



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Département de Maintenance en Instrumentation

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : *Génie Industriel*
Spécialité : *Génie Industriel*

Thème

Méthodes numériques dans la résolution des équations
Différentielles

Présenté et soutenu le /07 /2022 par

Nom : Kasmi Prénom : Mohamed El amine

Nom : Khenifi Prénom : Esmail

Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Etablissement	Qualité
Dr. BELKHODJA LEILA	IMSI	Présidente
Dr. SEGUENI FOUZIA	IMSI	Encadrante
Dr. TITAH MAWLOUD	IMSI	Examineur

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier le DIEU notre créateur, pour nous avoir donné la force d'accomplir ce travail. Sincères remerciements aux parents.

Nous adressons nos vifs remerciements à notre encadrante Mme SEGUENI FOUZIA, pour sa compréhension et sa grande patience, pour ses remarques qui ont été précieuses et son soutien dans des moments très difficiles.

Nous remercions également les membres du jury pour le grand honneur qu'ils nous font en acceptant de juger ce travail.

Nos plus sincères remerciements vont également à tous les enseignants L'IMSI Oran qui nous ont aidés,

Ainsi que à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

KASMI MOHAMED EL AMINE

KHENIFI ESMAIL

Dédicace

A nos très chères mères

A nos très chers pères

*Nous ne vous remercierons jamais assez pour votre amour, soutien, bien
vaillances, conseil etc. nous vous offrons ce travail*

A nos frères et sœurs

*Nous sommes très fiers de vous offrir la primeur de nos efforts et de nos
sentiments pour exprimer notre amour envers vous. Vous avez constitué
toujours un point de repère et un guide.*

A tous nos collègues de la promotion 2022 surtout nos amis et frères :

*Mr Latreche, Mr Chenini, Mr Amaire, Mr Naous, Mr Azouzi, Mr Kelou, Mr
Bouzir*

*Il est impossible de dresser la liste exhaustive de tous nos collègues et amis,
présents ou déjà partis sans risquer d'en oublier. Qu'ils sachent simplement que
nous les associons à ce travail et que nous les oublierons.*

Kasmi Mohamed El amine

Khenifi Esmail

SOMMAIRE

Notations et Abréviations.....	4
Introduction générale.....	5
Chapitre1 : Les équations différentielles	7
1.1 L'équation différentielle ordinaire (EDO).....	7
1.1.1 Les équations du premier ordre.....	7
1.1.1.1 Equations à variable séparable	8
1.1.1.2 Equations linéaires d'ordre 1.....	9
1.1.2 Equations différentielles du second ordre.....	10
1.1.2.1 Equation linéaire du second ordre	11
1.1.2.2 Équation linéaire du second ordre à coefficients constants.....	12
1.2 Les équations différentielles partielle (EDP).....	13
1.2.1 Équation aux dérivées partielles linéaires.....	14
1.2.1.1 Résolution simple de quelques EDP	15
1.2.2 Classification des EDP linéaires du second ordre.....	16
1.2.3 Quelques équations classiques d'EDP.....	17
Chapitre 2 : Méthodes de calcul numérique	19
2.1 Introduction.....	19
2.2 Problèmes de Cauchy	19
2.3 Méthode d'Euler	20
2.3.1 Méthode d'Euler explicite.....	20
2.3.2 Méthode d'Euler implicite	21
2.3.3 Méthode D'Euler modifié.....	22
2.4 Méthode de Runge-Kutta.....	22
2.4.1 Méthode de Runge-Kutta à 2 étapes.....	23
2.4.2 Méthode de Runge-Kutta à 4 étapes.....	24
2.5 Méthode des différences finies pour les EDP.....	27
2.5.2 Différence finie décentrée à droite (avant)	28
2.5.3 Différences finies décentrées à gauche (arrière)	28
2.5.4 Différence finie centrée	29

2.5.6	Résolution de quelques problèmes avec conditions de Dirichlet	30
2.5.7	Résolution de problèmes elliptiques par MDF.....	33
2.5.8	Résolution de problèmes paraboliques par MDF	35
2.5.9	Résolution des problèmes hyperbolique par MDF.....	37
Chapitre 3 : Applications sous MATLAB.....		40
3.1	Introduction.....	40
3.2	Méthodes d'Euler et Runge-Kutta	40
3.2	Comparaison de la précision des résultats	45
3.3	Résolution numérique du problème aux limites de la corde élastique	47
3.4	La méthode des différences finies en dimension 1	48
Conclusion		52
Bibliographie		54

Liste de figure

Figure 2.1. <i>Méthode d'Euler explicite</i>	21
Figure 2.2. <i>Méthode d'Euler implicite</i>	21
Figure 2.3. <i>Méthode de Trapèze</i>	24
Figure 3.1. <i>Les résultats des deux méthodes sur le même graphe</i>	44
Figure 3.2. <i>Comparaison graphique des résultats numériques avec la solution exacte</i>	46
Figure 3.3. <i>Solution graphiquement par la méthode des différences finies</i>	48
Figure 3.4. <i>Solution exacte et solution numérique obtenues par différences finies</i>	51

Liste de tableaux

Tableau 2.1. <i>Solution les valeurs de méthode Runge-Kutta 4</i>	26
Tableau 2.2. <i>Les avantages et inconvénients des différences finies</i>	30

Notations et Abréviations

N	Ensemble des entiers naturels.
R	Ensemble des nombres réels.
R^+	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
C	Ensemble des nombres complexes.
C^1	Espace des fonctions dérivables et ses dérivées continues.
n	Est un entier naturel.
u_x	$= u' = \frac{\partial u}{\partial x} = \partial^x u$, La dérivée partielle de u par rapport à x .
u_{xx}	$= u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \partial(\partial_x u)$, La dérivée partielle second de u par rapport à x .
R^d	L'ensemble des nombres réels de dimension d .
Ω	Un ouvert borné de R^n .
Δu	Laplacien de u .
$\partial\Omega$	Le frontière du domaine Ω .
EDO	Equation différentielle ordinaire.
EDP	Equation différentielle aux dérivées partielles.

Introduction générale

La modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution des équations différentielles. Ces équations occupent une place importante en ingénierie et en instrumentation, nous pouvons citer par exemple la modélisation continue, les mathématiques pour l'automatique, identification des systèmes dynamique.

On distingue généralement deux types d'équations différentielles, Les équations différentielles ordinaires (EDO) où la fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable et les équations aux dérivées partielles (EDP) où la fonction inconnue peut dépendre de plusieurs variables indépendantes. La résolution explicite ou bien analytique de telles équations est rarement possible, malheureusement, on ne sait pas résoudre « de manière exacte » une grande majorité d'entre elles.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la résolution numérique des équations différentielles. Plusieurs méthodes permettent d'approcher la solution exacte. Notre objectif est d'étudier les méthodes d'Euler et Rung-Kutta pour la résolution des EDO, elles permettent, à partir de la condition initiale, de calculer les valeurs de la solution à chaque pas h et la méthode des différences finies pour la résolution des EDP, c'est une technique courante de recherche de solution approchée, elle apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre.

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on rappelle des définitions et résultats sur les équations différentielles. On expose également la résolution analytique de quelques équations simples.

Le second chapitre est consacré à la résolution numérique des problèmes de Cauchy. Les méthodes numériques étudiées sont les méthodes d'Euler, les méthodes de Runge-Kutta 2 et 4 et la méthode des différences finies.

Dans le dernier chapitre, on traite quelques exemples par le biais de script Matlab pour illustrer l'application des techniques numériques étudiées.

Chapitre 1

Les équations différentielles

Chapitre1 : Les équations différentielles

1.1 L'équation différentielle ordinaire (EDO)

Les équations différentielles ordinaires se rencontrent dans tous les domaines de la physique (électricité, mécanique, thermique...). C'est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. La fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable.

Définition 1.1

Une équation différentielle ordinaire, notée EDO, d'ordre n toutes relations entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \rightarrow y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \dots y^n$ au point t , de la forme [16]

$$F(t, y^{(t)}, y''^{(t)}, \dots y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

Avec

$$y^n = \frac{d^n y}{dx}$$

Définition 1.2

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre une variable (dite indépendante), une fonction (parfois appelée variable dépendante) et un certain nombre de ses dérivées. [22]

1.1.1 Les équations du premier ordre

Sous sa forme la plus générale une équation du premier ordre, dont la variable indépendante est t , s'écrit :

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad (1.2)$$

Et on peut être intéressé à chercher une solution sur un intervalle de temps donné I ou sur le plus grand intervalle possible. On considère d'abord (1.2) comme une équation en $y'(t)$ et on cherche à la résoudre.

Des conditions suffisantes pour lesquelles c'est le cas. On remplace alors (1.2) par sa forme normale [22][11]

$$y'^{(t)} = f(t, y(t)), \quad (1.3)$$

1.1.1.1 Equations à variable séparable

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. [17]

Une équation différentielle à variable séparable est du type

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (1.4)$$

Elle est facile à résoudre.

Méthode de résolution

$$\Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx + c \quad (1.4)$$

Avec c est constante.

Réduction aux équations séparables

Une équation de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad (1.5)$$

Avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, ($b \neq 0$) peut se récrire comme une équation séparable.

Méthode de résolution

Posons $z = ax + by + c$, alors $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a + b\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ainsi,

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{b f(z) + a} = dx. \quad (1.6)$$

De plus une équation de la forme suivante peut aussi se récrire comme une équation séparable.

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.7)$$

Méthode de résolution

On pose $u = (y/x)$ alors

$$ux = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + \left(\frac{du}{dx}\right)x.$$

Donc,

$$u + \frac{du}{dx}x = g(u) \Rightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}. \quad (1.8)$$

1.1.1.2 Equations linéaires d'ordre 1

Les équations linéaires du premier ordre sont de la forme [17] :

$$y' = p(x)y + q(x) \text{ avec } y' = \frac{dy}{dx} \quad (1.9)$$

Théorème 1.1: La solution générale de l'équation (1.9) peut s'exprimer comme suit

$$y = y_h + y_p,$$

où p et q sont des fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$. L'équation (1.9) est dite homogène si $q(x) = 0$.

- y_p : Est une solution particulière de (1.9)
- y_h : Une solution de l'équation homogène.

Méthode de résolution

1. Résolution de l'équation homogène associée $y' = p(x)y$

On cherche la solution homogène

$$\frac{dy_h}{dx} = p(x)y_h \Rightarrow \frac{dy_h}{y_h} = p(x) dx \Rightarrow y_h = C e^{\int p(x)dx}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

2. Variation de a constante

La solution particulière de (1.9) est de la forme

$$y_p = u(x)e^{\int p(x)dx}$$

Avec

$$y'_p = u(x)e^{\int p(x)dx} p(x) + u'(x)e^{\int p(x)dx} \quad (1.11)$$

De plus, nous voulons respecte l'équation (1.9)

$$y'_p = p(x)y_p + q(x) = p(x)u(x)e^{\int p(x)dx} + u'(x)e^{\int p(x)dx} \quad (1.12)$$

Les égalités (1.11)et (1.12) permettent de trouver $q(x)$ et $u(x)$:

$$q(x) = y'^{(x)}e^{\int p(x)dx} \Rightarrow du = q(x)e^{-\int p(x)dx} dx \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx. \quad (1.14)$$

La solution finale est donc

$$y = y_h + y_p = y_h + u(x)e^{\int p(x)dx}.$$

1.1.2 Equations différentielles du second ordre

Sous sa forme la plus générale une équation du second ordre, dont la variable indépendante est t , s'écrit [18]

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0, \quad \text{avec } y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.15)$$

- Une EDO de la forme $y'' = f(x, y')$ ou $y''(t) = f(t, y'(t))$; peut se réécrire comme une EDO du premier ordre.

