



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Département de Maintenance en Instrumentation
MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Génie Industriel
Spécialité : Génie Industriel
Thème

Modélisation et pilotage d'un système de distribution des médicaments à base d'un Flow-rack à chute libre par les réseaux de Petri temporisés et l'algèbre Min-plus.

Présenté et soutenu par :

Nadir CHIKH BLED

Dahou Sofiane TESSOUMI

Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
BENARBIA Taha	MCB	Université Oran 2	Président
HACHEMI Khalid	Prof	Université Oran 2	Encadreur
AMARI Saïd	MC. HdR	Université Paris Saclay, France	Co-encadreur
BENFEKIR Abderrahim	MCB	Université Oran 2	Examineur

Année 2021/2022

Dédicaces

J'exprime ma reconnaissance et je dédie ce modeste travail à tous ceux que je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

Ma mère celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espoirs, la mère des sentiments fragiles qui ma bénie par ces prières, Que Dieu ait pitié d'elle.

A mon soutien dans ma vie, qui m'a appris, m'a supporté et ma dirigé vers la gloire ...mon père.

A mon frère "Marouane" qui n'a pas cessée de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études Que Dieu le protège.

A ma famille CHIKH BLED et BenHadjiserradj, elle qui ma doté d'une éducation digne, son amour a fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Sans oublier ma deuxième famille BELMAHI pour leur appui et leur encouragement, Merci d'être toujours là pour moi.

Nadir CHIKH BLED

Dédicaces

Tout d'abord, merci à Dieu Tout-Puissant d'avoir fait de ce travail une réalité.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements :

À mon père et ma mère pour leur soutien tout au long de ma vie.

À mes grands-parents pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Je voudrais adresser mes salutations les plus chaleureuses à mon binôme CHIKH BLED Nadir pour le temps et l'effort que nous avons consacrés à la réalisation de ce travail.

Je remercie aussi tous mes frères, mes amis et mes collègues.

Dahou Sofiane TESSOUMI

Remerciements

Ce n'est pas la rédaction d'un tel rapport qui exige un remerciement, mais si on remercie des gens c'est par ce qu'ils méritent.

Au terme de ce travail, nous tenons à remercier **M. K. HACHEMI** pour le temps qu'il a consacré à nous apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche. Son exigence nous a grandement stimulés. Nous remercions aussi notre Co-encadreur **M. S. AMARI** pour son aide et ses orientations, ainsi que **Mme. M. SOUMATIA** pour l'aide qu'elle nous a apporté dans notre travail.

Nous adressons encore nos remerciements à ; **M. T. BENARBIA** et **M. A. BENFEKIR** qui ont accepté de faire partie du jury.

Nos remerciements vont également à tous les profs de l'Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle –Oran, qui nous ont enseignés durant notre formation universitaire.

Nous remercions également nos parents pour leur soutien moral et financier durant nos études.

Enfin, Merci à tous nos collègues, amis, et à tous ceux qui nous ont aidé et soutenu de près ou de loin.

يعتبر قطاع الصحة العامة حيويًا، وخاصة قطاع الأدوية. هذا يتطلب أتمتة ومراقبة توزيع الأدوية في الصيدليات.

في هذا المشروع، نعالج مشكلة تخصيص الأدوية لحجرات في آلة البيع على أساس "حامل التدفق الحر". سيشمل ذلك تسليط الضوء على موقع الأدوية الأكثر استخدامًا ووضعها في حجرات مجاورة بالقرب من الناقل لتقليل الوقت الضائع في الاستغناء. أولاً، نستخدم شبكة رسم بياني للأحداث ذات التوقيت المتعارض (GETC)، "فئة من شبكات بيتري الموقوتة" لنمذجة حامل التدفق الحر مع السقوط الحر. ثانيًا، نقوم بتطوير طريقة جديدة للتحكم في ظل قيود الاستخدام المتبادل لحل مشكلة تخصيص الأدوية باستخدام نهج التحكم الجبر ($\text{Min}, +$).

أخيرًا، تم تقديم دراسة حالة لتخصيص الدواء لتوضيح المنهجية المقترحة ولإظهار فعالية قوانين المراقبة المطورة.

كلمات مفتاحية: شبكات بيتري، الجبر الخطي، توزيع الأدوية، آلة البيع، رف التدفق الحر للسقوط الحر، قيود الاستخدام المتبادل.

Abstract

The public health sector is considered vital, especially the pharmaceutical sector. This requires the automation and control of drug distribution in pharmacies.

In this project, we address the problem of assigning drugs to compartments in a vending machine based on a "free fall flow-rack". This will involve highlighting the location of the most commonly used medications and placing them in adjacent compartments near the conveyor to minimize the time wasted in dispensing. First, we use a Conflicting Timed Event Graph (CTEG) network, "a class of timed Petri nets" to model the free-flow-rack with free fall. Second, we develop a new method for controlling GETCs under mutual use constraints to solve the drug allocation problem using a Min-plus algebra-based control approach.

Finally, a drug assignment case study is given to illustrate the proposed methodology and to show the effectiveness of the developed control laws.

Keywords: ($\text{Min}, +$) Dioids algebra, Petri Nets PT, CTEG, Modeling, Medications, affectation, Discrete Event System DES, Control laws.

Résumé

Le secteur de la santé publique, considéré comme étant vital, surtout le secteur pharmaceutique. Cela nécessite l'automatisation et le contrôle de la distribution des médicaments dans les pharmacies.

Dans ce projet, nous abordons le problème de l'affectation des médicaments aux compartiments dans un distributeur automatique à base d'un « free fall flow-rack » à chute libre. Il s'agira de mettre en évidence l'emplacement des médicaments les plus couramment utilisés et de les placer dans des compartiments adjacents à proximité du convoyeur pour minimiser les pertes de temps dans la distribution. Tout d'abord, nous utilisons un réseau de graphes d'événements temporisés conflictuels (GETC), « une classe de réseaux de Petri temporisés » pour modéliser le free flow-rack à chute libre. Deuxièmement, nous développons une nouvelle méthode pour contrôler les GETCs sous des contraintes d'utilisation mutuelle afin de résoudre le problème de l'affectation des médicaments en utilisant une approche de contrôle basée sur l'algèbre Min-plus.

Enfin, une étude de cas d'affectation de médicaments est donnée pour illustrer la méthodologie proposée et de montrer l'efficacité des lois de contrôle développées.

Mots clés : Algèbre des dioides ($\text{Min}, +$), Réseaux de Petri RdP, GETC, SED, Modélisation, Affectation, médicaments, Contraintes d'utilisation mutuelle, lois de contrôle.

Table des Matières

REMERCIEMENTS	II
ملخص	V
ABSTRACT	V
RESUME	V
TABLE DES MATIERES	VI
LISTE DES FIGURES	VI
LISTE DES TABLES	VIII
LISTE DES NOTATIONS	IX
INTRODUCTION GENERALE	1
Chapitre 1 : Systèmes Automatisées de dispensation	4
1.1. Systèmes Automatisées de dispensation	5
1.1.1 Introduction	5
1.1.2 Dispensation de médicaments	5
1.2.1 Définition	5
1.2.2 Structure	5
1.2.3 Fonctionnement	6
1.2.4 Avantages et inconvénients de la solution automatisée	6
1.2.5 Types d'AS/RS	7
1.2.5.1 L'AS/RS à charge unitaire	7
1.2.5.2 L'AS/RS multi allées	8
1.2.5.3 L'AS/RS à racks glissants	9
1.2.5.4 L'AS/RS à mini charge	9
1.2.5.5 L'AS/RS à carrousel	10
1.2.5.6 L'AS/RS à personne embarquée	11
1.2.5.7 L'AS/RS à étagères profondes	11
1.2.5.8 L'AS/RS à convoyeur gravitationnel	12
1.2. Flow-rack AS/RS à chute libre	13
2.1 Introduction	14
2.2 Généralités	14
2.3 Composants	15
2.4 Remplissage	15
2.5 Fonctionnement	15
2.6 Avantages et inconvénients [6]	16
2.7 Revue de la littérature sur les contributions concernant le FF-Flow-rack	16
1.3. Les erreurs médicamenteuses	18
3.1 Erreur de préparation	18
3.2 Erreur de dispensation	18
3.3 Erreur lors de l'administration	18
1.4. Problématique	19
1.5. Conclusion	19

Chapitre 2 : Formalisme de modélisation des SED par l’algèbre Min-plus et

Les réseaux de pétri (Rdp)	20
2.1. Formalisme de modélisation des SED par l’algèbre Min-plus et les réseaux de pétri (Rdp)	21
2.1.1 Introduction	21
2.1.2. Réseaux de Petri	21
1.2.1 Définition et notations	22
1.2.2 Equation fondamentale	23
1.2.3 Marquages accessibles	24
1.2.4 Concurrence et synchronisation dans les RdP	24
1.2.5 Quelques propriétés des RdP	25
1.2.6 Invariants d’un réseau de Petri	26
2.1.3 Graphes d’événements	29
1.3.1 Temporisation et fonctionnement d’un graphe d’événements	29
1.3.2 Fonctionnement d’un graphe d’événements temporisé	30
1.3.2.1 Fonctionnement au plus tôt d’un GET	30
1.3.2.2 Fonctionnement FIFO	30
1.3.2.3 Propriétés des graphes d’événements	31
2.1.4 Graphes d’événements temporisés avec conflit-GETC	32
2.1.5 L’algèbre des dioïdes	32
1.5.1 Introduction	32
1.5.2 Généralités	33
1.5.3 Rappels algébriques (Algèbre des dioïdes)	33
1.5.4 Propriétés des dioïdes	34
1.5.4.1 Dioïdes comme structures ordonnées	34
1.5.4.2 Dioïde complet	36
1.5.4.3 Dioïde des matrices	36
1.5.4.3.1 Opérations sur les matrices	36
1.5.4.4 Sous dioïde	37
1.5.5 Solution de l’équation : $x = ax \oplus b$	37
1.5.6. Représentation d’état des GET	39
1.5.6.1 Principe de fonctionnement	39
1.5.6.2 Fonctions compteurs, domaine temporel	40
1.5.6.2.1 Equation d’état dans \mathbb{R}_{min}	41
1.5.6.3 Fonctions dateurs, domaine événementiel	42
1.5.6.3.1 Equation d’état dans \mathbb{R}_{max}	43

2.1.6. Conclusion	43
-------------------	----

Chapitre 3 : Modélisation et contrôle du FF flow-rack par les réseaux de pétri temporisés (RdP-t) et l'algèbre Min-plus 44

3.1 Modélisation du système flow-rack à chute libre) 45

3.1 Introduction	45
------------------	----

3.2 Modélisation du système par les réseaux de Petri temporisés	45
---	----

3.3 Modèle du problème d'affectation des médicaments en RdP temporisés	50
--	----

3.4. Affectation des médicaments et contrôle de flow-rack à chute libre	53
---	----

3.4.1 Synthèse de contrôleur	53
------------------------------	----

3.4.2 Formulation du problème de contrôle	53
---	----

3.4.3 Généralisations des contraintes	55
---------------------------------------	----

3.4.4 Matrice d'utilisation mutuelle des médicaments (MUM)	55
--	----

3.4.5 Description des contraintes	56
-----------------------------------	----

3.4.6 Calcul du contrôleur	57
----------------------------	----

3.4.7 Exemple d'application	57
-----------------------------	----

3.4.7.1 Le 1 ^{er} Exemple	58
------------------------------------	----

3.4.7.1.1 Les lois de contrôle	59
--------------------------------	----

3.4.7.2 Le 2 ^{eme} Exemple	62
-------------------------------------	----

3.4.7.2.1 Les lois de contrôle	62
--------------------------------	----

CONCLUSION GENERALE 67

BIBLIOGRAPHIE 69

Liste des figures

Chapitre 1

Figure1.1 : AS/RS a charge unitaire	8
Figure1.2 : AS/RS multi allées (vue dessus)	8
Figure1.3 : AS/RS a racks glissants	9
Figure1.4 : AS/RS a mini charge.....	10
Figure1.5 : AS/RS a carrousel.....	10
Figure1.6 : AS/RS a personne embarquée.....	11
Figure1.7 : AS/RS a étagères profondes.....	12
Figure1.8 : AS/RS a convoyeur gravitationnel.....	12
Figure 1.9 : Vue réelle d'un APOTEKA	13
Figure1.10 : Structure d'un flow-rack a chute libre AS/RS.....	14
Figure1.11 : Coté remplissage de l'Apotéka.....	15
Figure1.12 : Principe de fonctionnement	15
Figure1.13 : Disposition des produits a l'intérieur d'un bac de stockage.....	16

Chapitre 2

Figure2.1 : Représentation graphique d'un RdP.....	22
Figure2.2 : Graphe des marquages atteignable du réseau de pétri.....	24
Figure2.3 : Concurrence et synchronisation dans les RDP.....	25
Figure2.4 : Réseau de pétri a arcs pondérés.....	28
Figure2.5 : Boucle réentrance.....	29
Figure2.6 : Recyclage d'une transition et d'une place pour garantir le fonctionnement FIFO.....	31
Figure2.7 : Exemple d'un graphe d'événements temporisé.....	39
Figure2.8 : Exemple d'un GET avec la fonction compteur.....	40

Chapitre 3

Figure 3.1 : Configuration d'un FF-Flow-rack	46
Figure 3.2 : L'Affectation des médicaments à l'intérieur du rack	47
Figure 3.3 : Modèle RdP d'un FF flow rack de de n casier et m emplacement.....	48
Figure 3.4 : Un flow-rack à chute libre composés de 16 casiers et 04 emplacements par casier..	49
Figure 3.5 : Modèle RdP temporisés du système.....	51
Figure 3.6 : Modèle RdP temporisés du système composé de 16 casiers et 04 emplacements par casier.....	52
Figure 3.7 : Modèle RdP du processus d'affectation.....	54
Figure 3.8 : un flow-rack à chute libre composés de 04 casiers.....	57
Figure 3.9 : Le modèle de réseau contrôlé des GETCs	61
Figure 3.10 : Le modèle de réseau contrôlé des GETCs du 2ème exemple	65

Liste des tables

Table 1. 2 : Données de la configuration du flow-rack à chute libre	45
Table 4. 1 : Transitions du système	47
Table 4. 3 : Places du système	48

Liste des Notations

AS / RS: Automated storage & Retrieval system

FF : Free Fall

GETC : Graphes d'événements temporisés conflictuelle

ADAs : Les armoires de dispensation automatisées

S/D: stockage/déstockage

SC: simple cycle

DC : double cycle

D/L : dépôt/livraison

FIFO : First input First output

SED : Système à événements discrets

RdP : réseau de Petri

GET : Graphes d'événements temporisés

SDED : les systèmes dynamiques à événements discrets

ARMA : Auto Regressive-Moving Average

MUM : Matrice d'utilisation mutuelle

\oplus :	Addition dans un dioïde (max, plus)
\otimes :	Multiplication dans un dioïde
\mathbb{R}_{max} :	Dioïde ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, max, +), appelé aussi : algèbre (max, +)
$\overline{\mathbb{R}}_{max}$:	Dioïde complet ($\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, max, +), appelé aussi : algèbre (max, +)
\mathbb{R}_{min} :	Dioïde ($\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, min, +), appelé aussi : algèbre (min, +)
$\overline{\mathbb{R}}_{min}$:	Dioïde complet ($\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, min, +), appelé aussi : algèbre (min, +)
A^* :	Etoile de Kleene de la matrice A , $A = Id_n \oplus A \oplus A^2 \dots$
\mathcal{D} :	Dioïde
ε :	(Le zéro) Élément neutre pour la loi \oplus
e :	Élément neutre pour la loi \otimes
Id_n :	Matrice d'identité
τ_{ij} :	Temporisation associée à une place p_{ij}
$\theta(t)$:	Fonction compteur
$\theta(k)$:	Fonction dateur
\tilde{p} :	Place en conflit
$\tilde{\tau}$:	Temporisation associée à une place en conflit \tilde{p}
$\tilde{\psi}(k)$:	Date de disponibilité du jeton entrant dans la place \tilde{p} pour la $k^{ème}$ fois

Introduction Générale

La santé publique est considérée comme un secteur stratégique Dont le pharmacien est chargé de plusieurs rôles ce qui lui donne une grande importance [1].

