des états successifs que peut prendre un système réparable.

(Vernier, 2010)

Les sigles utilisés sont d'origine anglo-saxonne et correspondent aux notions suivantes :

MTTF (mean time to first failure) : temps moyen avant-première défaillance ;

MUT (Mean Up Time) : temps moyen de disponibilité ;

MTBF (Mean Time Between Failure) : temps moyen entre deux défaillances successives ;

MDT (Mean Down Time) : temps moyen d'indisponibilité ou temps moyen d'arrêt propre ;

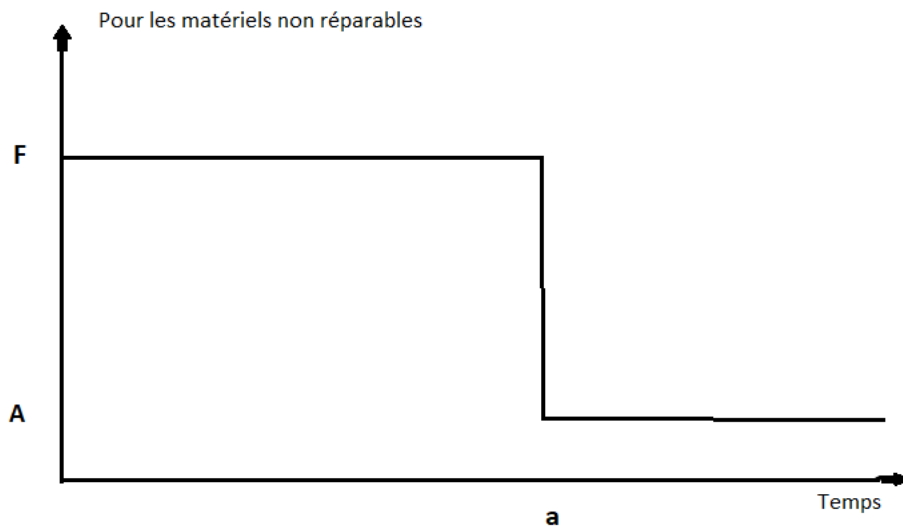
MTTR (Mean Time To Repair) : temps moyen de réparation.

Si  $MDT \ll MTBF$  alors  $MUT = MTBF = m\text{tbf}$

Pour les matériels non réparables (Figure 1.3.) :

A= arrêt

F= fonctionnement



MTTF : Mean Time To Failure

**Figure 1.3.** Schématisation des états successifs que peut prendre un système non réparable. (Lyonnet, 2000)

Dans la suite de notre travail MUT, m\text{tbf} ou MTBF seront employés indifféremment. Ceci suppose donc comme hypothèse que :  $MTTR = MDT \ll MTBF$

## 1.4 Loi exponentielle

La détermination de la fiabilité d'un système électronique, mécanique ou autre nécessite tout d'abord de connaître la loi de la fiabilité (ou la loi de défaillance) de chacun des composants intervenant dans le système (Vernier, 2003).

Dans le cas d'un taux de défaillance  $\lambda(t)$  constant, la loi exponentielle est utilisée. La loi exponentielle a de nombreuses applications dans le domaine de l'ingénierie en particulier dans l'étude de fiabilité d'un équipement. Elle présente également diverses applications dans l'étude des phénomènes d'attentes.

Les composants électroniques dans leur période de maturité ont généralement un taux de défaillance constant. La loi de fiabilité qui en découle s'en déduit de la façon suivante :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = e^{-\lambda t} \quad (1.24)$$

Avec les paramètres de significations :



$e$  : est la base de l'exponentielle

$\lambda$ : est l'intensité

L'origine des temps correspond à  $t=0$ .

La densité de probabilité est exprimée par la relation suivante :

$$f(t)=\lambda e^{-\int_0^t \lambda(t)} \tag{1.25}$$

La fonction de répartition :

$$F(t)=1- e^{-\int_0^t \lambda(t)} =\int_0^t \lambda e^{-\lambda t} \tag{1.26}$$

Le taux de défaillance :

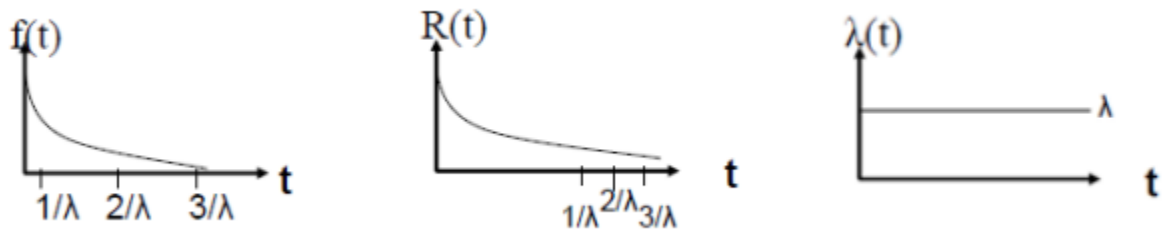
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda = \text{Constant} \tag{1.27}$$

$$MTBF= \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \tag{1.28}$$

Variance :

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{1.29}$$

Les distributions relatives à cette loi sont représentées par les courbes de la figure 1.4 en fonction du taux de défaillance d'un ou plusieurs composants supposés avoir un même  $\lambda$ .



**Figure 1.4.** Distribution des fonctions de la loi exponentielle. (Bellaouar et Beleulmi, 2013)

On peut ainsi calculer la fiabilité d'un composant à tout moment de sa vie.

**1.4.1 Cas d'un taux de défaillance  $\lambda(t)$  linéairement constant  $\lambda(t) = at + b$**

Ceci représente bien le phénomène d'usure en mécanique dans leur période de maturité

$$R(t)=e^{-\int_0^t (at+b)du} =e^{-\left(\frac{at^2}{2}+bt\right)} \tag{1.30}$$

Dans la mesure où l'on connaît  $a$  et  $b$ , le calcul de la fonction fiabilité est aisé. Mais il n'en est pas de même pour la moyenne des temps de bon fonctionnement (Lyonnet, 2000).

En effet :

$$\text{MUT} = \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{at^2}{2}+bt\right)} dt \quad (1.31)$$

Cette intégrale ne peut se calculer que par la méthode d'Euler-poisson, par des méthodes numériques.

D'autre part, il est rare que l'on ait un modèle simple représentant le taux de défaillance. Il est en fait plus aisé de trouver directement la fonction fiabilité en essayant divers modèles, puis en vérifiant leur validité par un test d'adéquation, cas de taux croissant dans le temps : on peut utiliser le modèle log-normal ou de « weibull ».

### 1.4.2 Estimation des paramètres de la loi exponentielle (Ajustement graphique)

Pour cela, nous disposons de deux méthodes :

Une entièrement par le calcul, qui fait intervenir les équations différentielles difficiles à résoudre, de ce fait elle est peu utilisée. Actuellement les méthodes numériques ont résolu cet obstacle et ils existent des logiciels, dont l'un sera présenté et utilisé au dernier chapitre.

L'autre graphique, qui utilise un papier à échelle fonctionnelle (papier semi-logarithmique). Cette méthode, était la plus utilisée par les ingénieurs, est développée ici (Noureddine, 2022).

L'utilisation de papier semi-logarithmique pour représenter  $R(t)$  permet de déduire si une loi est exponentielle ou non. S'il s'agit d'une loi exponentielle.

$$R(mtbf = 1/\lambda) = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0,368 = 36,8\%$$

$$R(2,3/\lambda) = e^{-2,3} = \frac{1}{e^{2,3}} = 0,1=10\%$$

Sur le papier semi-logarithmique, les points de coordonnées  $(t_i ; R(t_i))$  sont alignés sur une droite D. Pour estimer la valeur de  $\lambda$  il suffit de tracer la droite d'équation  $Y = e^{-1} = 0,368$  et de lire l'abscisse  $1/\lambda$  du point d'intersection de cette droite avec la droite D.

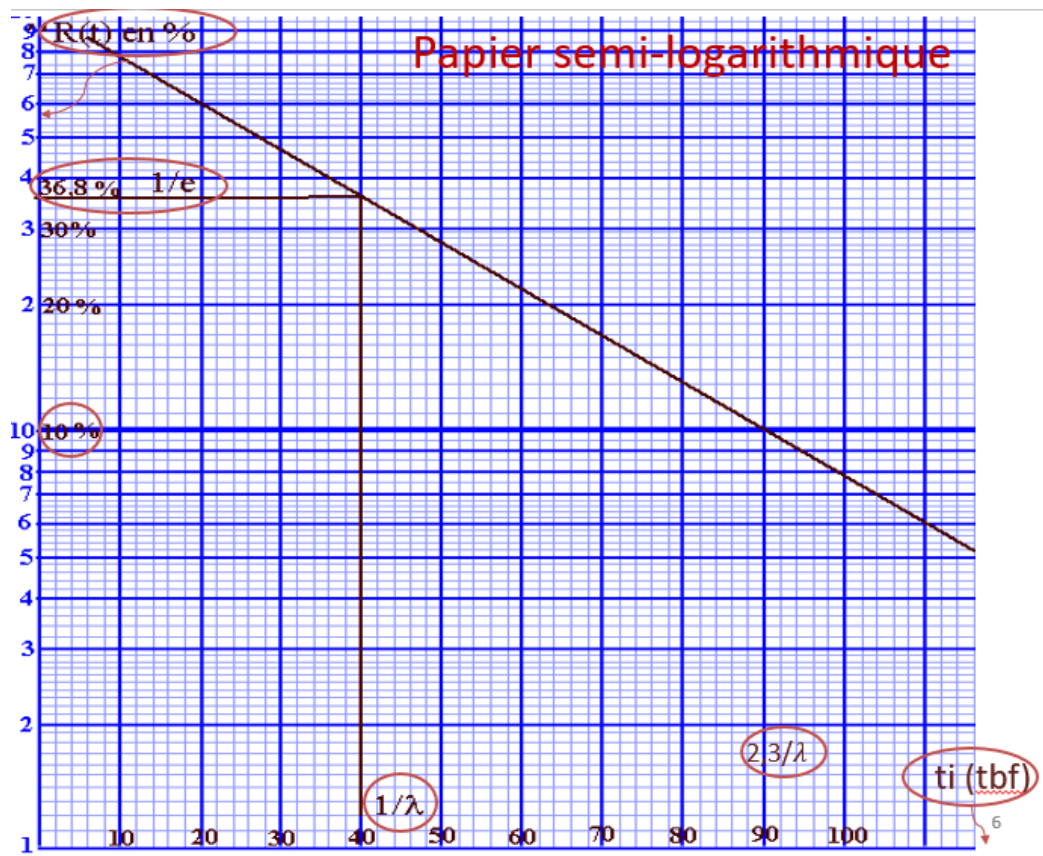


Figure 1.5. Représentation graphique sur semi-logarithmique.

- **Ajustement graphique - Estimation de  $\lambda$  et  $R(t)$**
- **Méthodologie**

1. Préparation des données :

- Recherche des Temps de bon fonctionnement (tbf).
- Classement des temps de bon fonctionnement en ordre croissant.
- Estimation des  $R(i)$  (rang brut, moyen ou médian):  $F(i)$  représente la probabilité de panne correspondant au temps de bon fonctionnement de l'ième défaillant.

2. Tracé des nuages de  $N$  points ( $t_i, R_i$ ).

3. Tracé de la courbe de régression des  $N$  points.

4. Si les  $N$  points sont sensiblement alignés (droite), alors la loi de fiabilité est exponentielle

5. Estimer La moyenne de temps de bon fonctionnement (mtbf), la fonction de fiabilité  $R(t)$  et la variance ( $V = \sigma^2$ ).

### 1.5 Loi normale

La loi normale (loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss) fait partie des lois de probabilité absolument continues. Elle dépend de deux paramètres : son espérance, un nombre réel noté  $\mu$ , et son écart type, un nombre réel positif noté  $\sigma$ .

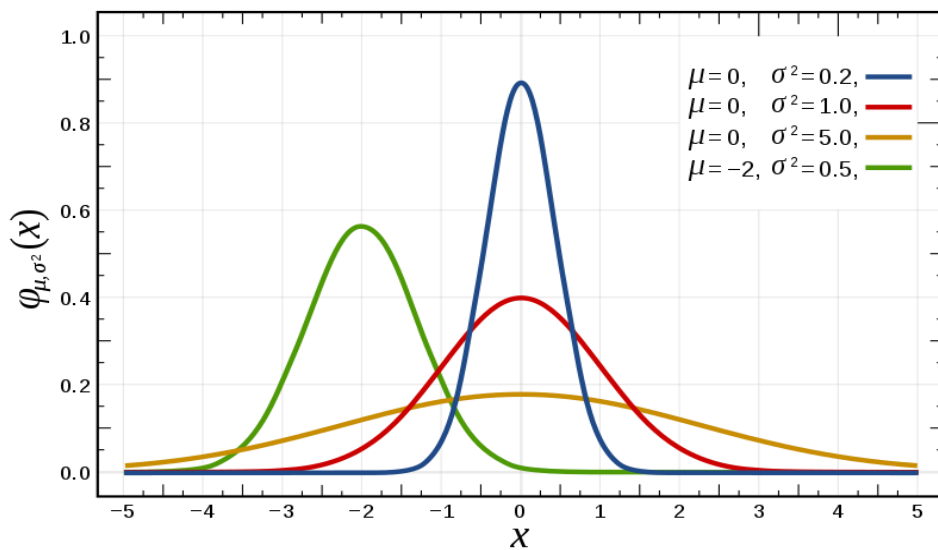
La densité de probabilité de la loi normale d'espérance  $\mu$ , et d'écart type  $\sigma$  est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1.32}$$

Lorsqu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi normale, elle est dite gaussienne ou normale et il est habituel d'utiliser la notation avec la variance  $\sigma^2$  :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

La courbe de cette densité est appelée courbe de Gauss ou courbe en cloche, entre autres. C'est la représentation la plus connue de ces lois. La loi normale de moyenne nulle et d'écart type unitaire est appelée loi normale centrée réduite ou loi normale standard.



**Figure 1.6.** Densité de probabilité (La courbe rouge représente la fonction  $\varphi$ , densité de probabilité de la loi normale centrée réduite). (Tassi et Legait,1990)

La densité de probabilité est donnée par la fonction  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par (Norbert Henze, 1986) :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{1.33}$$

La loi normale décrit bien le comportement de systèmes complexes dont les probabilités de défaillance s'additionnent ; c'est une conséquence du théorème central limite. Le taux de défaillance  $\lambda$  est croissant, ce qui correspond à un système avec usure.

Si l'on appelle  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, alors la fonction de fiabilité est de la forme :

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \tag{1.34}$$

Où  $\mu$  est l'espérance (moyenne) et  $\sigma$  l'écart type. On a :

$$\text{MTBF} = \mu. \tag{1.35}$$

### 1.5.1 Estimation des paramètres de la loi normale (Ajustement graphique)

Lorsqu'un phénomène aléatoire est observé et qu'il est considéré comme pouvant être modélisé par une loi normale, une des questions que l'on peut se poser est : que valent les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  de la loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$  ? Une estimation est alors à effectuer. Les observations récupérées lors de l'observation du phénomène sont notées par des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , les notations de la moyenne arithmétique et de la moyenne des carrés sont également utiles : (Alain et Jacques, 2009)

$$S_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \quad (1.36)$$

et

$$T_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - S_n)^2 \quad (1.37)$$

Ces deux valeurs sont respectivement des estimateurs de la moyenne et de la variance qui se calculent à partir des valeurs observées. Puisque les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont de loi normale, alors  $S_n$  est de loi  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  et  $\frac{n-1}{\sigma^2} T_{n-1}^2$  est indépendante de  $S_n$  et de loi du khi-deux «  $\chi^2$  » à  $n-1$  degrés de liberté. (Alain et Jacques, 2009)

#### 1.5.1.1 Estimation de la moyenne $\mu$ (lorsque l'écart type $\sigma$ est connu)

Une méthode est de chercher un intervalle de confiance à un seuil  $\alpha$  autour de la moyenne théorique  $\mu$ . En utilisant les quantiles d'ordre  $\frac{\alpha}{2}$  et  $1 - \frac{\alpha}{2}$ , la formule définissant les quantiles permet d'obtenir : (Alain et Jacques, 2009)

$$\mathbb{P}\left(S_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\alpha/2} \leq \mu \leq S_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\alpha/2}\right) \geq 1 - \alpha \quad (1.38)$$

#### 1.5.1.2 Estimation de la moyenne $\mu$ (lorsque l'écart type $\sigma$ est inconnu)

Une méthode est d'utiliser une variable intermédiaire qui peut s'écrire à l'aide des nouvelles variables aléatoires ;

$$U = \frac{S_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ de loi } N(0,1) \quad (1.39)$$

$$V = \frac{n-1}{\sigma^2} T_{n-1}^2 \text{ de loi } \chi^2(n-1) \quad (1.40)$$

$$\sqrt{n} \frac{S_n - \mu}{T_{n-1}} = \frac{U\sqrt{n-1}}{\sqrt{V}} \text{ est de loi de Student t}(n-1) \quad (1.41)$$

En utilisant les quantiles d'ordre  $\frac{\alpha}{2}$  et  $1 - \frac{\alpha}{2}$ , la formule définissant les quantiles permet d'obtenir : (Alain et Jacques, 2009)

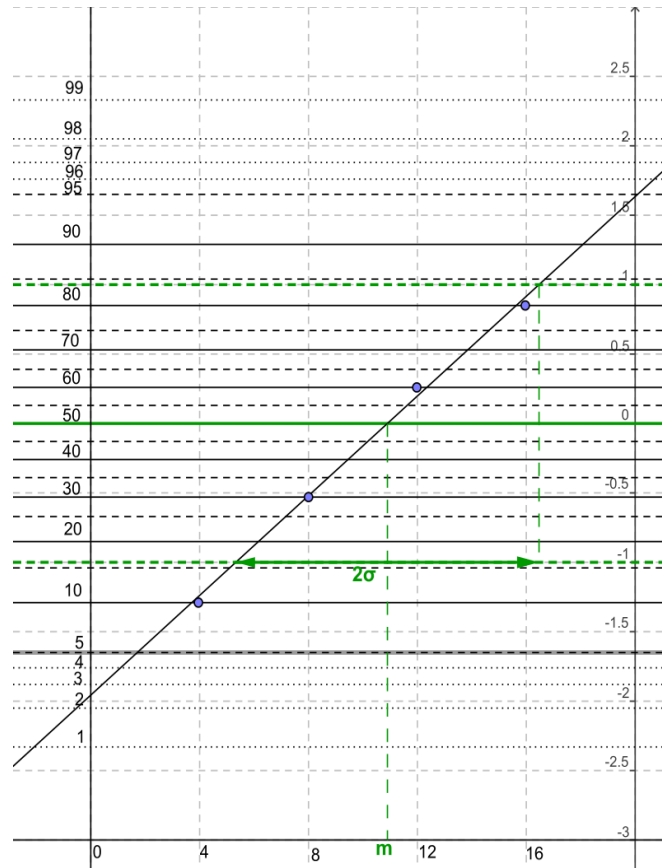
$$\mathbb{P}\left(S_n + \frac{T_{n-1}}{\sqrt{n}} q_{\alpha/2} \leq \mu \leq S_n - \frac{T_{n-1}}{\sqrt{n}} q_{\alpha/2}\right) \geq 1 - \alpha \quad (1.42)$$

**1.5.1.3 Estimation de l'écart type  $\sigma$  (lorsque la moyenne  $\mu$  est inconnue)**

La méthode est la même que la précédente. L'introduction de la variable aléatoire  $T_{n-1}^2 \frac{n-1}{\sigma^2}$  de loi du  $\chi^2$  à n-1 degrés de liberté permet d'obtenir : (Alain et Jacques,2009)

$$\mathbb{P} \left( \sqrt{T_{n-1}^2 \frac{n-1}{q_{1-\alpha/2}}} \leq \sigma \leq \sqrt{T_{n-1}^2 \frac{n-1}{q_{\alpha/2}}} \right) \geq 1 - \alpha \quad (1.43)$$

où  $q_{1-\alpha/2}$  et  $q_{\alpha/2}$  sont les quantiles de la loi du  $\chi^2$  à n-1 degrés de liberté.



**Figure 1.7.** La droite de Henry représentées sur un papier gauusso-arithmétique. (Tassi et Legait,1990)

**1.6 Loi log-normale**

Il représente bien les phénomènes de fatigue ou d'usure en mécanique :

$$R(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - m}{\sigma} \right)^2} dx \quad (1.44)$$

Tel que ;

« m » : La moyenne (espérance).

«  $\sigma$  » : L'écart type.

Le calcul se fait en passant en variable centrée réduite :

$$u = \frac{\ln t - m}{\sigma} \tag{1.45}$$

m est la moyenne des lnt,  $\sigma$  l'écart type des lnt et u est une variable aléatoire centrée réduite.

La moyenne de temps de bon fonctionnement est (Lyonnet, 2000) :

$$MTBF = e^{\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \tag{1.46}$$

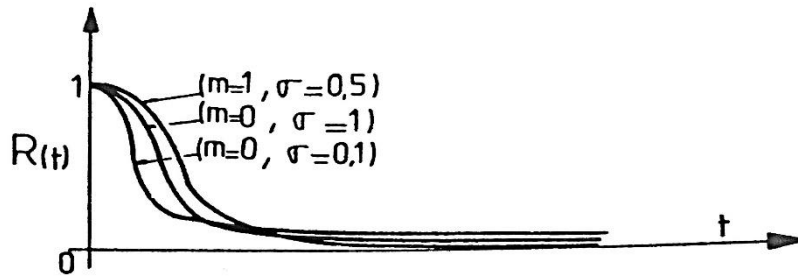


Figure 1.8. Courbe théorique de la loi log-normale. (Lyonnet, 2000)

### 1.6.1 Estimation des paramètres de la loi log-normale (Ajustement graphique)

- Sachant que les valeurs possibles d'une variable aléatoire normale étaient un ensemble des nombres réels. tion réelle ne pouvant prendre des valeurs négatives, on peut malgré tout utiliser une loi normale lorsque la moyenne et l'écart type sont tels que la probabilité théorique d'avoir une valeur négative est à toute fin pratique nulle.
- En probabilité et statistique, une variable aléatoire X est dite suivre une loi log-normale de paramètres m et  $\sigma$  si la variable  $Y = \ln(X)$  suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ .
- Une variable peut être modélisée par une loi log-normale si elle est le résultat de la multiplication d'un grand nombre de petits facteurs indépendants.
- Sa fonction de probabilité est :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - m}{\sigma}\right)^2} \tag{1.47}$$

◆ **Les caractéristiques de la loi log-normale :**

1. Densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - m}{\sigma}\right)^2} \quad \text{pour } t \geq 0 \tag{1.48}$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \tag{1.49}$$

2. Espérance mathématique :

$$E(t) = e^{\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \quad (1.50)$$

3. Variance :

$$\sigma^2 = e^{(2m + \sigma^2)} \cdot [e^{\sigma^2} - 1] \quad (1.51)$$

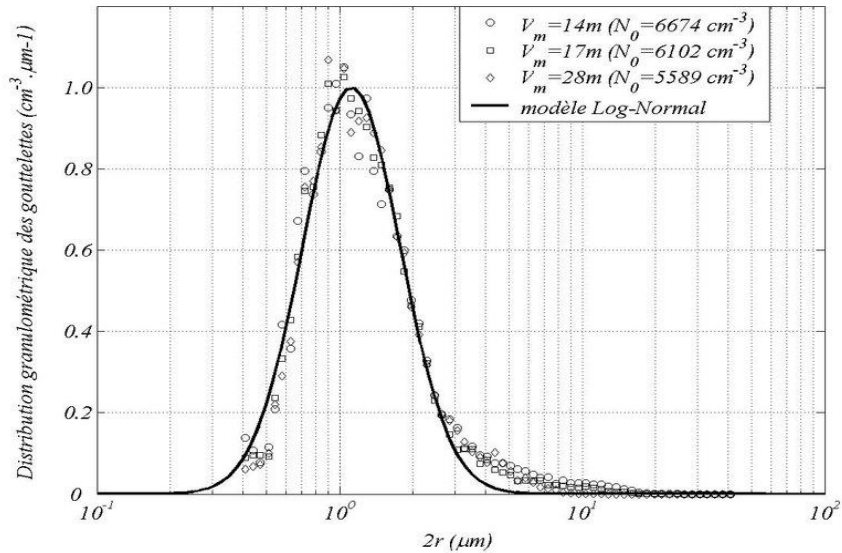


Figure 1.9. Distribution granulométrique de la loi log-normale. (Bagnold, 1937)

### 1.7 Loi de weibull

La fonction fiabilité est dépendante du temps ainsi que la fonction défaillance qui lui est complémentaire (Lyonnet, 2000).