Méthode de résolution : Réduction au premier ordre

On pose $u(x) = y'(x)$, alors $u'(x) = y''(x)$ et ainsi l'EDO devient

$$u'(x) = f(x, u(x)).$$

Exemple 1.1

Trouvons la solution de l'EDO suivante: $xy'' - y' = 7x^2$.

$$xy'' - y' = 7x^2 \Leftrightarrow x u'(x) - u(x) = 7x^2$$

Puisque $x u'(x) - u(x) = 7x^2$ est une EDO linéaire du premier ordre, alors

$$u(x) = c x + 7x^2, \quad (C \text{ dans } \mathbb{R}).$$

Puis nous trouvons la solution à l'EDO

$$y'(x) = cx + 7x^2$$

Soit :

$$y(x) = c_1 x^2 + \frac{7}{3} x^3 + c_2.$$

- Une EDO de la forme $y''(x) = f(y, y')$ peut aussi se réécrire comme une EDO de premier ordre.

Méthode de résolution

Posons $p(y(x)) = y'(x)$.

Ce qui peut se réécrire

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = y''(x).$$

Ainsi

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)p = y''(x).$$

L'EDO devient alors

$$\frac{dp}{dy}p = f(y, p).$$

Exemple 1.2

Trouvons la solution de l'EDO suivant $y'' = y'/y^2$

$$y''(x) = \frac{y'}{y^2} \Leftrightarrow \frac{dp}{dy}p = \frac{p}{y^2} \Rightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{1}{y^2}$$

Nous avons $p(y) = (-1/y) + c$ et il faut résoudre l'EDO $y'(x) = (-1/y) + c$ pour conclure.

1.1.2.1 Equation linéaire du second ordre

Les équations linéaires du deuxième ordre sont de la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x). \quad (1.16)$$

Où p, q, r sont des fonctions continues données.

Si $r(x) = 0$ nous dirons que l'équation (1.16) est homogène.

Théorème 1.2 : La solution générale de l'équation (1.16) peut s'exprimer

Comme suit

$$y = y_h + y_p$$

Où

- y_p est une solution particulière de (1.16)
- y_h est une solution de l'équation homogène :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0.$$

1.1.2.2 Équation linéaire du second ordre à coefficients constants

Méthode de résolution

Etape 1 : On cherche la solution de l'équation homogène:

$$ay''(x) + by'(x) + cy = 0 \quad (1.17)$$

Où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ensuite, nous associons à l'équation (1.17) l'équation caractéristique de la forme :

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (1.18)$$

On note Δ son discriminant, il y a trois cas possibles :

1. Les solutions de l'équation caractéristique forment un couple (r_1, r_2) de deux réels distincts si $(\Delta > 0)$. Alors la solution de l'équation (1.17) est

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

2. Si la racine est double $(\Delta = 0)$, alors la solution de (1.17) est :

$$y_h = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \text{ Avec } \Delta = -b/2a,$$

3. Si la racine est complexe $(\Delta < 0)$, alors $r = \alpha \pm \beta i$. Alors la solution de (1.17) est donc :

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)).$$

Etape 2 : On cherche la solution particulière

Voici les trois résultats pour trouver des solutions particulières des EDO de la forme [12]

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = r(x) \quad (1.19)$$

1. $r(x) = ax^n + \dots + c \Rightarrow y_p = a'x^n + \dots + c'$.

2. $r(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) \Rightarrow y_p = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.

3. $r(x) = a e^{\alpha x} \cos(\omega x) + b e^{\alpha x} \sin(\omega x) \Rightarrow y_p = A e^{\alpha x} \cos(\omega x) + B e^{\alpha x} \sin(\omega x)$.

1.2 Les équations différentielles partielles (EDP)

Beaucoup de phénomènes naturels sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Ces équations expriment des relations que doivent satisfaire les dérivées partielles d'une certaine fonction inconnue de plusieurs variables afin de décrire le phénomène physique.

Définition 1.3

Une équation aux dérivées partielles relie une fonction inconnue à ses dérivées. La fonction inconnue dépend de plusieurs variables (variables d'espace et le temps). L'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé parmi toutes les dérivées partielles de l'EDP.

Dans le cas de deux variables, une EDP d'ordre 1 s'écrit

$$F(x, t, u(x, t), \partial_x u(x, t), \partial_t u(x, t)) = 0, \quad (1.20)$$

Et une équation du second ordre s'écrit

$$F(x, t, u(x, t), \partial_x u(x, t), \partial_t u(x, t), \partial_x^2 u(x, t), \partial_x \partial_t u(x, t)) = 0. \quad (1.21)$$

Si F est une fonction linéaire en u et ses dérivées, alors l'EDP est dite linéaire.

Exemple 1.3

Soit l'équation d'advection régie par

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \alpha \frac{\partial C}{\partial x} = 0. \quad (1.22)$$

La fonction recherchée est C et les variables indépendantes sont le temps t et l'espace x .

La grandeur α (homogène à une vitesse) peut être en fonction de t , x et C .

L'EDP (1.22) est d'ordre 1. Par contre, l'EDP suivante

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \alpha \frac{\partial C}{\partial x} - \beta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (1.23)$$

Est une EDP d'ordre 2. [8]

Rappel : On note les dérivées partielles premières

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u \quad \text{et} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u$$

Et pour les dérivées partielles secondes :

$$u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \partial_{tx}^2 u = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \partial_t (\partial_x u)$$

Remarque 1.1 : Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, il est facile de vérifier qu'une fonction donnée est bien solution d'une EDP.

Par exemple pour voir que la fonction $u(t, x) = e^{t-x}$ est bien une solution de l'équation des ondes

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Il suffit de substituer cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation, nous avons

$$u_{tt}(t, x) = e^{t-x} \quad , \quad u_{xx}(t, x) = e^{t-x}$$

Et nous obtenons que

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = e^{t-x} - e^{t-x} = 0$$

1.2.1 Équation aux dérivées partielles linéaires

Définition 1.4

Une équation aux dérivées partielles est linéaire par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles. Alors, on peut l'écrire sous la forme :

$$L(u) = f \quad (1.24)$$

L : L'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP.

Définition 1.5

Une équation aux dérivées partielles est homogène si :

$$L(v) = 0$$

Théorème 1.3 :

1. Si u est solution de (1.24) et v solution de l'équation homogène. Alors $u + v$ est solution de (1.24)
2. Si u_1 est solution de $L(u) = f_1$ et u_2 est solution de $L(u) = f_2$ alors $u_1 + u_2$ est solution de $L(u) = f_1 + f_2$
3. Puisque $L(u) = f$ et $L(v) = 0$.

Alors

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = f.$$

Et $u + v$ est solution de (1.24)

4. Si $L(u_1) = f_1$ et que $L(u_2) = f_2$.

Par conséquent

$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = f_1 + f_2.$$

Avec $u_1 + u_2$ est solution de $L(u_1 + u_2)$.

Théorème 1.4 :

La solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n dépend linéairement de n fonctions arbitraires. [23]

1.2.1.1 Résolution simple de quelques EDP

Dans la plupart des cas il est très difficile, voire impossible d'exhiber les solutions d'une équation aux dérivées partielles. C'est cependant parfois possible, voici trois exemples à priori très simples.

- Considérons le premier exemple, l'équation linéaire homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$$

En intégrant par rapport à y , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(x)$$

En intégrant ensuite par rapport à x , et en notant G est une primitive de la fonction arbitraire g , on obtient :

$$u(x; t) = G(x) + h(t)$$

Les fonctions G et h sont deux fonctions quelconques. [23]

- Pour le second exemple, on veut trouver les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\partial_{xx}^2 u = 0. \quad (1.25)$$

L'équation (1.25) signifie donc que la dérivée partielle par rapport à la première variable, de la dérivée partielle de u par rapport à la première variable est nulle :

$$\partial_x(\partial_x u) = 0.$$

Commençons donc par poser $v(x, t) = \partial_x u(x, t)$.

On doit avoir, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_x v(x, t) = 0$$

Pour tout y fixe l'application partielle $x \rightarrow v(x, t)$ doit donc être constante. Cette constante peut dépendre de t .

$$v(x, t) = C(t)$$

Pour une certaine fonction C . On est ramené au problème suivant : trouver u telle que

$$\partial_x u(x, t) = C(t).$$

En raisonnant de la même manière, on voit que nécessairement,

$$u(x, t) = C(t)x + D(t)$$

Où D est encore une certaine fonction. Il est enfin immédiat de vérifier que n'importe quelle fonction de ce type vérifie l'équation (1.25), pourvu que cette fonction admette des dérivées partielles. Notons dès à présent qu'il y a énormément de solutions pour l'équation (1.25), puisque aucune condition sur les fonctions C et D n'est apparue dans la démonstration. [4]

1.2.2 Classification des EDP linéaires du second ordre

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classées au sens physique en deux grandes classes. [1][2][9]

- ✓ Les équations qui modélisent des problèmes d'état d'équilibre ou stationnaire appartiennent à la classe dite *des problèmes elliptiques*. L'équation de Laplace et celle de Poisson font partie de cette classe.

La deuxième classe est celle *des problèmes d'évolution* dite comprend les équations dont les solutions dépendent du temps, c'est-à-dire les équations de type parabolique et de type hyperbolique.

- ✓ Nous décrirons dans ce cas la classification des EDP linéaires d'ordre 2. Nous décrirons la forme canonique obtenue après un changement de coordonnées pour chacun de ces types d'EDP, Au départ, nous restreindrons au cas où $n=2$

Ainsi, les EDP que nous considérons initialement seront de la forme suivante :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u^2}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = F(x, t) \quad (1.26)$$

Et $a, b, c, d, \alpha, \beta$ et F sont des fonctions de x et de t qui ne s'annulent passimultanément.

Le type de l'EDP dépend du signe de $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac > 0$, l'EDP est dite *hyperbolique*.

Si $b^2 - 4ac = 0$, l'EDP est dite *parabolique*.

Si $b^2 - 4ac < 0$, l'EDP est dite *elliptique*. [10]

Exemple 1.4

Considérons l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1.27)$$

Cette équation est linéaire d'ordre 2 et parce que $b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(9) = 0$ pour tous points de \mathbb{R}^2 , elle est parabolique sur \mathbb{R}^2

Exemple 1.5

Considérons l'équation

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.28)$$

Dans ce cas, $b^2 - 4ac = -4x^2 \leq 0$. Par conséquent cette équation est parabolique aux points (x_0, t_0) où $x_0 = 0$, sinon elle est elliptique. Sur un domaine pour lequel l'équation est elliptique, ses équations caractéristiques sont $t' = ix$ et $t' = -ix$.

1.2.3 Quelques équations classiques d'EDP

1. Equations hyperboliques : l'exemple classique est l'équation des ondes [15]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t). \quad (1.29)$$

2. Equations paraboliques : l'exemple classique est l'équation de la chaleur [19]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = f(x, t). \quad (1.30)$$

3. Equations elliptiques : l'exemple classique est l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y). \quad (1.31)$$

Chapitre 2

Méthodes de calcul numérique

Chapitre 2 : Méthodes de calcul numérique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution numérique des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. En effet la résolution explicite ou bien analytique est rarement possible. Notre but est d'approcher la solution exacte par des méthodes numériques. Nous présentons dans cette section les méthodes numériques d'Euler, de Runge-Kutta classique d'ordres 2 et 4 pour les EDO et la méthode des différences finies pour les EDP.