La dispensation des médicaments pour les pharmaciens est devenue un enjeu crucial, Avec l'augmentation des volumes de médicaments administrés, Ainsi que La forte concurrence oblige de plus en plus le pharmacien à adopter différentes technologies de dispensations telles que l'utilisation du système de distribution automatisée de médicaments. Qui permettent d'améliorer les facteurs de temps-coût et qualité.

Les systèmes automatisés de stockage et de déstockage, appelés AS / RS en anglais, ont été largement utilisés dans différentes applications logistiques, de la fabrication à l'entreposage [2].

Cette technologie de manutention automatisée moderne pour la distribution de médicaments consiste en un système de stockage et de récupération automatisé à rayonnage à chute libre (FF-flow-rack AS/RS) [1]. Généralement, un AS/RS est constitué des composants suivants : des racks, des machines de stockage/déstockage, des allées, des stations de dépôt/livraison.

Nous Etudions à présent un système disponible sur le marché qui a été introduit par la société Mekapharm®, Connu sous le nom commercial "APOTEKA" [3]. Ce système utilise l'homme ou une seule machine pour les opérations de stockage, et utilise une combinaison de plusieurs systèmes de stockage entre le mouvement de chute libre et un convoyeur de transport pour les opérations de récupération.

Les avantages majeurs de ce système sont : la réduction du temps d'attente des clients, La possibilité de récupérer simultanément plusieurs produits, Minimisation du déplacement du pharmacien Aussi il présente également l'avantage de donner aux pharmaciens plus de temps à consacrer aux conseils pour l'usage et la prise des médicaments prescrits.

L'objectif de cette étude consiste à trouver des solutions des problèmes de dispensation de médicament dans un distributeur automatique de médicaments à base d'un « flow-rack » à chute libre. Il s'agira de mettre en évidence l'emplacement des médicaments les plus couramment utilisés et de les placer dans des compartiments adjacents à proximité du convoyeur pour minimiser les pertes de temps dans la distribution, y compris la chute des produits.

Dans ce mémoire, Nous nous intéressons dans un premier temps à proposer et ensuite développé un modèle de réseau de Petri temporisé capable de décrire la dynamique des produits à l'intérieur du rack et à l'extérieur (chute des produits).

Dans la deuxième étape, Une fois l'étape de modélisation effectuée, Il est important de contrôler le processus de distribution du médicament.

Pour cela, Notre travail consiste à modéliser notre problème via un GETC, Puis à générer des contraintes sur notre système, Et enfin à le traiter via la synthèse de contrôleurs en algèbre (min, +).

Ce mémoire est en trois chapitres. Nous donnons dans cette introduction les grandes lignes du plan qui sera détaillé par la suite.

Le premier chapitre traite des systèmes et des solutions automatisées de dispensation de médicaments AS/RS en générale et le Flow-rack AS/RS à chute libre en particulier.

Nous commencerons par la définition, Structure, fonctionnement, Avantages & inconvénients d'un AS/RS. Ensuite, nous exposons les différents types d'AS/RS et pour terminer une revue de littérature sur la contribution concernant FF-flow-rack.

Par la suite, nous nous focalisons particulièrement sur le Flow-rack AS/RS à chute libre (FF-flow-rack), ses composants, son remplissage, Fonctionnement, Avantages et inconvénients de ce système.

Et nous terminons ce chapitre par la définition des différents types des erreurs médicamenteuses.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques définitions et notations de base concernant l'algèbre des dioïdes, les réseaux de Petri et graphes d'événements temporisés.

Le troisième chapitre constitue une contribution majeure de note étude, il est consacré à la modélisation du problème par le Rdp temporisés avec la synthèse du contrôleur en algèbre (min, +). Nous parlerons de notre cas d'étude afin de trouver des solutions concernant notre problématique qu'elle a comme objet de mettre en évidence l'emplacement des médicaments les plus utilisées et les mettre dans des compartiments adjacents prêt du convoyeur pour limiter les pertes de temps pendant la distribution

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion et présentons les perspectives pour les travaux futurs.

Chapitre 1 : **Systemes Automatisées de dispensation**

1.1. Systèmes Automatisées de dispensation

1.1.Introduction

L'automatisation se développe de plus en plus au sein des pharmacies, Les systèmes automatisés de distribution de médicaments (ADAs) ont été utilisés dans diverses pharmacies au cours des dix dernières années, Par exemple Au cours de la dernière décennie, l'utilisation de cette technologie dans les pharmacies hospitalières a été en hausse avec 97% des pharmacies hospitalières américaines utilisant des ADAs en 2014[4], En raison des différents avantages offerts par ces systèmes.

Un système automatisé de dispensation de médicaments est un système automatisé de stockage de médicaments permettant la délivrance de références suivant un ordre de l'opérateur, sous l'action d'un système de contrôle plus au moins élaboré. Dans ce chapitre nous allons définir la dispensation de médicaments avec leurs différentes modalités, après nous expliquerons l'automatisation de cette dernière.

1.2.Dispensation de médicaments

1.2.1. Définition

Selon la définition de la **Materials Handling Institute**, les systèmes automatisés de stockage et déstockage sont une variété des systèmes de manutention et de contrôle qui prend en charge, stocke et déstocke des produits avec précision, exactitude et célérité.

Pratiquement, un AS/RS est une combinaison d'équipements géré par un système de contrôle pour la manutention des produits (transporter, déstocker, stocker...) sans l'intervention humaine directe.

1.2.2. Structure

Un système de stockage/récupération automatique (AS/RS) comprend les composants principaux suivants :

- Des racks de stockage.
- Des allées donnant accès aux racks.
- Des machines de stockage/déstockage (S/D).
- Les stations de ramassage/livraison.
- Des points d'entrées/sorties.
- Un système de contrôle gérant le tout.

Définition des composants principaux d'un AS/RS :

- Etagère (Racks) : C'est une structure métallique tridimensionnelle formée de plusieurs casiers de stockage.
- Allée : C'est l'espace entre les étagères où circule la machine S/D.
- Machine de stockage/déstockage : C'est une grue automatique pour le stockage/déstockage des produits, elle se déplace à la fois horizontalement et verticalement.
- Les stations de ramassage/livraison : C'est le point intermédiaire pour le transfert des produits entre l'AS/RS et l'environnement extérieur.

1.2.3. Fonctionnement

Pour stocker ou récupérer un produit, la machine S/D se déplace à la fois verticalement et horizontalement jusqu'au produit souhaité, qui est sélectionné par l'opérateur, où cette sélection est communiquée à la machine S/D via le système de contrôle.

Considérons : **(a)** L'opération de stockage et **(b)** L'opération de déstockage.

(a) L'opération de stockage : c'est de transporter un produit de la station Dépôt/Livraison vers le casier déterminé. **(b)** L'opération de déstockage : c'est de récupérer un produit du casier sélectionné et le transporter vers la station Dépôt/Livraison.

Il y a deux modes de fonctionnement de la machine S/D [5] :

1- Fonctionnement en simple cycle (SC) : la machine S/D visite un seul casier, c'est-à-dire, elle effectue une seule opération (stockage ou déstockage).

2- Fonctionnement en double cycle (DC) : la machine S/D visite deux casiers, elle commence par une opération de stockage puis elle passe directement vers une opération de déstockage.

1.2.4. Avantages et inconvénients de la solution automatisée

a. Avantages [6] :

- Une réduction supplémentaire des erreurs associées à la distribution et dispensation des médicaments prescrits.
- Augmentation de la capacité de stockage.
- Amélioration de la traçabilité.
- Réduction du personnel.
- Un contrôle total et gestion de variétés des stocks et de l'inventaire.
- Une documentation automatisée.
- La libération des pharmaciens professionnels de nombreuses tâches. Apporter de la valeur ajoutée et la rentabilité pour le travail.
- Meilleure flexibilité.
- Réduction des vols.
- Rapidité, précision, sécurisation et satisfaction des patients au bon moment.

b. Inconvénients :

Bien que l'AS/RS offre de nombreux avantages, ils présentent également certains inconvénients, tels que :

- Une fois l'AS/RS installé, la configuration est inflexible et la capacité est fixe.
- L'AS/RS nécessite un investissement très important (le coût élevé).

1.2.5. Types d'AS/RS

Ces types diffèrent en fonction de la taille, poids et le volume des produits à transporter, ainsi que les caractéristiques du lieu de stockage et leurs applications [7]. Nous pouvons citer :

- L'AS/RS à charge unitaire,
- L'AS/RS multi allées,
- L'AS/RS à racks glissants,
- L'AS/RS à mini charge
- L'AS/RS à carrousel,
- L'AS/RS à personne embarquée,
- L'AS/RS à étagères profondes,
- L'AS/RS à convoyeur gravitationnel.

1.2.5.1. L'AS/RS à charge unitaire

L'AS/RS à charge unitaire est le système basique des autres types. Il est constitué de racks parallèles, fixes et ont une profondeur unitaire (un casier contient une seule charge). Les racks sont séparés par des allées, chaque allée est équipée d'une machine de stockage/déstockage, conçue pour la manutention des produits, elle se déplace verticalement et horizontalement et guidée par des rails au sol. (Voir figure. 1.1).

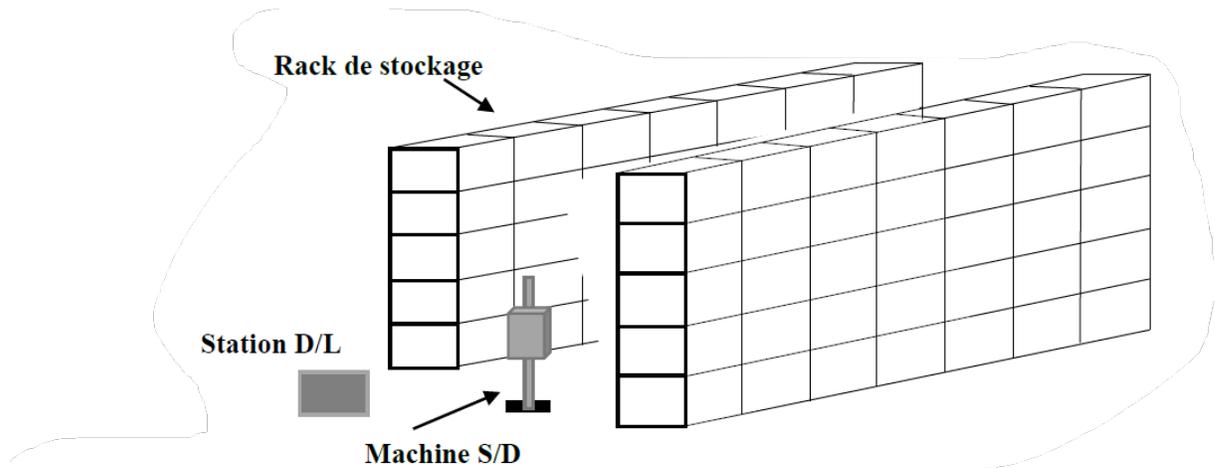


Figure1.1 : AS/RS a charge unitaire

1.2.5.2. L'AS/RS multi allées

L'AS/RS multi allées est une variation de l'AS/RS à charge unitaire sauf qu'il est équipé, en plus d'une allée commune reliant toutes les allées. Ce système a une seule machine qui peut servir plusieurs allées à la fois, cette machine S/D se déplace verticalement le long des colonnes formants les racks, horizontalement le long des allées de desserte et le long de l'allée commune dont l'une des extrémités est équipée d'une station de dépôt/livraison (D/L). (Voir figure. 1.2.).

La particularité de ce système est son coût réduit par rapport aux autres types, et son faible débit à cause de l'utilisation d'une seule machine S/D.