Ainsi, on a :

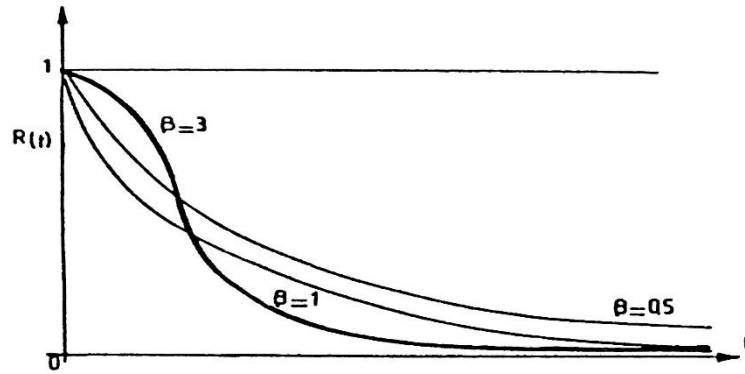
$$R(t) + F(t) = 1 \quad (1.52)$$

D'où :

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} : \text{Loi de Weibull} \quad (1.53)$$

◆ Allure de la fonction de fiabilité  $R(t) = 1 - F(t)$





**Figure 1.10.** Allure de la fiabilité par la loi de Weibull. (Lyonnet, 2000)

Expression du taux de défaillance en fonction de  $\beta$  :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (1.54)$$

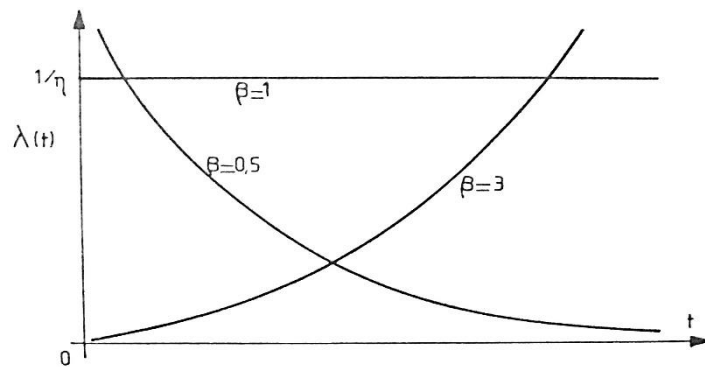
L'étude de  $\lambda(t)$  nous montre que :

Si  $\beta < 1$ , on a  $\lambda(t)$  qui décroît en fonction de  $t$

Si  $\beta = 1$ , on a  $\lambda(t)$  qui constant égal à  $\frac{1}{\eta}$

Si  $\beta > 1$ , on a  $\lambda(t)$  qui est croissant en fonction de  $t$

◆ **Allure de  $\lambda(t)$**



**Figure 1.11.** Allure de taux de défaillance de la loi de Weibull. (Lyonnet, 2000)

◆ **Cas particuliers**

Pour  $\gamma = 0$  et  $\beta = 1$ , on retrouve la loi exponentielle ; en effet :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^1} = e^{-\left(\frac{1}{\eta}\right).t} \quad \left( \text{loi exponentielle de paramètre } \lambda = \frac{1}{\eta} \right) \quad (1.55)$$

Pour  $\beta \geq 3$ , on se rapproche d'une loi normale et ceci est d'autant plus vrai que  $\beta$  est près de 3,65.

### 1.7.1 Estimation des paramètres de la loi de weibull (Ajustement graphique)

Un des problèmes essentiels est l'estimation des paramètres :  $(\beta, \eta, \gamma)$  de cette loi.

Pour cela, nous disposons de deux méthodes :

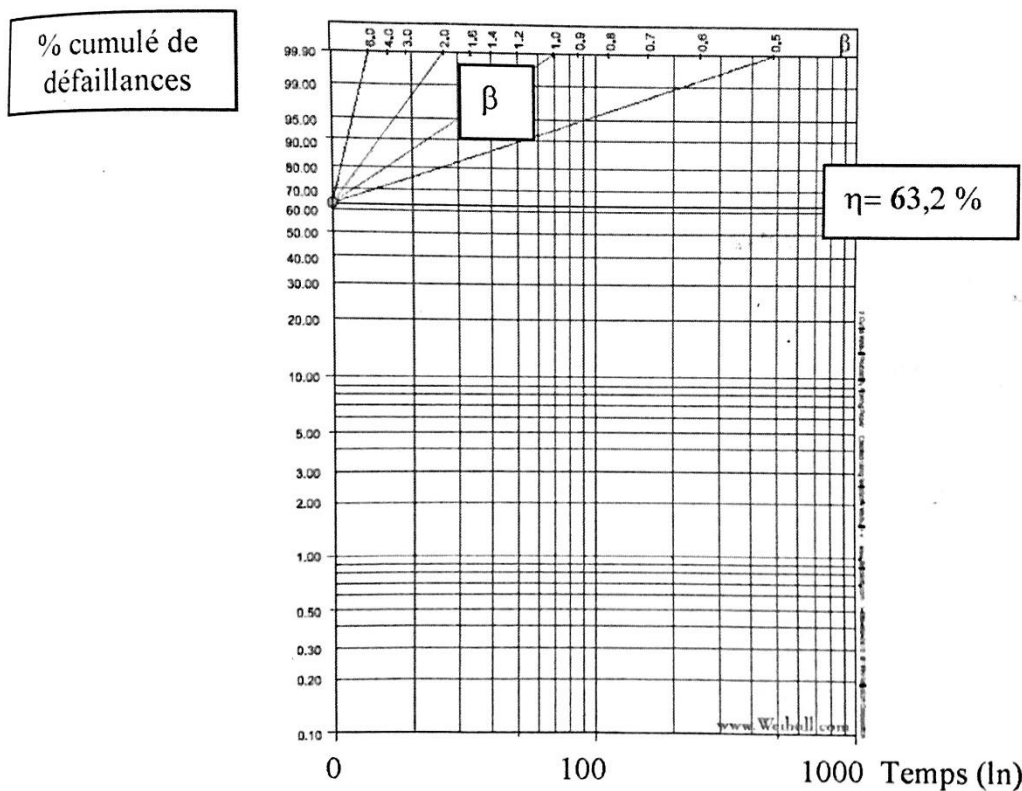
Une entièrement par le calcul, qui fait intervenir les équations différentielles difficiles à résoudre, de ce fait elle est peu utilisée. Actuellement les méthodes numériques ont résolu cet obstacle et ils existent des logiciels.

L'autre graphique, qui utilise un papier à échelle fonctionnelle dit papier de Weibull ou graphique « d'Allen Plait ». Cette méthode, était la plus utilisée, est développée ici (Lyonnet, 2000).

◇ Graphique d'Allen Plait :

Le graphique à échelle fonctionnelle utilisée est gradué de la façon suivante :

- en ordonnée, on a :
  - $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$  (logarithme népérien)
- en abscisse, on a :
  - $\ln t$



**Figure 1.12.** Graphe à échelles fonctionnelles d'Alan Plait ([www.weibull.com](http://www.weibull.com)).  
(Procaccia,2011)

### 1.7.1.1 Cas $\gamma = 0$ :

Hypothèse que l'origine est bien connue et qu'elle coïncide avec les données expérimentales.

Ceci nous donne :

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad \text{et} \quad \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \ln e^{\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} = \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta \quad (1.56)$$

Puis :

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \ln \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta = \beta \ln \left(\frac{t}{\eta}\right) = \beta \ln t - \beta \ln \eta \quad (1.57)$$

On pose :

$$X = \ln t \quad (\text{variable en fonction de } t)$$

$$Y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} \quad (\text{fonction de } t)$$

$$B = \beta \ln \eta \quad (\text{constante})$$

$$A = \beta$$

D'où, on a :

$$\boxed{Y = AX + B} \quad (\text{équation d'une droite}) \quad (1.58)$$

En conclusion, si les données correspondent à une loi de Weibull de paramètre  $\gamma = 0$ , elles doivent s'aligner suivant une droite dans le graphique d'Allen Plait.

Pour déterminer les paramètres  $\beta$  et  $\eta$ , on utilise le graphique d'Allen Plait (ou papier de Weibull) (Lyonnet, 2000).

◇ **Calcul de  $\beta$  :**

$\beta$  est le paramètre de forme, il représente la pente de droite. Pour l'obtenir, on fait passer une droite parallèle à la droite réelle par le point 1 et on lit la valeur de  $\beta$  sur l'échelle  $\beta$  (voir graphe ci-après).

◇ **Calcul de  $\eta$  :**

$\eta$  est le paramètre d'échelle, il se lit à l'intersection de la droite tracée et de la ligne 63,2 % (voir figure 1.13).

En effet, pour l'ordonnée  $Y = 0$ , on a  $F(t) = 63,2 \%$ .

$$Y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = 0 ; \text{ ce qui donne :}$$

$$\ln \frac{1}{1 - F(t)} = 1; (\ln 1 = 0) \quad \text{et} \quad 1 - F(t) = e^{-1} \quad (1.59)$$

$$F(t) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,368 = 0,632$$

D'où, pour  $Y = 0$  :

$$\beta X = \beta \cdot \ln \eta$$

$$\boxed{X = \ln \eta} \tag{1.60}$$

Comme  $X = \ln t$ , on a  $t = \eta$ .

$\eta$  est la valeur lue directement sur le graphique d'Allen Plait pour l'ordonnée 63,2 % car l'échelle des abscisses est en  $\ln t$ .

◇ **Graphe d'une loi de Weibull :**  
(Voir figure 1.13).

$$\beta = 1,5$$

$$\eta = 20\ 000\ h$$

Ainsi on peut calculer la MTBF (moyenne des temps de bon fonctionnement) :

$$E(t) = MUT = MTBF = mtbf = \eta \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \tag{1.61}$$

$$\eta = 20\ 000\ h$$

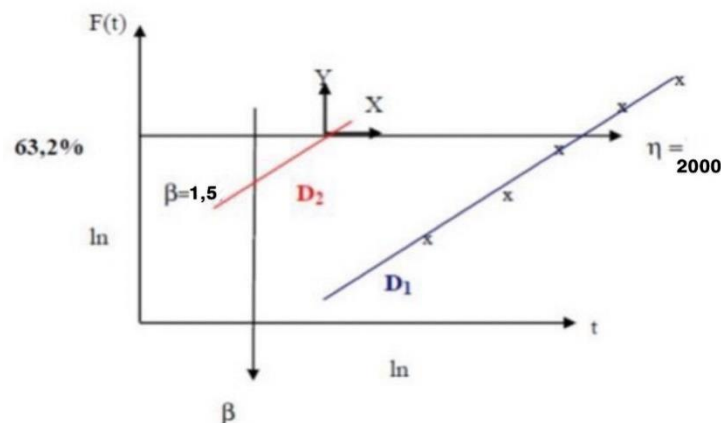
Pour  $\beta = 1,5$ , on trouve  $\Gamma \left( 1 + \frac{1}{1,5} \right) = 0,9027$  (avec la table 1.1 de la loi de Gamma)

D'où, pour le cas présent :

$$E(t) = 20\ 000 \times 0,9027 = 18\ 054\ h$$

◇ **Remarque :**

Pour l'abscisse correspondant à 50 %, nous n'avons pas la moyenne (sauf cas particulier de la loi symétrique) mais la médiane.



**Figure 1.13.** Graphe d'une loi de Weibull. (Lyonnet, 2000)

x	Γ(x)	x	Γ(x)
1,0	1,000 0	2,0	1,000 0
1,1	0,951 4	2,1	1,046 5
1,2	0,918 2	2,2	1,101 8
1,3	0,897 5	2,3	1,166 7
1,4	0,887 3	2,4	1,242 2
1,5	0,886 2	2,5	1,329 3
1,6	0,893 5	2,6	1,429 6
1,7	0,908 6	2,7	1,544 7
1,8	0,931 4	2,8	1,676 5
1,9	0,961 8	2,9	1,827 4
		3,0	2,000 0

Tableau 1.1. Loi de Gamma (Γ). (Lyonnet, 2000)

**1.7.1.2 Cas ou  $\gamma > 0$  (estimation par itération)**

Dans ce cas, les données ne se linéarisent pas, et on obtient une courbe qui admet une asymptote verticale, l'intersection de l'asymptote et de l'abscisse nous permet une première estimation de  $\gamma$  (Lyonnet, 2000).

En effet, on a :

$$F(t) = 0 = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad d'ou \quad 1 = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (1.62)$$

$$\ln 1 = 0 = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

$$\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta \cdot \frac{1}{\beta}} = \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right) = 0^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

$$\frac{t-\gamma}{\eta} = 0 ; t-\gamma = 0$$

$$\Rightarrow t = \gamma \quad (1.63)$$

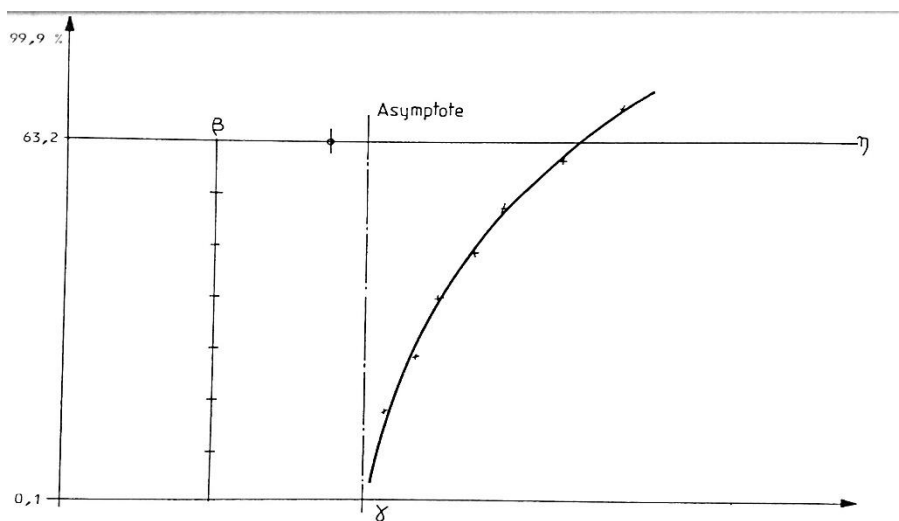


Figure 1.14. Estimation de  $\gamma$  (cas ou  $\gamma > 0$ ). (Lyonnet, 2000)

D'où l'estimation de  $\gamma$  (voir figure 1.14).

Lorsque l'on a estimé  $\gamma$  on fait la correction :

$$t' = t - \gamma$$

$t'$  = nouveau temps

$t$  = ancienne estimation

Ensuite, on reporte les nouvelles valeurs, et on doit obtenir quelque chose qui se rapproche d'une droite, si ce n'est pas tout à fait le cas on recommencera l'opération, ceci au maximum trois fois, et si l'on n'a toujours pas une droite, alors on peut en conclure que l'on n'a pas une loi de Weibull, ou que l'on peut avoir des lois de Weibull à origines différentes, ou mélangées.

### 1.7.1.3 Cas de $\gamma < 0$ (estimation par itération)

Dans ce cas, on obtient une courbe qui admet une asymptote horizontale.

Une façon d'estimer  $\gamma$  est de procéder par essais successifs jusqu'à ce que la courbe soit redressée (Lyonnet, 2000).

(Voir figure 1.15).

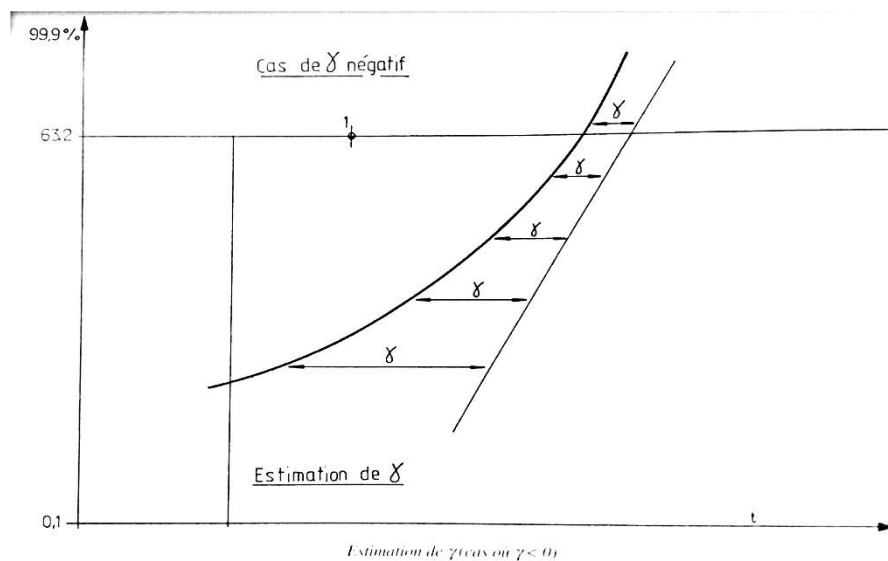


Figure 1.15. Estimation de  $\gamma$  (cas ou  $\gamma < 0$ ). (Lyonnet, 2000)

### 1.7.1.4 Estimation de $\gamma$ par le calcul

Une autre façon d'estimer  $\gamma$ , à partir des transformations fonctionnelles du papier de Weibull, nous donne le développement suivant (Lyonnet, 2000) :

Considérons les points

$$(t_{min}, Y_{min}) ; (t_m, Y_m) ; (t_{max}, Y_{max})$$

Les points  $t_{min}, t_m, t_{max}$  sont déterminés de la façon suivante (voir figure 1.16).

- $Y_{max}$  est la valeur maximum à laquelle on associe  $t_{max}$ .

- $Y_{min}$  est la valeur minimum,  $t_{min}$  lui est associé de la même façon que précédemment.
- Et  $Y_m$  est le point milieu, (mesuré avec une règle « linéaire ») entre  $Y_{max}$  et  $Y_{min}$  ;  $t_m$  (t milieu en découle).

Définition des points  $t_{min}, t_m, t_{max}$  pour l'estimation de Y

$$Y_m = \frac{Y_{max} + Y_{min}}{2} = \text{(mesuré avec une échelle linéaire)} \quad (1.64)$$

Par suite :

$$2Y_m = Y_{max} + Y_{min}$$

En remplaçant en fonction de R(t) avec  $t_{min}, t_m, t_{max}$  valeurs particulières de t définies plus haut, on obtient :

$$2 \ln \ln \frac{1}{R(t_m)} = \ln \ln \frac{1}{R(t_{max})} + \ln \ln \frac{1}{R(t_{min})} \quad (1.65)$$

Par suite :

$$2 \ln \ln \left[ \frac{1}{e^{-\left[\frac{t_m - \gamma}{\eta}\right]^\beta}} \right] = \ln \left[ \ln \frac{1}{e^{-\left[\frac{t_{max} - \gamma}{\eta}\right]^\beta}} \right] + \ln \left[ \ln \frac{1}{e^{-\left[\frac{t_{min} - \gamma}{\eta}\right]^\beta}} \right]$$

Puis

$$2\beta \ln \left[ \frac{t_m - \gamma}{\eta} \right] = \beta \ln \left[ \frac{t_{max} - \gamma}{\eta} \right] = \beta \ln \left[ \frac{t_{min} - \gamma}{\eta} \right]$$

$$2 \ln(t_m - \gamma) = \ln(t_{max} - \gamma) + \ln(t_{min} - \gamma)$$

Et

$$\ln(t_m - \gamma)^2 = \ln(t_{max} - \gamma) \cdot \ln(t_{min} - \gamma)$$

D'où

$$(t_m - \gamma)^2 = (t_{max} - \gamma) \cdot (t_{min} - \gamma)$$

En développant et simplifiant :

$$\gamma(t_{max} + t_{min} - 2t_m) = -t_m^2 + t_{max} \cdot t_{min} \quad (1.66)$$

Puis :

$$\gamma = \frac{t_{max} \cdot t_{min} - t_m^2}{t_{max} + t_{min} - 2t_m} \text{ en arrangeant on obtient :}$$

$$\gamma = t_m - \frac{(t_{max} - t_m) \cdot (t_m - t_{min})}{(t_{max} - t_m) - (t_m - t_{min})}$$

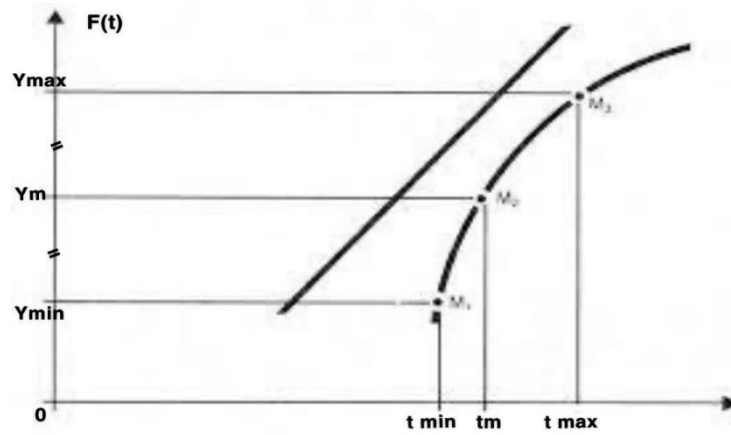


Figure 1.16. Estimation de  $\gamma$  par le calcul. (Lyonnet, 2000)

$$\Lambda = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Moyenne =  $\Lambda\eta + \gamma$

Écart type =  $B \eta$

$\beta$	A	B	$\beta$	A	B	$\beta$	A	B
0,20	120	1901	1,50	0,9027	0,613	4	0,9064	0,254
0,25	24	199	1,55	0,8994	0,593	4,1	0,9077	0,249
0,30	9,2605	50,08	1,60	0,8966	0,574	4,2	0,9089	0,244
0,35	5,0291	19,98	1,65	0,8942	0,556	4,3	0,9102	0,239
0,40	3,3234	10,44	1,70	0,8922	0,540	4,4	0,9114	0,235
0,45	2,4786	6,46	1,75	0,8906	0,525	4,5	0,9125	0,230
0,50	2	4,47	1,80	0,8893	0,511	4,6	0,9137	0,225
0,55	1,7024	3,35	1,85	0,8882	0,498	4,7	0,9149	0,222
0,60	1,5046	2,65	1,90	0,8874	0,486	4,8	0,9160	0,218
0,65	1,3663	2,12	1,95	0,8867	0,474	4,9	0,9171	0,214
0,70	1,2638	1,85	2	0,8862	0,463	5	0,9182	0,210
0,75	1,1906	1,61	2,1	0,8857	0,443	5,1	0,9192	0,207
0,80	1,1330	1,43	2,2	0,8856	0,425	5,2	0,9202	0,203
0,85	1,0880	1,29	2,3	0,8859	0,409	5,3	0,9213	0,200
0,90	1,0522	1,17	2,4	0,8865	0,393	5,4	0,9222	0,197
0,95	1,0234	1,08	2,5	0,8873	0,380	5,5	0,9232	0,194
1	1	1	2,6	0,8882	0,367	5,6	0,9241	0,191
1,05	0,9803	0,934	2,7	0,8893	0,355	5,7	0,9251	0,186
1,10	0,9649	0,878	2,8	0,8905	0,344	5,8	0,9260	0,185
1,15	0,9517	0,830	2,9	0,8917	0,334	5,9	0,9269	0,183
1,20	0,9407	0,787	3	0,8930	0,325	6	0,9277	0,180
1,25	0,9314	0,750	3,1	0,8943	0,316	6,1	0,9286	0,177
1,30	0,9233	0,716	3,2	0,8957	0,307	6,2	0,9294	0,175
1,35	0,9170	0,687	3,3	0,8970	0,299	6,3	0,9302	0,172
1,40	0,9114	0,660	3,4	0,8984	0,292	6,4	0,9310	0,170
1,45	0,9067	0,635	3,5	0,8997	0,285	6,5	0,9316	0,168
			3,6	0,9011	0,278	6,6	0,9325	0,166
			3,7	0,9025	0,272	6,7	0,9333	0,163
			3,8	0,9038	0,266	6,8	0,9340	0,161
			3,9	0,9051	0,260	6,9	0,9347	0,159

Tableau 1.2. Loi de Weibull (calcul de mtbf). (Lyonnet, 2000)



### 1.8 Avantages et inconvénients et champs d'application des lois

On synthétise dans le (Tableau 1.3) les avantages et les inconvénients et les champs d'applications des différentes lois de fiabilité.

Lois	Avantages	Inconvénients	Champs d'application
Exponentielle	Elle décrit la vie des matériels qui subissent des défaillances brutales.	La loi exponentielle ne doit pas être utilisée pour modéliser les composants mécaniques ou électriques censés montrer une fatigue, une corrosion ou une usure avant la fin de la durée de vie prévue du produit.	La distribution exponentielle s'applique aux systèmes opérants en continu (systèmes électroniques) c'est ce qu'on appelle distribution sans mémoire.
	Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance, ou l'intervalle de temps entre deux défaillances.		La loi exponentielle a de nombreuses applications dans le domaine de l'ingénierie.
	Elle est définie par un seul paramètre, le taux de défaillance.		
Weibull	C'est un modèle particulièrement bien adapté à l'étude statistique des défaillances.	La loi de Weibull peut être moins efficace pour les défaillances de produits dues à des réactions chimiques ou à un processus de dégradation comme la corrosion.	La distribution de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie et utilisée en mécanique.
Normale	la plus répandue et la plus utile.		La loi normale est une loi qui s'adapte au domaine mécanique car les défaillances sont

	Cette loi est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie des dispositifs.		essentiellement dues à l'usure en fin de vie (usure) ou le taux de défaillance est croissant.
Log-normale	Pour cette loi, le logarithme de la durée de vie suit une distribution normale. Cette loi peut être utilisée dans les cas où la distribution des données n'est pas symétrique.		Cette loi de distribution est particulièrement utilisée en analyse quantitative pour représenter les cours des instruments financiers.

**Tableau 1.3.** Les lois de fiabilité. (Mihalache, 2007) (LCC, 2019) (Bellaouar et Beleulmi, 2014) (Housseyn, 2013)

### 1.9 Conclusion :

Au cours de ce chapitre, nous avons fait une étude générale sur le taux de défaillance et les lois de fiabilité, ainsi que la durée de vie des matériels selon la courbe en baignoire. Nous avons détaillé les principales lois de calcul de la fiabilité (loi exponentielle, loi normale, loi log-normale et loi de weibull). Et enfin nous avons abordé la problématique de détermination de leurs paramètres et détaillé la méthode d'ajustement graphique pour chacune d'entre-elle.

Dans le chapitre prochain, on va étudier si un échantillonnage est distribué selon une loi de probabilité donnée à travers les tests d'adéquations.