2.2 Problèmes de Cauchy

La plupart des méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles s'appliquent à des problèmes du type *problème de Cauchy* suivant le nom donné par les mathématiciens. Ce problème se formule de la manière suivante :

Trouver une fonction continument dérivable $y: t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow y(t) \in \mathbb{R}$. Vérifiant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

La première équation est une équation différentielle et la deuxième relation exprime une condition de Cauchy ou condition initiale. Le problème (2.1) est équivalent à l'équation intégrale :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \quad (2.2)$$

Pour la plupart des problèmes qui intéressent les scientifiques et les ingénieurs, des théorèmes mathématiques assurent l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Néanmoins, souvent la solution ne peut être exprimée analytiquement. Pour de tels problèmes, on doit donc chercher à déterminer la fonction $y(t)$ par des méthodes numériques. [24]

2.3 Méthode d'Euler

Les méthodes d'Euler sont des méthodes classiques, à un pas, permettant, à partir de la condition initiale, de calculer les valeurs de la solution à chaque pas h .

Afin d'atteindre la solution $y(t)$ sur l'intervalle $t \in [a, b]$, on choisit $n + 1$ points dissemblables $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, avec $t_0 = a$ et $t_n = b$ et le pas de discrétisation est défini par $h = (b - a)/n$. La résolution numérique consiste à discrétiser l'axe des abscisses suivant : $t_n = t_0 + hn$ ($n \in \mathbb{N}$) Ensuite on cherchera $u(n)$ comme approximation de y au point t_n , Soit $y(t) \simeq y(t_n) \equiv u_n$. Ainsi l'ensemble des approximations successives $\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n\}$, ou tout simplement $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constitue la solution numérique. Ces méthodes sont itératives donc la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ doit être initialisée afin de calculer ses successeurs. [5]

2.3.1 Méthode d'Euler explicite

Cette méthode consiste à faire une approximation de la dérivée par le développement limité direct.

Soit l'équation différentielle :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Leftrightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (2.3)$$

Trouver la solution de cette équation revient à calculer l'intégrale de $f(t, y(t))$ entre les bornes t_n et t_{n+1} , soit :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (2.4)$$

Cette intégrale s'écrit en fonction des approximations u_{n+1} et u_n :

$$u_{n+1} - u_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (2.5)$$

Par conséquent, en fonction de la méthode d'intégration utilisée afin de résoudre l'intégrale (terme de droite),

On obtient un schéma numérique donné. En utilisant par exemple la méthode des rectangles à gauche, on obtient

Le schéma numérique d'Euler progressif (encore appelée méthode explicite). [13]

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \\ y(t_0) = y_0 = u_0 \end{cases} \quad \forall n \in N \quad (2.6)$$

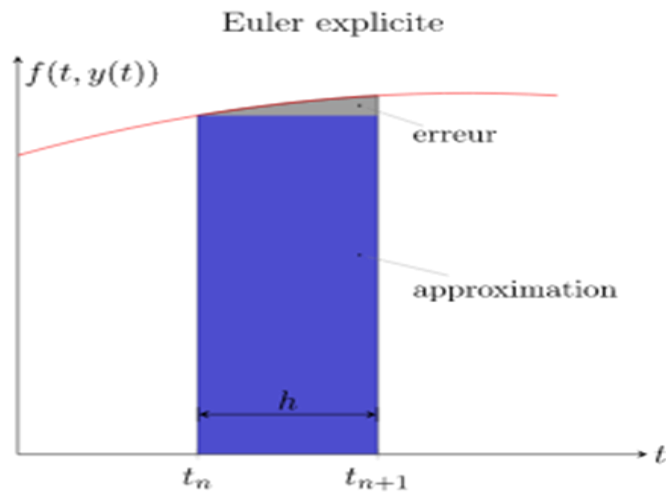


Figure 2.1. Méthode d'Euler explicite

2.3.2 Méthode d'Euler implicite

Cette méthode consiste à faire une approximation de la dérivée par le développement limité rétrograde.

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ y(t_0) = y_0 = u_0 \end{cases} \quad \forall n \in N \quad (2.7)$$

Ce qui engendre des calculs plus longs, mais souvent plus stables. [13]

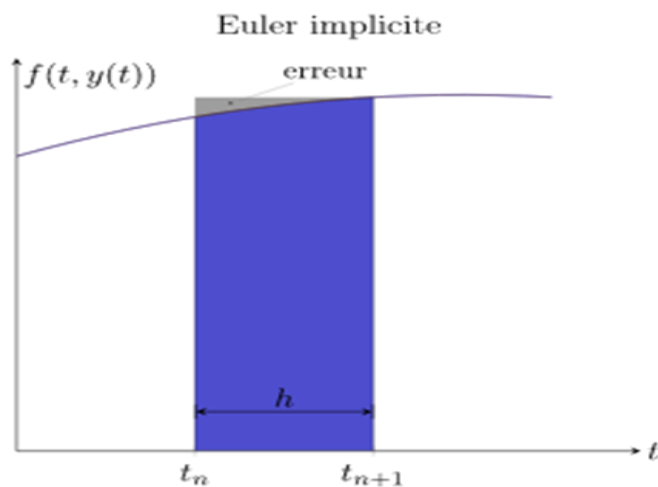


Figure 2.2. Méthode d'Euler implicite

2.3.3 Méthode D'Euler modifié

En intégrant par la méthode du point milieu, on aura le schéma numérique D'Euler modifié

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_{n+\frac{1}{2}}\right) \\ u_{n+\frac{1}{2}} \simeq u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n) \\ y(t_0) = y_0 = u_0 \end{cases} \quad \forall n \in N \quad (2.8)$$

Erreur : La méthode d'Euler est une méthode d'ordre 1. Ainsi, en tout point x fixé, l'erreur sur la valeur de $y(t)$ en ce point décroît comme $1/n$ lorsque le nombre de pas d'intégration augmente. [5]

2.4 Méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta présente l'avantage d'être précise et assez simple à programmer. Plus généralement la méthode de Runge-Kutta à étapes s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} k_l = f\left(t_i + c_l h, u_i + h \sum_{j=1}^s a_{lj} k_j\right), & 1 \leq l \leq s \\ u_{i+1} = u_i + h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \\ i \geq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

On supposera toujours que la condition suivante est vérifiée

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i, i = 1, \dots, s \quad (2.10)$$

La méthode est dite d'ordre s car à chaque étape de temps elle nécessite s évaluations de la fonction f .

Si $a_{ij} = 0$ pour $i \leq j$, la méthode est explicite.

Si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, elle est dite semi-implicite sinon elle est implicite. [5][20]

2.4.1 Méthode de Runge-Kutta à 2 étapes

Revenons au problème de Cauchy (2.1) et intégrons les deux cotés sur l'intervalle (t_i, t_{i+1})

$$y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \quad (2.11)$$

Au lieu d'approcher y' à l'aide des formules de dérivation approchée on pourra approcher l'intégrale dans (2.11) à l'aide d'une formule de Quadrature numérique. Par exemple la formule du trapèze donne

$$y_{i+1} - y_i \approx \frac{h}{2} (f(t_i, y_i) + f(t_i, y_{i+1})) \quad (2.12)$$

D'où le schéma implicite suivant

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ k_1 = f(t_i, u_i), \\ k_2 = f\left(t_i + h, u_i + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)\right) \\ u_{i+1} = u_i + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right), i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Appelée méthode de Runge-Kutta implicite à deux étapes. Dans ce schéma à chaque itération i on calcule k_2 en résolvant une équation non linéaire. La méthode est dite à deux étapes car à chaque itération i le schéma (2.13) utilise deux évaluations de la fonction f . Où les coefficients de ce tableau sont déduits à partir de la forme suivante du schéma(2.13).

On peut encore établir une méthode de Runge-Kutta explicite à partir du schéma en estimant la valeur de y_{i+1} à l'aide du schéma d'Euler explicite (2.13)

$$y_{i+1} \approx y_i + h f(t_i, y_i),$$

D'où

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ K_1 = f(t_i, u_i) \\ K_2 = f(t_i + h, u_i + hK_1) \\ u_{i+1} = u_i + h\left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2\right), i = 0, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Le schéma (2.14) est appelé méthode de Runge-Kutta explicite à deux étapes.

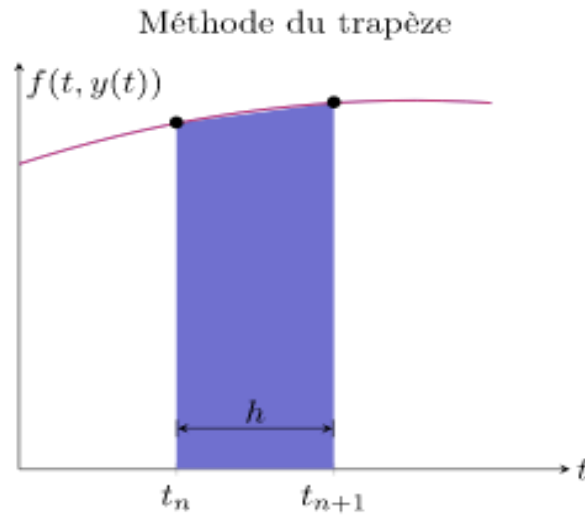


Figure 2.3. Méthode de Trapèze

Le résultat suivant montre que les méthodes de Runge-Kutta à 2 étapes explicite et implicite sont consistantes d'ordre ≥ 2 .

Théorème 2.1 : Supposons que f est de classe $C^2(I \times \mathbb{R})$. Alors les méthodes de Runge-Kutta (2.13) et (2.14) sont consistante d'ordre ≥ 2 . [5][20]

2.4.2 Méthode de Runge-Kutta à 4 étapes

Introduisons le point milieu $t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2}$ et approchons l'intégrale (2.11)

Par la formule de Simpson

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, (y(t))) dt \simeq \frac{h}{6} (f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) + f(t_{i+1}, y_{i+1}))$$

Ce qui donne

$$y_{i+1} \simeq y_i + \frac{h}{6} \left(f(t_i, y_i) + 4f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(t_{i+1}, y_{i+1}) \right) \quad (2.14)$$

Si on veut obtenir un schéma explicite on doit exprimer $y_{i+\frac{1}{2}}$ et y_{i+1} en fonction de y_i Pour cela écrivons que

$$4f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) = 2f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) + 2f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad (2.15)$$

Et approchons le premier terme en utilisant le schéma d'Euler explicite

$$y_{i+\frac{1}{2}} \simeq y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i). \quad (2.16)$$

Pour le second terme on utilise la méthode d'Euler implicite, posons

$k_1 = f(t_i, y_i)$ Soit

$$y_{i+\frac{1}{2}} \simeq y_i + \frac{h}{2} f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

D'où d'après (2.16)

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}} &\simeq y_i + \frac{h}{2} f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right) \\ &= y_i + \frac{h}{2} f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right) \\ &= y_i + \frac{h}{2} k_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Où on a encore posé $k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$. En reportant (2.16) et (2.17) dans (2.15) on obtient l'approximation

$$4f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \simeq 2f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right) + f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right)$$

Il nous reste à approcher le dernier terme $f(t_{i+1}, y_{i+1})$ dans (2.14). Pour cela on approche y_{i+1} par le schéma du point milieu ce qui donne

$$y_{i+1} \simeq y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad (2.18)$$