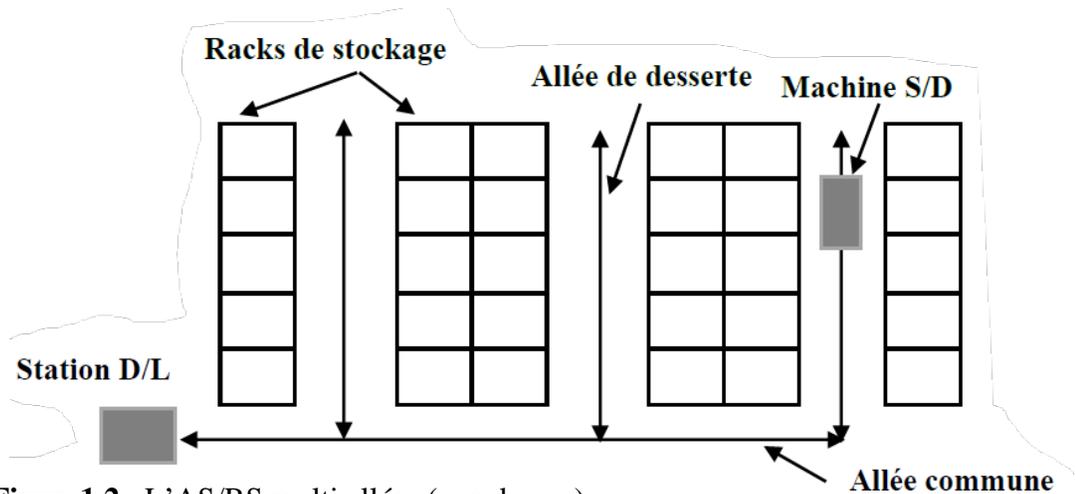


Figure1.2 : L'AS/RS multi allées (vue dessus)

1.2.5.3. L'AS/RS à racks glissants

Ce système est une variation des AS/RS multi allées. Dans ce système il y a une seule allée de service qui n'apparaît que pendant une opération de stockage ou déstockage. Cette allée est formée par le glissement latéral de deux racks mitoyens, par un mécanisme, sur des rails. (Voir figure. 1.3.). Ce système permet d'optimiser la capacité de l'entrepôt.

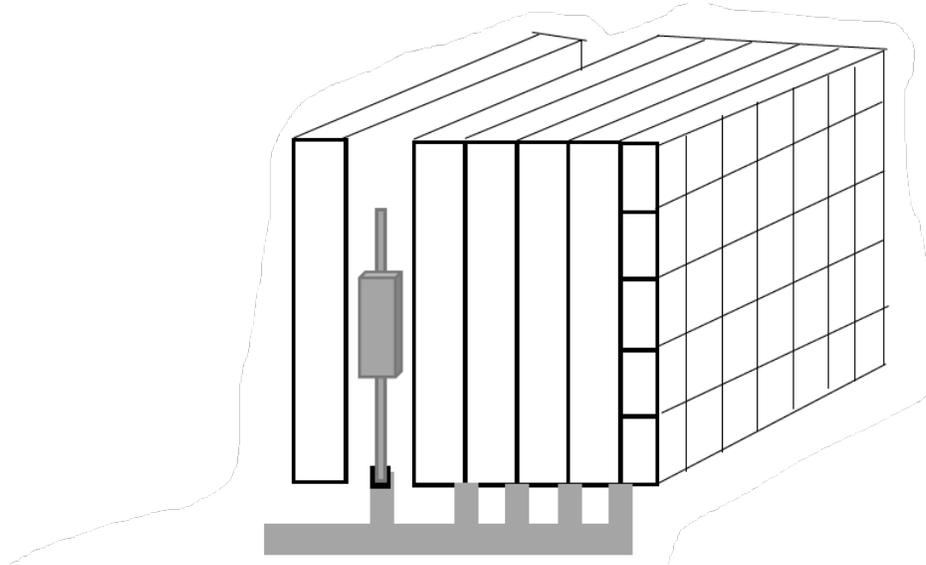


Figure1.3 : L'AS/RS à racks glissants

1.2.5.4. L'AS/RS à mini charge

L'AS/RS à mini charge est conçu pour manipuler des petites charges contenues dans des bacs (le poids de charge variant entre 45 et 225 Kg). Un casier peut contenir plusieurs produits, ce qui permet de stocker plus de matériel en moins d'espace. (Voir figure. 1.4.).

Pour le déstockage d'un produit, la machine S/D déstocke le casier concerné en entier et le transfert vers la station D/P où il y a un opérateur qui retire le produit désiré.

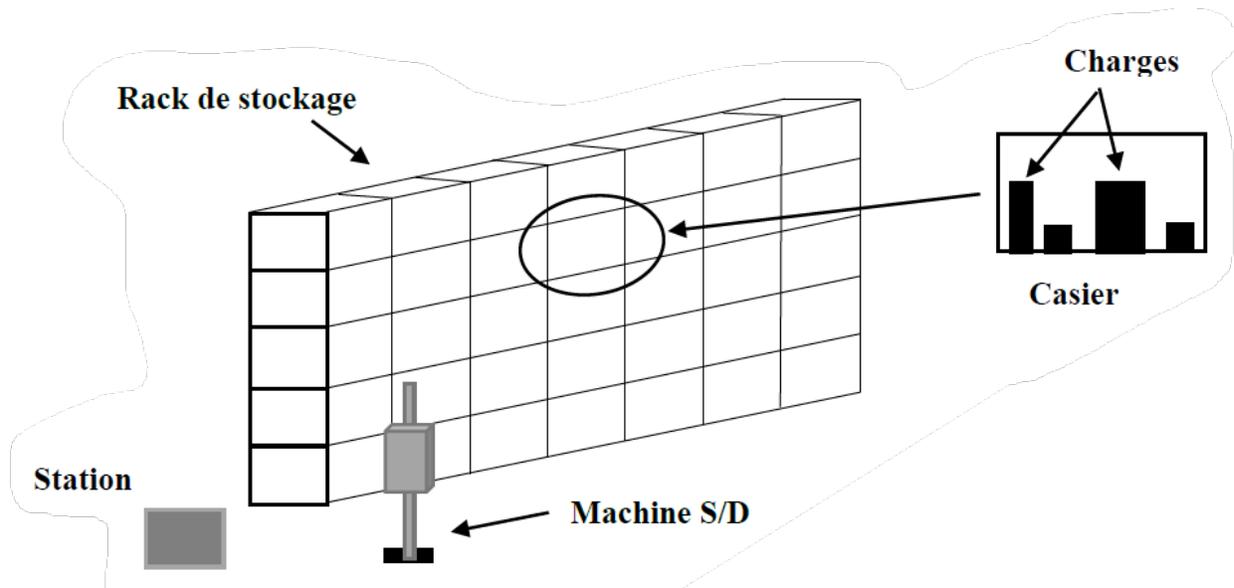


Figure1.4 : L'AS/RS à mini charge

1.2.5.5. L'AS/RS à carrousel

Le système consiste en un ensemble de casiers montés sur des convoyeurs qui tourne horizontalement ou verticalement sur des rails ovales. On trouve deux types : carrousel horizontal et carrousel vertical.

Dans ces systèmes ce sont les casiers qui se déplacent vers l'extrémité du rack où un opérateur stocke ou déstocke les produits, ce qui représente une bonne alternative au système à mini charge. (Voir figure. 1.5.).

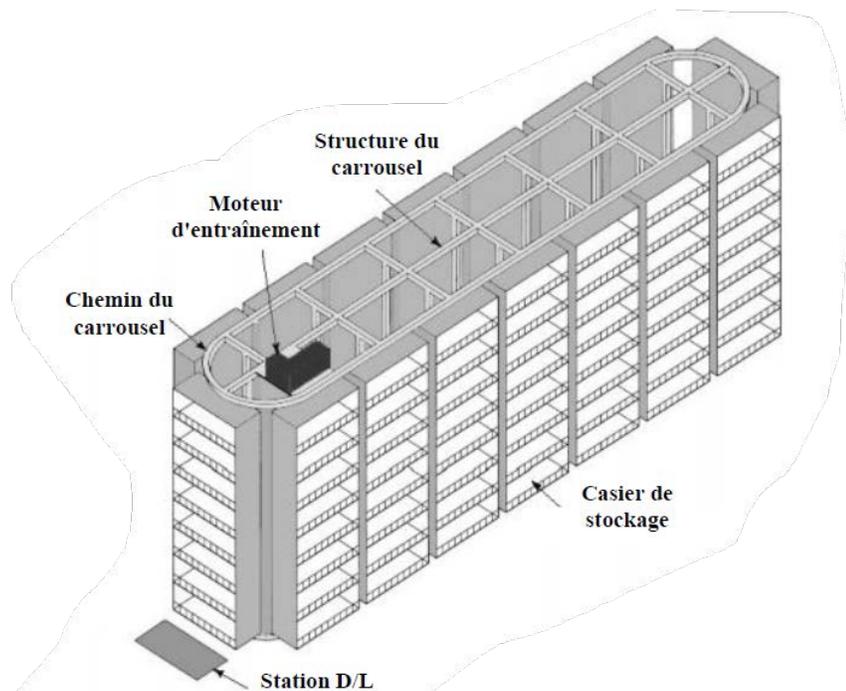


Figure1.5 : L'AS/RS à carrousel

1.2.5.6. L'AS/RS à personne embarquée

L'AS/RS à personne embarquée permet de stocker plusieurs produits dans chaque casier. Le stockage/déstockage des produits se fait en une seule opération à l'aide d'un opérateur monté sur une plate-forme mobile, ce qui permet d'augmenter le débit du système. Les produits sont transportés vers la station D/L par la machine S/D. la plateforme est équipée de système automatique pour la manutention des produits lourds. (Voir figure. 1.6.).

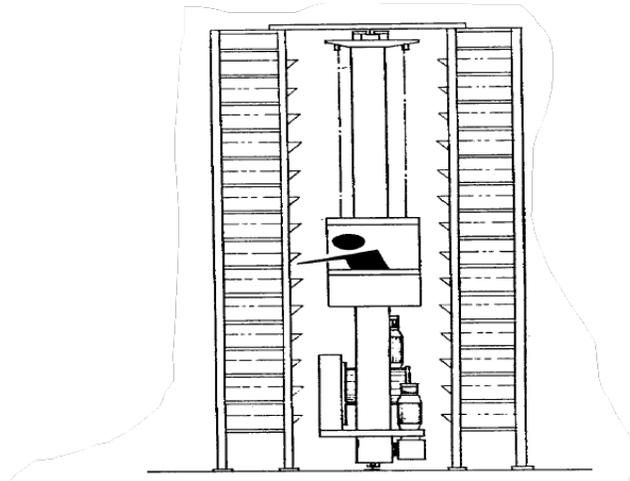


Figure1.6 : L'AS/RS à personne embarquée

1.2.5.7. L'AS/RS à étagères profondes

Il s'agit d'un système de stockage de charge unitaire à haute densité approprié pour stocker une grande quantité de charges unitaires. Dans chaque casier il est possible de stocker jusqu'à 10 produits l'une derrière l'autre (en multi couches). Les charges peuvent se déplacer horizontalement à l'intérieur du casier. Ils sont stockés d'un côté du casier et déstockés de l'autre côté. (Voir figure. 1.7.).

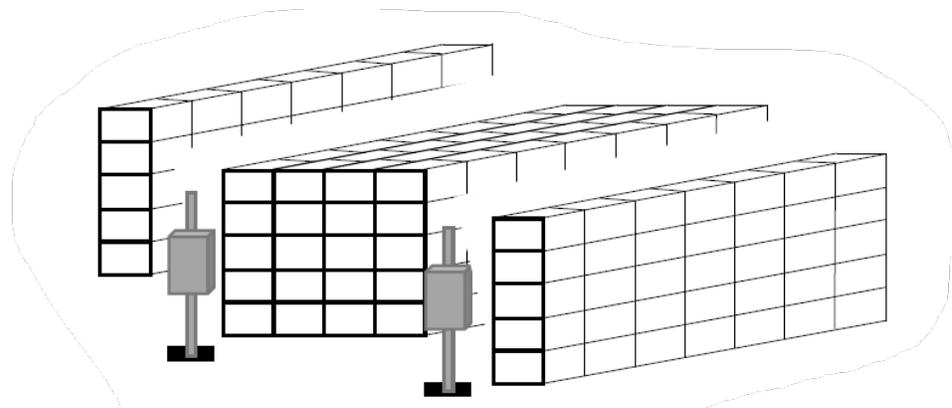


Figure1.7 : L'AS/RS à étagères profondes

1.2.5.8. L'AS/RS à convoyeur gravitationnel

L'AS/RS à convoyeur gravitationnel est une variation des AS/RS à étagère profondes. Il est composé d'un rack profond constitué d'un ensemble de casiers inclinés. Chaque casier est équipé d'un convoyeur gravitationnel pour permettre le glissement des produits d'un bout à l'autre du casier. Le stockage des produits se fait sur une face par la machine de stockage et le déstockage se fait sur l'autre face par la machine de déstockage, où ces deux machines S/D sont liées par un convoyeur de restockage permettant à la machine S/D d'accéder aux produits pour les restocker. (Voir figure. 1.8.).

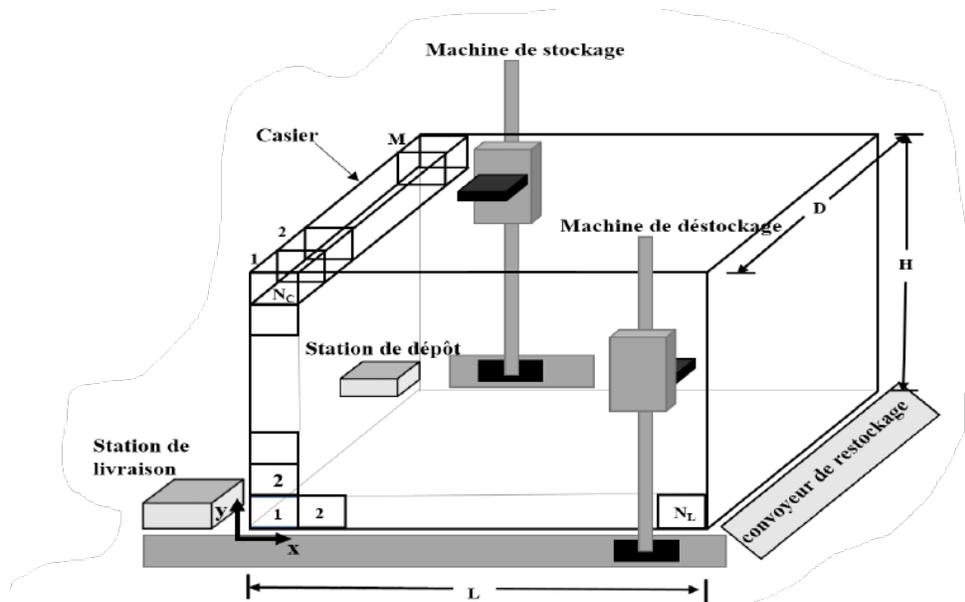


Figure 1.8 : L'AS/RS à convoyeur gravitationnel

1.2. Flow-rack AS/RS à chute libre

1.2.1. Introduction

Ces dernières années, La distribution automatique en pharmacie a permis de résoudre les problèmes liés à la distribution traditionnelle des médicaments, Ces systèmes automatisés offrent de nombreux avantages tels que : une distribution et un stockage rapides, la gestion des stocks.