# **Chapitre 2**

## **Tests d'adéquation**

## CHAPITRE 2 – TESTS D'ADEQUATION

### 2.1 Introduction

En statistiques, un test, ou test d'hypothèse, est une procédure de décision entre deux hypothèses. Il s'agit d'une démarche consistant à rejeter ou à ne pas rejeter une hypothèse statistique, appelée hypothèse nulle, en fonction d'un échantillon de données. Il permet de décider, avec un seuil d'erreur  $\alpha$  spécifié, si les écarts présentés par l'échantillon par rapport aux valeurs théoriques attendues sont dûs au hasard ou sont au contraire significatifs.

Les modèles que l'on peut établir en fiabilité sont issus d'un échantillon de population, puis on fait l'hypothèse qu'ils suivent une loi particulière (loi log-normale, loi exponentielle, etc.). Ainsi, il reste à vérifier la validité de cette loi. Cette vérification est obtenue par un test d'adéquation. Pour cela, on admet dans l'utilisation des statistiques un risque d'erreur «  $\alpha$  » petit,  $\alpha$  est le niveau de signification ( $\alpha$  est égal à la probabilité de se tromper en utilisant ce test). (Lyonnet, 2000).

Il existe de nombreux tests pour vérifier qu'un échantillon suit ou non une loi de probabilité donnée, parmi eux : le test dit du Khi-deux, le test de Kolmogorov Smirnov, le test d'Anderson-Darling .... en fonction de l'application.

### 2.2 Test de Khi-deux ( $\chi^2$ )

#### 2.2.1 Principe

En statistique, le test du khi carré, aussi dit du khi-deux, d'après sa désignation symbolique  $\chi^2$ , est un test statistique où la statistique de test suit une loi éponyme sous l'hypothèse nulle. (Stigler, 2008)

Par exemple, il permet de tester l'adéquation d'une série de données à une famille de lois de probabilité ou de tester l'indépendance entre deux variables aléatoires.

#### ◆ Conditions

Il faut un nombre d'observations supérieur ou égal à 50.

$$\boxed{n \geq 50}$$

On utilise généralement des classes et dans chaque classe on doit obtenir un nombre d'observations supérieur ou égal à 50, l'intervalle de classe n'est pas forcément régulier.

Ce test est basé sur l'écart entre les valeurs observées et le modèle théorique ; une fonction indicatrice des écarts est établie de la manière suivante : (Lyonnet, 2000)

$$E = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad (2.1)$$

$r$  : nombre de classes

$n_i$  : nombre d'individus par classe

$n$  : nombre d'individus total de l'échantillon

$np_i$  : nombre d'individus attendu théoriquement dans la classe  $i$

$p_i$  : probabilité de se trouver dans la classe

E suit approximativement une loi de  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté avec  $\nu = r - k - 1$

$k$  est le nombre de paramètres estimé pour le modèle théorique. Exemples :

loi exponentielle :  $k = 1$

loi normale :  $k = 2$

loi de weibull :  $k = 3$

De ceci, on peut écrire :

$$p(E > \chi^2_{\nu, 1-\alpha}) = 1 - \alpha \quad (2.2)$$

Si :

$$E > \chi^2_{\nu, (1-\alpha)}$$

On rejette l'hypothèse du modèle théorique comme bonne.

### 2.2.2 Exemple

On a les résultats suivants regroupés par classe :

TBF	$n_i$
0 - 500	7
500 - 1 000	8
1 000 - 1 500	9
1 500 - 2 000	10
2 000 - 2 500	12
2 500 - 3 000	8

**Tableau 2.1.** Un exemple sur des résultats regroupés par classe. (Lyonnet, 2000)

On fait l'hypothèse d'une loi exponentielle de paramètres  $\lambda = 1/1\ 600$  déf./h. avec  $\alpha = 0,05$ .  
Dire si le modèle est accepté ? (Lyonnet, 2000)

◇ **Solution**

$$P_i = R(t_i) - R(t_i + 1) \quad (2.3)$$

Avec

$$R(t) = e^{-1/1\ 600 t} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} R(0) &= 1 \\ R(500) &= 0,731 \\ R(1\ 000) &= 0,535 \\ R(1\ 500) &= 0,391 \\ R(2\ 000) &= 0,286 \\ R(2\ 500) &= 0,209 \end{aligned}$$

$$R(3\ 000) = 0,1531$$

D'où

TBF	$n_i$ réel	$P_i$	$np_i$	$n_i - np_i$
0 - 500	7	0,269	14,5	-7,5
500 - 1 000	8	0,1956	10,6	-2,56
1 000 - 1 500	9	0,144	7,78	+1,22
1 500 - 2 000	10	0,105	5,67	4,33
2 000 - 2 500	12	0,077	4,16	7,84
2 500 - 3 000	8	0,056	3,02	4,98

**Tableau 2.2.** Un tableau représente les nombres d'individus et probabilité de se trouver dans la classe et les nombres d'individus attendu théoriquement dans la classe  $i$ . (Lyonnet, 2000)

Puis :

$$E = 30,99$$

Et

$$\chi_{(6-1-1) \cdot 0,95}^2 = 9,59$$

$E > \chi_{v,\alpha}^2$  : on refuse l'hypothèse d'un modèle exponentiel. (Lyonnet, 2000)

## 2.3 Test de Kolmogorov-Smirnov

### 2.3.1 Principe

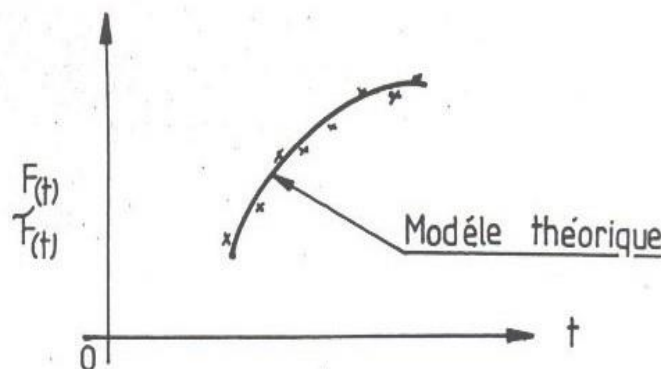
Aucune restriction n'est nécessaire, quel que soit  $n$  on peut l'appliquer ; cependant, si  $n$  est trop grand, il est préférable de regrouper les valeurs en classe, et ainsi d'utiliser le test de  $\chi^2$ .

L'idée est toujours de comparer la fonction réelle de répartition des défaillances à la fonction de répartition théorique. (Lyonnet, 2000)

Cette fois-ci, on mesure l'écart point par point entre ces deux fonctions :

$$D_{ni} = |\mathcal{F}(t) - F(t)| \quad (2.5)$$

$\mathcal{F}(t)$  : fonction de répartition réelle.



**Figure 2.1.** Modèle théorique de test de Kolmogorov-Smirnov. (Lyonnet, 2000)

Elle peut être obtenue par la méthode des rangs moyens :

$$\mathcal{F}(t_i) = \frac{i}{n + 1} \tag{2.6}$$

$F(t)$  : fonction de répartition théorique.

On montre que  $D_n = \text{Max}|\mathcal{F}(t) - F(t)|$  suit une loi ne dépendant que de  $n$  et on écrit que : (Lyonnet, 2000)

$$P[\text{Max} |\mathcal{F}(t) - F(t)| < D_{n,\alpha}] = 1 - \alpha \tag{2.7}$$

La valeur de  $D_{n,\alpha}$  est donnée par la table de Kolmogorov-Smirnov (tableau 2.4). Si :

$$D_n > D_{n,\alpha}$$

On refuse l'hypothèse du modèle théorique.

**2.3.2 Méthode graphique** Ayant fait l'hypothèse d'une distribution cumulée théorique  $F(t)$ , on peut tracer une zone autour de  $F(t)$ , dans laquelle doivent se trouver les valeurs réelles  $\mathcal{F}(t)$  pour accepter le modèle ; ainsi, cette zone est établie de la façon suivante : (Lyonnet, 2000)

$$F(t) - D_{n,\alpha} \leq \mathcal{F}(t) \leq F(t) + D_{n,\alpha} \tag{2.8}$$

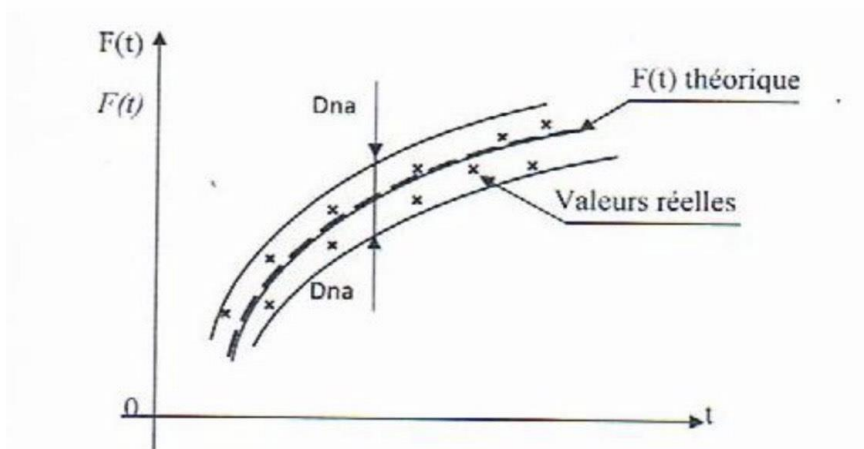


Figure 2.2. Méthode graphique de Kolmogorov-Smirnov. (Lyonnet, 2000)

**2.3.3 Exemple**

Au cours d'un essai, on a relevé les temps suivants entre défaillances : 23 h, 16 h, 56 h, 71 h, 4 h, 25 h, 51 h, 30 h.

Peut-on admettre un modèle gaussien de paramètres  $m = 34$ ,  $\sigma = 22$ , avec  $\alpha = 0,05$ . (Lyonnet, 2000)

◇ **Solution**

$n = 8$ . Utilisation du test de Kolmogorov-Smirnov. (Lyonnet, 2000)

$$F(t_i) = \int_{-\infty}^{t_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}22} e^{-\frac{(t-34)^2}{2 \times 22^2}} dt \quad (2.9)$$

On passera en v.c.r. :

$$u = \frac{t_i - 34}{22} \quad (2.10)$$

La fonction réelle est estimée par la méthode des rangs moyens :

$$\mathcal{F}(t_i) = \frac{i}{n + 1} \quad (2.11)$$

De ceci, on découle le tableau suivant :

Temps rangés en ordre croissant	F ( $t_i$ ) théorique	F ( $t_i$ ) réelle	D <sub>n</sub>
4	0,086	0,111	0,025
16	0,200	0,222	0,022
23	0,308	0,333	0,025
25	0,345	0,444	0,099
30	0,428	0,555	0,127
51	0,779	0,666	0,113
56	0,841	0,777	0,064
71	0,953	0,888	0,065

**Tableau 2.3.** Un tableau représente les temps entre défaillances et leur fonction de répartition réelle et théorique et l'écart point par point entre ces deux fonctions. (Lyonnet, 2000)

$$D_n \text{ Max} = 0,127$$

Et, sur la table de Kolmogorov-Smirnov (tableau 2.4) :

$$D_{8, 0,05} = 0,457$$

Par conséquent, on ne refuse pas l'hypothèse d'un modèle gaussien au niveau de signification « 0,05 ». (Lyonnet, 2000)



N	Niveau Significatif $\alpha$				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.542	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.414	0.457	0.534
9	0.339	0.36	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.41	0.49
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.45
13	0.284	0.302	0.325	0.61	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	<b>0.318</b>	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	<b>0.294</b>	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.2	0.22	<b>0.24</b>	0.29
35	1.18	0.19	0.21	0.23	0.27
>35	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$

**Tableau 2.4.** Loi Kolmogorov-Smirnov. (Lyonnet, 2000)

## 2.4 Test d'Anderson-Darling

### 2.4.1 Principe

Ce test est très largement utilisé pour vérifier les hypothèses de normalité ou de Weibull. Il est généralement considéré meilleur que les tests de Cramer Von Mises, et que le test du Chi Deux utilisé lorsque les données sont nombreuses.

Il fait partie, comme les précédents, des tests classiques basés sur une mesure de l'écart entre la fonction de répartition de distribution empirique (EDF, empirical distribution function) et la fonction de répartition choisie faisant l'objet de l'adéquation.

La statistique mesurant l'écart entre la fonction de répartition cumulée  $F_n(x)$  pour un échantillon de taille  $n$ , et la fonction de répartition théorique  $F_0(x)$  est appelée statistique EDF. (Procaccia, 2011)

Les tests EDF les plus classiques sont le test de Kolmogorov-Smirnov (figure 2.3) fondé sur l'écart maximal, le test de Cramer-Von Mises fondé sur une distance, et enfin le test d'Anderson Darling fondé sur un écart relatif. Ces trois statistiques sont indépendantes de la loi testée  $F_0(x)$ .

Le test d'Anderson-Darling est plus sensible aux écarts dans les queues de distribution, que ne l'est le test de Kolmogorov-Smirnov. Ce test peut être appliqué à n'importe quelle distribution. Mais il n'est guère facile de trouver les tables de valeurs critiques. C'est ce test que l'on peut recommander pour évaluer l'adéquation à une loi exponentielle (stationnarité, du taux de défaillance), ou à une loi de Weibull (évolution soit vers l'amélioration suite au rodage, soit vers la dégradation, suite au vieillissement).

La statistique s'écrit :

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_n(x) - F_0(x)}{F_0(x)} dF_0(x) \quad (2.12)$$

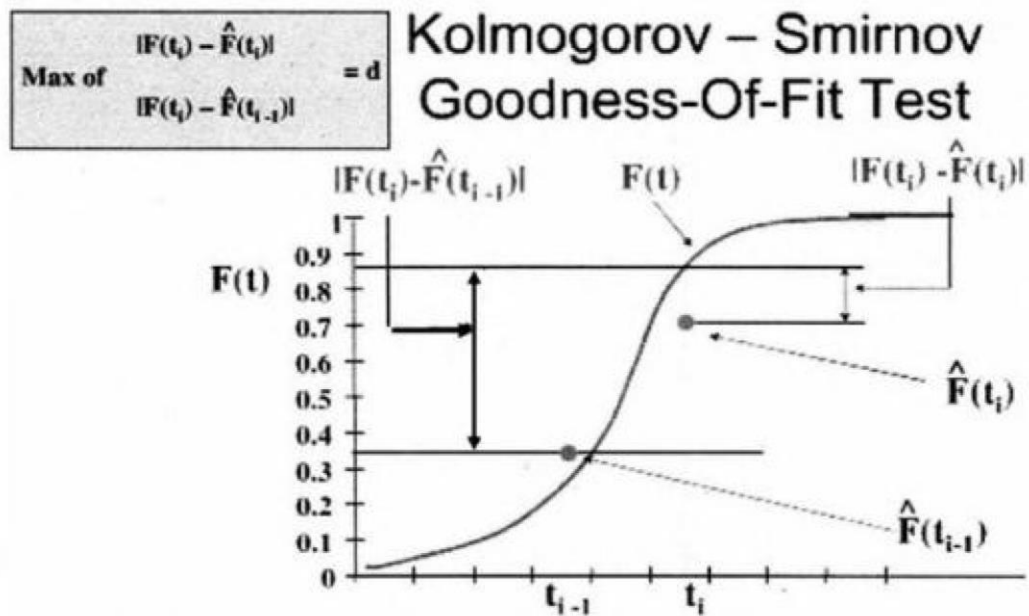


Figure 2.3. Graphique des distances calculées pour le test de K-S. (Procaccia, 2011)

Dans le cas d'un test de normalité la forme fonctionnelle d'Anderson-Darling est :

$$A^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1-2i}{n} [\ln(F_0[Z_i]) + \ln(1 - F_0[Z_{(n+1-i)}])] - n \quad (2.13)$$

$F_0(x)$  est la loi que l'on vérifie et  $Z_i$  est la  $i^{ième}$  variable normalisée,  $n$  la taille de l'échantillon.

L'hypothèse nulle est que  $F_0$  est la distribution réelle de l'échantillon d'observations. La distribution  $F_0$  est rejetée au niveau  $\alpha$ , si la statistique  $A^2$  est supérieure à celle de la valeur critique correspondante à cette distribution. (Procaccia, 2011)

Dans le cas de la loi de Weibull la statistique du test est :

$$A^2 = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1-2i}{n} [\ln(1 - \exp[-Z_i]) - Z_{(n+1-i)}] - n \right] \quad (2.14)$$

Où

$$Z_i = \left( \frac{X_i}{\hat{\eta}} \right)^{\hat{\beta}} \quad \text{et} \quad \hat{A}^2 = \frac{(1+0,2)}{\sqrt{n}} A^2$$

Les valeurs critiques pour la loi normale, et la loi log normale sont données dans le (tableau 2.5), pour la loi de Weibull dans le (tableau 2.6) et la loi exponentielle dans le (tableau 2.7).

$\alpha$	0,1	0,05	0,025	0,01
$A^2_{crit}(\alpha)$	0,631	0,752	0,873	1,035

**Tableau 2.5.** Table d'Anderson-Darling. Valeurs  $A^2_{crit}(\alpha)$  critiques pour la loi normale et log normale. (Procaccia, 2011)

$\alpha$	0,1	0,05	0,025	0,01
$A^2_{crit}(\alpha)$	0,637	0,757	0,877	1,038

**Tableau 2.6.** Valeurs critiques d'Anderson-Darling pour la loi de Weibull. (Procaccia, 2011)

$\alpha$	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025
$A^2_{crit}(\alpha)$	0,736	0,816	0,916	1,062	1,321	1,591	1,959	2,244	2,534

**Tableau 2.7.** Valeurs critiques d'Anderson-Darling pour la loi exponentielle. (Procaccia, 2011)

### 2.4.2 Exemple : test d'un processus exponentiel

Soit les observations suivantes : (Procaccia, 2011)

514,00 ; 1 540,63 ; 299,90 ; 24,75 ; 1 275,57 ; 3 806,82 ; 675,23 ; 2 765,57 ; 1 117,83 ; 0,57 ; 2231,23 ; 82,42 h.

➤ TEST ANDERSON-DARLING

On range l'échantillon d'observations par ordre croissant.

On calcule l'estimateur du maximum de vraisemblance du taux de défaillance, soit  $\lambda = 0,00083$ , puis  $Z_i$ , et enfin la statistique d'Anderson-Darling. On obtient :

$$A^2 = 0,910$$

$$A'^2 = 0,956$$

On se fixe un niveau de confiance  $(1 - \alpha) = 0,95$ . (Procaccia, 2011)

A ce niveau, on trouve sur le tableau 2.7 que :  $A^2_{crit}(\alpha) = 1,321$ .

On constate donc que  $A'^2 < A^2_{crit}(\alpha)$ , on ne peut, alors, rejeter la loi exponentielle.

On admet dans ces conditions, que le processus de défaillance est stationnaire.

➤ TEST KOLMOGOROV-SMIRNOV, KS, (tableau 2.4)

On obtient encore la même conclusion à l'aide du logiciel RARE (figure 2.4).

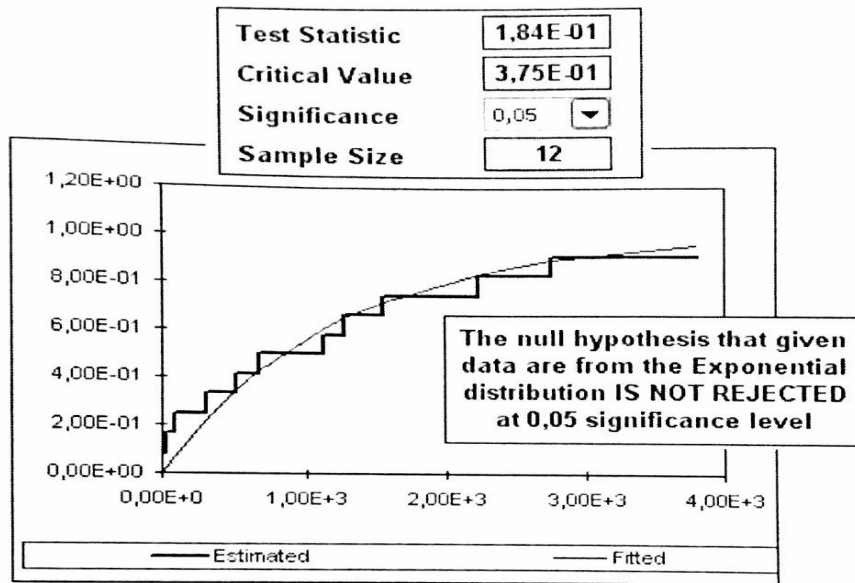


Figure 2.4. Test KS (logiciel Rare). (Procaccia, 2011)

## 2.5 Test de Barlow-Proschan - Test spécifique pour la loi exponentielle dans le cas de données multi censurées

### 2.5.1 Principe

Dans le cas de temps de défaillances censurés ordonnés,  $T_1, T_2, \dots, T_k$  appartenant à échantillon de  $n$  temps de fonctionnement, on appelle  $S_i, i=1,2,\dots,k$ , le temps total en test entre la  $(i-1)$  et la  $i^{ième}$  défaillance, c'est-à-dire entre les temps  $X_{i-1}$  et  $X_i$ . (Procaccia, 2011) La statistique du test de Barlow-Proschan est égale à :

$$w = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (k-i)S_i}{\sum_{i=1}^k S_i} \tag{2.15}$$

On pose :

$$Y_1 = kT_1 \tag{2.16}$$

$$Y_2 = kT_1 T_1 + (k-1)(T_2-T_1) \tag{2.17}$$

.....

$$Y_k = kT_1 T_1 + (k-1)(T_2-T_1) + \dots + (T_k-T_{k-1})$$

$$Y_k = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_k \tag{2.18}$$

Lorsque le taux de défaillance est constant et égal à  $\lambda_0$ , la variable  $\frac{Y_i}{Y_k}$  correspond à la statistique TTT transformée, ce qui signifie que la statistique de Barlow-Proschan :

$$w = \frac{Y_1}{Y_k} + \frac{Y_2}{Y_k} + \dots + \frac{Y_{k-1}}{Y_k} \quad (2.19)$$

A la même distribution que la somme de (k-1) variables aléatoires uniformes indépendantes sur [0,1]. la moyenne de cette distribution est  $\frac{1}{2}$  et sa variance est égale à  $\frac{1}{12}$ . on a donc :

$$E_{\lambda_0}(w) = \frac{k-1}{2} \quad (2.20)$$

$$Var_{\lambda_0}(w) = \frac{k-1}{12} \quad (2.21)$$

On rejette l'hypothèse nulle si  $w > w_{crit}$ , et on l'accepte dans le cas contraire. (Procaccia, 2011)

Le tableau donne les valeurs critiques calculées pour la statistique du test Barlow-Proschan.

<b>k-1</b> \ <b>a</b>	<b>0.100</b>	<b>0.050</b>	<b>0.025</b>	<b>0.010</b>	<b>0.005</b>
2	1.553	1.684	1.776	1.859	1.900
3	2.157	2.331	2.469	2.609	2.689
4	2.753	2.953	3.120	3.300	3.411
5	3.339	3.565	3.754	3.963	4.097
6	3.917	4.166	4.376	4.610	4.762
7	4.489	4.759	4.988	5.244	5.413
8	5.056	5.346	5.592	5.869	6.053
9	5.619	5.927	6.189	6.487	6.683
10	6.178	6.504	6.781	7.097	7.307
11	6.735	7.077	7.369	7.702	7.924
12	7.289	7.647	7.953	8.302	8.535

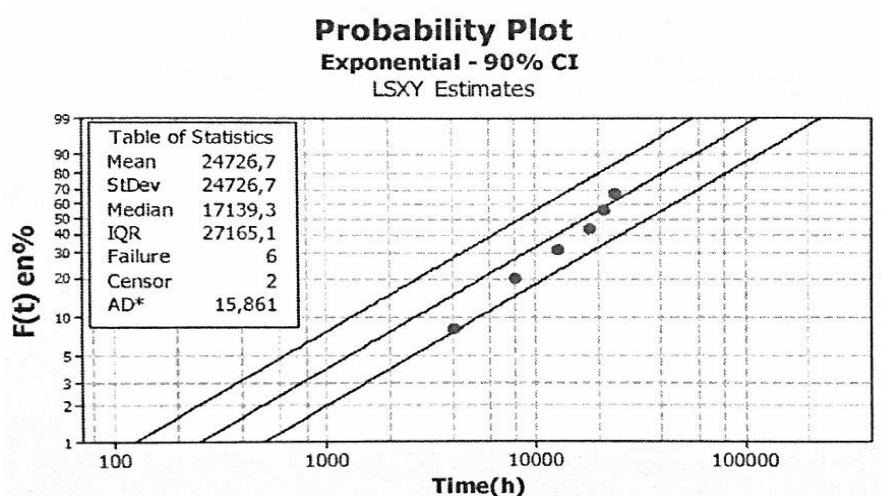
**Tableau 2.8.** Valeurs critiques du test TTT (totale time on test) de Barlow-Proschan. (Procaccia, 2011)

### 2.5.2 Exemple : vieillissement de garnitures d'étanchéité de pompes alimentaires

Le retour d'expérience réalisé sur 8 pompes alimentaires de centrales nucléaires pendant un cycle complet de maintenances de 24 000 heures/pompe, soit un total de 192 000 heures cumulées, recueille k = 6 dégradations/défaillances aux temps respectifs : 4 000 h (pompe 1), 12 675 h (pompe 2), 18 000 h (pompe 3), 8 000 h (pompe 4), 21 000 h (pompe 5), 24 000 h (pompe 6), et deux censures à 24 000 h sur les pompes 7 et 8. (Procaccia, 2011)

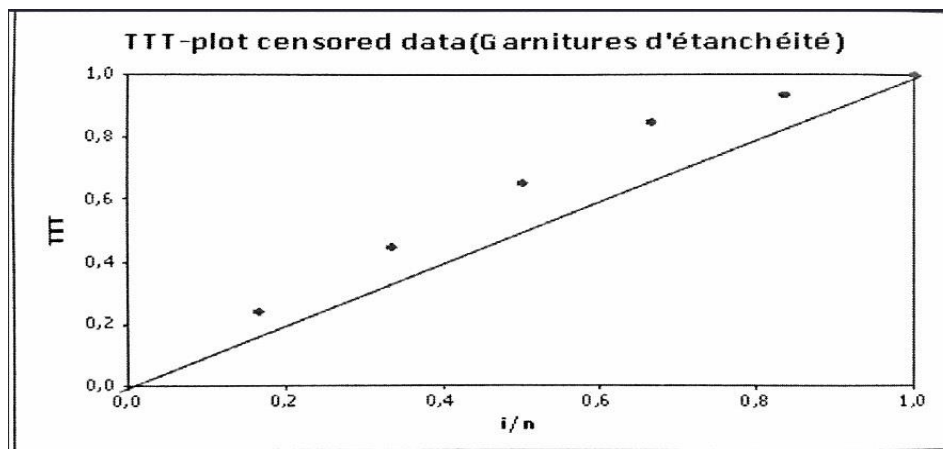
On souhaite tester l'hypothèse nulle  $H_0$  = les temps de défaillance sont distribués selon une loi exponentielle, contre l'alternative : les temps de défaillance présentent une tendance monotone.