On obtient d'après (2.17)

$$y_{i+\frac{1}{2}} \simeq y_i + \frac{h}{2} k_2$$

Posons une dernière fois

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right) \quad (2.18)$$

$$f(t_{i+1}, y_{i+1}) \simeq f(t_i + h, y_i + h k_3)$$

D'où le schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = y_0 \\ k_1 = f(t_i, u_i), \\ k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2} k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2} k_2\right), \\ k_4 = f(t_i + h, u_i + h k_3), \\ u_{i+1} = u_i + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\right), \quad 1 \leq i \leq n \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Exemple 2.1

Calculons une solution approchée en $t = 1$ du problème suivant par la méthode de Runge-Kutta à 4 étapes explicite en prenant $h = 1/2$

$$\begin{cases} y'(t) = y^2 - t, & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Les nœuds sont $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1\}$ l'algorithme de la méthode de Runge-Kutta à 4 étapes s'écrit

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{i+1} = u_i + \frac{1}{2} \left(\frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{3} + \frac{K_4}{6} \right), & i = 0,1 \\ K_1 = u_i^2 - t_i, \\ K_2 = \left(u_i + \frac{1}{4}K_1 \right)^2 - t_i - \frac{1}{4}, \\ K_3 = \left(u_i + \frac{1}{4}K_2 \right)^2 - t_i - \frac{1}{4}, \\ K_4 = \left(u_i + \frac{1}{2}K_3 \right)^2 - t_i - \frac{1}{2}, \end{cases}$$

D'où le tableau des valeurs suivant

t_i	u_i	K_1	K_2	k_3	k_4
0	1	1	1.3125	1.5139	2.5869
0.5	1.77	2.6328	5.1461	8.5922	35.7971
1	7.2622				

Tableau 2.1. Solution les valeurs de Méthode Runge-Kutta 4

On a alors l'approximation $y(1) \simeq 7.2622$. [5]

2.5 Méthode des différences finies pour les EDP

La méthode des différences fines est une technique courante de recherche de solutions approchées des EDP et qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. Cette méthode se fait en deux étapes :

1. Étape de discrétisation :

Diviser l'intervalle en sous intervalle de longueur h (Maillage).

Dérivées approchées par des formules de différence.

2. Résolution du système discrétisé :

Systèmes linéaires pour des équations différentielles linéaires et systèmes non linéaires pour des équations différentielles non linéaires.

Propriétés mathématiques des matrices obtenues par discrétisation (matrices tridiagonale, ou symétriques, ou définies positives).

2.5.1 Approximation des opérateurs par formules de Taylor

Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes, partielles) peut être obtenue par les formules de Taylor.

Soit I un intervalle réel $\alpha \in I$; E espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow E$ une fonction dérivable en α jusqu'à l'ordre n alors $\forall x \in I$; on a :

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x - \alpha)^n + R_n(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha)^k + R_n(x)$$

Où $R_n(x)$ est une fonction négligeable par rapport à $(x - \alpha)^n$ au voisinage de α .

On peut aussi trouver une autre formulation par un simple changement de variable (on pose $x = \alpha + h$)

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}h + \frac{f''(\alpha)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}h^n + R_n(h)$$
$$\Rightarrow f(\alpha + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\alpha) + R_n(h)$$

Où $R_n(h)$ est une fonction négligeable par rapport à h^n au voisinage de 0.[10]

2.5.2 Différence finie décentrée à droite (avant)

A partir de la définition de la dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (2.20)$$

On introduit pour approcher $u'(x_n)$ la différence finie décentrée à droite

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} \quad (2.21)$$

Calculons l'ordre en h de cette approximation : Comme $[0, L]$ est compact, notons que la fonction $u \in C^\infty([0, L])$ ainsi que ses dérivées sont bornées en valeur absolue. Nous allons utiliser le développement de Taylor pour déterminer l'ordre de la différence finie.

Comme

$$u_{n+1} = u(x_{n+1}) = u(x_n + h)$$

On a

$$u_{n+1} = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{6}r(h), \quad (2.22)$$

$$u_n = u(x_n).$$

En soustrayant il suit

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = u'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{6}r(h). \quad (2.23)$$

On conclut donc que dès que $u''(x_n) \neq 0$, la différence finie décentrée à droite est une approximation d'ordre 1 de $u'(x_n)$. Cette approximation est au moins d'ordre 2 si $u''(x_n) = 0$. [25]

2.5.3 Différences finies décentrées à gauche (arrière)

L'idée est très similaire. On approche $u'(x_n)$ par

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h}. \quad (2.24)$$

Calcul de l'ordre. Comme $u_{n-1} = u(x_{n-1}) = u(x_n - h)$, un développement de Taylor nous fournit

$$u_n = u(x_n),$$

$$u_{n-1} = u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{6}r(h), \quad (2.25)$$

En formant la différence finie nous montrons une approximation d'ordre 1 de $u'(x_n)$ si $u''(x_n) \neq 0$.

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = u'(x_n) - \frac{h^2}{2} u''(x_n) + \frac{h^3}{6} r(h).$$

2.5.4 Différence finie centrée

Afin d'améliorer l'approximation de $u'(x_n)$, nous définissons une différence finie bénéficiant de plus de symétrie que les deux précédentes

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \quad (2.26)$$

Calcul de l'ordre on écrit le développement de Taylor à un ordre suffisant afin de faire apparaître l'ordre optimal de la différence finie

$$u_{n+1} = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2} u''(x_n) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!} r(h),$$

$$u_{n-1} = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2} u''(x_n) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!} r(h),$$

Avec la fonction générique r . En formant la différence finie puis en simplifiant on a

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = u'(x_n) + \frac{h^2}{3!} u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{5!} r(h). \quad (2.27)$$

On a obtenu que la différence finie est d'ordre 2 si $u^{(3)}(x_n) \neq 0$ et d'ordre au moins 4 sinon. [25]

Le schéma à trois points

On approche ici $u''(x_n)$ par la différence finie

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \quad (2.28)$$

Cette différence finie s'obtient à l'aide d'un raisonnement formel qui consiste à emboîter deux différences finies

$$\begin{aligned} u''(x_n) &\simeq \frac{1}{h} \left(u' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) - u' \left(x_n - \frac{h}{2} \right) \right) \\ &\simeq \frac{1}{h} \left(\frac{u(x_n + h) - u(x_n)}{h} - \frac{u(x_n) - u(x_n - h)}{h} \right) \quad (2.29) \\ &\simeq \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \end{aligned}$$

2.5.5 Avantages et inconvénients des différences finies

Avantages	Inconvénients
Méthode simple	Forte régularité des solutions nécessaire
Rapidité et performance des algorithmes	Peu de souplesse de maillage
Facilité de monter en ordre	Conditions de type Neumann difficiles à gérer
Grand nombre d'EDP approchables	

Tableau 2.2. Les avantages et inconvénients des différences finies

2.5.6 Résolution de quelques problèmes avec conditions de Dirichlet

Exemple 2.2

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Où f est une fonction continue.

Méthode de résolution

On décrit cette méthode en 3 étapes :

Etape 1 : choix de la discrétisation, maillage

Soit $(x_k)_k = 0, \dots, N + 1$ une subdivision de $[0; 1]$, avec :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

Pour $i = 0, \dots, N$, on note $h_i = x_{i+1} - x_i$ et on définit le pas de maillage par :

$$h = \max_{i=1} h_i$$

Pour simplifier, on se limitera à un pas constant :

$$h = h_i, \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

On a alors $x_{i+1} = x_i + h, \forall i = 0, \dots, N$.

La première étape de la méthode consiste à remplacer le problème (2.30) par

$$\begin{cases} -u''(x_i) = f(x_i), & \forall i = 1, \dots, N \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Etape 2 : construction d'un schéma numérique

On suppose $u \in C^2(0,1)$. Effectuons un développement de Taylor en x_i

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \theta(h^3),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \theta(h^3).$$

Où $|\theta(h^3)| < ch^3$ et c une constante indépendante de h . En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient l'expression suivante :

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + \theta(h)$$

Donc

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}$$

Est une approximation de $u''(x_i)$. Avec ce choix d'approximation, on peut approcher le problème (2.30) par le problème discret suivant :

$$-\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

Etape 3 : passage au problème matriciel

Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes :

$$-\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le vecteur u_h est solution du système matriciel : $A_h u_h = b_n$.

Exemple 2.3

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases} \quad (2.31)$$

Où f est une fonction continue.

Le maillage est construit en introduisant $N + 1$ nœuds x_i avec $i = 0, 1, \dots, N$, régulièrement espacés avec un pas Δx . La quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au nœud x_i . L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque nœud x_i :

$$-\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = f(x_i) = f_i$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

L'équation discrétisée est ainsi :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i$$

Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes [7][21]

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \beta/\Delta x^2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.4

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u'(1) = \beta \end{cases} \quad (2.32)$$

Où l'on a cette fois une condition de Neumann en $x = 1$.

Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes. Tout d'abord, le nombre d'inconnues a changé. Il y a une inconnue au bord en $x = 1$. Le problème discret a donc maintenant, sur la base du même maillage que précédemment, N inconnues u_i pour i variant de 1 à N .

D'autre part, il faut discrétisée la condition de Neumann $u'(1) = \beta$. Plusieurs choix sont possibles pour approximer cette dérivée première. C'est un des inconvénients de la méthode des différences fines : elle ne donne pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann. Dans notre cas, utilisons une approximation d'ordre 1. [7][21]

$$u'(1) = \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x}$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ \beta/\Delta x \end{bmatrix}$$

2.5.7 Résolution de problèmes elliptiques par MDF

Le problème modèle est le suivant : soit Ω un domaine borne de \mathbb{R}^n et f une fonction aussi régulière que nécessaire de Ω à valeurs dans \mathbb{R} . Nous cherchons u solution de l'équation de Poisson :

$$-\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

Il faut préciser les conditions aux limites : nous prenons des conditions homogènes de Dirichlet

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Où $\partial\Omega$ désigne la frontière de l'ouvert Ω . [14]

Etape 1 : choix de la discrétisation, maillage

Nous introduisons un maillage de $[0, 1]$: pour N fixé, on introduit un pas de discrétisation $h = 1/(N + 1)$ et nous posons $x_j = j * h$, avec $j = 0, \dots, N + 1$ les $N + 2$ points du maillage.

Etape 2 : construction d'un schéma numérique

Le but de la méthode numérique consiste à calculer des valeurs les plus exactes possibles de $u(x_i)$ pour $i = 1, N$.