Cette technologie de manutention automatisée moderne pour la distribution de médicaments consiste en un système de stockage et de récupération automatisé à rayonnage à chute libre (FF-flow-rack AS/RS), connu sous le nom commercial "APOTEKA".

1.2.2. Généralités

L'APOTÉKA est produit par MEKAPHARM et distribué par Phi-CONCEPT. Il est l'archétype même de l'automate et ressemble à son grand frère le Pharmamat (Figure 1.9)



Figure1.9 : Vue réelle d'un APOTEKA

1.2.3. Composants

Les principaux composants d'un Flow-rack à chute libre AS/RS sont les racks de stockage, Les allées, Les stations de ramassage/livraison et le système de contrôle. Les rayonnages sont composés de bacs qui peuvent stocker des charges. Les allées sont les espaces entre les rayonnages.

Les stations de ramassage/livraison sont utilisées pour les charges entrantes et sortantes. Le système de contrôle est utilisé pour gérer les opérations de stockage et de déstockage [5]. (Figure1.10)

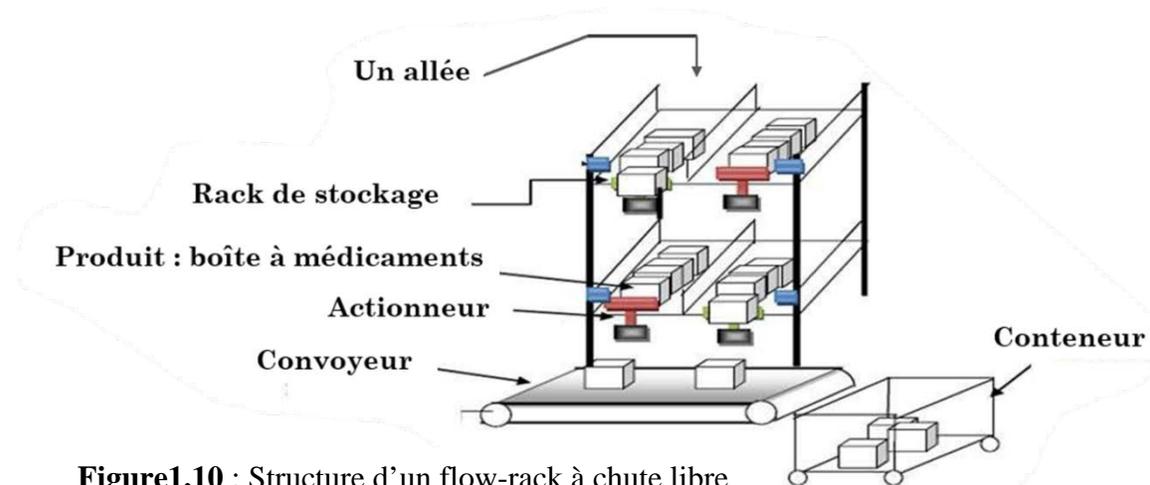


Figure1.10 : Structure d'un flow-rack à chute libre

1.2.4. Remplissage

Le canal à remplir s'affiche uniquement sur l'écran de l'ordinateur de contrôle de L'APOTÉKA qui fournit les coordonnées du canal correspondant à chaque référence. Les spécialités sont rangées par ordre alphabétique en deux groupes : les produits lourds ou fragiles et les produits « normaux ». Ce classement permet de retrouver facilement les boîtes en cas de panne.

L'aide visuelle au remplissage manuel sur les armoires de l'automate est inexistante pour l'instant, Il faut donc bien mettre les spécialités en face de leur emplacement pour pouvoir remplir plus aisément L'APOTÉKA au fur et à mesure qu'il se vide (Figure1.11) [8].



Figure1.11 : Coté remplissage de l'Apotéka

1.2.5. Fonctionnement

Le fonctionnement de l'AS/RS de type FF-flow-rack est le suivant (Figure1.12) :

(a) L'opération de stockage est réalisée par une machine de stockage ou un opérateur (Voir Figure1.11), où les produits sont déplacés de la station de prélèvement pour être stockés dans le canal (ligne) correspondant.

(b) L'opération de déstockage se fait en deux étapes :

- L'éjection de l'article, où elle est accomplie par l'excitation de l'électroaimant du bac contenant le produit désiré. Cela induit la chute libre du produit sur le convoyeur de transport.
- Le transport du produit par le convoyeur jusqu'à la station de dépôt.

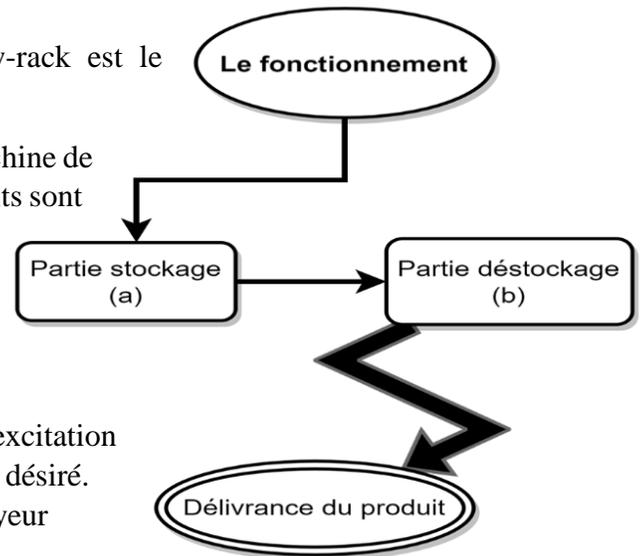


Figure1.12 : Principe de fonctionnement

L'éjection d'un produit provoque le glissement progressif par gravité de tous les autres produits du canal, comme le montre la Figure1.13 qui met en évidence la disposition des produits à l'intérieur d'un bac. [8]

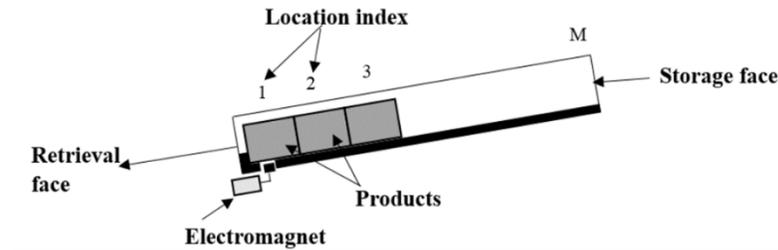


Figure1.13 : Disposition des produits à l'intérieur d'un bac de stockage

1.2.6. Avantages et inconvénients [8]

1.2.6.1 Avantages :

- Simplicité.
- Fiabilité.
- L'existence d'un robot rangeur
- Ejection automatique.
- Structure aluminium-inox allégeant la structure.
- C'est le plus rapide des automates : jusqu'à une boîte par seconde par éjecteur.

1.2.6.2 Inconvénients

- Les boîtes placées en haut de l'automate font une chute de plus de deux mètres.
- Remplissage fastidieux sans robot rangeur.

1.2.7. Revue de la littérature sur les contributions concernant les AS/RS précisément le FF-Flow-rack

Ces dernières années, de nombreuses études se sont concentrées sur certains problèmes stratégiques auxquels les décideurs sont confrontés lorsqu'ils évaluent et optimisent les performances à long terme.

Diverses recherches ont été proposées pour estimer le temps d'extraction et de déplacement de ce système (temps de livraison moyen du produit) de la machine S/R dans le système AS/RS, car ce temps représente le critère le plus important utilisé pour évaluer la performance d'un système AS/RS.

Metahri Diyaeddine et Hachemi Khalid. [9] ont proposer une étude comparative entre la distribution manuelle et automatique des médicaments en termes de temps total de récupération et de la demande du client, la différence de performance augmente lorsqu'une récupération simultanée de boîtes de médicaments est appliquée. Cette différence peut atteindre 95%, Et peut être expliquée comme étant due aux raisons suivantes : dans la distribution manuelle l'opérateur prend beaucoup de temps lorsque les médicaments sont à une hauteur plus élevée, de plus il récupère médicaments

un par un, alors que dans la distribution automatisée, la récupération de plusieurs médicaments se fait simultanément. Ces résultats de la comparaison montrent une réduction significative du temps total de récupération dans un rack FF-Flow AS/RS.

Dans un article récent, A. Hamzaoui et Z. Sari [10] ont développé des modèles mathématiques de temps de cycle double pour le rack AS/RS à flux bidirectionnel. Dans un premier temps, ils ont développé des modèles selon deux approches, puis ils les comparent entre eux. Ensuite, ils procèdent à une optimisation des dimensions du système pour des temps de cycle minimaux. Afin d'extraire des formules approximatives de dimensions optimales en fonction de la taille du système et de son taux de charge nominal. Hachemi Khalid et Metahri Diyaeddine. [1] ont concentrés sur l'évaluation des performances de l'AS/RS de type FF-flow-rack en développant un modèle continu de temps de déplacement et de récupération. L'exactitude de ce modèle a été comparée à celle d'une simulation informatique basée sur un modèle discret. Les résultats obtenus montrent que la déviation maximale entre le modèle continu et la simulation est inférieure à 5%, Ce qui montre l'exactitude du modèle pour estimer la récupération. Ce modèle analytique est utile pour optimiser les dimensions du rack, évaluer le débit du système et évaluer différents types de stockage.

Par la suite, Hachemi Khalid et Metahri Diyaeddine. [11] ont également abordé la différence entre la distribution automatique et la distribution traditionnelle des médicaments en basant sur le temps total de récupération de la demande d'un client, ce critère a été évalué pour une distribution automatique par simulation, Tandis que celui de la distribution traditionnelle a été calculé par une étude empirique. 10 scénarios pour chaque demande du client ont été réalisés pour émuler la distribution réelle dans des racks de longueur ($L=6$ m), hauteur ($H=2,7$ m) et une demande du client = 9 boîtes de médicaments. Ils ont constaté que l'écart entre la distribution manuelle et automatique peut atteindre 94%. Cet écart sera plus important pour une grande capacité de rayonnage de la pharmacie et/ou pour une grande demande du client. Cette étude peut attirer l'attention des pharmaciens pour automatiser leur pharmacie en utilisant les nouveaux systèmes tels que le Free-Fall flow-rack, Puisque ce système offre plus de temps aux pharmaciens pour conseiller leurs clients sur le médicament prescrit.

1.3. Les erreurs médicamenteuses

L'erreur de médication est l'omission ou l'exécution par inadvertance d'un comportement lié à la médication qui peut présenter un risque ou un événement indésirable pour le patient [12].

Il existe plusieurs types d'erreurs de médication, et on peut en citer trois principales :

1.3.1. Erreur de préparation

Il s'agit de l'erreur survenant au niveau de la préparation d'une dose de médicament, qu'il s'agisse de sa formulation, de sa préparation galénique, de son conditionnement, ou de son étiquetage, quel qu'en soit l'auteur, y compris le patient lui-même [12].

1.3.2. Erreur de dispensation

C'est l'erreur médicamenteuse commise par l'équipe pharmaceutique lors de la dispensation, c'est-à-dire lors de l'analyse de l'ordonnance, de la communication d'information, de la préparation galénique et de la délivrance des médicaments aux unités de soins ou directement aux patients ambulatoires [12].

1.3.3. Erreur lors de l'administration

Il s'agit d'une erreur médicamenteuse qui survient au niveau de l'administration du médicament, quel qu'en soit l'auteur, y compris le patient lui-même, évalué par rapport à tout écart par rapport à la prescription ou aux recommandations d'utilisation du médecin [12] :

- Erreur de patient.
- Erreur de dosage.
- De débit.
- De voie d'administration.
- Le non-respect des formes galéniques.

1.4. Problématique

Le système à étudier est conçu par « APOTÉKA » consiste à un distributeur automatique de médicaments à base d'un « flow-rack » à chute libre constituant un rack de stockage. Cette opération est réalisée selon la politique FIFO dans les différentes lignes du distributeur, ou chaque ligne est réservée à un type de produit. Il sera question de mettre en évidence l'emplacement des médicaments les plus utilisées et les mettre dans des compartiments adjacents prêt du convoyeur pour limiter les pertes de temps pendant la distribution y compris la chute des produits.

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les systèmes automatisés de stockage/déstockage (AS/RS) en général et nous avons abordé l'AS/RS de type FF-flow-rack en particulier

L'objet de ce premier chapitre est de présenter le cadre théorique et méthodologique sur les systèmes automatisés de stockage/déstockage, sa composition et son fonctionnement, Avantages et inconvénients de cette solution automatisée. Ainsi que leurs différents types.

Concernant le flow-rack à chute libre (FF-flow-rack AS/RS), nous avons commencé par une présentation générale sur la configuration (Généralités), Composants, Remplissage fonctionnement et ces Avantages et inconvénients

Nous avons aussi défini les erreurs médicamenteuses et ses trois principaux types (Erreur de préparation, Erreur de dispensation, Erreur lors de l'administration).

Finalement, Nous avons présenté la problématique scientifique de Ce mémoire.

Chapitre 2 : Formalisme de modélisation des SED par l'algèbre Min-plus et les réseaux de pétri (RdP)

2. Formalisme de modélisation des SED par l’algèbre Min-plus et les réseaux de pétri (Rdp)

2.1.1. Introduction

Les réseaux de Pétri constituent un outil graphique et mathématique qui permet de simuler et modéliser des systèmes dans lesquels les notions d’événements et d’évolution sont importantes. C’est Carl Adam Pétri qui a inventé ce formalisme en 1962. Au départ, il s’agissait essentiellement de représenter les systèmes à événements discrets.

Seuls les systèmes qui changeaient de manière discrète pouvaient être représentés dans le cadre des réseaux de Pétri. Puis, beaucoup d’extensions ont vu le jour. Certaines sont vraiment dédiées à la modélisation de systèmes biologiques. Par exemple, on peut citer les réseaux de Pétri hybrides fonctionnels, qui permettent de simuler l’évolution de systèmes dans lesquels certaines variables évoluent de manière discrète, d’autres de manière continue, et dont les taux de variations sont fonctions des variables du système.

Ce type de représentation a un pouvoir d’expression très important.

2.1.2. Réseaux de Petri

Les réseaux de Petri sont un outil graphique approprié à support mathématique permettant de modéliser, visualiser et analyser des évolutions des systèmes. Ils sont utilisés pour modéliser, analyser et concevoir des systèmes à événements discrets SED, regroupant les systèmes de production, les systèmes informatiques, les systèmes de communication et de dispensation...etc.