La figure 2.5 montre la distribution des temps de défaillance comparée à une loi exponentielle de paramètre  $2,1 \cdot 10^{-5}$ , et à son intervalle de confiance au niveau 90%.



**Figure 2.5.** Comparaison du retour d'expression avec une distribution exponentielle. (Procaccia, 2011)

La figure 2.6 présente le graphe du test non paramétrique TTT. On peut constater une tendance quasi stationnaire des observations.



**Figure 2.6.** Test TTT. (Procaccia, 2011)

Le tableau 2.9 présente le calcul détaillé de la statistique TTT, total time on test.

Time	Censor	No at risk	Total time	Cum total time	Plot total time	i/n	TTT
4 000	1	8	32 000	32 000	32 000	0,16667	0,23586
8 000	1	7	28 000	60 000	60 000	0,33333	0,44223
12 675	1	6	28 050	88 050	88 050	0,50000	0,64898
18 000	1	5	26 625	114 675	114 675	0,66667	0,84522
21 000	1	4	12 000	126 675	126 675	0,83333	0,93367
24 000	1	3	9 000	135 675	135 675	1,00000	1,00000
24 000	0	2	0	135 675			
24 000	0	1	0	135 675			

**Tableau 2.9.** Calcul des coordonnées des points du graphe TTT. (Procaccia, 2011)

La statistique est égale à :

$$w = 0,23586 + 0,44223 + 0,64898 + 0,84522 + 0,93367 = 3,10596 \quad (2.22)$$

Avec  $k - 1 = 6 - 1 = 5$ .

La valeur critique du test au niveau de signification 10% est, pour sa part, égale à 3,339 (tableau 2.8). Comme :

$$w = 3,10 < w_{0,10} = 3,339$$

Il n'y a aucune raison de rejeter l'hypothèse nulle, et on peut donc accepter l'hypothèse d'un taux de défaillance constant.

Si l'on fait l'hypothèse de normalité, la valeur critique au niveau de signification 10% et pour  $(k - 1) = 5$ , est égale à :

$$w_{crit} = \frac{k - 1}{2} + \sqrt{\frac{k - 1}{12}} u_{1-\alpha} \quad (2.23)$$

$$w_{crit} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{12}} \times 1,645 = 3,562$$

Valeur proche de la précédente.

La statistique du test est donc encore inférieure à  $w_{crit}$  ; on arrive donc à la même conclusion que la précédente, et il n'y a pas de raison de rejeter l'hypothèse d'exponentialité. (Procaccia, 2011)

## 2.6 Conclusion

Dans les travaux de modélisation que le data analyste est amené à traiter, il y a régulièrement des hypothèses sur des lois de probabilité qu'il faut vérifier à partir de nombreux tests.

Dans ce chapitre, nous avons vu les tests du khi-deux, de Kolmogorov-Smirnov, d'Anderson Darling et le test spécifique pour la loi exponentielle (Barlow-Proschan) dans le cas de données multi censurées, avec des exemples. Et pour lequel nous concluons que le but d'un test est de déterminer quelle est l'hypothèse vraie entre deux propositions, l'hypothèse nulle, et l'hypothèse alternative..... On verra si on complete ou NON (application) ?!

D'autre part, les tests d'adéquation font partie des pratiques qu'ont les statisticiens pour prendre une décision concernant l'hypothèse de l'utilisation d'une distribution paramétrique pour un échantillon.

Dans le chapitre prochain, on va étudier les types de données pour estimer les durées de vie des systèmes



## **Chapitre 3**

# **Types de données et détermination des modèles**

## CHAPITRE 3 – TYPES DE DONNEES ET DETERMINATION DES MODELES

### 3.1 Introduction à la problématique des censures

Les données expérimentales disponibles pour estimer les durées de vie des systèmes consistent dans la connaissance plus ou moins complète des instants de défaillance de chaque unité de l'échantillon servant de référence.

On distingue (Lyonnet, 2000) :

#### ❖ Des données complètes

Il s'agit du cas où les instants de défaillance de chacune des unités de l'échantillon sont connus.

#### ❖ Des données censurées simples

Il s'agit du cas (assez fréquent) où, au moment où se fait l'analyse des données :

- certaines unités sont encore en état de bon fonctionnement,
- ces unités en état de bon fonctionnement ont toutes le même âge (exemple : matériels mis en service simultanément),
- les instants de défaillance des unités hors fonctionnement sont connus.

A ce cas, appelé aussi << résultats censurés à droite >>, correspond le cas symétrique intitulé << Résultats censurés à gauche >>, dans lequel les instants de défaillance sont seulement connus à partir d'un moment donné du plan d'essai.

Enfin, bien que les formules d'estimation soient sensiblement identiques, on pourra encore distinguer les deux situations suivantes :

- la première, dans laquelle la censure est faite à un moment prédéterminé (censure sur le temps),
- la seconde, dans laquelle la censure est faite lors du contrat d'un nombre prédéterminer de défaillances (censure sur défaillances).

#### ❖ Des données censurées multiples

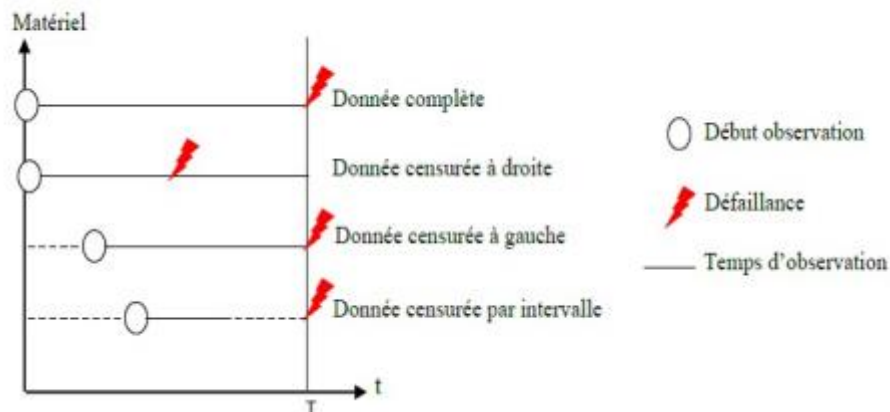
La différence avec le cas des << données censurées simple >> réside ici dans le fait qu'au moment de la censure, les âges des unités en état de bon fonctionnement ne sont pas forcément identiques. Cela correspond à une situation où les unités de l'échantillon servant de référence n'ont pas été mises en fonctionnement au même moment (exemple : conditions opérationnelles d'utilisation).

Là encore, la censure pourra être faite :

- ✓ Sur le temps,
- ✓ Sur le nombre de défaillance.

Notons qu'il existe des données censurées à gauche lorsque l'on ne connaît pas très bien la date de mise en service.

La figure 3.1 illustre ces différents types de données.



**Figure 3.1.** Différents types de données. (Suhner, 1994)

Les différents types de données peuvent être classés comme :

- Complète.
- Censurées Simples sur le temps.
- Censurées Simples sur défaillances.
- Censurées Multiples sur le temps.
- Censurées Multiples sur Défaillances.
- Censurées Simples sur le temps à Gauche.
- Censurées Multiples sur le temps à Gauche.
- Censurées Multiples sur le temps à Gauche et à Droite.

Remarque :

Il faut signaler que, dans tous les cas, les dates sont référencées par rapport à une origine connue (mise en service industriel ou date de remplacement du composant défaillant).

Les temps obtenus sont donc la différence entre deux dates. Le terme le plus exact n'est pas temps de défaillance ou temps de censure mais plutôt âge du dispositif au moment de la défaillance ou de la censure.

De plus, l'unité d'âge est en fait une unité d'usage qui peut, par exemple, s'exprimer en nombre de cycles, en nombre de kilomètres, en heures de fonctionnement, en nombre de sollicitations, etc (Lannoy, 1993).

### 3.1.1 Cas de données censurées simples

Neuf éléments sont observés ; l'observation est interrompue avant la défaillance de l'ensemble. On a seulement 6 TBF, les 3 autres éléments fonctionnent encore.

La méthode de Johnson nous dit de classer les TBF par ordre croissant jusqu'à la n<sup>ième</sup> panne et d'estimer la fonction de répartition par, (Lyonnet, 2000) :

Les rangs moyens 
$$F(ti) = \frac{\sum^{n_i} n_j}{n+1} \quad (3.1)$$

Les rangs médians 
$$F(ti) = \frac{\sum^{n_i} n_j - 0,3}{n + 0,4} \tag{3.2}$$

Avec  $0 < \sum n_j \leq r$

r : observations non censurées

n : Nombre d'éléments observés défailants plus suspendus

De ce fait, on tient compte des éléments (n-r) qui ne sont pas tombés en panne. Le modèle trouvé suppose que l'évolution de défaillance au-delà de la nième panne est du même type (même modèle).

Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il y a une grossière erreur. Au-delà du temps correspondant à << r >>, l'intervalle de confiance pour  $t > t_r$  est très large.

**3.1.2 Cas de données censurées multiples**

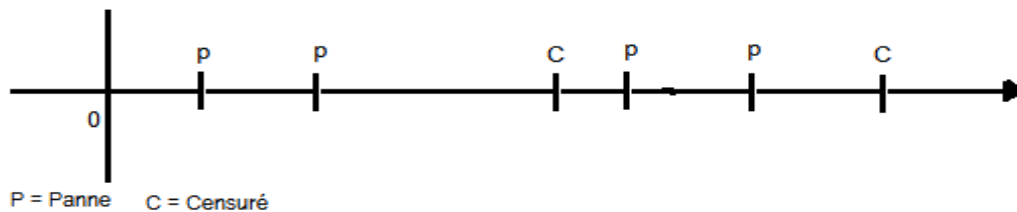
C'est le cas de matériel suivi en clientèle ou sur site en production.

❖ **Hypothèse**

On ne prend en compte que les premières défaillances. Le matériel appartient à la même famille (Lyonnet, 2000).

Après classement des défaillances par ordre croissant, on s'aperçoit que l'on a des éléments qui ne sont pas tombés en panne et qui ne totalisent pas un nombre d'heures de fonctionnement aussi grand que le dernier défailant.

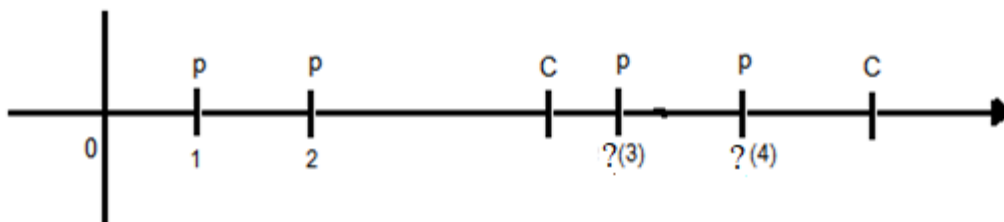
On se trouve donc avec une configuration des éléments classés par ordre croissant qui à l'allure suivante :



**Figure 3.2.** Configuration des éléments classés par ordre croissant. (Lyonnet, 2000)

Les éléments censurés ne sont pas pris en compte, mais viennent modifier le rang des défailants qui se trouvent après eux.

Comment modifier les rangs des défailants après censure ?



**Figure 3.3.** Configuration des éléments classés après censure. (Lyonnet, 2000)

Pour répondre à cette question, nous présentons, ci-dessous, les méthodes les plus répandus.

### 3.2 Méthode proposée par Johnson

#### 3.2.1 Principe

Pour les deux premières, le rang est déterminé sans difficulté : c'est le rang certain, ici 1 et 2.

Par contre, pour les 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> défaillances, on peut dire que cela dépend de la fin de durée de vie du suspendu.

Nous constatons que :

<< C >> peut être défaillant entre 2 et 3 (événement a).

<< C >> peut être défaillant entre 3 et 4 (événement b).

<< C >> peut être défaillant après 4 (événement c).

#### ❖ Hypothèse (interprétation probabiliste)

On considère que ces trois éventualités sont équiprobables (méthode de Johnson).

De ce fait, il en découle que :

- Le rang << 3 >> Peut être donné à la défaillance << 3 >> avec une probabilité de :

$$P(3^{\text{e}} \text{ défaillance ait le rang } \ll 3 \gg) = P(b) + P(c) = 2/3$$

Parce que :

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \text{ d'où } P(a) = P(b) = P(c) = 1/3$$

- Le rang << 4 >> peut être donné à la 3<sup>e</sup> défaillance avec une probabilité de :

$$P(3^{\text{e}} \text{ défaillance ait le rang } 4) = P(a) = 1/3$$

Ainsi, si on veut estimer l'ordre moyen de la défaillance, on dira que :

- Rang moyen 3<sup>e</sup> défaillance =  $3 \cdot 2/3 + 4 \cdot 1/3 = 3,33$

On fera le même type de démarche pour les défaillants suivants :

Ainsi,

- Rang moyen 4<sup>e</sup> défaillance =  $4 \cdot 1/3 + 5 \cdot 2/3 = 4,66$

Cette approche << Rang moyen >> conduit à modifier le rang du suivant lorsqu'il y a un suspendu. Ce qui se résume par la formule de Johnson qui permet de calculer l'incrément à donner au rang suivant lorsque l'on se trouve dans cette situation.

Formule de Johnson (Lyonnet, 2000) :

$$I = \frac{N+1 - \text{Ordre de la défaillance précédente}}{1 + \text{Nombre d'individus vivants après le dernier suspendu du groupe}} \quad (3.3)$$

Remarques au sujet de la méthode de Johnson (lyonnet, 1993) :



❖ **Hypothèse**

- Les données sont censurées ou ne le sont pas.
- Il y a indépendance entre les censures et l'état de l'élément (le fait que l'on présente une dégradation pourrait impliquer un arrêt de l'élément) ; ce cas n'est pas envisagé.
- Population homogène.

Si les temps  $t_1, t_2, \dots, t_i, t_n$  sont arrangés par ordre croissant. L'estimateur de Kaplan Meier permet d'obtenir la fonction  $R(t)$  et par conséquent, également  $F(t)$ .

- Données complètes

$$R(t_i) = \prod_{j=1}^{j=i} \left[ \frac{n-j}{n-j+1} \right] \tag{3.4}$$

Chaque  $R(t_i)$  est associé à un temps  $\ll t_i \gg$ .

- Données censurées multiples à droite

$$R(t_i) = \prod_{j=1}^{j=i} \left[ \frac{n-j}{n-j+1} \right]^{\delta_j} \tag{3.5}$$

$\delta_j = 1$  S'il n'y a pas de censure (censure au temps  $t$ )

$\delta_j = 0$  S'il y a censure :  $C_i < t_i$ .

Notons que la relation précédente est appliquée lorsque nous n'avons pas d'ex-aequo.

Cet estimateur est relativement bien utilisé dans le domaine de l'observation médicale. Parfois, quelques aménagements de la formule permettent de tenir compte d'autres hypothèses. Dans le cas d'ex-aequo. On utilise la relation suivante :

$$R(t_i) = \prod_{j=1}^{j=i} (1 - d_j/n_j)^{\delta_j} \tag{3.6}$$

La méthode de Kaplan Meier repose sur l'idée intuitive suivante :  $\ll$  Qu'être encore en fonctionnement à  $t$ , c'est être en fonctionnement juste avant  $t$  et ne pas avoir de panne à  $t \gg$ . Dans la pratique de la maintenance le temps n'est pas mesuré avec une très grande précision et les données de survie sont exprimées avec une certaine unité (souvent la journée) cela convient pour le calcul de  $R(t)$  et traduit en termes de probabilités on a :

$$R(t) = P(T \leq t) = P(T < T / \text{sachant } T > t-1). P(T < t-1)$$

Si on appelle  $Q_i$  la probabilité d'avoir survécu au jour  $\ll j \gg$  sachant que l'on était en bon fonctionnement juste avant, alors, on estime  $R(t)$  par le produit des estimations de  $Q_i$  de  $Q_j$  ou  $Q_j$  est la proportion d'éléments ayant bien fonctionné au jour  $\ll j \gg$ . D'autre part si aucune panne n'a eu lieu  $Q = 1$ .

**3.3.2 Exemple Sur données non censurées  $\delta_j = 1$**

$t_i$	$n_i$	$d_i$	$1 - \frac{d_i}{n_i}$	$R(t_i) = \prod_{j=1}^{j=i} (1 - d_j/n_j)^4$
6	21	3	0,8571	0,8571
7	17	1	0,9412	0,8067
10	15	1	0,9333	0,7529
13	12	1	0,9167	0,6902
16	11	1	0,9091	0,6275
22	7	1	0,8571	0,5378
23	6	1	0,8333	0,4482

$n_i$  = nb. De survivants à  $t_i$ .

$d_i$  = nb. De défailants pour ce temps.

### 3.3.3 Principe du maximum de vraisemblance

Soit une famille paramétrique de distributions de probabilités  $D_\theta$  dont les éléments sont associés soit à une densité de probabilité (distribution continue) connue, soit à une fonction de masse (distribution discrète) connue, notée  $f(x|\theta)$ . On tire un  $n$ -échantillon simple (échantillons indépendants)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de manière répétée de la distribution, et l'on calcule la densité de probabilité associée aux données observées (Wasserman, 2004) (Cameron et Trivedi, 2005).

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (3.7)$$

Ceci étant une fonction de  $\theta$  avec  $x_1, \dots, x_n$  fixés, c'est une vraisemblance pour les  $n$  échantillons indépendants.

$$L(\theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) \quad (3.8)$$

Lorsque  $\theta$  n'est pas observable, la méthode du maximum de vraisemblance utilise les valeurs de  $\theta$  qui maximisent  $L(\theta)$  estimateur de  $\theta$  : c'est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  noté  $\hat{\theta}$ . Par exemple dans le cas du produit discret, on effectue un tirage de  $n$  valeurs, il faut donc trouver le paramètre qui maximise la probabilité d'avoir tiré ce tirage (échantillon).

Cette méthode se distingue de la recherche d'un estimateur non biaisé de  $\theta$ , ce qui ne donne pas nécessairement la valeur la plus probable pour  $\theta$ .

L'estimateur du maximum de vraisemblance s'il existe, est unique.

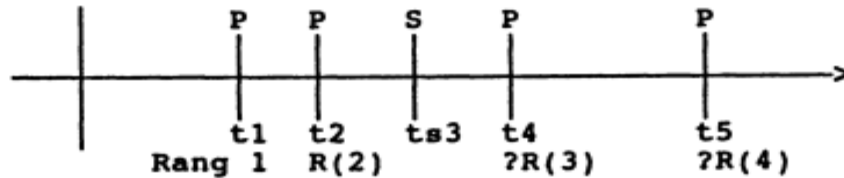
## 3.4 Méthodes d'estimation du rang tenant compte du temps séparant les défaillances et les suspendus (Modélisation selon une loi uniforme, extrapolation linéaire)

### 3.4.1 Principe

#### Hypothèses



- identiques à celles de Johnson avec en plus, la détermination de la probabilité qu'un élément suspendu à  $t_s$  tombe en panne à  $t$  (avec  $t > t_s$ ) proportionnelle à la différence  $(t - t_s)$  (Lyonnet, 1991).
- le temps le plus long est le temps du dernier élément suspendu ou défaillant. Ainsi, pour la séquence suivante :



**Figure 3.4.** Les éléments suspendu ou défaillant. (Lyonnet, 1991)

Pour le 3ème défaillant, le rang n'est pas déterminé car il y a eu un suspendu.

Probabilité : (3ème défaillance ait le rang 3) =  $P(S_3 \text{ soit déf. après } t_4) = P(t_3 > t_4)$

En désignant par  $t_3$  l'instant de défaillance de S.

Si on fait l'hypothèse que la défaillance du suspendu obéit à une loi uniforme sur  $[t_3, t_5]$ , alors ;

$$\text{Probabilité (3ème défaillance ait le rang 3)} = \frac{t_5 - t_4}{t_5 - t_3}$$

De même :

$$\text{Probabilité. (3ème défaillance ait le rang 4)} = P(t_3 < t_4) = \frac{t_4 - t_3}{t_5 - t_3}$$

n fait, on suppose que la défaillance du suspendu suit une loi uniforme sur un intervalle  $(t_3, t_5 + D)$  de longueur supérieure à  $t_5 - t_3$  d'une quantité  $D$  qu'on prend en général égal à l'intervalle moyen entre défaillants (ici :  $(t_5 - t_1)/3$ ).

• **Remarque**

Cette méthode tient compte des temps séparant deux défaillances consécutives ; si Cette distance est grande. En ce sens, elle paraît plus performante que la méthode de Johnson (Lyonnet 1993).

D'autre part, le modèle utilisé précédemment dans le calcul des probabilités des défaillances pour les éléments censurés est une loi uniforme. Ceci n'est pas tout à fait satisfaisant, mais offre l'avantage d'être calculable sans recherche de paramètre de loi.

• **Amélioration dans une seconde phase avec le modèle de Weibull**

Une meilleure estimation de la modélisation de la probabilité de défaillance des éléments censurés consiste à prendre pour modèle une loi s'approchant le plus possible de la réalité (Loi de Weibull  $\gamma, \beta, \eta$ , par exemple), au lieu de la loi uniforme (Lyonnet, 1991).

Seulement, il est nécessaire de connaître les paramètres  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ , que nous sommes justement en train de chercher. La méthode proposée devra donc tenir compte de ce problème, et procéder par itération.

### 3.4.2 Recherche des rangs dans le cas des censures multiples en utilisant une itération - Loi uniforme / Loi de Weibull.

#### 1 ère étape :

Dans un premier temps, on veut modéliser une loi approximant la loi de défaillances. On utilise donc pour estimer les rangs des éléments après censures, une distribution uniforme jusqu'au dernier élément fonctionnant, ou la méthode de Johnson.

#### 2ème étape :

On détermine la fonction de répartition puis les paramètres  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ .

#### 3ème étape :

La loi de défaillances  $F(t) = 1 - R(t)$  nous permet de déterminer la probabilité de défaillance des éléments censurés, et ainsi de mieux estimer l'ordre des défaillances.

$$F(t) = 1 - e^{-((t - \gamma_1) / \eta_1)^{\beta_1}} \quad (3.9)$$

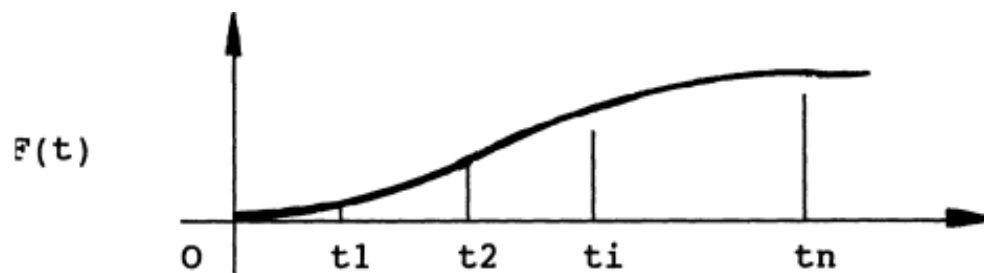
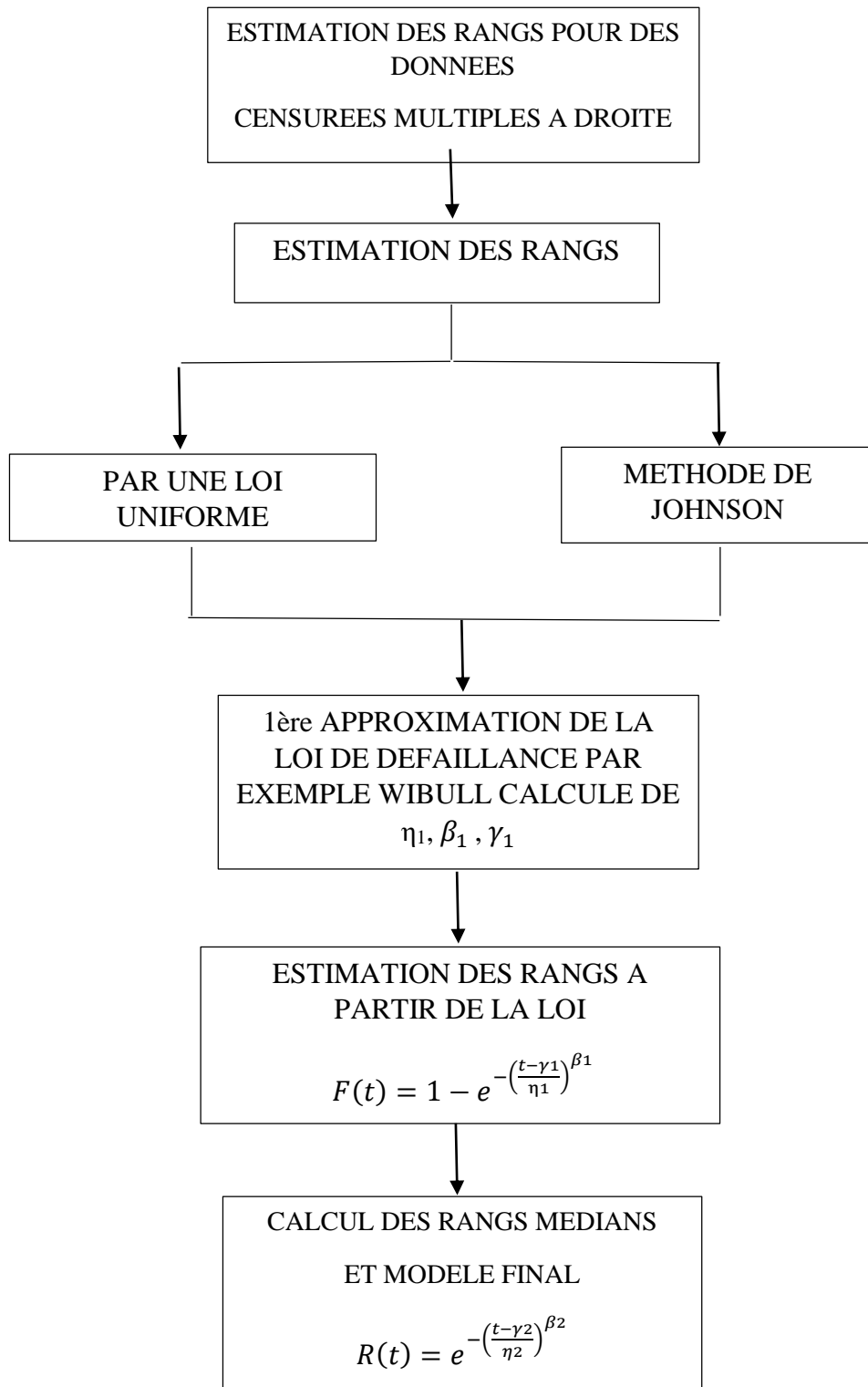


Figure 3.5. Loi de probabilité de défaillance des éléments censurés. (Lyonnet, 1991)

#### 4ème étape :

On utilise ces nouveaux rangs pour déterminer la nouvelle loi.