Elle consiste à trouver une formule qui permet d'approcher la dérivée $-u''$ en chacun des points x_j à l'aide des valeurs $(u(x_j))_{j=1,N}$. Pour cela, on utilise des développements de Taylor de u :

$$u(x+h) = u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\xi)$$

Avec $\xi \in [x, x+h]$.

$$u(x-h) = u(x) - h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\eta)$$

Avec $\eta \in [x-h, x]$. On en déduit

$$u''(x) = \frac{u(x-h) + u(x+h) - 2u(x)}{h^2} + O(h^3) \quad (2.34)$$

Le principe de la méthode consiste à calculer un vecteur $U = (U_1, \dots, U_N)$ tels que U_i soit une bonne approximation de $u(x_i)$. En faisant $x = x_i$ dans (2.34) on obtient le schéma numérique

$$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} = F_j = f(x_j) \quad j = 1, N \quad (2.35)$$

Avec les conditions aux limites qui permettent de déterminer U_0 et U_{N+1}

$$U_0 = U_{N+1} = 0.$$

Ce schéma s'écrit sous forme matricielle

$$AU = F$$

Avec A matrice tridiagonale symétrique et inversible d'ordre N donnée par

$$A = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \vdots \\ -1 & \ddots & -1 \\ \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On veut calculer un vecteur $U = (U_1, \dots, U_N)$ tel que les nombres $|U_j - U(x_j)|$ soient petits. On va même prouver que ces quantités $|U_j - U(x_j)|$ tendent uniformément vers 0 lorsque h tend vers 0. [6]

2.5.8 Résolution de problèmes paraboliques par MDF

On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(t, x), & \forall t \in]0, T[, x \in]0, 1[, \\ u(t, 0) = u(t, 1), \forall t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (2.36)$$

Où l'on a pris pour simplifier des conditions aux limites nulles. Il s'agit de l'équation de la chaleur en dimension 1 en espace. Cet exemple est typique de la situation générale des problèmes paraboliques. On distingue deux grandes familles d'approximations par différences finies : *les schémas explicites et les schémas implicites*. [26]

Etape 1 : Discrétisation de l'équation de la chaleur

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de $1m$ de longueur. Le champ de température $T(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Où α est la diffusivité thermique.

A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre $T(0, t) = T_g$ et $T(1, t) = T_d$ ainsi qu'une condition initiale $T(x, 0) = T_0$.

L'intervalle $[0, 1]$ est discrétisé en $N + 1$ noeuds de coordonnées x_i (i variant de 0 à N) régulièrement espacés. Notons Δx le pas d'espace. Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt .

Notons T_i^n la température au noeud $x_i = i \Delta x$ et à l'instant $t = n \Delta t$. [7]

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation de la chaleur. La première dite explicite utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération courante n :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^n$$

Et la seconde dite implicite utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération $n + 1$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^{n+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^{n+1}$$

Etape 2 : construction d'un schéma numérique

Schéma explicite

Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ la température à l'itération $n + 1$ est donnée par :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N - 1$$

Sous forme matricielle [7]:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

Schéma implicite

Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la température à l'itération $n + 1$ est donnée par :

$$(1 + 2\lambda) T_i^{n+1} - \lambda(T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}) = T_i^n \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N - 1$$

On constate que les inconnues à l'itération $n + 1$ sont reliées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode). [7]

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

A chaque itération, le vecteur des inconnues discrètes se détermine par résolution d'un système linéaire. La matrice du système étant tri diagonale, un algorithme de Thomas (basé sur la méthode du pivot de Gauss) est très souvent utilisé. [7]

2.5.9 Résolution des problèmes hyperbolique par MDF

On souhaite résoudre de manière approchée l'équation des ondes posée sur le domaine borné en espace $]0, 1[$ avec conditions aux limites périodiques

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, x \in]0, 1[, \\ u(t, x + 1) = u(t, x), & t > 0, x \in]0, 1[, \\ u(0, x) = g(x), & x \in]0, 1[, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = h(x), & x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (2.37)$$

Les fonctions g et h sont supposées admettre des prolongements 1-périodiques de classe C^2 et C^1 respectivement. On propose un schéma numérique pour approcher la solution u aux points

$$x_0 = 0, \quad x_j = j\Delta x, \quad j = 0, \dots, J + 1, x_{J+1} = 1,$$

Aux instants

$$t^n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

S'appuyant sur des développements de Taylor de la solution exacte u au voisinage du point (x, t) , le schéma aux différences finies proposé calcule des valeurs u_j^n approchant la valeur exacte $u(t^n, x_j)$. [3]

Schéma centré pour l'équation des ondes

On définit le schéma centré pour l'équation des ondes par :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq j \leq J \quad (2.38)$$

Avec les données initiales

$$u_j^0 = g(x_j), u_j^1 = u_j^0 + \Delta t h(x_j), \quad 1 \leq 0 \leq j \leq J \quad (2.39)$$

Et une condition de périodicité :

$$u_{j+1}^n = u_0^n, \quad n > 1. \quad (2.40)$$

C'est un schéma explicite :

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (2.41)$$

Les données initiales sont construites sur la base du développement de Taylor de u à l'ordre 1 en $t = 0$, mais pour approcher la donnée initiale u^1 à l'ordre 2, on peut préférer définir [3]:

$$u_j^1 = u_j^0 + \Delta t h(x_j) + c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0).$$

Chapitre 3

Applications sous MATLAB

Chapitre 3 : Applications sous MATLAB

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter certaines fonctions de MATLAB pour traiter quelques équations différentielles.

MATLAB est un langage de programmation et un environnement d'analyse numérique, il est utilisé à des fins de calcul numérique. Développé par la société The MathWorks, MATLAB permet de faire du calcul matriciel, de développer et d'exécuter des algorithmes, de créer des interfaces utilisateur (IU) et de visualiser des données.

3.2 Méthodes d'Euler et Runge-Kutta

Soit le modèle d'une équation différentielle d'ordre 2

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + xe^{-\pi x} = 0 \\ x(0) = 0.5 \\ \left(\frac{dx}{dy}\right)_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

On va écrire un programme Matlab, qui permet de résoudre cette équation différentielle par la méthode d'Euler et par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

On donne : $t \in]0, 2\pi]$ et $\Delta t = \pi/10$

Le programme doit écrire les résultats dans un fichier avec un choix et tracer les résultats des deux méthodes sur le même graphe.

Solution :

Transformation de l'équation différentielle d'ordre 2, en un système d'équations d'ordre 1

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \dots \dots \dots f(y) \\ \frac{dy}{dt} = (1 - x^2)y - xe^{-\pi x} \dots g(x, y) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ x(0) = 0.5 \end{cases}$$

Résolution du système d'équations différentielles par la méthode d'Euler :

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + \Delta t \times f(y_{i-1}) \\ y_i = y_{i-1} + \Delta t \times g(x_{i-1}, y_{i-1}) \end{cases}$$

Maintenant, on passe à la résolution du système par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

On considère Δt l'accroissement sur t

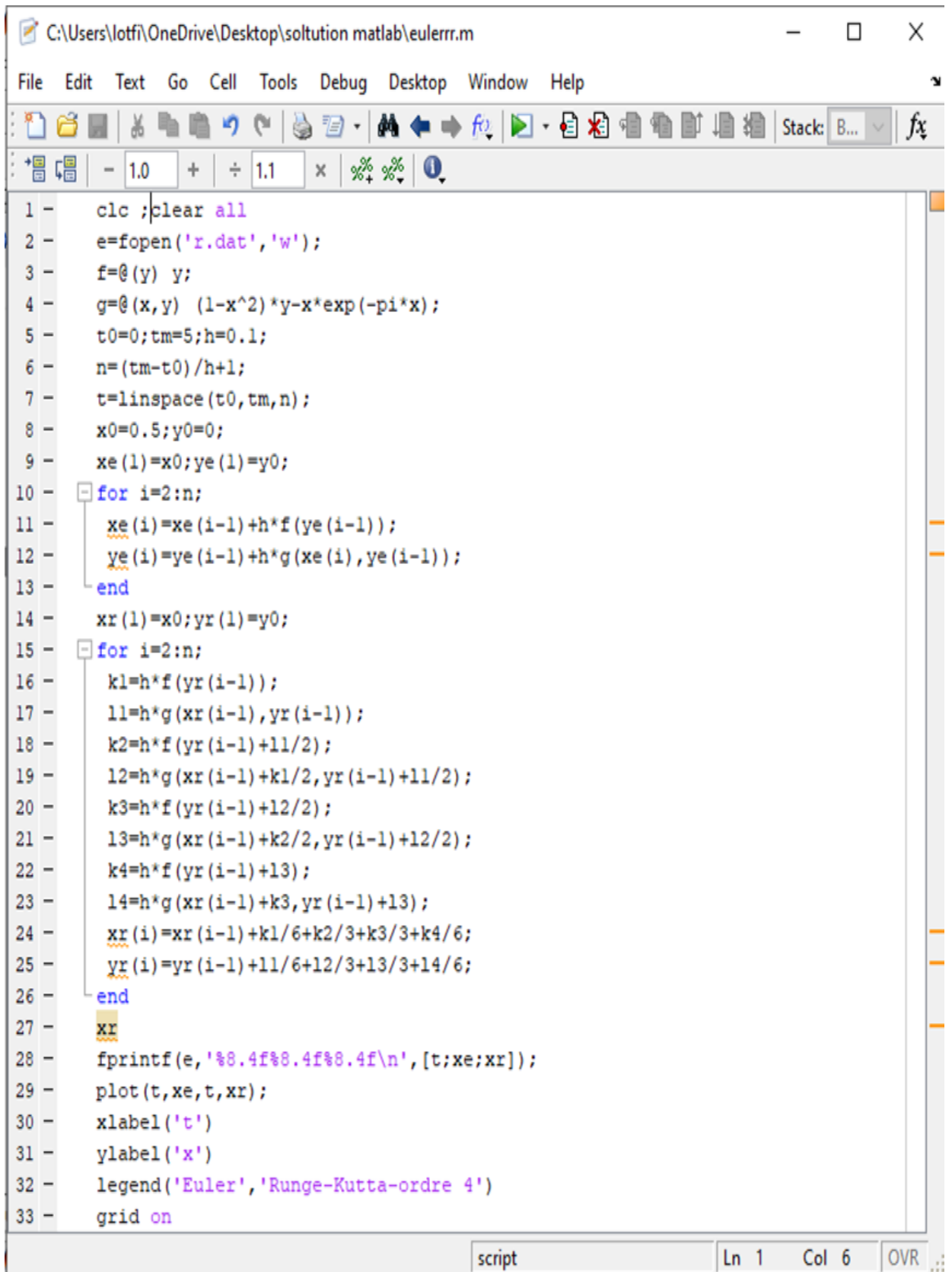
On considère k l'accroissement sur x

On considère l l'accroissement sur y

Les paramètres $k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3, k_4, l_4$ sont calculés pour chaque nœud i , et utilisés pour calculer $y(i)$ et $x(i)$.

Pour une équation différentielle d'ordre 3, par exemple, il faut introduire un autre paramètre m .