Les RdP ont l’avantage d’être un modèle beaucoup plus général. Ils présentent parallèlement deux caractéristiques principales :

- ❖ Ils permettent la modélisation comportementale représentant le parallélisme, la synchronisation et le partage de ressources ;
- ❖ Ils sont utilisés pour implémenter les systèmes de contrôle en temps réel.

L’état du système modélisé par un RdP est représenté par un vecteur de marquage élaborant le nombre de jetons que contient chaque place. L’évolution de l’état (dynamique du système) correspond donc à une évolution du marquage. L’évolution du marquage se produit par le franchissement de transitions : à l’occurrence d’un événement correspond le franchissement d’une transition. L’espace des marquages accessibles tient lieu d’espace d’états dans le système [13].

2.1.2.1. Définition et notations

Définition (RdP)

Un réseau de Petri est un graphe biparti constitué de deux types de sommets : places (représentées par des cercles) et transitions (représentées par des barres). Des arcs orientés relient certaines places à certaines transitions, ou certaines transitions à certaines places. A chaque arc on associe un poids (entier positif). Le nombre de places (resp. De transitions) est fini, et non nul. Chaque place, peut contenir un ou plusieurs jetons (représentés par des points) qui modélisent la dynamique du système. A chaque place on associe une temporisation. Cette dernière correspond au temps de séjour des jetons dans une place.

D'une façon plus formelle, un RdP est un 5-tuplet $R = (P, T, \text{Pré}, \text{Post}, \tau)$, où P (resp., T) est un ensemble non vide et fini de places (resp., transitions) ; $\text{Pré} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ une application d'incidence avant : $\text{Pré}(p; c_q)$ contient la valeur entière M_{pq} associée à l'arc allant de la place p à la transition c_q ; $\text{Post} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ une application d'incidence arrière : $\text{Post}(p; c_q)$ contient la valeur entière M_{pq} associée à l'arc allant de la transition c_q à la place p ; $\tau \in \mathbb{N}^P$ définit les temporisations associées aux places : τ_p désigne la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place p . Le marquage M d'un réseau de Petri est une application $M : P \rightarrow \mathbb{N}$.

La quantité $M(p)$ détermine le marquage de la place p . Un réseau marqué est déterminé par le couple $N = (R, M_0)$ formé d'un réseau de Petri R est d'un marquage initial M_0 . Une transition sans place en amont est dite transition source, une transition sans place en aval est dite transition puit. La figure 4.2 représente un RdP ordinaire (tous les poids sont unitaires) dont les places sont représentées par des cercles et les transitions par des barres.

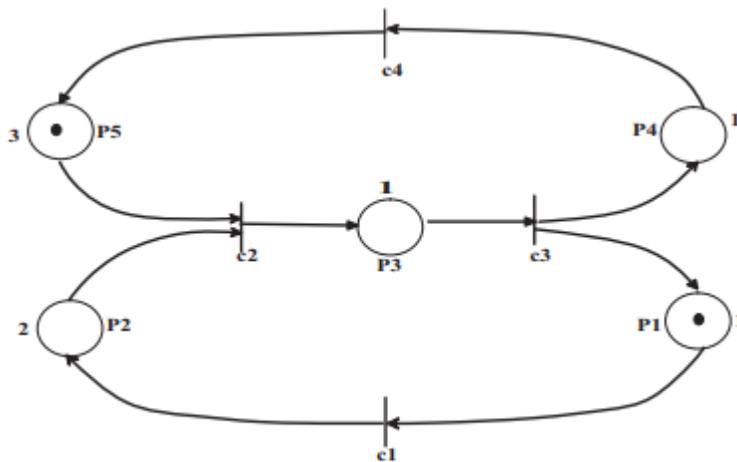


Figure2.1 : Représentation graphique d'un RdP

2.1.2.2. Equation fondamentale

L'évolution d'un RdP est décrite par le franchissement des transitions par des jetons séjournant dans les places du graphe. Considérant un RdP et un marquage m , on dit que la transition $cq \in T$ est franchissable pour le marquage M si l'on a :

$$\forall p \in P, M(p) \geq \text{Pré}(p ; cq).$$

Lorsque cette condition est validée, le franchissement de la transition cq conduit à nouveau marquage M' , qui est nouvel état du modèle, défini par :

$$M'(p) = M(p) - \text{Pré}(p ; cq) + \text{Post}(p ; cq).$$

Exemple 2.1 Considérons le RdP de la figure 2.4. En partant du marquage $M_0 = (1, 0, 0, 0, 1)$ ($M(p_1) = 1, M(p_2) = 0, M(p_3) = 0, M(p_4) = 0, M(p_5) = 1$), on atteint le marquage $M_1 = (0, 1, 0, 0, 1)$, par franchissement de la transition c_1 . Plus généralement, on note $[C^+] = [\text{Post}(p ; xq)]$ (élément de la matrice d'incidence arrière) et $[C^-] = [\text{Pré}(p; tq)]$ (élément de la matrice d'incidence avant), $C = C^+ - C^-$ (la matrice d'incidence) et en considérant F une séquence de franchissement réalisable à partir d'un marquage M_i , on a l'équation fondamentale suivante, qui traduit la dynamique de fonctionnement du RdP :

$$M_k = M_i + C \times F^-,$$

F^- est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement F , c'est-à-dire un vecteur de dimension égale à $|T|$; F_q correspond au nombre de franchissement de la transition tq dans la séquence F . Dans la figure 2.4 où la séquence de tir était $F = \{c_1\}$, le vecteur caractéristique est égal à $F^- = (1, 0, 0, 0)$.

2.1.2.3 Marquages accessibles

Soit $N = (R ; M_0)$ un réseau de Petri. L'ensemble des marquages accessibles $A(R ; M_0)$ d'un réseau de Petri marqué est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial M_0 par une séquence de franchissement, après un temps τ , c.-à-d.

$$A(R ; M_0) = \{M_i, \exists cq, M_0 \xrightarrow{cq/\tau} M_i\}$$

On peut, lorsque cet ensemble est fini, le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux marquages accessibles de $A(R ; M_0)$. Un arc orienté relie deux sommets M_i et M_j s'il existe une transition cq franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre après un temps τ : $M_i \xrightarrow{cq/\tau} M_j$. La figure 2.2 représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Petri de la figure 2.1 avec un marquage initial $M_0 = (1, 0, 0, 0, 1)$.

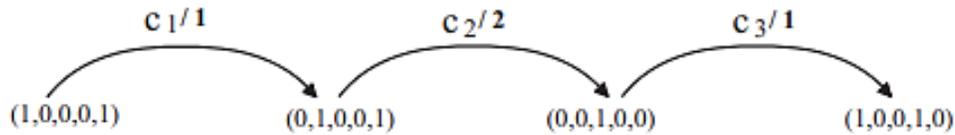


Figure 2.2 : Graphe des marquages atteignable du réseau de pétri

2.1.2.4. Concurrency and synchronization in RdP

The formalism of Petri nets is very powerful, it allows to represent a wide variety of behaviors of real systems involving phenomena of concurrency and synchronization. In figure 2.3, we have represented four Petri net structures allowing to describe these phenomena.

- ❖ The figure 2.3 (a) represents a choice structure. The place p_1 has two outgoing transitions, labeled c_1 and c_2 . The firing of c_1 or c_2 consumes the token of the place p_1 and excludes the firing of the other. Such a configuration allows to model a concurrency phenomenon at the consumption level as for example the sharing of a processor between concurrent tasks in an information system ;

- ❖ The configuration of the figure 2.3(b) allows to represent a concurrency at the production level in a place, here p_1 ;

- ❖ The configuration of the figure 2.3(c) allows to model a synchronization phenomenon. The transition c_1 is only franchissable when the places p_1 and p_2 contain at least one token ;

- ❖ In the structure of the figure 2.3(d), the production of tokens in the places p_1 and p_2 is synchronized by the firing of the transition c_1 and allows, for example, to model the simultaneous initiation of different tasks in a discrete event system.

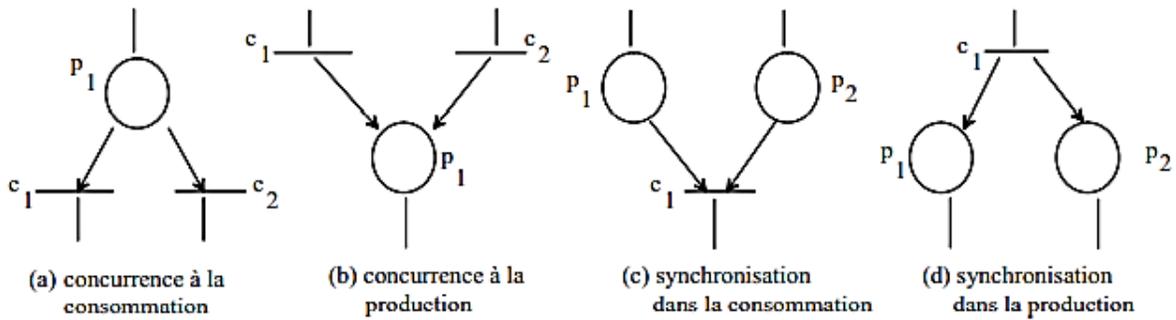


Figure 2.3 : Concurrency et synchronisation dans les RdP

1.2.5 Quelques propriétés des RdP

Le graphe des marquages associé à un RdP fournit des indications essentielles sur le fonctionnement du système qu'il représente. Suivant que le graphe des marquages est fini ou infini, qu'il présente ou non des circuits, il reflète certaines des propriétés caractéristiques du système modélisé.

Définition 2.2 (Borgnitude). Une place $p \in P$ d'un réseau de Petri marqué $(R ; M_0)$ est k -bornée ($k \in \mathbb{N}$) si pour tout marquage accessible $M \in A(R ; M_0)$, le marquage de cette place vérifie $M(p) \leq k$. Dans le cas contraire, nous dirons que p est non-bornée. Enfin si p est 1-bornée, on dit que p est binaire. Si on considère le réseau de Petri de la figure 1, on voit que pour le marquage initial M_0 , les places $p_1 ; p_2$ et p_3 sont binaires (1-bornées) et le réseau est dit sauf.

Lorsqu'un RdP modélise un système manufacturier, certaines places représentent des convoyeurs ou bien des zones de stockages intermédiaires. La borgnitude du marquage du modèle est alors synonyme de limitation de la taille des stocks internes du système. La borgnitude du RdP reflète alors en quelque sorte une propriété de "stabilité" du système de production modélisé.

Définition 2.3 (Vivacité). Étant donné un réseau de Petri R et un marquage initial M_0 , une transition t est vivante pour le réseau marqué $(R ; M_0)$ si pour tout marquage M accessible depuis M_0 , il existe une suite de transitions F , comportant au moins une fois la transition t , et telle que F soit franchissable pour M .

Un réseau de Petri marqué $(R ; M_0)$ est dit vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

Remarque 2.1 (L'intérêt d'étude de la vivacité d'un modèle). L'évolution du marquage d'un RdP se fait par franchissement de transitions. Lorsqu'au cours de son évolution, certaines transitions ne sont jamais franchies, cela indique que l'événement associé à la transition ne se produit pas et que le marquage d'une partie du RdP n'évolue pas. Cela indique que le sous-système

modélisé par cette partie-là ne fonctionnera pas. Il y a donc un problème au niveau de la conception du système. L'idée est d'être capable de détecter systématiquement ce phénomène par l'analyse de propriétés du modèle RdP, afin de disposer d'un outil d'aide à la conception des systèmes.

2.1.2.6. Invariants d'un réseau de Petri

Il existe deux types d'invariants (appelés semi flots) dans un RdP [14] : les invariants de marquage (notés également P-invariant) et les invariants de franchissement (notés également T-invariant).

Définition 2.4 Les invariants de marquage, appelés P-invariant, ou encore P semi flots, illustrent la conservation du nombre de jetons dans un sous ensemble de places du RdP. Un vecteur, noté K , de dimension égale au nombre de places du RdP est un P-invariant si, et seulement s'il vérifie l'équation suivante :

$$K^t \times C = \rightarrow 0, K^t \times M_0 = n, n \in \mathbb{N}^* \quad (2.2)$$

Où C correspond à la matrice d'incidence du RdP.

D'après l'équation (2.1), on déduit que si K est un P-invariant, alors pour un marquage donné, noté M_i , obtenu à partir d'un marquage initial M_0 , on a :

$$K^t \times M_i = K^t \times M_0 = n, n \in \mathbb{N}^*$$

Cette équation représente un invariant de marquage, elle signifie que si K est un P-invariant du RdP alors la transposée du vecteur K pondéré par le vecteur marquage m_i du RdP est une constante entière quel que soit le marquage m_i atteignable à partir du marquage initial m_0 . L'ensemble des places pour lesquelles la composante associée dans le P-invariant est non nulle, est appelée la composante conservative du RdP.

Définition 2.5 Un vecteur non nul d'entiers Θ de dimension $|T| \times 1$ est un T-invariant, ou encore T-semi flots, du RdP si, et seulement s'il vérifie l'équation suivante :

$$C \times \Theta = \rightarrow 0.$$

D'après l'équation (2.1), le franchissement à partir d'un marquage m_i d'une séquence dont le vecteur caractéristique est Θ ramène le graphe au même marquage $m_k = m_i$.

Un T-invariant correspondant à une séquence de franchissement réalisable est appelé composante répétitive. L'ensemble des transitions pour lesquelles la composante associée dans le T-invariant est non nulle est appelé le support du T-invariant.

Définition 2.6 Un RdP est dit consistant s'il possède un T-invariant Θ couvrant toutes les transitions du réseau. Un RdP qui possède cette propriété est dit répétitif ou réinitialisable. Le réseau atteint un régime périodique dès lors qu'il existe une séquence de franchissement réalisable avec Θ , comme vecteur caractéristique.

Définition 2.7 Un RdP est dit conservatif si toutes les places du graphe forment une composante conservative.

Remarque 2.2

- ❖ Un réseau de Petri consistant est dit fortement connexe si, et seulement s'il est conservatif.
- ❖ Si toutes les places d'un RdP forment une composante conservative, le graphe est dit conservatif.
- ❖ Toute combinaison de T-invariants (resp., P-invariants) est un T-invariant (resp., P-invariant).
- ❖ Un réseau de Petri consistant a un unique T-invariant élémentaire.
- ❖ Le produit des poids d'un circuit d'un réseau de Petri conservatif est égal à 1.