L'ensemble de ces étapes sont synthétisées dans l'organigramme suivant selon (Lyonnet, 1991).

**Organigramme de la méthode**

### 3.5 Conclusion

Dans ce troisième chapitre on s'est intéressé à l'étude des types de données. Nous avons commencé sur la revue de la problématique des censures, afin de prévenir en maintenance, le comportement du matériel en service, et d'obtenir la modélisation des lois de survie. De ce fait nous avons cité trois types de données, à s'avoir : les données complètes, les données censurées simples et multiples.

Par ailleurs nous avons donné un aperçu général sur la méthode de Johnson. Le résumé de cette méthode permet de calculer l'incrément à donner au rang suivant lorsque l'on se trouve dans la situation à traiter. Nous avons aussi exposé la méthode de Kaplan Meier qui se rapproche du Maximum de vraisemblance, utilisé pour des censures à droite et qui est un estimateur non-paramétrique. En fin nous avons clôturé ce chapitre par la Méthodes d'estimation du rang qui tient compte du temps séparant les défailants et les suspendus.

# **Chapitre 4**

## **Banques de données de fiabilité**

## CHAPITRE 4 – BANQUES DE DONNEES DE FIABILITE

### 4.1 Introduction

L'étude théorique de fiabilité offre un intérêt dans la mesure où l'on est en présence de données spécifique (Lyonnet, 2000).

Généralement, on dispose de nombreux recueils de données sur les taux de défaillance. Ces données ont été compilées notamment par les forces armées, les entreprises de télécommunications et les industries énergétiques (pétrole, gaz). Certaines de ces données sont publiées [US Military- Handbook 217] (électronique) ; recueil de ces données de fiabilité du CNET (Centre national d'étude des télécommunications) ... etc. D'autres existent sous forme de banques de données consultables par les personnels des organismes qui les ont constituées ou sur abonnement [Banques de données du SRD (Systems Reliability Department)]. Ils existent d'autres qui sont accessibles uniquement en interne (Smith, 2006).

Il est indispensable de disposer des analyses fonctionnelles interne et externe du système. Ces deux analyses sont complémentaires, elles sont utilisées à des moments et avec des buts différents :

- l'analyse fonctionnelle externe est indépendante de toute solution et permet de fixer des objectifs de performances (des limites matérielles du système, les fonctions et les opérations réalisées par le système, les configurations d'exploitation) et d'exprimer les attentes des utilisateurs.
- l'analyse fonctionnelle interne porte sur la définition générale du système et sur la détermination du cheminement des fonctions techniques des différents composants dans le système.

### 4.2 Présentation générale des recueils de données

La modélisation de la fiabilité électronique a fortement évolué au cours de cette période, les modèles anciens ne modélisent que les défaillances aléatoires intrinsèques des composants électroniques excluant l'impact de la conception ou de l'intégration qui devait alors être considérée à un autre niveau, les modèles récents proposent des approches à différents niveaux de composant, équipement ou système avec des méthodes permettant de prendre en compte l'impact de la conception ou de l'intégration sur la fiabilité finale du produit.

De plus la modélisation même des défaillances intrinsèques de composant électronique a subi de profonde évolution, des modèles anciens, sur lequel s'applique les facteurs d'accélération. Les modèles récents modélisent plusieurs mécanismes de défaillance avec des facteurs d'accélération individualisant cette même période avec l'apparition d'un modèle construit sur la physique de défaillance (FIDES), alors que les autres modèles conservent une approche empirique de la modélisation.

Le schéma suivant présente la chronologie d'apparition de différents modèles de fiabilité prévisionnelle des composants électroniques (IMDR, 2009).

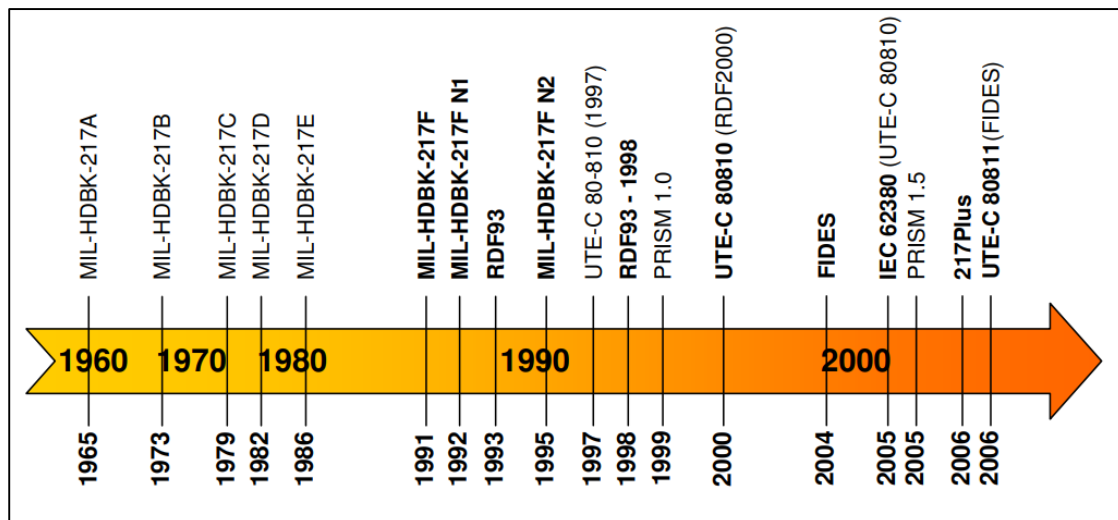


Figure 4.1. Chronologie d'application des recueils de fiabilité. (IMDR, 2009)

### 4.2.1 Source de données

Les sources de données relative aux modes et aux taux de défaillance se répartissent en trois groupes (Smith, 2006) :

- **Données propres à un site / à une entreprise :**

Données se rapportant à des équipements analogues exploités sur des sites comparables.  
Exemple :

- données se rapportant à au moins deux stations de compression de gaz caractérisées par un environnement, des modes opératoires, des stratégies de maintenance et des équipements globalement identiques,
- données se rapportant à un type de correcteur de débit utilisé sur l'intégralité d'un réseau de distribution spécifique et permettant de faire des prévisions de FMDS pour la conception d'un ensemble de circuits destiné à une application analogue.

- **Données propres à un secteur :**

Exploitation, par exemple, de la banque de données OREDA (Offshore and Onshore Reliability Data) pour des prévisions de FMDS se rapportant à un projet de station de compression de gaz offshore.

- **Données génériques :**

Données se rapportant à un grand nombre d'applications et de sources. Les prévisions requièrent des données se rapportant à des modes de défaillance spécifiques (par exemple circuit ouvert, signal élevé, valves fermées).

### 4.3 Banques de données internes

Elles peuvent être les temps de bon fonctionnement des matériels tbf. Les moyennes de temps de bon fonctionnement mtbf, la disponibilité ou autre résultant du calcul prévisionnel ne doit pas être considéré comme un paramètre absolu, mais plutôt comme un indicateur (Lyonnet,2000) (Smith,2006).

### 4.3.1 provenance

Des fiches d'intervention du service maintenance. Il faut évidemment qu'apparaisse le temps de bon fonctionnement correct (tbf), les types de panne, l'organe en panne. De retour client, si on s'intéresse à la maintenance de matériels vendue par l'entreprise, données établies par le service après-vente. Par des enquêtes faites sur des matériels analogiques fonctionnant dans d'autre unité, ou d'autres entreprises. Eléments d'information difficiles à obtenir, mais ceux-ci sont importants pour l'organisation du service de maintenance, et même en faible quantité ont un intérêt non négligeable (Lyonnet, 2000).

### 4.3.2 Exploitation

En partant d'une quantité suffisante de tbf, on peut établir des lois de fiabilité pour les divers organes en descendant au niveau de finesse souhaité pour la maintenance. D'ailleurs, il n'est pas intéressant d'étudier les lois de fiabilités des divers composants d'une carte si on souhaite la changer intégralement. L'étude globale de la fiabilité de la carte sera plus adaptée.

On utilise ces lois de fiabilité pour évaluer les périodicités de l'entretien préventif, lequel peut consister au remplacement systématique des divers organes ou seulement à l'examen minutieux de leur état assorti d'un changement éventuel. Ceci a comme intérêt :

- D'établir une check-list « d'intervention ».
- De servir à prévoir les stocks de pièces de recharge.
- D'améliorer la fiabilité par des redondances.

D'une manière plus générale, elles servent à prévoir toute la logistique d'un système. Dans l'hypothèse où l'on n'a pas de données sur les systèmes dont on veut réaliser la maintenance, on peut utiliser des tables de données internationales. Néanmoins, il convient d'être très prudent sur le maniement de ces données, qui peuvent servir de support pour prévoir une logistique de maintenance dans le cadre de la création de nouveaux systèmes (usines, installation pétrolières, système de l'avionique, etc.), mais qui sont d'un emploi plus délicat pour la maintenance sur site.

## 4.4 Banque de données externes

Il existe des recueils concernant les composants électroniques et les éléments mécaniques courants (Lyonnet, 2000).

### 4.4.1 Recueils de données de fiabilité

Parmi les problèmes rencontrés lors du calcul prévisionnel de la fiabilité des systèmes mécaniques, les plus fréquents sont la quasi absence de normalisation et de standardisation internationales et l'absence des données de vie sur les composants des systèmes mécaniques. En mécanique, les recueils de données existants sont moins reconnus qu'en électronique, et moins nombreux mais ils sont tout de même très utilisés surtout ces dernières années. En pratique, on utilise souvent des bases de données connues, mais il est préférable, quand cela est possible de recueillir les données de retours d'expériences auprès des fabricants des composants que l'on utilise. Cependant, ces données sont difficiles à obtenir pour des composants mécaniques.



Les recueils de données de fiabilité les plus connus pour des dispositifs mécaniques sont présentés dans le tableau du paragraphe (tableau 4.2). Dans la majorité des recueils, les données de fiabilité sont fournies sous forme de taux de défaillance constants principalement pour les composants électroniques et sous forme de durées de vie moyennes, valeurs minimales et maximales ou de probabilité de bon fonctionnement, en particulier pour les composants mécaniques. Ces recueils sont mis à jour régulièrement pour tenir compte des évolutions technologiques (Tebbi, 2005).

#### 4.4.2 Utilisation de recueils des données de fiabilité

Lorsqu'une équipe de conception développe un nouveau système, elle doit disposer d'un certain nombre de recommandations ou de règles, issues du savoir-faire (de l'expérience) qui sont indispensables à une conception sûre de fonctionnement. Les recueils des données sont des outils incontournables et indispensables.

En électronique, un domaine où le calcul de la fiabilité est pratiqué depuis de nombreuses années, les bases de données de fiabilité sont disponibles et nombreuses. En mécanique l'utilisation des recueils de données est plus récente. Il y a une certaine difficulté à constituer ces recueils, compte tenu de la complexité des composants. Néanmoins, ils sont de plus en plus utilisés. En pratique, on utilise souvent des bases de données connues ou, mieux encore, quand cela est possible, les données issues de retours d'expériences auprès des fabricants des composants. Pour les composants mécaniques ces données sont difficiles à obtenir parce qu'elles ne sont pas communiquées ou publiées et, dans la plupart des cas, elles sont exploitées confidentiellement.

Les recueils de données de fiabilité les plus connus pour des dispositifs électroniques et mécaniques sont présentés dans les tableaux 4.1 et 4.2 des paragraphes suivants. Ces recueils sont mis à jour régulièrement pour tenir compte des évolutions technologiques. En électronique, la durée de vie des données fournies par les recueils est relativement courte (de 3 à 6 ans) ; elle est plus longue en mécanique (de 30 à 40 ans) (Alin, 2010).

#### 4.5 Composants électroniques

Pour les composants électroniques la courbe, représentant le taux de défaillance, a la même allure que la courbe en baignoire (figure 1.1). Elle est donc composée de trois phases nettement distinctes (Alin, 2010) :

- La première phase définit la période de jeunesse, caractérisée par une décroissance rapide du taux de défaillance. Pour un composant électronique cette décroissance s'explique par l'élimination progressive des défauts dus aux processus de conception ou de fabrication mal maîtrisés ou à un lot de composants défectueux. Aujourd'hui, cette période est réduite, compte tenu de la grande qualité des composants. Les distributions de probabilité utilisées pour ces conditions sont la loi de Weibull ( $\beta < 1$ ) et la loi log normale ( $\sigma > 1$ ).
- La deuxième phase définit la période de vie utile généralement très longue. Le taux de défaillance est approximativement constant. Les pannes sont dites aléatoires, leur apparition n'est pas liée à l'âge du composant mais à d'autres mécanismes d'endommagement. Le choix de la loi exponentielle est tout à fait satisfaisant dans cette phase.
- La dernière phase est la période de vieillissement, elle est caractérisée par une augmentation progressive du taux de défaillance avec l'âge du système. Cette augmentation est due aux phénomènes de vieillissement tels que l'usure, l'érosion, etc. Cette période est très nettement

au-delà de la durée de vie réelle d'un composant électronique. Les distributions de probabilité utilisées pour ces conditions sont la loi de Weibull ( $\beta > 1$ ) et la loi lognormale ( $\sigma < 1$ ).

Les composants électroniques présentent des mécanismes de dégradation complexes telles que les charges de surface, la polarisation, le décollement de fils de connexion, la migration métallique, l'électromigration, le défaut de silicium, ... (Nelson, 1990), (Bechou, 2007).

#### 4.5.1 Données de fiabilité des composants électroniques

Dans ce paragraphe nous indiquons les bases de données les plus utilisées pour des composants électroniques, elles sont regroupées dans le tableau suivant (tableau 4.1).

Source	Titre	Editeur	Dernière version
FIDES	Recueil de Fiabilité Prévisionnel	DGA et industriel français (AIRBUS, GIAT, THALES, MBDA, EUROCOPTER) .	UTE-C 80811 (FIDES), 2009
Telcordia/Bel lcore	Reliability Prediction Procedure for Electronic Equipment.	Telcordia Technologies, New Jersey, USA.	Telcordia SR-332 Issue 1, Mai 2016.
RDF(CNET)	Recueil de Données de Fiabilité.	Center National d'Etudes des Télécommunications, UTE, Paris, France.	RDF 2000-UTE80-810, Juillet 2000.
GJB	Chinese Military Standard.	Beijing Yuntong Forever Sci-Tech.	GJB/Z229B ,1998.
EPRD	Electronic Parts Reliability Data.	Reliability Analysis Center, RAC, NEW YORK, USA.	EPRD 97,2014.
RDF(CENT)BT-HRD	Handbook for Reliability Data.	British Telecommunication.	HRD 5 ,1995.
MIL-HDBK-217	Military Handbook Reliability Prediction of Electronic Equipment.	United States Department Of Defense.	MIL-HDBK-217F, notice 2,28 Février 1995.
IEEE STD	IEEE Guide to the collection and presentation of Electrical, Electronic Sensing Component and Mechanical Data for Nuclear Power Generating Stations.	Institution of Electrical and Electronic Engineers, New York, USA.	IEEE STD500 ,1984.

**Tableau 4.1.** Recueils de données de fiabilité en électronique. (Tebbi, 2005) (IMdR, 2009)

### 4.5.1.1 FIDES

Le recueil de fiabilité prévisionnelle FIDES a été développé par différents industriels français, ce recueil a été diffusé pour la première fois début 2004.

La méthodologie FIDES est applicable à l'ensemble des domaines utilisant l'électronique : Aéronautique, Naval, Militaire...etc. elle modélise les défaillances ayant des origines intrinsèques aux articles étudiés (technologie ou qualité de fabrication et de distribution de l'article) et extrinsèques (spécification et conception de l'équipement, sélection de la filière d'approvisionnement, production et intégration équipement) (IMdR, 2009).

### 4.5.1.2 Telcordia/Bel lcore

Reliability prediction procedure for Electronic Equipment Bellcore est le centre de recherche de l'opérateur téléphonique Bell (États-Unis). Les données recueillies concernent les tes taux de défaillance électronique dans les télécommunications.

### 4.5.1.3 RDF (CNET)

Le Recueil de Données de Fiabilité (CENT) est un document produit par le Centre National d'Etudes des Télécommunication (CENT), devenu depuis France télécom, la première version parue en 198. Il est organisé comme le MIL-217, en ce sens qu'il propose des modèles de régression pour la prévision de taux de défaillance des composants et de tables génériques. Les modèles comportent une simple équation de régression avec des graphiques et des tables permettant de spécifier chaque paramètre.

### 4.5.1.4 GJB

La GJB est une norme technique militaire chinoise décrivant un système de lancement vertical (VLS) pour tous les types de missiles à bord des combattants de surface.

### 4.5.1.5 EPRD

Le document EPRD représente des données empiriques sur le taux de défaillance sur le terrain, la version EPRD-97 était limitée aux condensateurs, diodes, circuits intégrés, Dispositifs optoélectroniques, résistances, thyristors, transformateurs et transistors. EPRD-2014 ajoute des millions d'heures de temps de fonctionnement et des centaines de pannes à ces types de composants.

### 4.5.1.6 BT-HRD

Constitué à partir de données d'exploitation par les laboratoires de British Telecom (Martlesham Heath), ce document présente des listes de taux de défaillance pour les types de composants telle que les circuits intégrés, les condensateurs...etc. De 1977 à 1994, cinq versions ont été publiées (Smith, 2006).

### 4.5.1.7 MIL-HDBK-217

C'est l'une des Source de données les plus connues, constituée par le RADC (Rome Air Data Center, États-Unis), elles couvrent la microélectronique, les semi-conducteurs discrets, les résistances et les lampes ... etc. Les éditions successives de MIL-217 font apparaître une tendance que confirment d'autres banques de données à la baisse générale des taux de défaillance, particulièrement en microélectronique (Smith, 2006).

### 4.5.1.8 IEEE STD

Cette source est conçu comme une source d'information pour les analyses de la fiabilité dans l'ensemble de l'industrie est conçu comme une première étape dans la compilation d'une source de données de fiabilité nécessaires pour maintenir le niveau de sécurité actuel des centrales nucléaires.

## 4.6 Composants mécaniques

Les composants mécaniques sont soumis, dès le début de leur vie, au phénomène d'usure ou de vieillissement. Si on trace la courbe du taux de défaillance, en fonction du temps, on obtient une courbe qui ne présente pas le plateau de la (figure 1.1) ; la période de vie utile (taux de défaillance constant) n'existe pas ou elle est réduite (Alin, 2010).

– La première phase définit la période de mortalité infantile. C'est une durée de vie en principe très courte. Elle est décrite par une décroissance progressive du taux de défaillance avec le temps dû à une amélioration des caractéristiques internes (caractéristiques de défauts) et des interfaces, par un rodage préalable. La loi de Weibull ( $\beta < 1$ ) et loi log normale ( $\sigma > 1$ ) sont les plus utilisées.

– La dernière phase définit la période de vieillissement qui recouvre la majeure partie de la vie du dispositif. Elle est caractérisée par une augmentation progressive du taux de défaillance. Les pièces mécaniques sont soumises à des phénomènes de vieillissement multiples qui peuvent agir en combinaison : corrosion, usure, fluage, fatigue, et finalement rupture. Les distributions de probabilité utilisées pour ces conditions sont la loi de Weibull ( $\beta > 1$ ) et la loi log normale ( $\sigma < 1$ ).

Les composants mécaniques sont caractérisés par des mécanismes de dégradation souvent complexes, d'origines variées (fatigue, fluage, fissuration, usure, corrosion/oxydation, désagrégation) (Doyle, 1991), (Lalanne, 1999), (Grünling, 1987).

- ✓ La fatigue consiste dans la dégradation ou la modification des propriétés mécaniques des matériaux, suite à l'application répétée d'un chargement cyclique ou d'une vibration, conduisant à une rupture. La fatigue est la plus importante source de défaillance pour les composants mécaniques comme, par exemple, les roulements à billes.
- ✓ Le fluage est un mécanisme de dégradation lié au chargement et à la température conduisant à une déformation du matériau (allongement ou élongation). Ce mécanisme devient prépondérant dès que la température du matériau dépasse une certaine valeur (environ 400°C pour les aciers).
- ✓ L'usure est liée au frottement entre deux pièces mécaniques provoquant l'augmentation du jeu entre elles (élimination de matière). Ex : les pneus, les roulements.

La plupart des métaux sont détériorés par l'interaction avec l'oxygène (la corrosion ou l'oxydation).

### 4.6.1 Données de fiabilité des composants mécaniques

Les principales bases de données de fiabilité en mécanique sont présentées dans le tableau suivant (tableau 4.2) :

Source	Titre	Editeur	Dernière version
FARADA	Failure Rate Data	GIDEP-Government Industry Data Exchange Program(USA)	24 février 1986
EIREDA	European Reliability Industry Data Handbook	European Commission and Electricité de France CRETE UNIVERSITY PRESS	1998
NSWC	Handbook of Reliability Prediction Procedures for Mechanical Equipment	Cardebook Division, Naval Surface Warfare Center, United States Navy.	NSWC98/LEI ,1998.
NPRD	Nonelectronic Parts Reliability Data.	Reliability Analysis Center, RAC, New York, USA.	NPRD 97, 1997.
AVCO	« Failure Rates »	D.R.Earles &M.F.Eddins AVCO Corporation, USA.	Avril 1962

**Tableau 4.2.** Recueil de données de fiabilité en mécanique. (Tebbi, 2005)

#### 4.6.1.1 AVCO

L'AVCO est un manuel américain très ancien regroupant des tables de données de fiabilité pour des composants mécaniques : des durées de vie moyennes, des taux de défaillance génériques sous forme de nombre de défaillances par million d'heures et par million de cycles en fonction des conditions d'environnement.

#### 4.6.1.2 NPRD

Le NPRD est un rapport du centre RAC "Reliability Analyse Center" très utilisé pour évaluer la fiabilité des composants et dispositifs non électroniques, c'est un complément du MIL-HDBK-217. Il fournit des taux de défaillance moyens pour une large variété de composants non couverts par le MIL-HDBK-217 (plus de 25000 composants) : des composants mécaniques, électromécaniques ou physico-chimiques.

#### 4.6.1.3 NSWC

Le NSWC est un catalogue publié par la Marine des États-Unis "Naval Surface Warfare Center", il fournit des modèles de taux de défaillance, supposés constant, pour des classes fondamentales de composants mécaniques tels que les ressorts, les moteurs, les freins, les embrayages, etc. Les modèles du taux de défaillance incluent des facteurs pouvant avoir un

impact sur la fiabilité des composants. Ces facteurs tiennent compte des modes de défaillance et des paramètres qui les engendrent, par exemple les caractéristiques matériaux, les conditions d'environnement, les forces appliquées, etc. Ces paramètres constituent des données d'entrée pour les modèles de taux de défaillance.

#### **4.6.1.4 EIREDA**

Le manuel EIREDA (European Reliability Industry Data Handbook) donne des taux de défaillance, supposés constants, pour des produits mécaniques en fonctionnement et en sollicitation, à l'usage des centrales nucléaires.