Voici le script Matlab®



```
1 - clc ;clear all
2 - e=fopen('r.dat','w');
3 - f=@(y) y;
4 - g=@(x,y) (1-x^2)*y-x*exp(-pi*x);
5 - t0=0;tm=5;h=0.1;
6 - n=(tm-t0)/h+1;
7 - t=linspace(t0,tm,n);
8 - x0=0.5;y0=0;
9 - xe(1)=x0;ye(1)=y0;
10 - for i=2:n;
11 -     xe(i)=xe(i-1)+h*f(ye(i-1));
12 -     ye(i)=ye(i-1)+h*g(xe(i),ye(i-1));
13 - end
14 - xr(1)=x0;yr(1)=y0;
15 - for i=2:n;
16 -     k1=h*f(yr(i-1));
17 -     l1=h*g(xr(i-1),yr(i-1));
18 -     k2=h*f(yr(i-1)+l1/2);
19 -     l2=h*g(xr(i-1)+k1/2, yr(i-1)+l1/2);
20 -     k3=h*f(yr(i-1)+l2/2);
21 -     l3=h*g(xr(i-1)+k2/2, yr(i-1)+l2/2);
22 -     k4=h*f(yr(i-1)+l3);
23 -     l4=h*g(xr(i-1)+k3, yr(i-1)+l3);
24 -     xr(i)=xr(i-1)+k1/6+k2/3+k3/3+k4/6;
25 -     yr(i)=yr(i-1)+l1/6+l2/3+l3/3+l4/6;
26 - end
27 - xr
28 - fprintf(e, '%8.4f%8.4f%8.4f\n', [t;xe;xr]);
29 - plot(t,xe,t,xr);
30 - xlabel('t')
31 - ylabel('x')
32 - legend('Euler','Runge-Kutta-ordre 4')
33 - grid on
```

Exécution :

xe : Valeur de méthode Euler

xr : Valeur de méthode Runge-Kutta

t : Domaine L'intervalle

```
Command Window
xr =
Columns 1 through 12
    0.5000    0.4995    0.4978    0.4949    0.4908    0.4852    0.4780    0.4692    0.4586    0.4459    0.4310    0.4138
Columns 13 through 24
    0.3938    0.3709    0.3447    0.3149    0.2811    0.2427    0.1995    0.1507    0.0959    0.0348   -0.0332   -0.1078
Columns 25 through 36
   -0.1885   -0.2738   -0.3603   -0.4430   -0.5139   -0.5636   -0.5830   -0.5666   -0.5147   -0.4319   -0.3244   -0.1972
Columns 37 through 48
   -0.0531    0.1069    0.2827    0.4742    0.6798    0.8957    1.1152    1.3289    1.5267    1.6998    1.8433    1.9563
Columns 49 through 51
    2.0415    2.1037    2.1479
...

>> xe
xe =
Columns 1 through 12
    0.5000    0.5000    0.4990    0.4968    0.4934    0.4888    0.4827    0.4751    0.4658    0.4548    0.4418    0.4266
Columns 13 through 24
    0.4091    0.3889    0.3660    0.3398    0.3102    0.2768    0.2391    0.1967    0.1492    0.0961    0.0370   -0.0283
Columns 25 through 36
   -0.0998   -0.1771   -0.2587   -0.3421   -0.4229   -0.4943   -0.5477   -0.5743   -0.5678   -0.5271   -0.4557   -0.3597
Columns 37 through 48
   -0.2442   -0.1125    0.0337    0.1943    0.3692    0.5581    0.7591    0.9679    1.1775    1.3787    1.5616    1.7181
Columns 49 through 51
    1.8440    1.9396    2.0087
```

```

t =

Columns 1 through 11
    0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000

Columns 12 through 22
    1.1000    1.2000    1.3000    1.4000    1.5000    1.6000    1.7000    1.8000    1.9000    2.0000    2.1000

Columns 23 through 33
    2.2000    2.3000    2.4000    2.5000    2.6000    2.7000    2.8000    2.9000    3.0000    3.1000    3.2000

Columns 34 through 44
    3.3000    3.4000    3.5000    3.6000    3.7000    3.8000    3.9000    4.0000    4.1000    4.2000    4.3000

Columns 45 through 51
    4.4000    4.5000    4.6000    4.7000    4.8000    4.9000    5.0000

```

Ce programme trace les graphes suivants :

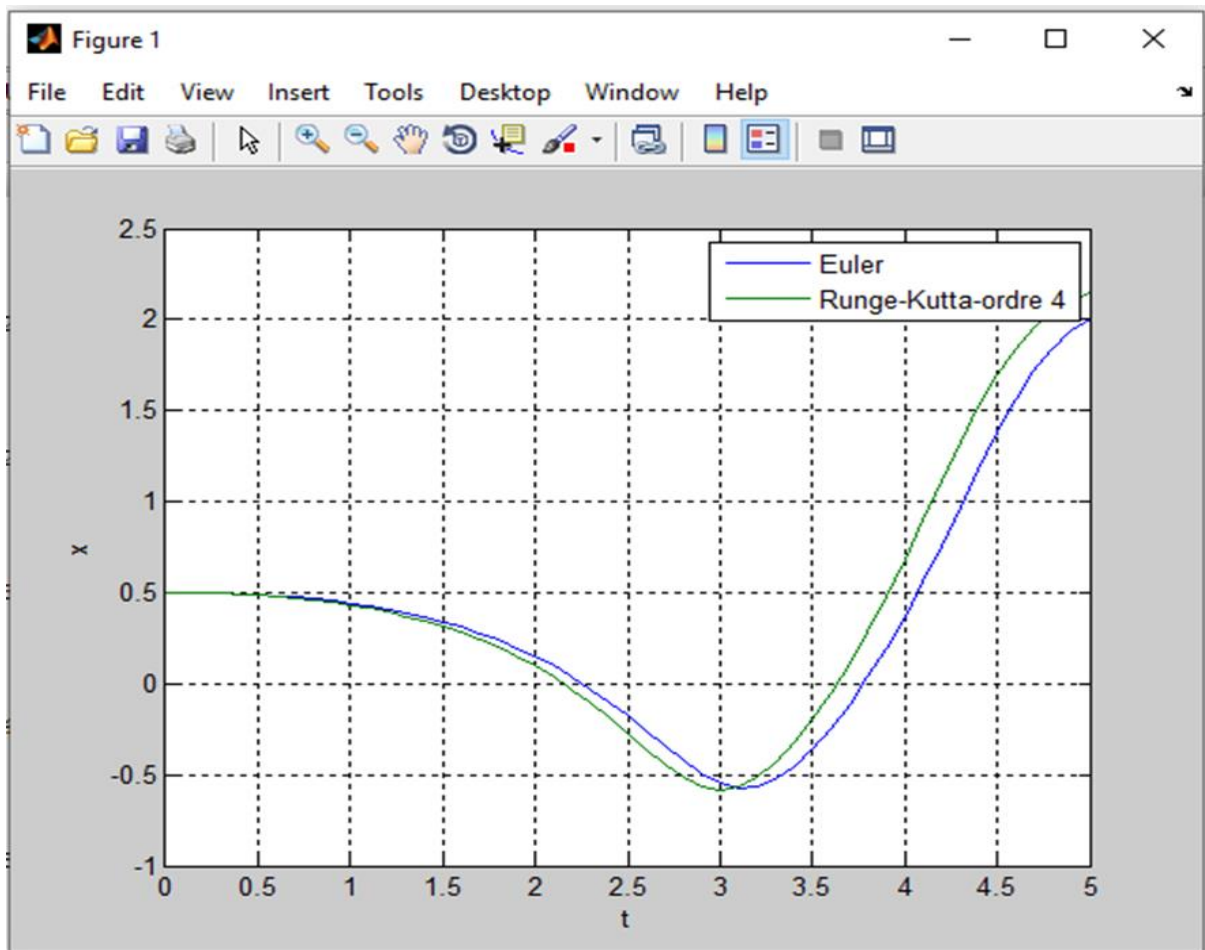
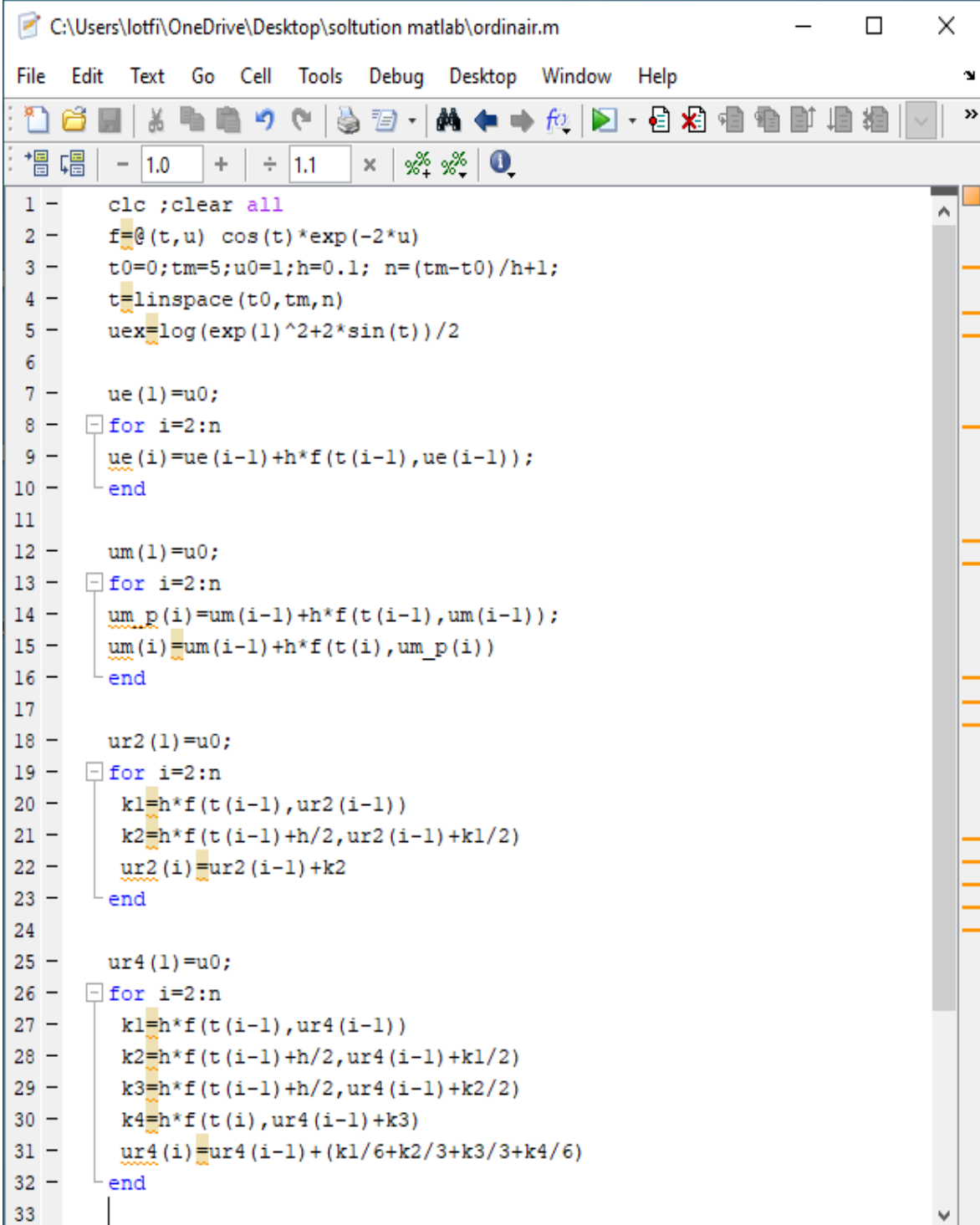