Exemple 2.2 Considérons le RdP de la figure 2.4 qui suit, un P-invariant est le vecteur K vérifiant :

$$K^t \times C = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Il existe un P-invariant : $Kt = (0, 0, 1, 1, 1)$. L'invariant de marquage est :

$$1 \times m(p_3) + 1 \times m(p_4) + 1 \times m(p_5) = 6.$$

Ceci signifie que les places p_1 et p_2 forment une composante conservative du graphe.

Le RdP de la figure 2.4 admet un T-invariant, $\Theta t = (6, 2, 3)$; vérifiant :

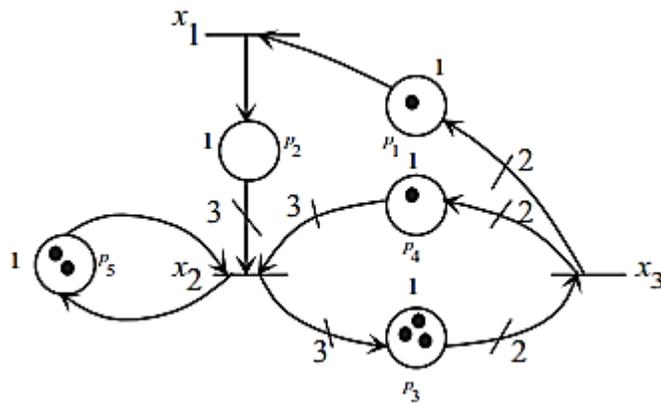


Figure2.4 : RdP Réseau de Petri à arcs pondérés

Définition 2.8 Un RdP est dit k -serveur si, pour chaque transition, il ne peut y avoir au maximum que k franchissements simultanés. Une boucle de réentrance implicite contenant k jetons est alors associée à chaque transition du graphe.

❖ Dans le cas où $k = 1$, le RdP est dit mono-serveur.

❖ Dans le cas où le nombre de franchissement de transitions n'est pas limité, le RdP est dit infinité-serveur.

❖ Dans la suite, on note $\bullet q$ (resp., $q \bullet$) l'ensemble des places situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la transition tq . Similairement, $\bullet p$ (resp., $p \bullet$) représente l'ensemble des transitions situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la place p .

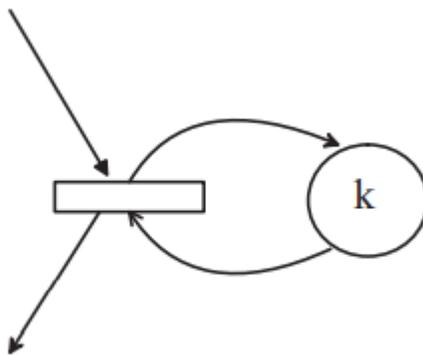


Figure2.5 : Boucle de réentrance

2.1.3. Graphes d'événements

Définition 2.9 (Graphe d'événements) : Un graphe d'événements est un réseau de Petri ordinaire tel que toute place $p \in P$ a exactement une transition amont et une transition aval (nous nous restreignons au cas où tous les poids des arcs sont égaux à 1).

Notons que les graphes d'événements ne permettent pas de modéliser les situations de concurrence. Néanmoins, cette sous-classe de réseaux de Petri est intéressante pour de nombreuses applications où l'on doit essentiellement modéliser des contraintes de synchronisation [15].

2.1.3.1. Temporisation et fonctionnement d'un graphe d'événements [16]

Définition 2.10 (Graphe d'événements temporisé) : Un graphe d'événements (Définition 3.5) est dit temporisé si des temporisations sont associées aux places et/ou transitions. Deux cas sont envisageables :

1. Soit, nous associons à chaque transition t une durée minimale de tir $\theta(t)$. On parle donc des graphes d'événements 't-temporisés'.

2. Soit, nous associons à chaque place p une durée minimale $\theta(p)$. On parle donc des graphes d'événements p -temporisés, c'est ceux que nous allons utiliser dans ce mémoire.

Formellement, on peut définir un réseau de Petri temporisé comme suit :

$$\theta_f : P \rightarrow Q^+$$

Un réseau de Petri temporisé avec n places et transitions est un doublet

$$R_t = \langle R, \theta_f \rangle \text{ avec :}$$

- ❖ R , est un réseau de Petri $\langle P, T, Pre, post \rangle$ avec un marquage initial M_0 ;
- ❖ θ_f , est la fonction durée de franchissement.

Qui à chaque transition fait correspondre un nombre rationnel positif décrivant la durée du franchissement.

Remarque 2.3 : Dans la suite de ce mémoire, nous considérons des graphes d'événement 'P-temporisés' où les temporisations sont associées aux places. Pour chaque couple de transitions $t_i, t_j \in T$, tel que : T est l'ensemble des transitions du graphe considérée. On note P_{ij} la place qui relie la transition t_j à t_i . Si cette place existe, la temporisation correspondante est notée τ_{ij} et son marquage est noté M_{ij} . Si quelque soit l'évolution du graphe considéré le plus grand marquage des places est 1, on dit que le graphe est binaire ou sauf.

2.1.3.2. Fonctionnement d'un graphe d'événements temporisé [17]

2.1.3.2.1. Fonctionnement au plus tôt d'un GET

On appelle fonctionnement au plus tôt d'un GET, le mode de fonctionnement suivant :

- ❖ Toutes les transitions internes et puits sont franchis dès que possible. Autrement dit, les jetons qui arrivent dans une place, pourront contribuer au franchissement de la transition en aval dès que le temps de séjour minimum se termine ;
- ❖ Les transitions sources sont en permanence franchissables, mais ne sont franchies que sur l'occurrence d'événements externes associés à ces transitions.

2.1.3.2.2. Fonctionnement FIFO

- ❖ Si le k -ième jeton qui arrive dans une place d'un graphe d'événements p -temporisé est aussi le k -ième jeton disponible pour franchir une transition en aval, alors cette place fonctionne selon la règle FIFO.
- ❖ Si le k -ième tir d'une transition d'un graphe d'événements t -temporisé à commencer est aussi le k -ième tir à se terminer, alors cette transition fonctionne selon la règle FIFO.

Définition 2.11 (GET FIFO) : On dit qu'un graphe d'événements est FIFO, si toutes ses places et transitions sont FIFO.

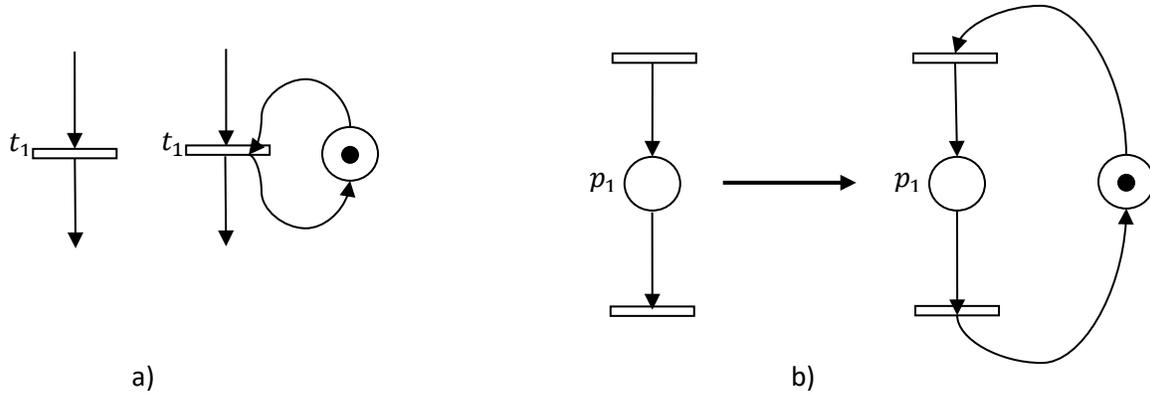


Figure 2.6 : Recyclage d'une transition et d'une place pour garantir le fonctionnement FIFO

2.1.3.2.3. Propriétés des graphes d'événements [18]

Nous rappelons brièvement quelques caractéristiques des graphes d'événements :

❖ **Circuit :** Un circuit est un chemin où la transition terminale est aussi la transition initiale.

❖ **Circuit élémentaire :** est un chemin qui commence et se termine au même sommet (que ce soit place ou transition). Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons d'un circuit élémentaire est constant.

❖ **Chemin :** Un chemin entre deux transitions t_i et t_j d'un réseau de Petri, est une succession de place et de transitions relié par des arcs, tel que la transition initiale du premier arc est t_i , le sommet terminal du dernier arc est t_j .

❖ **Chemin élémentaire :** Un chemin élémentaire est un chemin où aucun arc n'est répété.

Soit R un graphe d'événements et M_0 son marquage initial, alors (R, M_0) est vivant si et seulement si tout circuit élémentaire contient une place initialement marquée.

Remarque 2.4 : Dans la suite de ce mémoire les graphes d'événements considérés sont systématiquement vivants.

2.1.4. Graphes d'événements temporisés avec conflit-GETC

Définition 2.12 (GETC) : Un graphe d'événements temporisé avec conflit, est un ensemble de N graphes d'événements temporisés (EUSU)^[1] compétitifs, tels que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

2.1.5. L'algèbre des dioïdes

2.1.5.1. Introduction

L'algèbre est une branche des mathématiques qui permet d'exprimer les propriétés des opérations et le traitement des équations et aboutit à l'étude des structures algébriques. Selon l'époque et le niveau d'études considérés, elle peut être décrite comme :

- ❖ Une arithmétique généralisée, étendant à différents objets ou grandeurs les opérations usuelles sur les nombres ;
- ❖ La théorie des équations et des polynômes ;
- ❖ Depuis le début du XX^e siècle, l'étude des structures algébriques (on parle d'algèbre générale ou abstraite).

Le domaine d'application de l'algèbre s'étend des problèmes arithmétiques, qui traitent de nombres, à ceux d'origine géométrique tels que la géométrie analytique de Descartes ou les nombres complexes. L'algèbre occupe ainsi une place charnière entre l'arithmétique et la géométrie permettant d'étendre et d'unifier le domaine numérique

2.1.5.2. Généralités

L'algèbre des dioïde est un outil mathématique puissant qui permet une description linéaire de certains systèmes qui auraient une représentation non linéaire. En particulier, les systèmes dynamiques à événements discrets (SDED) où les phénomènes de synchronisation prédominent.

Certaines sous-classes des SED bénéficient néanmoins de modèles linéaires. Il s'agit notamment des systèmes mettant en jeu des phénomènes de synchronisation et de retard et dont une représentation graphique par des graphes d'événements temporisés GET, qui est une sous-classe des réseaux de Petri (RdP), conduit à des modèles dans les dioïdes avec des variables d'état de type dateurs d'événements ou compteurs d'événements très proche de la représentation d'état d'un système linéaire continu.

2.1.5.3. Rappels algébriques (Algèbre des dioïdes)

Définition 2.13 (dioïde) : Un ensemble \mathcal{D} muni de deux opérations internes notées \oplus et \otimes appelées "addition" et "multiplication" respectivement, telles que, pour $a, b, c \in \mathcal{D}$:

- ❖ L'addition est associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- ❖ L'addition est commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;
- ❖ L'addition est idempotente : $a \oplus a = a$;
- ❖ L'addition admet un élément neutre : noté ε et appelé « zéro » : $a \oplus \varepsilon = a$;
- ❖ La multiplication est associative : $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
- ❖ La multiplication admet un élément neutre : noté e et appelé "identité" : $a \otimes e = e \otimes a = a$;
- ❖ La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ et $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$
- ❖ Le zéro est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$;

Le dioïde est dit commutatif si la multiplication est commutative ($a \otimes b = b \otimes a$).

Exemple 2.3 :

i. L'ensemble $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est noté \mathbb{R}_{\max} "Algèbre Max-Plus". Dans ce dioïde, la loi \oplus correspond à l'application maximum ($5 \oplus 2 = \max(5, 2) = 5$), et la loi \otimes est la somme usuelle ($9 \otimes 3 = 9 + 3 = 12$).

ii. L'ensemble $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est noté \mathbb{R}_{\min} "Algèbre Min-Plus". Dans ce dioïde, la loi \oplus correspond à l'application minimum ($5 \oplus 2 = \min(5, 2) = 2$), et la loi \otimes est la somme usuelle ($5 \otimes 2 = 5 + 2 = 7$).

2.1.5.4. Propriétés des dioïdes

2.1.5.4.1. Dioïdes comme structures ordonnées

Du fait que l'opération \oplus à la propriété d'idempotence, il est possible de définir une relation d'ordre sur un dioïde comme suit :

Définition 2.14 (Relation d'ordre dans un dioïde) : Dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, on définit la relation d'ordre \leq par :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{D}^2, a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b \Leftrightarrow a = a \wedge b \quad (3.1)$$

Une relation \mathcal{R} sur un ensemble \mathbb{S} est une relation d'ordre si les trois axiomes suivants sont vérifiés $\forall a, b, c \in \mathbb{S}$:

- ❖ \mathcal{R} est réflexive : $a \mathcal{R} a$
- ❖ \mathcal{R} est transitive : si $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$, alors $a \mathcal{R} c$
- ❖ \mathcal{R} est antisymétrique : si $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} a$, alors $a = b$.

On peut vérifier facilement les propriétés de réflexivité, transitivité et d'antisymétrie. En effet, puisque l'addition \oplus est idempotente, on a alors $a = a \oplus a \leq a$, ce qui montre la réflexivité [19].

Considérons maintenant $a \leq b$ et $b \leq a$, d'après la définition précédente, on a $a = b = a \oplus b$, d'où l'antisymétrie.

Pour la transitivité, il suffit de prendre $a \leq b$ et $b \leq c$ et de montrer que $a \leq c$. Pour cela, on sait que $b = a \oplus b$ et $c = b \oplus c$, d'où $c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c$. On en déduit que $a \leq c$ [19].

Théorème 2.1 : La relation d'ordre définie dans le dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ vérifie les propriétés suivantes [19] :

$$1. a \leq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{D}, b = a \oplus c. \quad (3.2)$$

2. la relation d'ordre \leq est compatible avec les lois \oplus et \otimes de \mathcal{D}

$$\forall (a, b, c) \in \mathcal{D}^3, a \leq b \Rightarrow a \oplus c \leq b \oplus c \quad (3.3)$$

$$a \leq b \Rightarrow a \otimes c \leq b \otimes c \quad (3.4)$$

Remarque 2.5 :

1. La relation d'ordre d'un dioïde est dite totale si et seulement si,

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \leq b \text{ ou } b \leq a \Leftrightarrow a \oplus b = a \text{ ou } b. \quad (3.5)$$

2. Dans \mathbb{R}_{max} , la relation \leq coïncide avec l'ordre usuel ($1 \leq 3$). En revanche, dans \mathbb{R}_{min} , la relation \leq est l'inverse de l'ordre usuel ($3 \leq 1$).