#### **4.6.1.5 FARADA**

Le FARADA (Failure Rate Data) fournit des données de fiabilité pour des composants de toutes natures : une estimation des taux de défaillance, nombre de pannes observées, type de pièce, mode d'utilisation, etc. Dans la majorité des recueils, les informations disponibles sont la dénomination du composant, la moyenne des temps de bon fonctionnement (mtbf), le taux de défaillance moyen ou calculé avec l'hypothèse qu'il est constant, l'intervalle de confiance associé et un coefficient multiplicateur du taux de défaillance dépendant de l'environnement. En mécanique, l'hypothèse du taux de défaillance constant est rarement justifiée.

### **4.6.2 Limite d'utilisation des bases de données mécaniques**

La comparaison de ces cinq recueils de données de fiabilité pour des composants mécaniques mène à quelques résultats intéressants :

Le NPRD-97 est le plus utilisé, il offre plus d'information nécessaire à une évaluation simple de la fiabilité. Ses données proviennent de l'utilisation réelle des composants, c'est pour cette raison qu'elles sont jugées bonnes, néanmoins elles sont toutes données en nombre de défaillance par million d'heures, ce qui n'est pas une mesure adéquate pour certains équipements (de durées de vie cycliques).

Le NSWC-98 présente des données plus récentes, comparé aux autres manuels, il peut offrir une alternative plus précise si les données d'entrées sont de plus en plus disponibles.

Le document AVCO contient des données de vie pour des composants utilisés dans des environnements divers. Néanmoins, ces données datent de 1962, or depuis l'évolution des technologies n'ont pas cessé d'avancer, en particuliers dans le domaine de la science des matériaux, et la performance des systèmes augmente de plus en plus.

En fin, nous pouvons citer le IEEE STD 500 qui offre des données pour des matériels utilisés dans les centrales nucléaires. Il y a plus de données pour des composants électriques et électroniques que les composants mécaniques.

## 4.7 Conclusion

Les recueils de données de fiabilité sont fondés soit sur des résultats d'exploitation ou des résultats d'essais en laboratoire. Le processus de dégradation des équipements (modes, mécanismes et causes de défaillance), les conditions d'utilisation et l'évolution des technologies sont des paramètres nécessaires pour le calcul des taux de défaillance et l'élaboration des modèles prévisionnels de la fiabilité, or il est difficile de les prendre tous en considération. Les données sont souvent inappropriées aux systèmes et environnements réels. Par conséquent, aucune de ces sources de données ne fournit des données parfaites pour une évaluation plus précise de la fiabilité. Les informations recueillies ne permettent qu'une exploitation partielle des données, cependant elles restent toujours utiles pour de nouvelles conceptions.

## **Chapitre 5**

### **Etudes de cas à l'aide du logiciel Minitab**



## CHAPITRE 5 – ETUDES DE CAS A L'AIDE DU LOGICIEL MINITAB

### 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à des études de cas à l'aide du logiciel MINITAB. Par lequel on va modéliser les données traitées par les lois de fiabilité pour objectif d'estimer la durée de vie restante d'équipements industriels.

MINITAB est un logiciel de statistique mis au point, à l'origine, par le Département de Statistique de l'Université de Pennsylvanie (U.S.A.). Il est particulièrement bien adapté à l'analyse statistique : statistique descriptive, statistique inférentielle, analyse de la variance, méthodes relatives à la corrélation et à la régression simple et multiple, séries chronologiques, tests d'indépendance, méthodes non paramétriques, analyse en composantes principales, analyse discriminante, contrôle statistique de la qualité, plans expérimentaux, etc.

L'interface graphique WINDOWS apporte à ce logiciel une plus grande souplesse d'utilisation et une meilleure présentation des résultats. L'emploi des boîtes de dialogue, via la barre de menus, évite à l'utilisateur de devoir connaître la syntaxe des centaines de commandes disponibles (Claustrioux, Delvaux, 1994).

### 5.2 Prise en main du logiciel Minitab

#### 5.2.1 Description de l'environnement

La fenêtre MINITAB principale (feuille de travail) ouverte présente quatre sous-fenêtres : la fenêtre SESSION, la fenêtre DATA, la fenêtre INFO et la fenêtre HISTORY. Les deux premières sous-fenêtres sont directement ouvertes, les deux autres sont fermées et sont parfois cachées derrière la fenêtre DATA. Toutes les fenêtres et sous-fenêtres possèdent une barre de titre sur fond bleu lorsqu'elle est active et sur fond blanc lorsqu'elle est inactive. Il suffit de « cliquer » dans n'importe quel espace d'une fenêtre pour la rendre active. En haut de la fenêtre principale se trouve une barre de menus qui permet de choisir et d'exécuter les différentes commandes de MINITAB.

Au démarrage du logiciel, la fenêtre SESSION renseigne le nombre maximum de données pouvant être contenues dans la feuille de travail par la phrase suivante : « **worksheet size : 100.000 cells** ». Celle-ci est suivie de l'invite « **MTB >** ». La feuille de travail est limitée par défaut à 100.000 éléments de données. Elle peut contenir au maximum jusqu'à 1000 colonnes, 100 matrices. La taille de la feuille de travail peut être modifiée, car la seule limite de celle-ci est la mémoire disponible sur le système supportant MINITAB, et ce jusqu'à concurrence de 4.000.000 éléments de données. C'est dans la fenêtre SESSION que sont aussi systématiquement affichés les différentes commandes et sous-commandes ainsi que leurs résultats.

La fenêtre DATA est un tableur divisé en lignes et en colonnes qui accueille les données encodées, importées ou calculées. La colonne de gauche reprend les numéros des lignes et la ligne supérieure désigne les différentes colonnes (C1, C2, etc.). La ligne suivante peut être utilisée pour nommer chaque colonne (maximum 31 caractères). Les autres lignes contiennent les données proprement dites.

La fenêtre INFO décrit ou résume la feuille de travail courante. C'est un inventaire (nom, type, nombre de valeurs et nombre de valeurs manquantes) des colonnes (symboles C1, C2, etc.), des matrices (symboles M1, M2, etc.) et des constantes (symboles K1, K2, etc.) utilisées. Cette fenêtre permet à l'utilisateur de se repérer rapidement lorsque le nombre de colonnes, de matrices ou de constantes devient important.

La fenêtre HISTORY affiche toutes les commandes de session exécutées et toutes les données encodées depuis la fenêtre SESSION. Cette fenêtre présente une vue d'ensemble de tout ce qui a été fait depuis l'ouverture de la session MINITAB.

Il existe également des fenêtres graphiques qui sont créées lors de l'utilisation de certaines commandes.

## **5.2.2 Description des menus**

L'utilisation des commandes de MINITAB peut se faire de deux manières différentes. La première consiste à écrire, directement dans la fenêtre SESSION, les commandes à exécuter (Claustriax, 1994). La deuxième manière utilise les barres de menu et les boîtes de dialogue associées. Les menus principaux sont décrits ci-après.

### **5.2.2.1 FILE**

Ce menu concerne l'ouverture, la sauvegarde et la fermeture des feuilles de travail ; il permet l'ouverture de fenêtres graphiques et l'importation de données venant d'autres types de fichier (EXCEL, LOTUS 1-2-3, etc.) ; il permet également l'impression des fenêtres SESSION, DATA ou autres.

### **5.2.2.2 EDIT**

Ce menu comprend des rubriques que l'on retrouve classiquement dans la plupart des applications WINDOWS telles que : couper, coller, supprimer, remplacer, annuler la dernière action, sélectionner tout ; ce menu se modifie légèrement en fonction de la fenêtre active (fenêtre SESSION ou fenêtre DATA).

### **5.2.2.3 MANIP**

Ce menu reprend l'ensemble des opérations de manipulation de lignes ou de colonnes (tri, calcul de rangs, empiler ou découper des colonnes, convertir une colonne numérique en alphanumérique, etc.).

### **5.2.2.4 CALC**

Ce menu comprend quatre subdivisions ; la première concerne les calculs arithmétiques et statistiques simples (logarithmes, moyenne, etc.) et permet différentes " standardisations " ou " réductions " des colonnes ; la deuxième permet de générer des colonnes indicées ; la troisième concerne la génération de nombres aléatoires et le calcul de probabilités suivant certaines distributions ; la dernière concerne le calcul matriciel (transposée, valeurs propres, etc.).

### **5.2.2.5 STAT**

Ce menu est entièrement statistique ; il est constitué d'une rubrique à cocher et de 12 sous-menus couvrant les domaines suivants :

- statistique descriptive (structuration des moyennes, égalité des variances, etc.).
- régression (méthode pas à pas, etc.).
- analyse de la variance (modèle linéaire généralisé, etc.).
- plans expérimentaux.
- cartes de contrôle (cartes des moyennes, des amplitudes, etc.).
- contrôle statistique des procédés (analyse de capacité, diagramme cause-effet, etc.).
- analyse des distributions et des fonctions de répartition (distributions normales, log normales, de Weibull et exponentielles).
- analyse multi variée (classification numérique, etc.).
- étude des séries temporelles (auto corrélations, ARIMA, etc.).
- tables de contingence (test Chi-carré, etc.).
- tests non paramétriques (test de Friedman, etc.).
- analyse préliminaire des données (données aberrantes, etc.).

### **5.2.2.6 GRAPH**

Ce menu regroupe tous les types de représentations graphiques disponibles sur MINITAB (nuage de points, diagramme de séries chronologiques, histogrammes, box plot, graphiques en secteurs, graphiques tridimensionnels, etc.).

### **5.2.2.7 EDITOR**

Ce menu permet de faire essentiellement de la mise en page ; grâce à ce menu, on peut modifier, dans la fenêtre SESSION, la police des caractères, rechercher ou remplacer certaines chaînes de caractères, retirer la protection de lecture seule de la fenêtre SESSION ; pour la fenêtre DATA, ce menu permet de modifier le format des colonnes et de faciliter le déplacement à l'intérieur du tableau de données (rechercher une cellule bien précise).

### **5.2.2.8 WINDOW**

Ce menu sert uniquement à modifier la présentation générale de MINITAB (réarrangement de la disposition des fenêtres).

### **5.2.2.9 HELP**

Ce menu d'aide permet d'obtenir des informations soit via une table des matières, soit en entrant un nom dans une liste de mots-clés ; il existe également un recueil des questions les plus courantes (exemples : comment insérer une colonne?, comment annuler une macro?, etc.) il existe également une aide sur l'utilisation de l'aide (Belle & Claustriax).

### 5.3 Cas d'étude 1 : Estimation des paramètres d'une loi de Weibull calculés par la méthode du maximum de vraisemblance (EMV) dans le cas de données multi censurées

#### 5.3.1 Données

Soit le retour d'expérience suivant :

REX = {1500d, 1750c, 2250d, 4000d, 4300d, 5000c, 7000d} (Procaccia, 2011)

- d caractérise une défaillance et c une censure.

#### 5.3.2 Modélisation de la loi de défaillance

##### 5.3.2.1 Méthodologie

On présente la méthodologie qui permet de confirmer ou d'infirmer les résultats que nous avons obtenus à l'aide du logiciel Minitab, à partir des données de Procaccia (Procaccia, 2011).

On a modélisé selon la loi de Weibull par la méthode du maximum de vraisemblance (EMV), Ensuite on a essayé de voir avec les lois normales, log-normale et exponentielles.

##### 5.3.2.2 Résultats et interprétations

###### a. Résultats Procaccia

L'optimisation du maximum de vraisemblance a été obtenue en utilisant le langage Mathematica et l'algorithme de Nelder-Mead par Procaccia (Procaccia, 2011).

Les résultats obtenus sont :

$$\beta \rightarrow 2.257$$

$$\eta \rightarrow 4900 \text{ h}$$

###### b. Résultats propres

Après avoir introduit les mêmes données dans le logiciel Minitab (5 défaillances et 2 censures) on a obtenu les résultats suivants :

###### ➤ Modèle de Weibull :

Les paramètres obtenus sont :

$$\checkmark \beta = 2.25704$$

$$\checkmark \eta = 4900.11$$

Le modèle de Weibull présente une très bonne précision (figure 5.1), la valeur du test d'Anderson Darling est de 5.221. On obtient les mêmes résultats que Procaccia.

$$\diamond \text{ Donc : } R(t) = e^{-\left(\frac{t}{4900.11}\right)^{2.25704}}$$

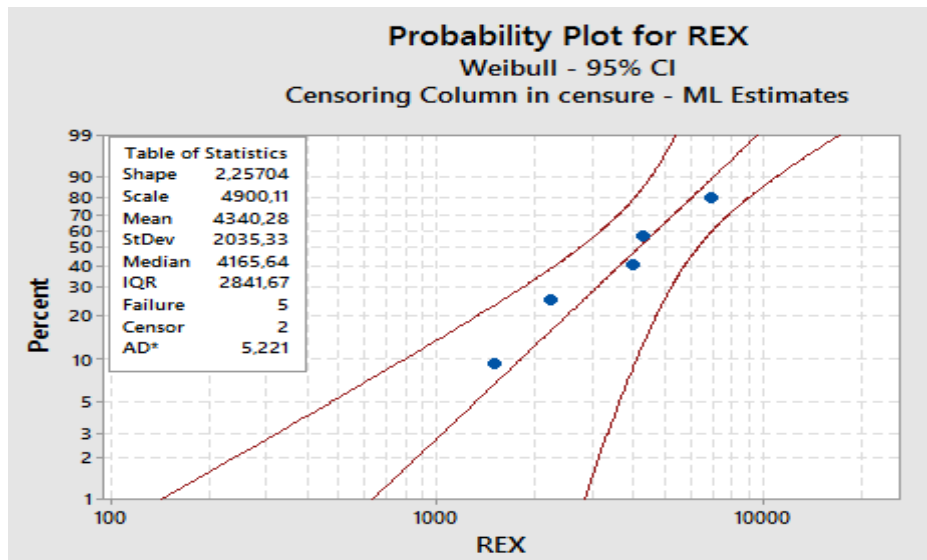


Figure 5.1. Modèle de Weibull.

➤ **Modèle Normal :**

Le modèle normale présente une assez bonne précision (figure 5.2), la valeur du test d'Anderson Darling est de 5.312. Mais cette précision est moins que celle de la loi de Weibull.

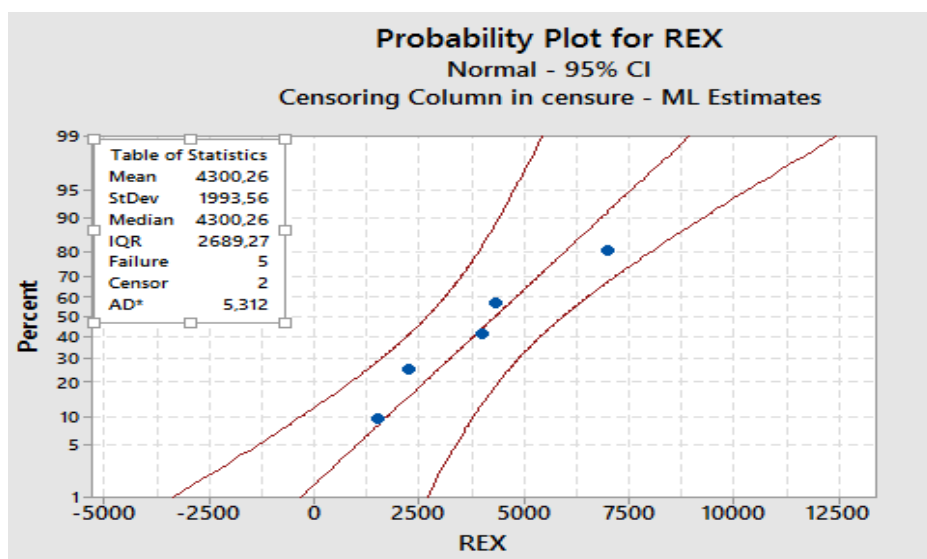


Figure 5.2. Modèle Normale.

➤ **Modèle Log-normal :**

Le modèle Log-normal présente aussi une assez bonne précision (figure 5.3). La valeur du test d'Anderson Darling égal à 5.132 qui est inférieur à la valeur du test d'Anderson Darling de la loi de Weibull.

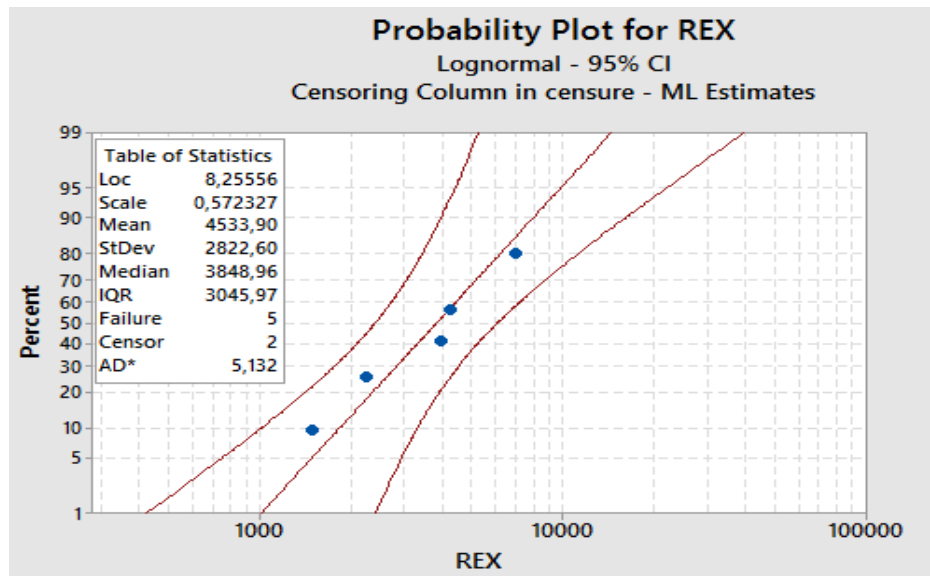


Figure 5.3. Modèle Log-normal.

➤ **Modèle Exponentiel :**

On remarque que la modélisation selon la loi exponentielle est différente par rapport à la loi de Weibull, Normale et Log-normal (figure 5.4). Mais la valeur du test d'Anderson Darling est égale à 5.222, une valeur presque égale à celle de la loi de Weibull.

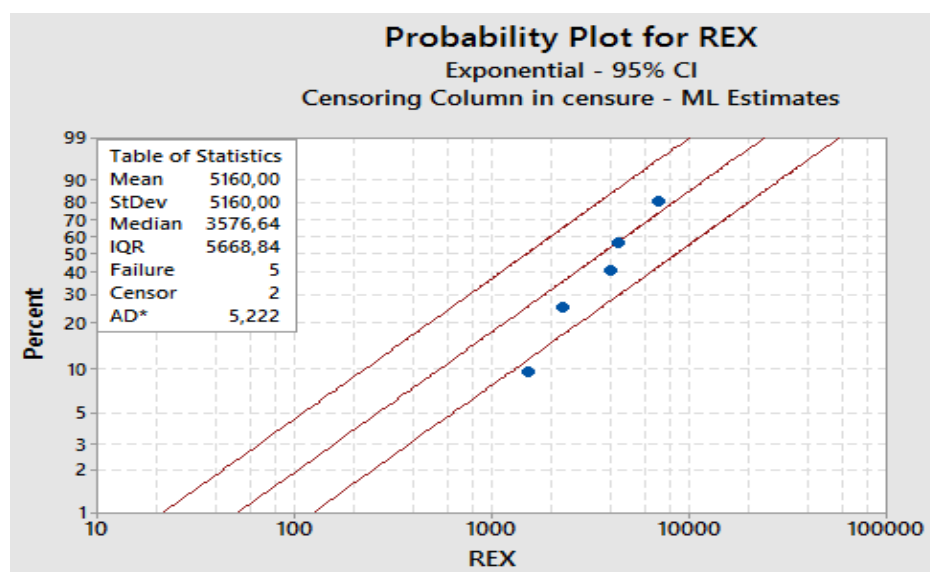


Figure 5.4. Modèle Exponentiel

➤ **En conclusion :**

Nous notons que la valeur du test d'Anderson Darling de la loi Log-normal est inférieure à celle des autres lois (Weibull, normale et exponentielle). Donc, la loi Log-normal est préférée dans ce cas, et la MTTF est égale à 4533.90 (figure 5.3 (tableau des statistiques)).

## 5.4 Cas d'étude 2 : Estimation des paramètres d'un modèle de Weibull à partir d'un retour d'expérience recueilli sur des pompes à eau brute

### 5.4.1 Données

Soit les données de défaillances et de censures, d'un site nucléaire, sur un composant des pompes à eau brute (Procaccia, 2011).

- Données de défaillances (h) : 2177, 288, 11224, 10730, 8942, 21984, 26065, 26044.

- Données censurées (h) : 6465, 6526, 19538, 6496, 4820, 30885, 4841, 30885.

### 5.4.2 Modélisation de la loi de défaillance

#### 5.4.2.1 Méthodologie 1

On représente dans cette partie la méthodologie et les résultats obtenus par Procaccia (Procaccia, 2011), à partir de différents algorithmes et méthodes de régression et du maximum de vraisemblance implémentées dans le logiciel RelCode.

##### 5.4.2.1.1 Résultats

Le tableau 5.1 ci-dessous représente les résultats obtenus par les différentes méthodes algorithmiques des paramètres de la loi de Weibull (Bêta et Êta).

Paramètres	Méthodes algorithmiques					
	Régression Y sur X	Régression X sur Y	EMV	SEM	Max Accuracy	BRM-IS
Bêta	0.65	0.80	1.4	1.5	1.6	1.7
Êta (h)	46700	35500	26700	25200	27500	26900

**Tableau 5.1.** Récapitulatif des estimations selon différentes méthodes (Procaccia, 2011).

#### 5.4.2.2 Méthodologie 2

De notre côté, dans cette méthodologie nous avons essayé d'estimer les paramètres de la loi de Weibull par régression linéaire après avoir entrées les données (défaillances et censures) en utilisant le logiciel Minitab, en appliquant un test d'Anderson Darling et une méthode d'estimation des moindres carrés (temps de défaillance (X) sur rang (Y)). Le but est de comparer nos résultats avec les résultats précédents.

### 5.4.2.2.1 Résultats et interprétations

- **Modèle de Weibull** : Après avoir entrée les données dans le logiciel Minitab (8 défaillances et 8 censures) nous avons obtenu les résultats suivants, et représentés dans le graphique ci-dessous (Figure 5.5). Nous constatons que les valeurs introduites restent dans le champ admissible et représente aussi une évolution progressive dans le modèle de Weibull, ce qui représente une bonne précision. Par ailleurs, le coefficient de corrélation est de 0.961 et la valeur du test d'Anderson Darling est de 18.475.
- ✓ Les paramètres (Bêta et Êta) obtenus sont :
  - $\eta=33701.6$
  - $\beta=0.752704$

En comparant ces valeurs obtenues à partir du logiciel Minitab avec celle obtenus par Procaccia (Procaccia, 2011) ( $\eta=33500$ ,  $\beta=0.80$ ), on constate que les valeurs se rapprochent.

La fonction de fiabilité peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$R(t)=e^{-\left(\frac{t}{33701.6}\right)^{0.752704}}$$

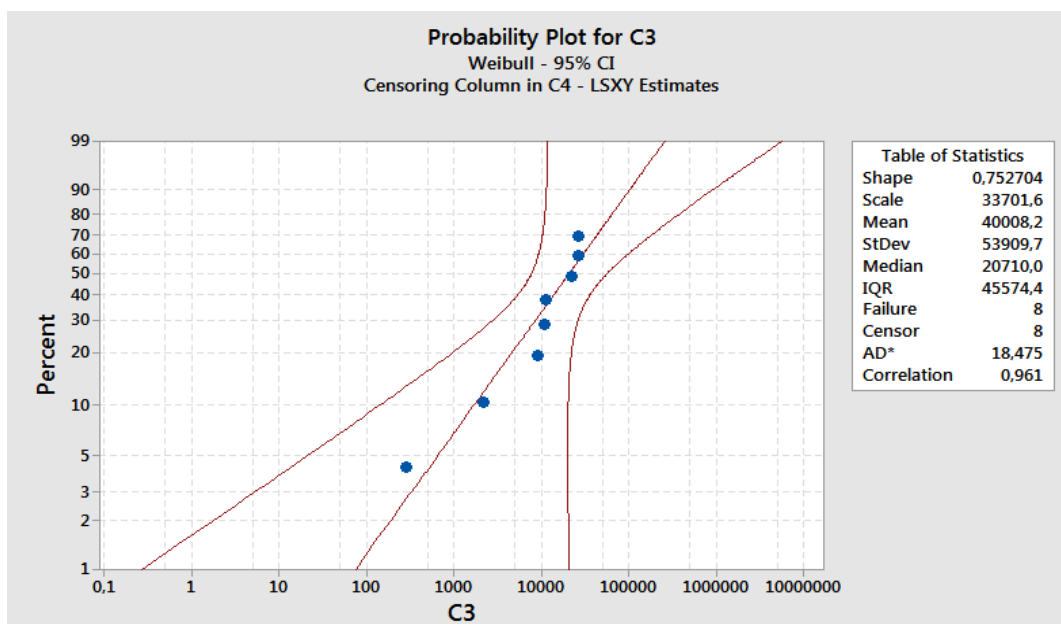


Figure 5.5 Modèle de Weibull.

Par ailleurs, on a aussi traité trois autres modèles en plus du modèle de Weibull, par ces données, et on a fait la comparaison des résultats obtenus dans la Figure 5.6.

- On peut dire que les quatre modèles (le modèle de Weibull, le modèle Normale, le modèle log-normale et le modèle exponentiel) ont des valeurs qui restent dans le champ admissible et une évolution correcte.
- Après comparaison entre les quatre modèles par rapport à la valeur du test d'Anderson Darling, elle est d'environ 18,475 pour l'ensemble des modèles (tableau 5.2). Nous notons que, le modèle de la loi Normale à la plus faible valeur (la meilleure) de 18,470 et le modèle de log normale à la plus grande valeur de 18,558.