Figure 3.1. Les résultats des deux méthodes sur le même graphe

3.2 Comparaison de la précision des résultats

Soit une fonction $u(t)$ soumise à l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \cos(t)e^{-2u} \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$



```
C:\Users\lotfi\OneDrive\Desktop\solution matlab\ordinaire.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
+ - 1.0 + ÷ 1.1 x % % i
1 - clc ;clear all
2 - f=@(t,u) cos(t)*exp(-2*u)
3 - t0=0;tm=5;u0=1;h=0.1; n=(tm-t0)/h+1;
4 - t=linspace(t0,tm,n)
5 - uex=log(exp(1)^2+2*sin(t))/2
6
7 - ue(1)=u0;
8 - for i=2:n
9 -     ue(i)=ue(i-1)+h*f(t(i-1),ue(i-1));
10 - end
11
12 - um(1)=u0;
13 - for i=2:n
14 -     um_p(i)=um(i-1)+h*f(t(i-1),um(i-1));
15 -     um(i)=um(i-1)+h*f(t(i),um_p(i))
16 - end
17
18 - ur2(1)=u0;
19 - for i=2:n
20 -     k1=h*f(t(i-1),ur2(i-1))
21 -     k2=h*f(t(i-1)+h/2,ur2(i-1)+k1/2)
22 -     ur2(i)=ur2(i-1)+k2
23 - end
24
25 - ur4(1)=u0;
26 - for i=2:n
27 -     k1=h*f(t(i-1),ur4(i-1))
28 -     k2=h*f(t(i-1)+h/2,ur4(i-1)+k1/2)
29 -     k3=h*f(t(i-1)+h/2,ur4(i-1)+k2/2)
30 -     k4=h*f(t(i),ur4(i-1)+k3)
31 -     ur4(i)=ur4(i-1)+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6)
32 - end
33
```



```
33 |
34 - plot(t,uex,t,ue,t,um,t,ur2,t,ur4);
35 - legend('Solution exacte','Euler explicite',...
36         'Euler implicite','Runge-Kutta-2','Runge-Kutta-4')
37 - xlabel('t')
38 - ylabel('y')
39 - title('Problème à valeur initiale')
40 - grid on
41
```

La comparaison graphique des résultats numériques avec la solution exacte en Matlab, nous donne :

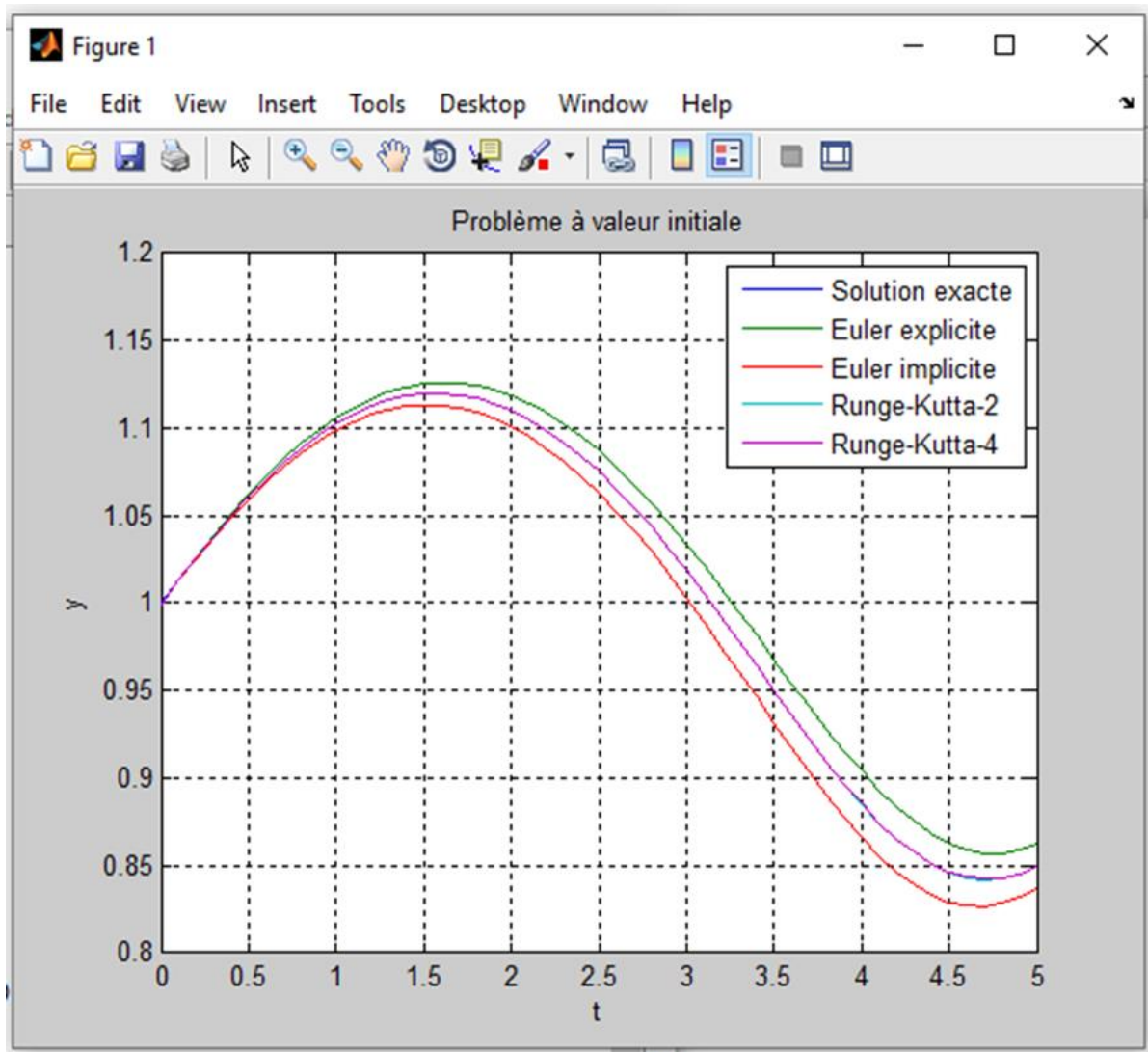


Figure 3.2. Comparaison graphique des résultats numériques avec la solution exacte

Remarque :

Les méthodes de Runge Kutta sont très efficaces car :

1. Elles suivent de près la solution analytique.
2. Avec une valeur du pas relativement élevé.
3. Moins coûteux que les autres méthodes pour un reste donné.

Pour bien analyser les résultats, il suffit de zoomer sur une zone du graphe.

3.3 Résolution numérique du problème aux limites de la corde élastique

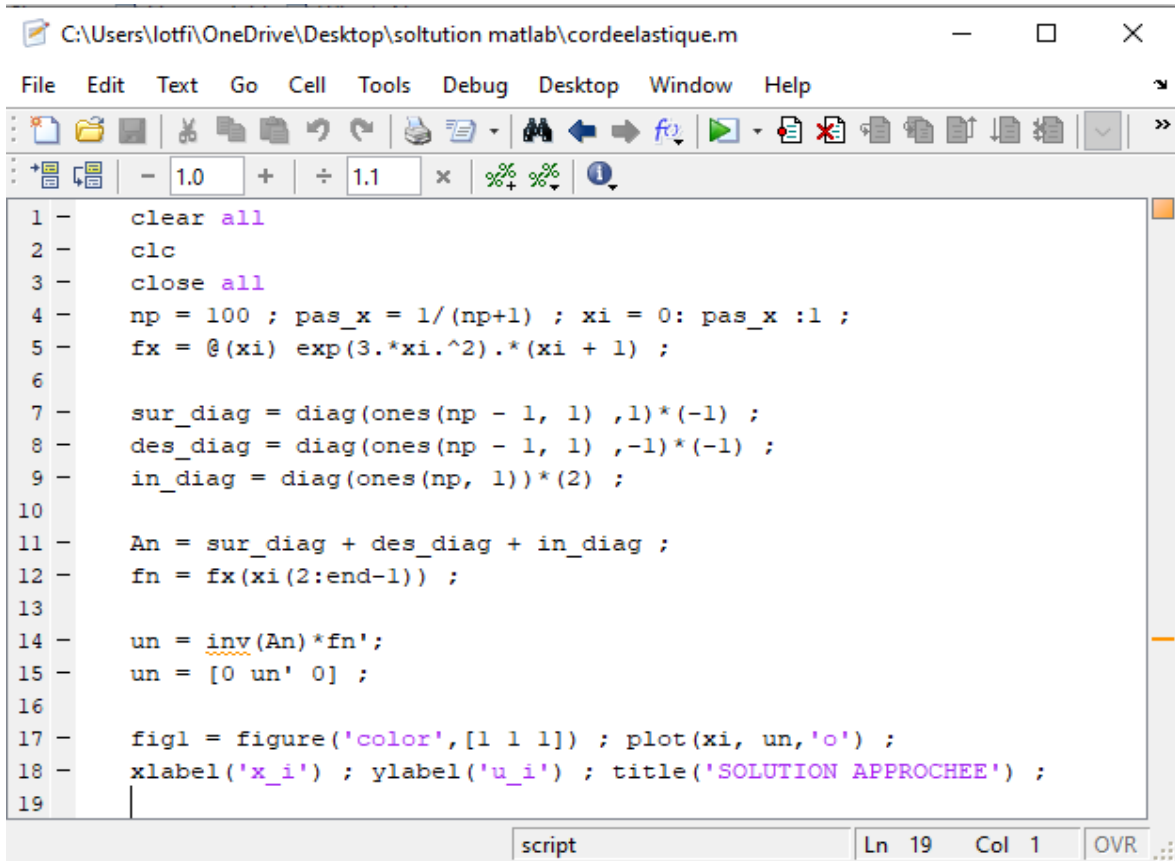
Nous allons utiliser la méthode des différences finies pour la résolution du problème de la corde élastique :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Le second terme de l'équation vaut :

$$f(x) = e^{3x^2} \times (x + 1).$$

Résoudre numériquement pour $n = 100$ l'équation par la méthode des différences finies.



```
C:\Users\lotfi\OneDrive\Desktop\solution matlab\cordeelastique.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
- 1.0 + ÷ 1.1 × %> %< ⓘ
1 - clear all
2 - clc
3 - close all
4 - np = 100 ; pas_x = 1/(np+1) ; xi = 0: pas_x :1 ;
5 - fx = @(xi) exp(3.*xi.^2).*(xi + 1) ;
6
7 - sur_diag = diag(ones(np - 1, 1) ,1)*(-1) ;
8 - des_diag = diag(ones(np - 1, 1) ,-1)*(-1) ;
9 - in_diag = diag(ones(np, 1))*(2) ;
10
11 - An = sur_diag + des_diag + in_diag ;
12 - fn = fx(xi(2:end-1)) ;
13
14 - un = inv(An)*fn';
15 - un = [0 un' 0] ;
16
17 - fig1 = figure('color',[1 1 1]) ; plot(xi, un,'o') ;
18 - xlabel('x_i') ; ylabel('u_i') ; title('SOLUTION APPROCHEE') ;
19
```