2.1.5.4.2. Dioïde complet

Définition 2.15 (dioïde complet) : Un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est dit complet si, dans ce dioïde, toute somme finie ou infinie d'éléments est définie et telle que la distributivité (à droite et à gauche) de \otimes par rapport à \oplus s'étende aux sommes infinies [19]. $\forall A \subset \mathcal{D}, \forall B \subset \mathcal{D}$ et $\forall b \in \mathcal{D}$, on a :

$$(\oplus_{a \in A} a) \otimes b = \oplus_{a \in A} (a \otimes b)$$

$$b \otimes (\oplus_{a \in A} a) = \oplus_{a \in A} (b \otimes a)$$

On en déduit que :

$$\left(\bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes \left(\bigoplus_{b \in B} b \right) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} (a \otimes b) \quad (3.6)$$

Dans un dioïde complet \mathcal{D} , le plus grand élément (top) existe et est noté T . Correspondant à la somme de tous les éléments du dioïde, on écrit alors $T = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$. L'élément T est absorbant pour la loi \bigoplus , $\forall a \in \mathcal{D}, T \bigoplus a = T$.

Exemple 2.4 : Les dioïde suivants sont complets :

i. $(R \cup \{\pm\infty\}, \max, +)$, $T = +\infty$ avec la convention $(-\infty) + (+\infty) = (-\infty)$. Ce dioïde sera noté $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

ii. Dualement, le dioïde que l'on notera par la suite $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ est le dioïde $(R \cup \{\pm\infty\}, \min, +)$, tel que $T = -\infty$ et $(+\infty) + (-\infty) = (+\infty)$

2.1.5.4.3. Dioïde des matrices

Soit un dioïde \mathcal{D} des "scalaires". Nous considérons l'ensemble des matrices carrées de dimensions $n \times n$ dont les éléments appartiennent à \mathcal{D} . On définit alors $(\mathcal{D}^{n \times n}, \bigoplus, \otimes)$ comme un dioïde matriciel, avec l'élément neutre (zéro) pour \bigoplus sous la forme d'une matrice dont tous les coefficients $A_{ij} = \varepsilon$, Le produit \otimes a également un élément neutre (identité) noté $I_{\mathcal{D}}$ composé de la manière suivante [19] :

$$1. A_{ij} : \begin{cases} e & \text{si } i = j \\ \varepsilon & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.7)$$

Si \mathcal{D} est complet alors $\mathcal{D}^{n \times n}$ l'est aussi.

2.1.5.4.3.1. Opérations sur les matrices

La somme et le produit des matrices de dimensions appropriées, se présentent généralement de la manière suivante :

$$\forall A \in \mathcal{D}^{n \times q}, \forall B \in \mathcal{D}^{n \times q} \quad (A \bigoplus B)_{ij} = A_{ij} \bigoplus B_{ij} \quad (3.8)$$

$$\forall A \in \mathcal{D}^{n \times q}, \forall B \in \mathcal{D}^{q \times p} \quad (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} \quad (3.9)$$

Dans l'algèbre $(\min, +)$, les deux opérations sont définies comme suit :

$$(A \wedge B)_{ij} = A_{ij} \wedge B_{ij}$$

$$(A \odot B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^n A_{ik} \odot B_{kj}$$

L'opérateur \odot est utilisé pour désigner un produit dans l'algèbre $(\min, +)$.

Exemple 2.5 : Nous donnons ici un exemple d'un produit et une somme de deux matrices carrées dans l'algèbre $(\max, +)$:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max[9, 1] & \max[3, 3] \\ \max[0, 7] & \max[2, 5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max[9 + 1, 3 + 7] & \max[9 + 3, 3 + 5] \\ \max[0 + 1, 2 + 7] & \max[0 + 3, 2 + 5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

On peut définir la multiplication d'une matrice A par une constante α :

$$(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij} = \alpha + A_{ij}$$

En général, la multiplication des matrices dans $\mathcal{D}^{n \times n}$ n'est pas commutative [19], même si $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est commutative. $\mathcal{D}^{n \times n}$ Est distributif si \mathcal{D} l'est. $A \geq B$ Dans $\mathcal{D}^{n \times n} \Leftrightarrow \{A_{ij} \geq B_{ij} \text{ dans } \mathcal{D}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n\}$.

1.5.4.4. Sous dioïde

Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde. Le sous ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ est qualifié de sous dioïde de $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, noté $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$, si et seulement si $\varepsilon, e \in \mathcal{C}$ et le sous ensemble \mathcal{C} 'est fermé pour les lois \oplus et \otimes [21], c'est-à-dire :

$$\forall a, b \in \mathcal{C}, a \oplus b \in \mathcal{C} \text{ et } a \otimes b \in \mathcal{C}. \quad (3.10)$$

Exemple 2.6 : L'ensemble $\bar{\mathbb{N}}_{\min} = (\mathbb{N} \cup \{+\infty, -\infty\}, \min, +)$ est un sous-dioïde complet du dioïde $\bar{\mathbb{R}}_{\min}$. On remarque que le dioïde $\bar{\mathbb{N}}_{\min}$ est fermé pour les lois \oplus et \otimes , $\varepsilon, e \in \bar{\mathbb{N}}_{\min}$ et e est le plus grand élément de ce dioïde (dans Min-Plus est l'inverse de l'ordre usuel).

2.1.5.5. Solution de l'équation : $x = ax \oplus b$

Etant donné a et b dans un dioïde complet \mathcal{D} , nous considérons l'équation :

$$x = ax \oplus b \quad (3.11)$$

Et l'inégalité :

$$x \geq ax \oplus b \quad (3.12)$$

L'équation (3.11) peut admettre une infinité de solutions, elle admet une plus petite solution, notée a^*b avec $a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$. Classiquement, le calcul des étoiles des matrices se réduit au calcul des étoiles de scalaire après avoir procédé à une élimination de Gauss [19].

Définition 2.16 (Etoile de Kleene) : Soit \mathcal{D} un dioïde complet et a un élément de \mathcal{D} , l'étoile de Kleene de a , notée a^* , est définie comme suit : $a^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a^k$ avec $a^0 = e$. C'est la même chose avec l'étoile de Kleene d'une matrice carrée $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$, notée A^* , est définie par : $A^* = \bigoplus_{(i \in \mathbb{N})} A_i$ avec $A^0 = Id_n$ (Id_n désigne la matrice identité) [18].

Théorème 2.2 : Soit \mathcal{D} un dioïde complet, l'équation implicite :

$$x = a \otimes x \oplus b \quad (3.13)$$

Admet :

$$x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b \quad (3.14)$$

Comme plus petite solution. L'opérateur '*' est appelé étoile de Kleene [18].

Vérification : On démontre que $x = a^*b$ est une solution de $x = ax \oplus b$:

$$a(a^*b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots)b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \dots)b = a^*b.$$

Exemple 2.7 :

$$x = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix}$$

Le calcul de a^* nous donne :

$$a^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \varepsilon = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & e & 3 \\ 4 & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

$$I \quad \oplus \quad A \quad \oplus \quad A^2$$

Qui donne :

$$x = a^*b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.1.5.6. Représentation d'état des GET

Le comportement dynamique d'un système à événement discret peut se représenter, classiquement, en considérant la variation du marquage d'un réseau de Petri, notée ΔM , définie comme l'expression du produit de la matrice d'incidence W , par un vecteur de tirs de transitions, noté \underline{S} [18]. L'évolution du marquage est représentée par une équation de la forme :

$$M_f = M_0 + \Delta M \quad (3.15)$$

Définition 2.17 : (Réseaux de Petri P-temporisés) : On associe pour chaque couple de transition $t_i, t_j \in T$ on note P_{ij} la place qui relie la transition t_j à t_i . Si cette place P_{ij} existe, la temporisation (en valeur rationnelle positive) correspondante est notée τ_{ij} et son marquage noté m_{ij} . La plus grande temporisation du graphe d'évènement considéré est notée τ^{max} , définie par [10] :

$$\tau^{max} = \max\{\tau_{ij}\}_{ij/p_{ij} \in P}; \quad (3.16)$$

Le plus grand marquage initial des places du graphe d'évènement considéré est noté m^{max} , défini par :

$$m^{max} = \max\{m_{ij}\}_{ij/p_{ij} \in P}. \quad (3.17)$$

2.1.5.6.1. Principe de fonctionnement

Lorsqu'une marque arrive dans une place temporisée, on dit qu'elle est indisponible pendant

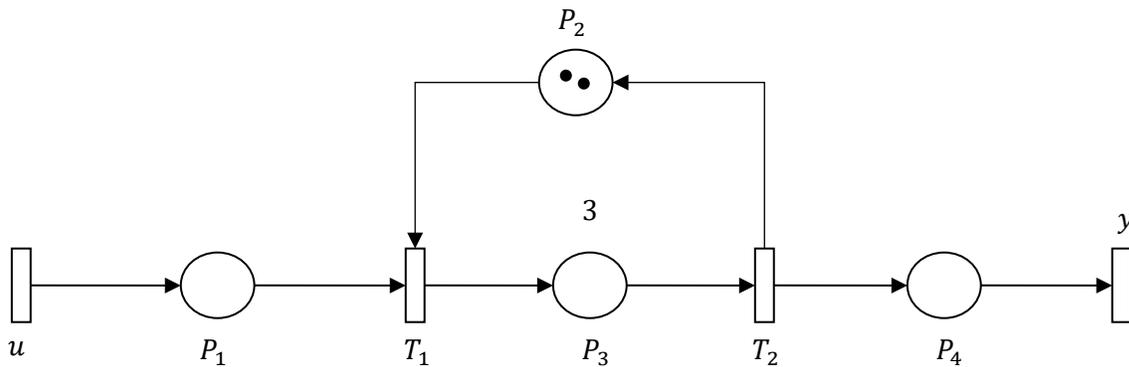


Figure 2.7 : Exemple d'un graphe d'événements temporisé

Un temps τ_{ij} . Quand le temps est écoulé, la marque devient disponible.

2.1.5.6.2. Fonctions compteurs, domaine temporel

La mise en équation de GET peut se faire dans le domaine temporel, où le système est écrit par des fonctions dépendant du temps t . Dans ce cas, on ne s'intéresse plus aux dates d'activation des transitions mais au nombre d'activation de ces dernières jusqu'à un moment donné. En effet, cette représentation consiste à associer à chaque transition un vecteur $\theta(t) \in \mathbb{R}_{min}^n$ que l'on appellera : *compteur*. Le comportement d'un graphe d'évènements temporisé, si on s'intéresse à l'évolution au plus tôt, est représenté par l'équation dans \mathbb{R}_{min}^n .

On associe à chaque transition t_i une fonction appelée compteur $\theta(t) \in \mathbb{R}_{min}^n$ qui désigne le nombre de tirs de transition t_i cumulés à l'instant t .

Les compteurs correspondants aux transitions source sont les composantes du vecteur $u(t) \in \mathbb{R}_{min}^m$.

Exemple 2.18 :

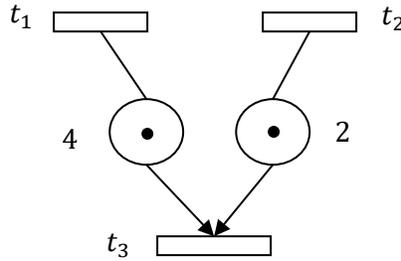


Figure 2.8 : Exemple d'un GET avec la fonction compteur

$$\theta_3(t) \leq \min (1 + \theta_1(t - 4), 1 + \theta_2(t - 2))$$

Généralement, le comportement d'un graphe d'évènements temporisé est représenté par l'inéquation suivante :

$$\theta(t) \leq \bigoplus_{\tau=0}^{\tau \max} (A_{\tau} \cdot \theta_1(t - \tau) \oplus B_{\tau} \cdot u(t - \tau)) \quad (3.18)$$

Où $A_{\tau} \in \mathbb{R}_{min}^{n \times n}$ est la matrice dont le terme $A_{\tau ij}$ est égal à m_{ij} , qui correspond au nombre de jeton initiaux dans la place p_{ij} si cette place existe et ε sinon. Les termes des matrices $B_{\tau}(k) \in \mathbb{R}_{min}^{n \times n}$ correspondant aux marquages initiaux des places de sortie des transitions sources. En général, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt des graphes d'évènements temporisés, c'est-à-dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Cette évolution correspond à la solution maximale de l'inéquation précédente dans \mathbb{R}_{min} . Cette solution satisfait l'équation linéaire (3.19) (implicite) suivante :

$$\theta(t) \leq \bigoplus_{\tau=0}^{\tau \max} (A_{\tau} \cdot \theta(t - \tau) \oplus B_{\tau} \cdot u(t - \tau)) \quad (3.19)$$

Définition 2.19 (forme ARMA) : ARMA (Autorégressif à Moyenne Ajustée. En anglais : Auto Regressive-Moving Average). Appelée aussi forme explicite, définit l'ensemble des dates au plus tôt pour le fonctionnement du système. Ainsi, à partir d'un vecteur de commande $u(t)$ et des états précédents, l'équation (3.20) permet de déterminer toutes les valeurs du vecteur d'état. ARMA signifie Autorégressif à Moyenne Ajustée.

En fait, le passage à la forme explicite se fait par la résolution de la partie implicite, en sélectionnant la plus grande solution de l'équation implicite. Ceci correspond bien au fonctionnement « au plus tôt ». La forme ARMA est donnée par la formule suivante :

$$\theta(t) = \bigoplus_{\tau=1}^{\tau \max} (A_0^* \cdot A_{\tau} \theta(t - \tau) \oplus A_0^* B_{\tau} u(t - \tau)) \oplus A_0^* B_0 u(t) \quad (3.20)$$

Où : A_0^* est 'l'étoile de Kleene' de la matrice A_0 .

La suppression de la partie implicite correspond dans le Graphe d'événements à une transformation au cours de laquelle les places internes (entre deux transitions) sans temporisation sont supprimées.