- Le coefficient de corrélation qui rapproche le plus de la valeur 1 et celle de la loi normale.

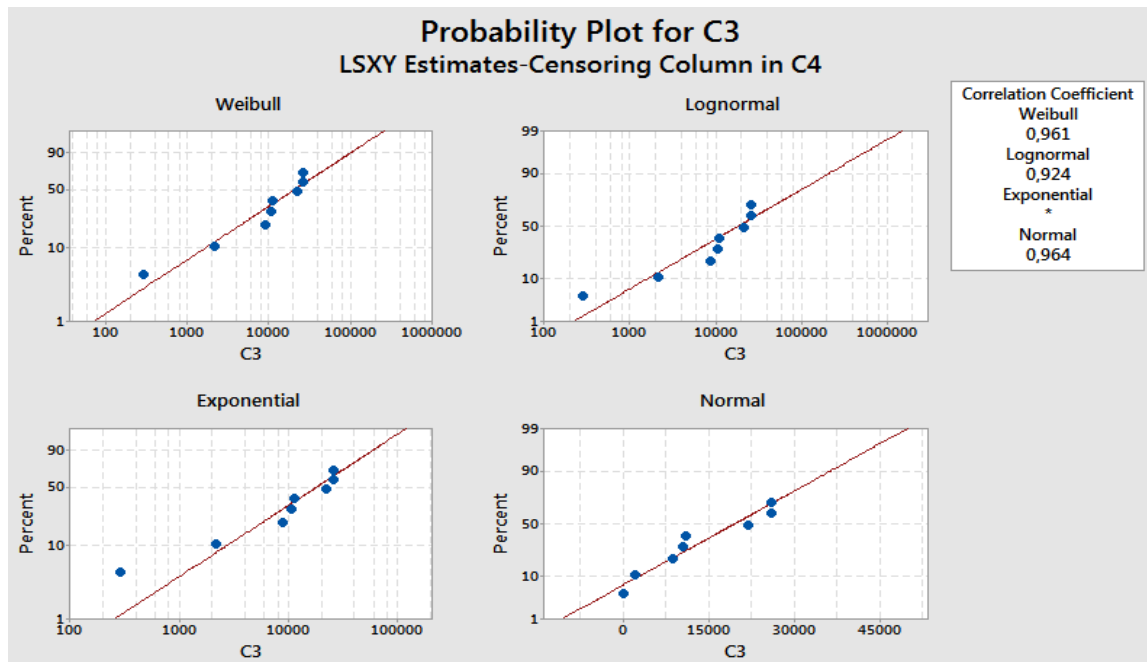


Figure 5.6. Modèles de Weibull, Log Normal, Exponentiel et Normal.

Distribution	Anderson-Darling (adj)	Correlation Coefficient
Weibull	18,475	0,961
Lognormal	18,558	0,924
Exponential	18,489	*
Normal	18,470	0,964

Tableau 5.2. Test d'Anderson Darling - Coefficient de corrélation

A partir du traitement des données dans le logiciel Minitab nous déterminons les moyennes des temps de la première défaillance (MTTF) pour tous les modèles et qui sont indiquées dans le tableau 5.3 suivant.

Etant donné que le temps le plus court apparait au niveau de la loi Normale, on peut dire que la loi la plus précise et celle de la loi de normale car la valeur du MTTF est de 19899 (valeur la plus petite).

Table of MTF				
Distribution	Mean	Standard Error	95% Normal CI	
			Lower	Upper
Weibull	40008	39244	5850,7	273582
Lognormal	113981	163682	6830,7	1901950
Exponential	26088	9026	13240,9	51399
Normal	19899	3885	12285,4	27512

**Tableau 5.3. MTF**

## 5.5 Cas d'étude 3 : Estimation des paramètres d'un modèle gaussien

### 5.5.1 Données

Soit les temps suivants entre défaillances, relevés dans (Lyonnet, 2000) : 23h, 16h, 56h, 71h, 4h, 25h, 51h, 30h.

Il s'agit dans ce cas de vérifier l'hypothèse d'un modèle gaussien de paramètres  $m=34$ ,  $\sigma=22$ , avec  $\alpha=0,05$ .

### 5.5.2 Modélisation de la loi de défaillance

#### 5.5.2.1 Méthodologie 1

On présente ici la méthodologie et les résultats obtenus par Lyonnet (Lyonnet, 2000). La méthode utilisée ici est la méthode théorique à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov.

##### 5.5.2.1.1 Résultats et interprétations

$n = 8$  ; Utilisation du test de Kolmogorov-Smirnov.

$$F(t_i) = \int_{-\infty}^{t_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}22} e^{-\frac{(t-34)^2}{2 \times 22^2}} dt$$

On passera en variable centrée réduite (v.c.r.) :

$$u = \frac{t_i - 34}{22}$$

La fonction réelle est estimée par la méthode des rangs moyens : (Lyonnet, 2000)

$$\mathcal{F}(t_i) = \frac{i}{n + 1}$$

De ceci, découle le tableau suivant :

Temps rangés en ordre croissant	F (t <sub>i</sub> ) théorique	F (t <sub>i</sub> ) réelle	D <sub>n</sub>
4	0,086	0,111	0,025
16	0,200	0,222	0,022
23	0,308	0,333	0,025
25	0,345	0,444	0,099
30	0,428	0,555	0,127
51	0,779	0,666	0,113
56	0,841	0,777	0,064
71	0,953	0,888	0,065

**Tableau 5.4.** Temps entre défaillances - Fonction de répartition réelle et théorique - Ecart ces deux fonctions (Lyonnet, 2000)

$$D_n \text{ Max} = 0,127$$

Et, sur la table de Kolmogorov-Smirnov (tableau 2.4) :

$$D_{8, 0,05} = 0,457$$

Par conséquent, on ne refuse pas l'hypothèse d'un modèle gaussien au niveau de signification « 0,05 ». (Lyonnet, 2000)

### 5.5.2.2 Méthodologie 2

Dans cette méthodologie, nous avons voulu vérifier l'hypothèse des 2 lois, Normale et Log-normal, par la méthode du maximum de vraisemblance et les tests correspondants avec le logiciel Minitab afin de confirmer ou d'infirmer les résultats précédents.

#### 5.5.2.2.1 Résultats et interprétations

➤ **Modèle Normale** : La figure 5.7 donne les statistiques par ajustement au modèle normale ; ce que l'on peut dire est que nous avons obtenu presque les mêmes résultats que Lyonnet (Lyonnet, 2000). Dans ce cas, nous remarquons que le modèle normal représente une bonne précision, par ailleurs, la valeur du test d'Anderson Darling est de 1.795.

- Les paramètres obtenus sont les suivantes :

✓  $m = 34.5$

✓  $\sigma = 21.1601$

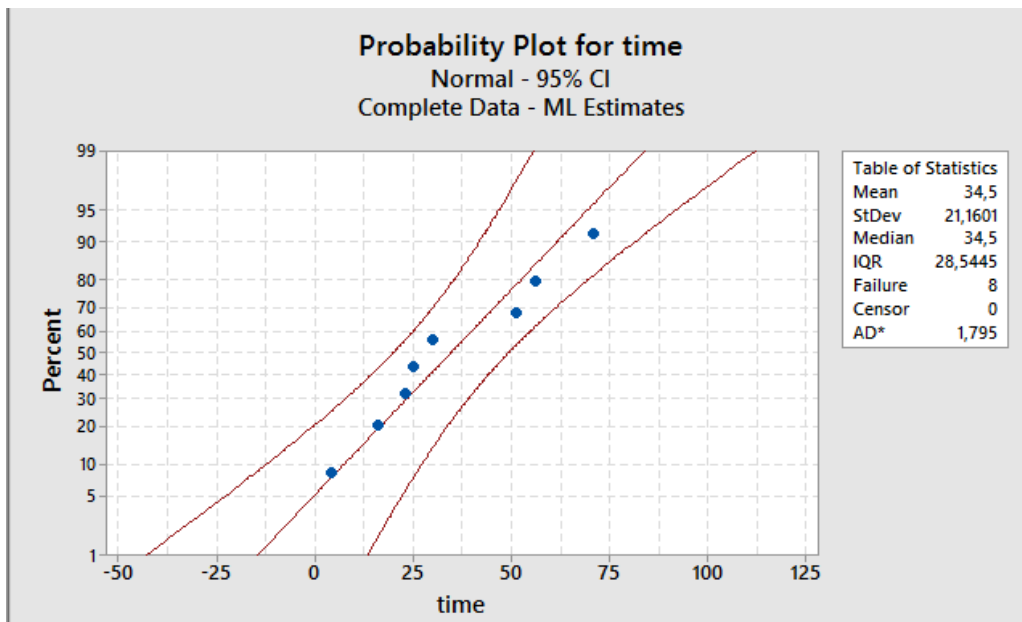


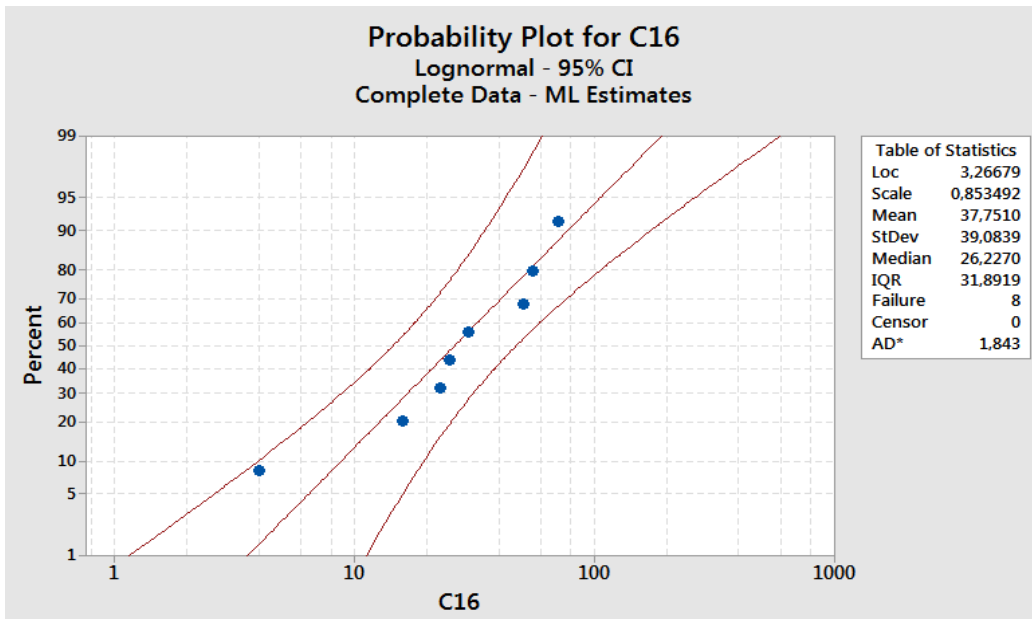
Figure 5.7. Ajustement selon modèle Normale.

- Et donc la fonction de fiabilité s'écrit sous la forme :

$$R(t) = 1 - \frac{1}{21.1601\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-34.5}{21.1601} \right)^2} dx$$

➤ **Modèle Log-normal :** A partir du graphique obtenu, figure 5.8, nous avons obtenu les résultats suivants : nous constatons que les valeurs introduites restent dans le champ admissible et représente aussi une évolution progressive dans le modèle log-normal, ce qui représente une bonne précision, par ailleurs, la valeur du test d'Anderson Darling est de 1.843.

- Les paramètres obtenus sont les suivantes :
  - ✓  $m = 37,7510$
  - ✓  $\sigma = 39,0839$



**Figure 5.8.** Modèle Log-normal.

- Et donc la fonction de fiabilité s'écrit sous la forme :

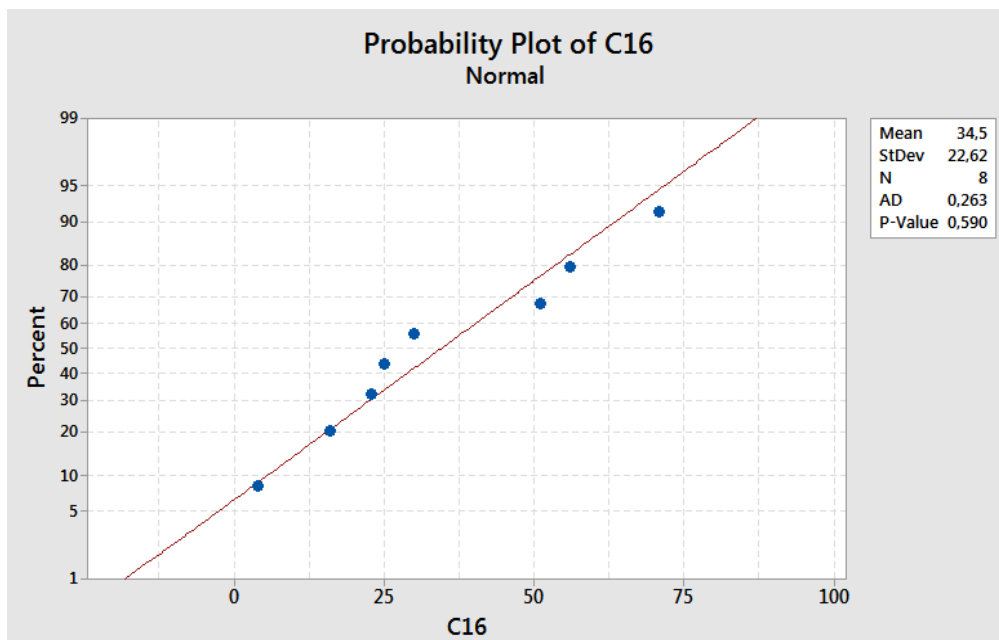
$$R(t) = 1 - \frac{1}{39.0839\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - 37.7510}{39.0839} \right)^2} dx$$

➤ En comparant le test d'Anderson Darling entre les deux modèle (loi normale et la loi log-normal) qui sont comme suits (Figures 5.7 et 5.8.) :

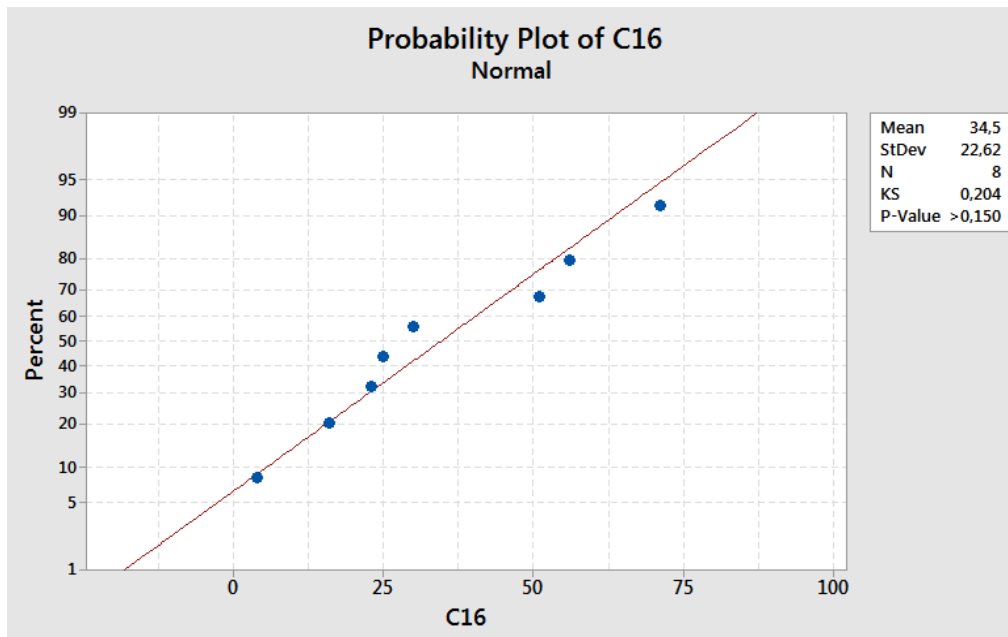
- ✓ Pour le modèle normale : AD= 1,795
- ✓ Pour le modèle log-normale : AD=1,843

Après comparaison des valeurs de AD, on peut dire que la loi normale est plus correspondante aux données puisque la valeur de AD de la loi normale est plus réduite que celle de la loi log-normal.

- Par ailleurs on a aussi traité le test de normalité un par le teste d'Anderson Darling (Figure 5.9) et l'autre par le test de Kolmogorov-Smirnov (Figure 5.10) ; on a eu les mêmes valeurs qui sont les suivantes :
  - Moyenne = 34.5
  - Ecart Type = 22.62
- On a eu deux valeur de P :
  - Test Anderson Darling :  $P = 0.590$
  - Test Kolmogorov-Smirnov :  $P > 0.150$
- ✓ On comparant la valeur de p des deux tests avec  $\alpha$  qui est égale à 0,05 on peut dire que les données suivent une loi normale car la valeur de p est supérieure au seuil de signification de 0.05, aussi on remarque que les données forment une ligne à peu près droite le long de la ligne de référence (Figure 5.9), donc la loi normale semble bien correspondre aux données.



**Figure 5.9.** Test Anderson Darling.



**Figure 5.10.** Test Kolmogorov-Smirnov.

## 5.6 Cas d'étude 4 : Test d'un processus exponentiel

### 5.6.1 Données

Soit les observations, de temps de défaillance d'un équipement, suivantes : 514,00 ; 1540,63 ; 299,90 ; 24,75 ; 1275,57 ; 3806,82 ; 675,23 ; 2765,57 ; 1117,83 ; 0,57 ; 2231,23 ; 82,42 h (Procaccia,2011).

### 5.6.2 Modélisation de la loi de défaillance

#### 5.6.2.1 Méthodologie 1

Les calculs de Procaccia (Procaccia, 2011) ont été effectués afin de déterminer le taux de défaillance de la loi exponentielle avec la méthode du maximum de vraisemblance, en appliquant un test d'Anderson Darling et un test de Kolmogorov-Smirnov par le logiciel Rare.

##### 5.6.2.1.1 Résultats et interprétations

L'estimateur du maximum de vraisemblance du taux de défaillance obtenu par Procaccia est :

$$\lambda = 0.00083.$$

#### 5.6.2.2 Méthodologie 2

On présente la méthodologie que nous avons appliquée à l'aide du logiciel MINITAB et qui permet de tester l'hypothèse que les temps de défaillance sont distribués selon une loi exponentielle.

##### 5.6.2.2.1 Résultats et interprétations

- **Modèle Exponentielle** : Après avoir entré les données dans le logiciel Minitab (12 défaillances) on a obtenu le graphe suivant (figure 5.11) qui montre la distribution des temps de défaillance ajustée à une loi exponentielle avec un intervalle de confiance à 95%.

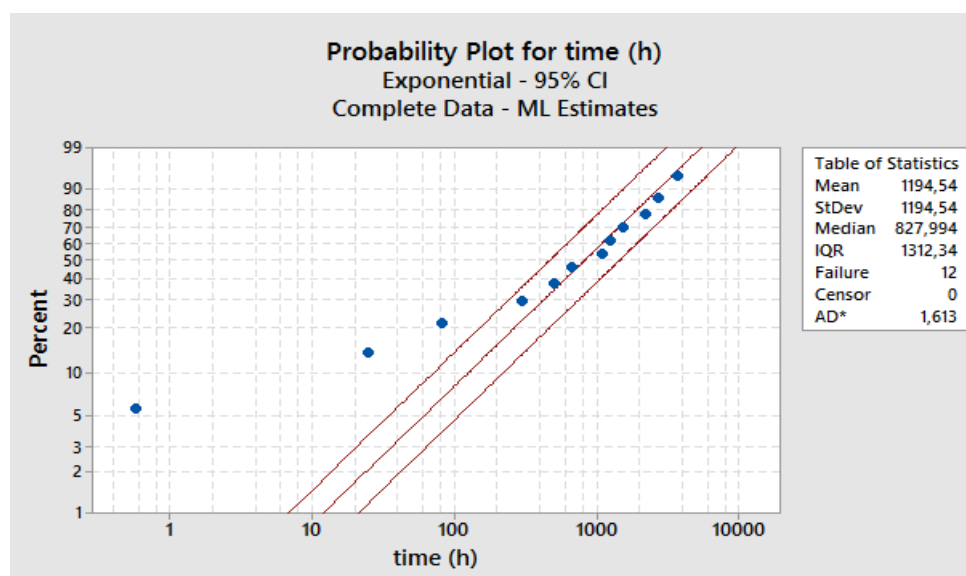


Figure 5.11. Modèle Exponentielle.



Pour obtenir le paramètre de la loi exponentielle ( $\lambda$ ), nous devons avoir la MTTF (tableau 5.5).

Characteristics of Distribution				
	Estimate	Standard Error	95,0% Normal CI Lower	95,0% Normal CI Upper
Mean (MTTF)	1194,54	344,835	678,393	2103,40
Standard Deviation	1194,54	344,835	678,393	2103,40
Median	827,994	239,021	470,226	1457,97
First Quartile (Q1)	343,649	99,2028	195,161	605,112
Third Quartile (Q3)	1655,99	478,043	940,452	2915,94
Interquartile Range (IQR)	1312,34	378,840	745,291	2310,83

**Tableau 5.5.** Caractéristiques de la distribution.

Nous notons que la MTTF est égal à 1194.54, donc :

$$\checkmark \lambda = 8.3714 \times 10^{-4}$$

$$\checkmark \text{ Alors : } R(t) = e^{-8.3714 \times 10^{-4} t}$$

- **analyse de distribution paramétrique :**

A partir du tableau des centiles (tableau 5.6) pour l'analyse de distribution paramétrique on peut dire que 1 pourcent des équipements tombent en panne après 12h de fonctionnement ;

- 10 pourcent des équipements tombent en panne après 125,858 h
- 40 pourcent des équipements tombent en panne après 610,203h
- 80 pourcent des équipements tombent en panne après 1922,54h
- 90 pourcent des équipements tombent en panne après 2750,54h
- 99 pourcent des équipements tombent en panne dont 5501,08h

Table of Percentiles

Percent	Percentile	Standard Error	95,0% Normal CI	
			Lower	Upper
1	12,0056	3,46571	6,81807	21,1399
2	24,1330	6,96660	13,7054	42,4944
3	36,3848	10,5034	20,6633	64,0680
4	48,7636	14,0769	27,6933	85,8651
5	61,2721	17,6877	34,7970	107,891
6	73,9129	21,3368	41,9758	130,149
7	86,6888	25,0249	49,2314	152,645
8	99,6029	28,7529	56,5655	175,385
9	112,658	32,5216	63,9797	198,373
10	125,858	36,3320	71,4758	221,616
20	266,555	76,9477	151,379	469,361
30	426,064	122,994	241,966	750,231
40	610,203	176,151	346,540	1074,47
50	827,994	239,021	470,226	1457,97
60	1094,55	315,969	621,605	1927,33
70	1438,20	415,172	816,766	2532,44
80	1922,54	554,990	1091,83	3385,30
90	2750,54	794,012	1562,06	4843,27
91	2876,40	830,344	1633,53	5064,88
92	3017,09	870,960	1713,44	5312,63
93	3176,60	917,006	1804,02	5593,50
94	3360,74	970,162	1908,60	5917,74
95	3578,53	1033,03	2032,28	6301,23
96	3845,09	1109,98	2183,66	6770,60
97	4188,74	1209,18	2378,82	7375,71
98	4673,08	1349,00	2653,89	8228,56
99	5501,08	1588,02	3124,11	9686,53

Tableau 5.6. Analyse de distribution paramétrique (Minitab).

## 5.7 Cas d'étude 5 : Modélisation des durées de vie des Turbocompresseurs de boucle de réfrigération 430/6201 du complexe gazier GP2Z

### 5.7.1 Données

Soit l'historique suivant qui contient trois turbocompresseurs (A, B et C) du complexe GP2Z (Rebaï, 2010) :

Date Di	Motif Inspection	Repère Equipement
24/09/97	Autres	430/6201 B
06/10/98	Vibrations excessives	430/6201 C
10/10/98	Vibrations excessives	430/6201 C
03/01/99	Autres	430/6201 A
07/03/99	Autres	430/6201 C
05/09/99	Vibrations excessives	430/6201 B
02/10/99	Echauffement palier	430/6201 A
03/03/01	Autres	430/6201 C
22/11/03	Vibrations excessives	430/6201 C
22/12/03	Fuite garniture	430/6201 C
08/01/04	Vibrations excessives	430/6201 B
08/01/04	Vibrations excessives	430/6201 C
17/01/04	Autres	430/6201 A
19/01/04	Fuite garniture	430/6201 B
03/04/04	Vibrations excessives	430/6201 B
21/04/04	Autres	430/6201 C
24/04/04	Autres	430/6201 C
29/05/04	Autres	430/6201 B
29/05/04	Autres	430/6201 C
06/06/04	Autres	430/6201 B
30/06/04	Autres	430/6201 A
26/03/05	Echauffement palier	430/6201 C
29/08/05	Fuite garniture	430/6201 A
12/11/05	Autres	430/6201 C
17/12/05	Vibrations excessives	430/6201 B
02/10/06	Autres	430/6201 B
14/10/06	Fuite garniture	430/6201 C
15/10/06	Fuite garniture	430/6201 C
16/05/07	Vibrations excessives	430/6201 A
16/12/07	Autres	430/6201 A
22/03/08	Fuite garniture	430/6201 A
24/05/08	Autres	430/6201 C
27/08/08	Autres	430/6201 A
06/10/08	Vibrations excessives	430/6201 A
14/02/09	Autres	430/6201 B
24/03/09	Autres	430/6201 C
22/04/09	Autres	430/6201 A
13/06/09	Autres	430/6201 C
17/08/09	Autres	430/6201 C

01/10/09	Autres	430/6201 A
04/10/09	Autres	430/6201 B
28/10/09	Autres	430/6201 B
07/12/09	Autres	430/6201 A
07/12/09	Autres	430/6201 A
10/12/09	Autres	430/6201 C

**Tableau 5.7.** Dates d'interventions sur les équipements A, B et C.

## 5.7.2 Modélisation de la loi de défaillance

### 5.7.2.1 Méthodologie

Dans cette méthodologie, nous identifions les dates concernant les équipements A, B et C dans trois tableaux. Ensuite, nous ferons la différence en jour pour obtenir le tbf.