L'affichage graphique restitué par le script ci-dessus est

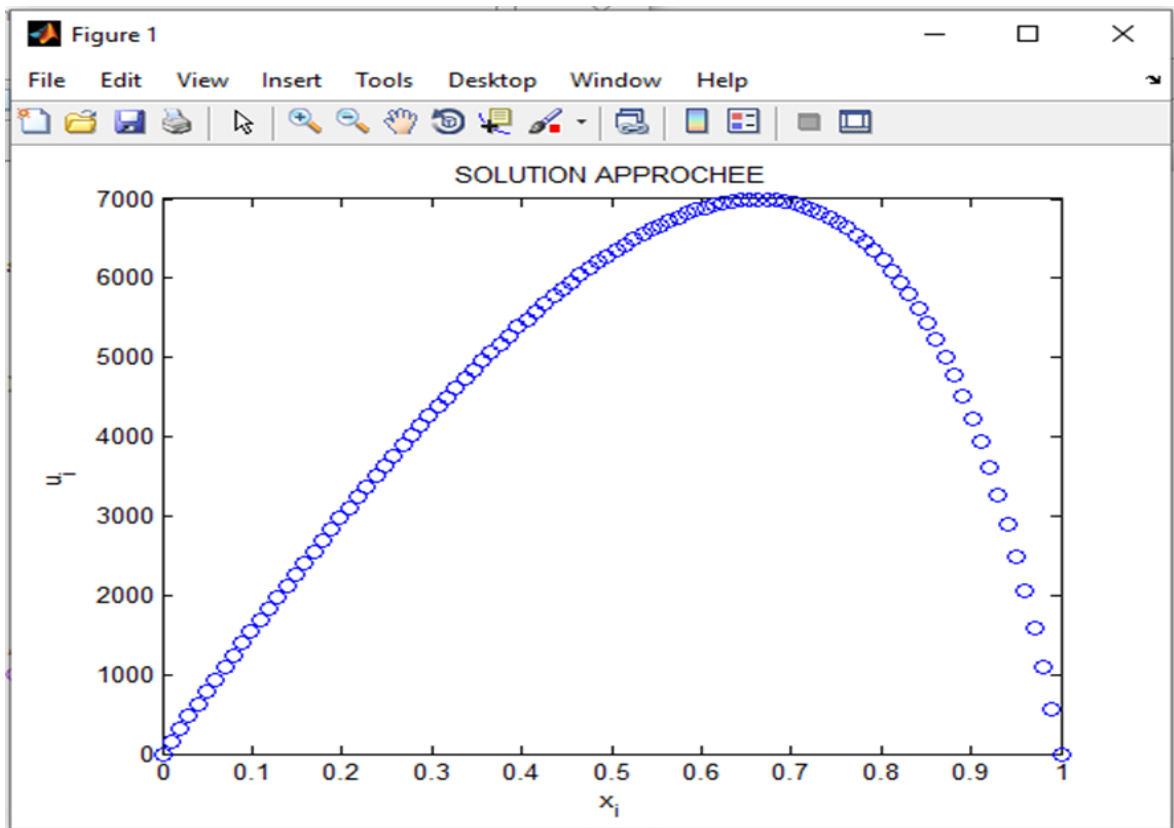


Figure 3.3. Solution graphiquement par la méthode des différences finies

3.4 La méthode des différences finies en dimension 1

Soit l'équation de convection-diffusion :

$$\begin{cases} -u''(x) + r x u'(x) = f(x) & x \in [0, 1] \\ \text{et } u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Le second terme de l'équation vaut :

$$f(x) = \frac{(r^2 e^{rx})(x-1)}{(1-e^r) + rx}$$

La solution exacte est donnée par :

$$f(x) = \frac{x - (1 - e^{rx})}{(1 - e^r)}$$

En déroulant le script ci-dessus pour $n = 4$, Les résultats s'affichent sur la fenêtre des commandes, suivant :

```

Command Window
>> A1

A1 =

    2    -1     0     0
   -1     2    -1     0
    0    -1     2    -1
    0     0    -1     2

>> A2

A2 =

    0     0     0     0
  -0.0050     0    0.0050     0
    0   -0.0100     0    0.0100
    0     0   -0.0150     0

>> An

An =

    2.0000   -1.0000     0     0
  -1.0050    2.0000   -0.9950     0
    0   -1.0100    2.0000   -0.9900
    0     0   -1.0150    2.0000

>> un

un =

    0.0353    0.0548    0.0562    0.0380

fx
  
```

```

>> un

un =

    0.0353    0.0548    0.0562    0.0380

>> uh

uh =

    0    0.0353    0.0548    0.0562    0.0380    0

fx >> |
  
```

Voici la solution exacte et numérique obtenues par différences finies pour $n=80$ et $r=1/2$.

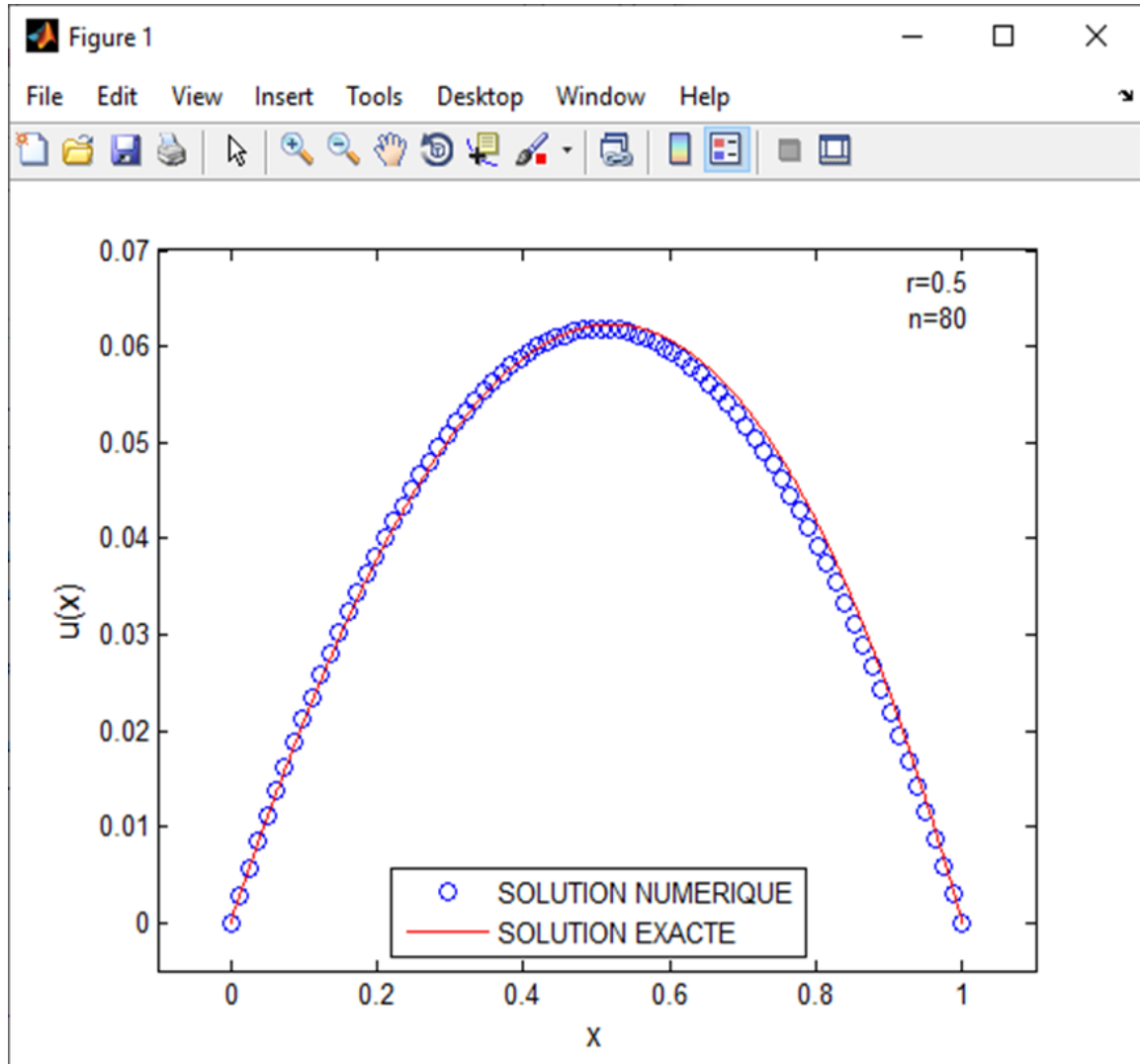


Figure 3.4. Solution exacte et solution numérique obtenues par différences finies

Conclusion

L'objectif de ce présent mémoire était l'utilisation des méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles.

Nous nous sommes intéressés, dans ce travail, à l'étude de la méthode d'Euler qui permet une première approche de la résolution numérique d'équations différentielles, Il est clair qu'on peut augmenter la précision de cette méthode en diminuant la taille du pas h . En Matlab, on peut facilement la programmer. Quant à la méthode de Runge-Kutta d'ordres 2 et 4 est populaire par sa précision et sa stabilité. Cette technique intervient dans la plupart des programmes EDO.

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles reste un défi à relever, il existe des méthodes numériques qui permettent la résolution des EDP telles que la méthode des différences finies. Cette technique consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets du maillage, son avantage est la grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Bibliographie

- [1] A.MUNNIER, *Équation aux dérivées partielles, Master. France*, 2018.
- [2] A.RONDEPIERRE ET A.ROUCHON, *introduction aux équations aux dérivées partielles*. 2012.
- [3] B.BOUTIN, *Équation des ondes Agrégation de mathématiques Calcul scientifique*, Université de Rennes, 2013.
- [4] B.HELFFER, *à partir du texte établi par Thierry Ramond, aux Équations Dérivées Partielles, cours S4 EDP 07*. Département de Mathématiques Université Paris-Sud, 2007.
- [5] C.BESSE, *Résolution numérique des Equations Différentielles Ordinaires*, université Toulouse III, 2016.
- [6] D.CHRISTIAN, *cours méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles par différences finies et volumes finis*, Université de Cergy-Pontoise, 2010.
- [7] E.GONCALVES, *Résolution Numérique, Discrétisation des EDP et EDO*, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005.
- [8] F.CUVELIER, *Méthode numérique II*, université Paris, 2016.
- [9] F.BETHUEL, *introduction aux équations aux dérive partielle*, 2018.
- [10] I.REZZOUG, *introduction aux différences finies*, université Larbi m'hidi Oum elbouaghi, 2019.
- [11] J.P.LEMOR, *Équations différentielles et calcul vectoriel*, Département de mathématique et de statique, université Montréal, 2014.
- [12] J.P.DEMAILLY, *Analyse numérique et équation différentielle*, nouvelle éditions livre, France, 2006.
- [13] J.ROUSSEL, *La méthode d'Euler*, Disponible sur : [http : femto-physique.fr/analyse-numerique/runge-kutta.php](http://femto-physique.fr/analyse-numerique/runge-kutta.php). 2015.
- [14] J.F.BABADJIAN, *Equations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires*, Université Paris-Sud, 2009.

- [15] J.A.DESIDERI, *Modèles mathématiques fondamentaux pour la mécanique*, l'Université de Nice, 1999.
- [16] L.TODJIHOUNDE, *Équations différentielle ordinaire, nouvelle éditions livre*. France, 1924.
- [17] L.MARIO, *Équations différentielles, Presses de l'Université de Montréal Manuel de premier cycle*, 2008.
- [18] L.PONTRIAGUINE, *Équations différentielles ordinaires*, Mir, Manuel de premier cycle, Math-Info QA 372 P6512, 1975.
- [19] M.GISCLON, *l'équation de la chaleur et de l'analyse de fourrier*, le journal de maths des élèves, vol 1, No.4. 1998.
- [20] M.KOUCHE, *Méthodes numériques pour EDO et EDP*, Université Annaba.2014.
- [21] N.CHAMPAGNAT, *Déférences finies et Analyse numérique matricielle*, cours d'harmonisation en IMAFA, 2010.
- [22] P.M.LAURENT, *Équations différentielle ordinaires*, université Claude Bernard Lyon 1, France, 2014.
- [23] S.SABIT, *équation de la physique mathique*, Université iben Khaldoun Tiaret, 2015.
- [24] S.KENNOUCHE, *Méthodes Numérique via Matlab*, Université de Biskra. 2016.
- [25] S.TORDEUX ET V.PERON, *Analyse numérique La méthode des différences finies*. Université de Pau master 1 MMS, 2020.
- [26] S.DEHEUVELS, *Laurène Jouve, introduction aux méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP)*, Institut de recherche en astrophysique et planétologie, 2017.
- [27] T.LUBIN, *Équations aux dérivées partielles (EDP), Méthode de résolution des EDP par séparation de variables*, 2017.