A partir de ces données et ces résultats (tbf), on modélise selon les quatre lois (Weibull, Normale, Log-normal et Exponentielle) par régression linéaire.

### 5.7.2.2 Résultats et interprétations

<b>Equipement A</b>		
<b>Date Di</b>	<b>Motif Inspection</b>	<b>Tbf [jours] = (Date Di)<sub>n</sub> – (Date Di)<sub>n-1</sub></b>
03/01/99	Autres	////////////////////
02/10/99	Echauffement palier	274
17/01/04	Autres	1570
30/06/04	Autres	167
29/08/05	Fuite garniture	427
16/05/07	Vibrations excessives	627
16/12/07	Autres	216
22/03/08	Fuite garniture	99
27/08/08	Autres	160
06/10/08	Vibrations excessives	42
22/04/09	Autres	200
01/10/09	Autres	164
07/12/09	Autres	69
07/12/09	Autres	1

**Tableau 5.8.** tbf de l'équipement A

<b>Equipement B</b>		
<b>Date Di</b>	<b>Motif Inspection</b>	<b>Tbf [jours] = (Date Di)<sub>n</sub> – (Date Di)<sub>n-1</sub></b>
24/09/97	Autres	////////////////////
05/09/99	Vibrations excessives	713
08/01/04	Vibrations excessives	1588
19/01/04	Fuite garniture	13

03/04/04	Vibrations excessives	77
29/05/04	Autres	58
06/06/04	Autres	10
17/12/05	Vibrations excessives	561
02/10/06	Autres	291
14/02/09	Autres	888
04/10/09	Autres	235
28/10/09	Autres	26

**Tableau 5.9.** tbf de l'équipement B

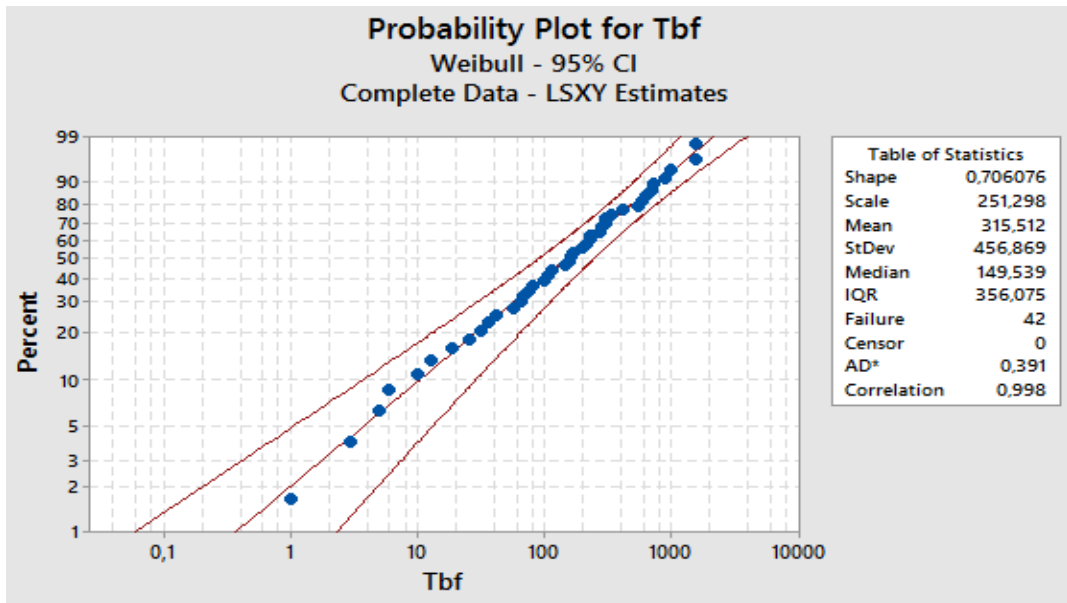
Equipement C		
Date Di	Motif Inspection	Tbf [jours] = (Date Di) <sub>n</sub> - (Date Di) <sub>n-1</sub>
06/10/98	Vibrations excessives	////////////////////
10/10/98	Vibrations excessives	6
07/03/99	Autres	150
03/03/01	Autres	729
22/11/03	Vibrations excessives	996
22/12/03	Fuite garniture	32
08/01/04	Vibrations excessives	19
21/04/04	Autres	106
24/04/04	Autres	5
29/05/04	Autres	37
26/03/05	Echauffement palier	303
12/11/05	Autres	233
14/10/06	Fuite garniture	338
15/10/06	Fuite garniture	3
24/05/08	Autres	589
24/03/09	Autres	306
13/06/09	Autres	83
17/08/09	Autres	67
10/12/09	Autres	117

**Tableau 5.10.** tbf de l'équipement C.

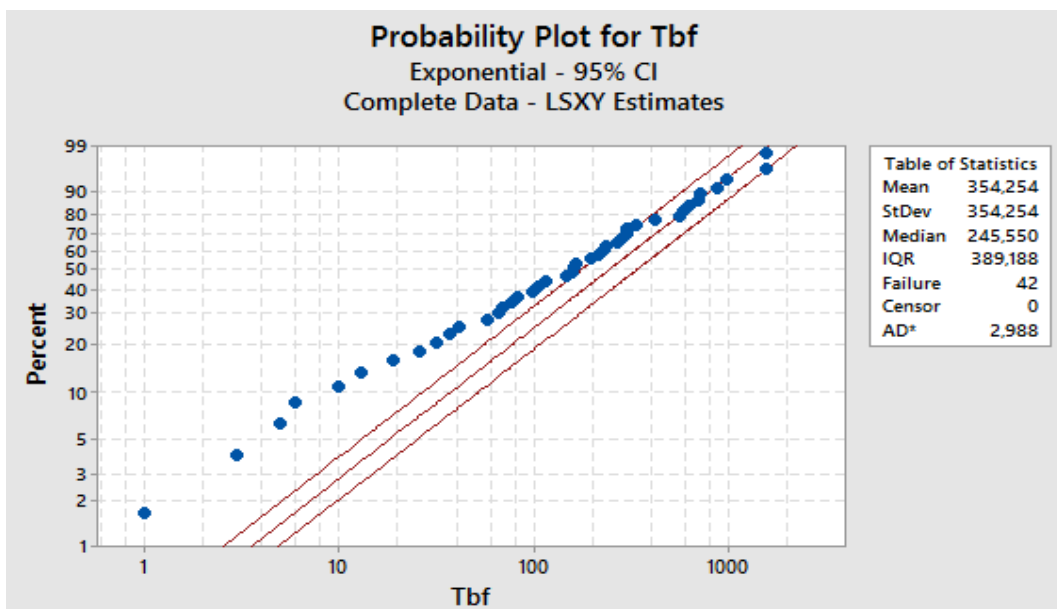
Après avoir entrée les résultats des données (Tbf) dans le logiciel Minitab, nous avons obtenu les résultats suivants :

- **Modèle de Weibull :** La Figure 5.12.a. donne les statistiques par ajustement au modèle de Weibull. Le coefficient de corrélation est de 0.998 et la valeur du test d'Anderson Darling est de 0.391.
- **Modèle Exponentielle :** Les statistiques par ajustement au modèle exponentielle sont données à la Figure 5.12.b. La valeur du test d'Anderson Darling est de 2.988.

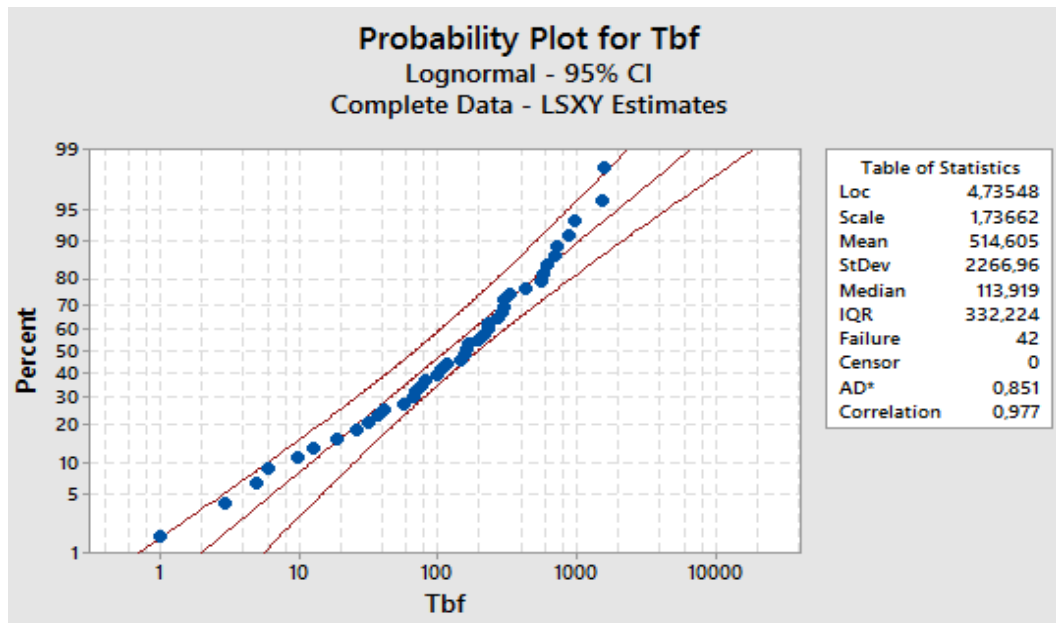
- **Modèle Log-normal :** La Figure 5.12.c. donne les statistiques par ajustement au modèle Log-normal. Le coefficient de corrélation est de 0.977 et la valeur du test d'Anderson Darling est de 0.851.
- **Modèle Normale :** Les statistiques par ajustement au modèle normale sont données à la Figure 5.12.d. Le coefficient de corrélation est de 0.856 et la valeur du test d'Anderson Darling est de 4.102.



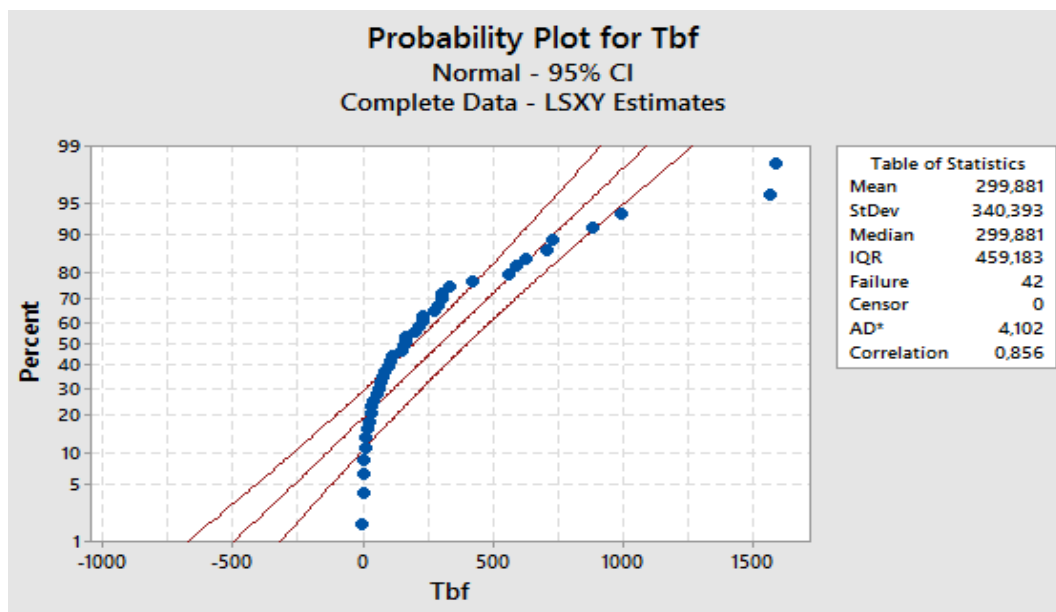
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure 5.12.** Ajustement selon : (a) Modèle de Weibull, (b) Modèle exponentielle, (c) Modèle log-normal, (d) Modèle normal.

### 5.7.2.2.1 Interprétation global

En comparant le test d'Anderson Darling entre les quatre modèle, à savoir loi de weibull, loi exponentielle, loi log- normale et la loi normale, respectivement Figure 5.12.a, Figure 5.12.b, Figure 5.12.c et Figure 5.12.d, on constate :

- ✓ Pour le modèle de weibull : AD= 0,391

- ✓ Pour le modèle exponentielle : AD=2,988
- ✓ Pour le modèle normale : AD= 4,102
- ✓ Pour le modèle log-normale : AD= 0,851
- En comparant le coefficient de corrélation entre les 3 modèles (loi de weibull, loi log-normale et la loi normale), respectivement Figure 5.12.a, Figure 5.12.c, Figure 5.12.d), on constate :
  - ✓ Pour le modèle de weibull : 0,998
  - ✓ Pour le modèle normale : 0,856
  - ✓ Pour le modèle log-normal : 0,977

Nous concluons que la loi de weibull modélise le mieux les données puisque la valeur de AD de la loi de weibull est plus réduite par rapport aux autres lois et aussi que son coefficient de corrélation se rapproche le plus de la valeur 1.

Dans ce cas, les paramètres de la loi de weibull sont :

- $\eta = 251.298$
- $\beta = 0.706076$

La fonction de fiabilité peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{251.298}\right)^{0.706076}}$$

On déduit à partir du logiciel Minitab la moyenne de temps de la première défaillance (tableau 5.10) dont la valeur est de 315.512 Jours.

Characteristics of Distribution

	Estimate	Standard Error	95,0% Normal CI	
			Lower	Upper
Mean (MTTF)	315,512	72,0530	201,664	493,632
Standard Deviation	456,869	137,867	252,888	825,382
Median	149,539	38,4144	90,3843	247,409
First Quartile (Q1)	43,0388	15,7688	20,9890	88,2528
Third Quartile (Q3)	399,113	88,2180	258,792	615,519
Interquartile Range (IQR)	356,075	79,4648	229,921	551,446

Tableau 5.11. MTTF.

### 5.7.2.2.2 Analyse de distribution paramétrique

A partir du tableau des centiles (tableau 5.11) pour l'analyse de distribution paramétrique on peut dire que 1 pourcent des équipements tombent en panne après 0,3 jours correspondants à environ 9h de fonctionnement ;

- 10 pourcent des équipements tombent en panne après 10,3760 J
- 40 pourcent des équipements tombent en panne après 97,0561 J



- 80 pourcent des équipements tombent en panne après 493,058 J
- 90 pourcent des équipements tombent en panne après 818,818 J
- 99 pourcent des équipements tombent en panne dont 2185,39 J

Table of Percentiles

Percent	Percentile	Standard Error	95,0% Normal CI	
			Lower	Upper
1	0,372154	0,347559	0,0596726	2,32097
2	1,00041	0,810400	0,204479	4,89450
3	1,78943	1,32044	0,421311	7,60020
4	2,70913	1,86079	0,704974	10,4109
5	3,74349	2,42335	1,05257	13,3138
6	4,88251	3,00339	1,46232	16,3021
7	6,11943	3,59784	1,93312	19,3715
8	7,44947	4,20462	2,46429	22,5195
9	8,86917	4,82222	3,05548	25,7446
10	10,3760	5,44953	3,70659	29,0460
20	30,0334	12,1492	13,5917	66,3645
30	58,3557	19,5950	30,2178	112,695
40	97,0561	28,0932	55,0350	171,162
50	149,539	38,4144	90,3843	247,409
60	222,033	52,1682	140,095	351,895
70	326,863	72,8862	211,134	506,025
80	493,058	109,583	318,946	762,217
90	818,818	195,151	513,237	1306,34
91	872,383	210,702	543,402	1400,53
92	933,428	228,866	577,266	1509,34
93	1004,08	250,444	615,825	1637,12
94	1087,50	276,640	660,539	1790,44
95	1188,64	309,375	713,678	1979,70
96	1315,95	351,979	779,055	2222,86
97	1485,57	410,935	863,843	2554,76
98	1734,58	501,522	984,204	3057,06
99	2185,39	675,872	1192,01	4006,63

Tableau 5.12. Analyse de distribution paramétrique (Minitab).

## 5.8 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté une description du logiciel « Minitab » utilisé (menus et environnement). Dans la deuxième partie, nous avons réalisé et présenté les résultats de cinq études de cas.

Le premier et le deuxième cas nous a permis de valider nos résultats par comparaison à des résultats antécédents, en présence de données censurées.

Pour le troisième cas on a modélisé selon les lois normale et log-normale et nous avons comparé les meilleurs résultats obtenus à travers ces deux lois.

Pour le quatrième cas nous avons testé et validé l'hypothèse d'une distribution exponentielle.

Enfin dans le cinquième cas on a modélisé des tbf industrielles, provenant du complexe gazier GP1Z, de turbocompresseurs de boucles de réfrigération 430/6201.

## **Conclusion générale**

### Conclusion générale

Pour minimiser le temps de panne des systèmes industriels il est préférable d'appliquer la maintenance prédictive dans l'objectif d'améliorer leurs temps de bon fonctionnement et d'augmenter leurs performances de production et économiques. Ceci est considéré comme une source de gain importante pour les entreprises par la minimisation des défauts des systèmes à partir de la réduction de probabilité de défaillance.

Dans notre travail, nous avons composé le mémoire en deux parties (théorique et pratique). A travers la recherche théorique, nous avons fait une étude générale sur le taux de défaillance et les lois de fiabilité, ainsi que la durée de vie des matériels selon la courbe en baignoire. Nous avons détaillé les principales lois de calcul de la fiabilité (loi exponentielle, loi normale, loi log-normale et loi de weibull) et nous avons abordé la problématique de détermination de leurs paramètres et aussi détaillé la méthode d'ajustement graphique pour chacune d'entre-elle. Nous avons vu par ailleurs, les tests du khi-deux, de Kolmogorov-Smirnov, d'Anderson Darling et le test spécifique pour la loi exponentielle (Barlow-Prochan), qui sont utilisés pour vérifier les hypothèses de normalité.

Ensuite on a présenté les types des données et l'estimation des paramètres des modèles par la méthode de Johnson et la méthode de Kaplan Meier. Et en dernier lieu les différentes sources de données où on distingue entre les Banques de données internes et externes ; ainsi que les données de fiabilité des composants électroniques et mécaniques.

Dans la partie pratique on a essayé de maîtriser le logiciel Minitab dans le cadre de l'estimation de la fiabilité à partir de quatre cas d'étude académiques. A partir des données réelles (cinquième cas étudié) de turbocompresseurs de boucles de réfrigération 430/6201, du complexe gazier GP1Z, on a calculé les temps de bon fonctionnement (tbf), qui ont étaient introduites dans le logiciel Minitab à travers les quatre lois étudiées.

Après obtention des résultats et la comparaison du test d'Anderson Darling et le coefficient de corrélation, nous avons conclu que le modèle Weibull modélisé le mieux nos données. Ainsi en adoptant le modèle de Weibull, nous avons déduit le temps moyen avant-première défaillance et finalement l'analyse de distribution paramétrique qui correspondent au pourcentage des équipements qui tombent en panne dans un intervalle de temps.

Ce travail, nous a permis de maîtriser une partie du logiciel Minitab et par conséquent d'estimer les paramètres de fiabilité dans le cadre de la maintenance prédictive, pour un cas de machine industrielle.

En perspective, cette méthodologie d'analyse d'étude sur la fiabilité et la maintenance, semble encourageante et pourra être généralisée à d'autres cas d'étude de machines industrielles, notamment dans le domaine énergétique.

## Bibliographie

- (AFNOR, 1988), AFNOR. *Terminologie relative à la fiabilité – Maintenabilité – Disponibilité. XNF, 60- 500*, 1988.
- (Alain et Jacques, 2009), Alain.Y et Jacques.A.W, *Mathématiques appliquées*, Pearson Education, 2009, 890 p.
- (Bagnold, 1937), Bagnold R.A. *The size grading of sand by wind. Proceedings of the Royal Society of London A163*, 1937.
- (Bechou, 2007), Bechou. L. *Nouvelles approches d'évaluation de la fiabilité : Perspectives pour les nanotechnologies. In Journées scientifiques du CNFRS "NANOSCIENCES ET RADIOÉLECTRICITÉ"*, Paris, 2007.
- (BELLAOUAR et BELEULMI, 2013), A. BELLAOUAR et S.BELEULMI, *FIABILITE MAINTENABILITE DISPONIBILITE, polycopié de fiabilité, Faculté des Sciences de la Technologie Département Génie des Transports*, 2013.
- (Bellaouar et Beleulmi, 2014), Bellaouar.A., & Beleulmi, S. *Fiabilite Maintenabilite Disponibilite. Polycoié de l'Université Constantine I*, 2014.
- (Belle et Claustriax), Belle, L. V., & Claustriax, J. (s.d.). *Introduction A l'analyse Des Donnees Par Le Logiciel Minitab sous windows*.
- (Cameron et Trivedi, 2005), C. Cameron et P. Trivedi, *Micro econometrics: Methods And Applications Cambridge University press*, 2005.
- (Claustriax, 1994), Claustriax J. *Traitement de données par le logiciel Minitab. Notes Stat. Inform*, 1994, 20 p.
- (Doyle, 1991), Doyle, R. *Mechanical reliability. In RAMS Tutorial Notes, USA*, 1991.
- (Ernoul, 2018), R. ERNOUL. *Analyse des indicateurs de la fiabilité ; Formulaire et outils qualité -I-40-652*, 2018.
- (Grünling, 1987), Grünling, H. W., Schneider, K., et Singheiser, L. *Mechanical properties of coated systems. Materials Science and Engineering*, 1987.
- (Henze, 1986), N. Henze. « *A Probabilistic Representation of the 'Skew-Normal' Distribution* », *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 13, n° 4, 1986, p. 271-275 (JSTOR 4616036).
- (Housseyn, 2013), Housseyn, K. *Réseaux Bayésiens Dynamiques : Application aux réseaux électriques. Magistère de l'université des sciences et des technologies*, 2013.

- (IMdR, 2009). *Guide de selection des modèles de fiabilité prévisionnelle pour les composantes électroniques*. (IMdR) Récupéré sur [https://www.imdr.eu/offres/doc\\_inline\\_src/818/Guide de selection oct09\\_159.pdf](https://www.imdr.eu/offres/doc_inline_src/818/Guide_de_selection_oct09_159.pdf).
- (Lalanne, 1999), Lalanne, C. *Vibrations et chocs mécaniques, Tome 4 : Dommage par fatigue*. Hermès Science Publications, Paris, 1999.
- (LANNOY, 1993), A. LANNOY, *Méthodes fréquentistes de traitement des données de défaillance*, Paris, 1993.
- (LCC, 2019), Récupéré sur <https://support.minitab.com/fr-fr/minitab/18/help-and-howto/modeling-statistics/reliability/supporting-topics/distribution-models/exponentialdistribution/>.
- (Lyonnet, 2000), P. LYONNET, *La Maintenance, Mathématiques et Méthodes*, 4<sup>ème</sup> Edition TEC et DOC, Paris, 2000.
- (Lyonnet, 1991), P. LYONNET, *revue de statistique appliquée, tome 39, no 2, 1991*.
- (Lyonnet, 1993), P. LYONNET, *Optimisation d'une politique de maintenance*, Edition TEC et DOC, Paris, 1993.
- (Mihalache, 2007), Mihalache.A. G. *Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques : application sur système embarqué. Thèse de doctorat de l'Université d'Angers*, 2007.
- (Nelson, 1990), Nelson, W. *Accelerated Testing : Statistical Models, Test Plans and Data Analyses*. John Wiley & Sons, 1990.
- (Noureddine, 2015), Noureddine R., *Fiabilité, Cours de fiabilité, IMSI-Université d'Oran 2, édition2022*, url : <https://elearn.univ-oran2.dz/course/index.php?categoryid=524>
- (Procaccia, 2011), Procaccia, H., P. M., & F. E. *Fiabilité et maintenance des matériels industriels réparables et non réparables*. Paris : TEC&DOC, 2011.
- (Rebaï, 2010), A. REBAI. *Mise en place d'un plan d'inspection technique des machines tournantes du complexe GP2Z, DPGS en génie mécanique*, ENSET Oran, 2010.
- (Smith, 1997), Smith, D. J. (1997). *Reliability, maintainability and risk: Practical methods for engineers*. Oxford: Butterworth Heinemann, 1997.
- (Smith, 2006), Smith.D. *Fiabilité, maintenance et risqué, Technique et ingénierie série Gestion industrielle*, Paris, 2006.
- (Stigler, 2008), S. Stigler. « Karl Pearson's theoretical errors and the advances they inspired », *Statistical Science*, n° 23, 2008, p. 261–271.

(Suhner, 1994), C. Suhner, *Utilisation de l'analyse bayésienne pour optimiser la démarche de fiabilité*, Thèse de l'Université de Nancy I, 1994.

(Tassi et Legait, 1990), Philippe Tassi et Sylvia Legai. *Théorie des probabilités en vue des applications statistiques*, Technip, 1990, 367 p.

(Tebbi, 2005), O.Tebbi. *Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés*. (669). *These de doctorat de l'Université d'angers*, 2005.

(Vernier, 2010), Vernier, F "*MAINTENANCE Méthode et organisations*, 3ème édition, *l'USINE NOUVELLE DUNOD, Paris, 2010*.

(Wasserman, 2004), L. Wasserman, *All of Statistics, a Concise Course in Statistical Inference*, New York, 2004.