2.1.5.6.2.1. Equation d'état dans \mathbb{R}_{min}

Par analogie avec la théorie des systèmes linéaires classiques, l'équation explicite (3.20) peut être transformée en une forme d'état. Pour obtenir un modèle d'état, nous décomposons toutes les places dont la temporisation $\tau > 1$ en places temporisées à $\tau = 1$. Nous ajoutons donc $(\tau - 1)$ transitions intermédiaires. On associe des compteurs à ces transitions intermédiaires, au nombre de n' qui sont les composantes du vecteur $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}_{min}^{n'}$. Le vecteur d'état résultant, noté $x(t)$, appartient à \mathbb{R}_{min}^N , avec $N = n + n'$, et est défini par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

Le comportement dynamique du graphe d'événements temporisé étendu est décrit par une équation de la forme :

$$x(t) = \hat{A}_0 \cdot x(t) \oplus \hat{A}_1 \cdot x(t - 1) \oplus \hat{B} \cdot u(t)$$

On peut écrire l'équation (3.21) sous la forme explicite :

$$x(t) = A \cdot x(t - 1) \oplus B \cdot u(t) \quad (3.21)$$

Avec :

$$A = \hat{A}_0^* \cdot \hat{A}_1 \text{ et } B = \hat{A}_0^* \cdot \hat{B}.$$

2.1.5.6.3. Fonctions dateurs, domaine événementiel

Pour la représentation en dateurs, on s'intéresse aux dates d'activation des transitions du GET. Dans ce cas, on associe à chaque transition une fonction $\theta(k) \in \mathbb{R}_{max}^n$ cette fonction est appelée dateur. Les dateurs correspondants aux transitions source sont les composantes du vecteur $u(k) \in \mathbb{R}_{max}^n$.

La dynamique d'un graphe d'événements temporisé est représentée par l'inéquation suivante :

$$\theta(k) \geq \bigoplus_{l=0}^{m \max} (A_l \cdot \theta(k-l) \oplus B_l \cdot u(k-l)) \quad (3.22)$$

Où $A_l \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ est la matrice dont le terme $A_{l,ij}$ est égal à τ_{ij} , qui correspond à la temporisation de la place p_{ij} marquée a l . Si cette place n'existe pas, le terme $A_{l,ij}$ est égal à ε . Les termes des matrices $B_l \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ correspondant aux temporisations des places de sortie des transitions source.

En général, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt des graphes d'événements temporisés, c'est à dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Cette évolution correspond à la solution minimale dans \mathbb{R}_{max} de l'inéquation précédente. Cette solution satisfait l'équation linéaire (implicite) suivante :

$$\theta(k) = \bigoplus_{l=0}^{m \max} (A_l \cdot \theta(k-l) \oplus B_l \cdot u(k-l)) \quad (3.23)$$

On peut remplacer l'équation implicite (3.23) par sa solution explicite suivante :

$$\theta(k) = \bigoplus_{l=1}^{m \max} (A_0^* \cdot A_l \theta(m-l) \oplus A_0^* B_l \cdot u(m-l)) \oplus A_0^* B_l \cdot u(m)$$

Où : A_0^* est 'l'étoile de Kleene' de la matrice A_0 .

2.1.5.6.3.1. Equation d'état dans \mathbb{R}_{max}

Pour obtenir un modèle d'état dans \mathbb{R}_{max} pour des GET, nous décomposons toutes les places dont le marquage $m > 1$ en m places marquées à 1, et donc, nous ajoutons $(m-1)$ transitions intermédiaires. On associe des dateurs à ces transitions intermédiaires au nombre de n'' qui sont les composantes d'un vecteur $\bar{\theta}(k) \in \mathbb{R}_{max}^{n''}$. Le vecteur d'état résultant, noté $x(k)$, appartient à \mathbb{R}_{max}^N , avec " $N = n + n''$ ", et est défini par :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \bar{\theta}(k) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Dans notre cas, nous considérons des graphes d'événements dont le marquage des places qui ont des transitions source en amont est nul. Le comportement dynamique du graphe d'événements temporisé étendu est décrit par une équation de la forme :

$$x(k) = \hat{A}_0 \cdot x(k) \oplus \hat{A}_1 \cdot x(k-1) \oplus \hat{B} \cdot u(k)$$

On peut écrire (3.24) sous la forme explicite suivante :

$$x(k) = A. x(k - 1) \oplus B. u(k) \quad (3.25)$$

Avec :

$$A = \hat{A}_0^* . \hat{A}_1 \text{ et } B = \hat{A}_0^* . \hat{B}.$$

2.1.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les formalismes de modélisation des SED par l'algèbre min plus et les réseaux de pétri (RdP).

Nous avons essayé de bien définir, de donner des exemples, de présenter le fonctionnement et de prêter attention aux annotations de tous les graphes tels que les réseaux de Petri, les graphes d'événements en temps de conflit (GTEC). Et tous les outils mathématiques tel que l'algèbre min-plus

**Chapitre 3 : Modélisation et contrôle du FF flow-rack
par les réseaux de pétri temporisés (RdP-t) et
l'algèbre Min-plus**

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner un modèle pour le problème d'affectation des médicaments mentionné précédemment dans un distributeur automatique à base d'un « flow-rack » à chute libre, en utilisant la modélisation en réseau de Petri temporisé et à l'aide de l'algèbre des dioïdes. La mauvaise organisation (ou le mauvais emplacement) de ces médicaments dans le FF flow-rack cause des pertes de temps pendant la distribution. Pour cela, il faudrait les placer suivant deux priorités. La première c'est de mettre les médicaments fréquemment utilisés dans des casiers de la même colonne de casiers. Deuxièmement mettre ces médicaments dans des compartiments dont les colonnes sont adjacentes (de proche en proche).

Le FF flow-rack comprend un rack de stockage. Le rack est composé de plusieurs casiers qui peuvent contenir un seul type de médicament chacun.

Nous commençons par la représentation du modèle en RdP temporisés du problème d'affectation, après nous donnons le modèle en algèbre des dioïdes à partir du modèle en RdP temporisés. Nous traiterons des exemples d'application pour montrer la méthode de calcul utilisable pour l'implémentation dans le cas d'un système réel.

3.2. Modélisation du système par les réseaux de Petri temporisés

En premier lieu, nous allons modéliser notre système de dispensation par les réseaux de Petri. Pour cela, nous proposons les données (Table 3.1) :

Donnée	Signification
n	Le nombre des casiers du flow-rack à chute libre
m	Le nombre des emplacements de chaque casier

Table 3. 1 : Données de la configuration du flow-rack à chute libre

Remarque 3.1 : Dans la suite de l'application :

- Nous considérons que les racks sont composés de n casiers de m emplacements.
- Nous envisageons une vitesse de tir maximale entre les emplacements d'un même casier.
- Un seul type de médicament par casier.

Pour illustrer la disposition de notre flow-rack d'une manière générale, la (figure 3.1) montre une armoire avec sa configuration (Table 3.1) :

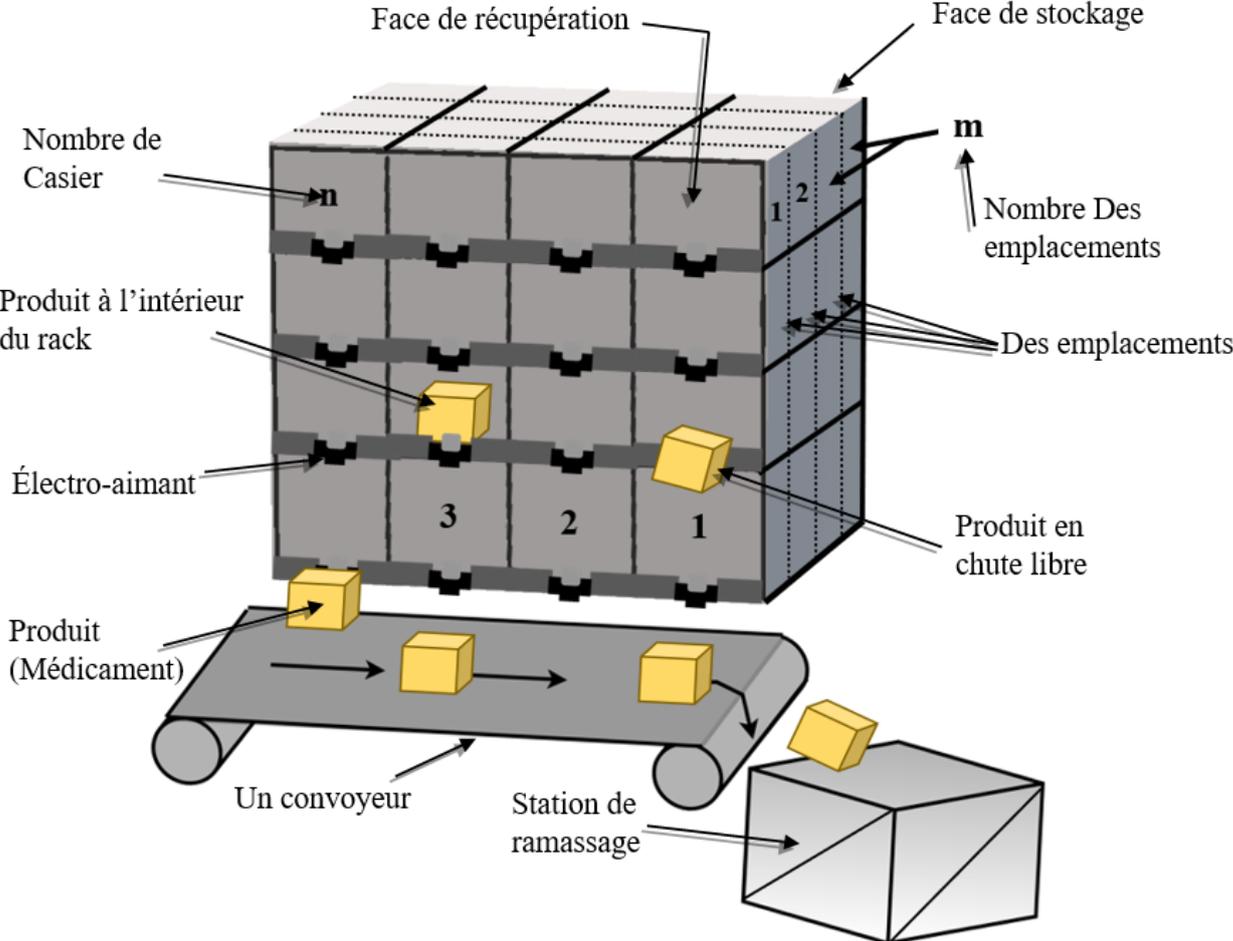


Figure 3.1 : Configuration d'un FF-Flow-rack

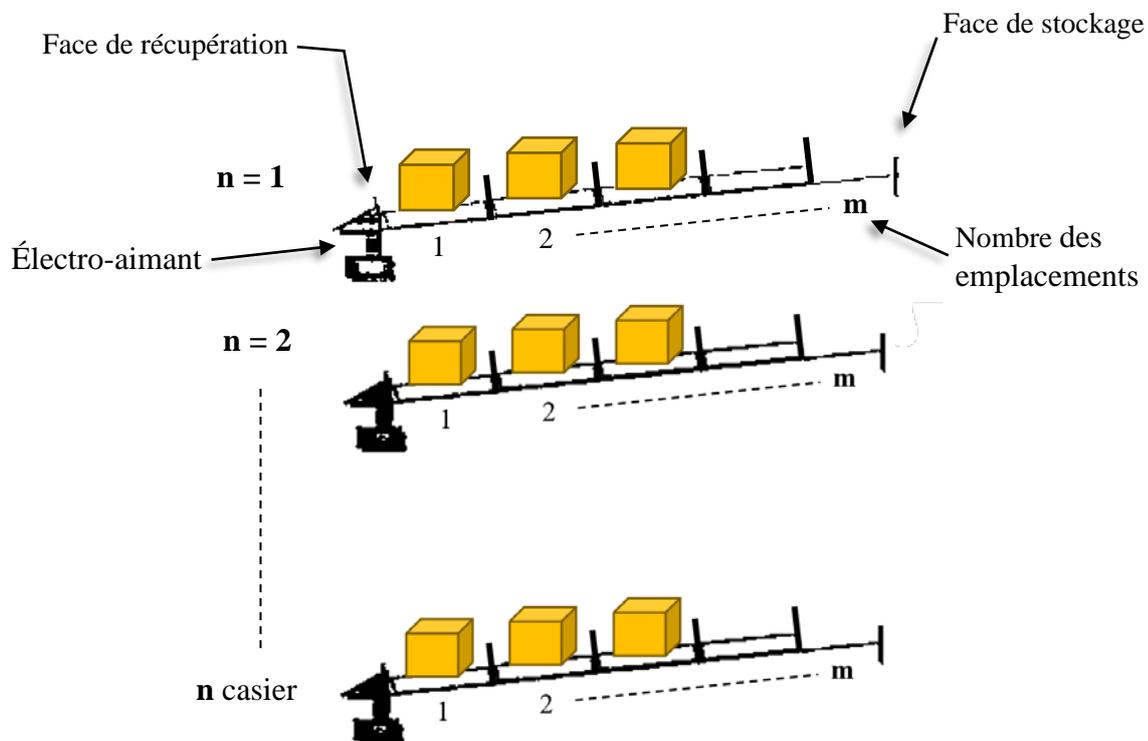


Figure 3.2 : L'Affectation des médicaments à l'intérieur du rack

La figure 3.2 montre la disposition des médicaments à l'intérieur d'un casier.

Pour modéliser notre système en RdP, nous devons définir les transitions et les places à donner à notre système et considérons que :

- **Les transitions du système**

Le tableau 3.2 donne les transitions utilisées et leurs interprétations.

Transition	Interprétation
T_{nm}	Transition d'un médicament à affecter dans le compartiment m d'un casier n .
T_{n0}	Éjection d'un médicament d'un casier n au convoyeur par électro- aimant

Table 3. 2 : Transitions du système

- **Places du système**

Le tableau 3.3 donne les places utilisées et leurs interprétations.

Place	Interprétation
P'_{nm}	Le compartiment m d'un casier n est libre
P_{nm}	Le compartiment m d'un casier n est occupé par un médicament

Table 3. 3 : Places du système

Remarque 3.2 : Le médicament à affecter est représenté par une marque (jeton) dans le RdP. Donc, l'affectation d'un médicament à un des compartiments d'un casier quelconque n peut-être représentée par la (figure 3.3) :

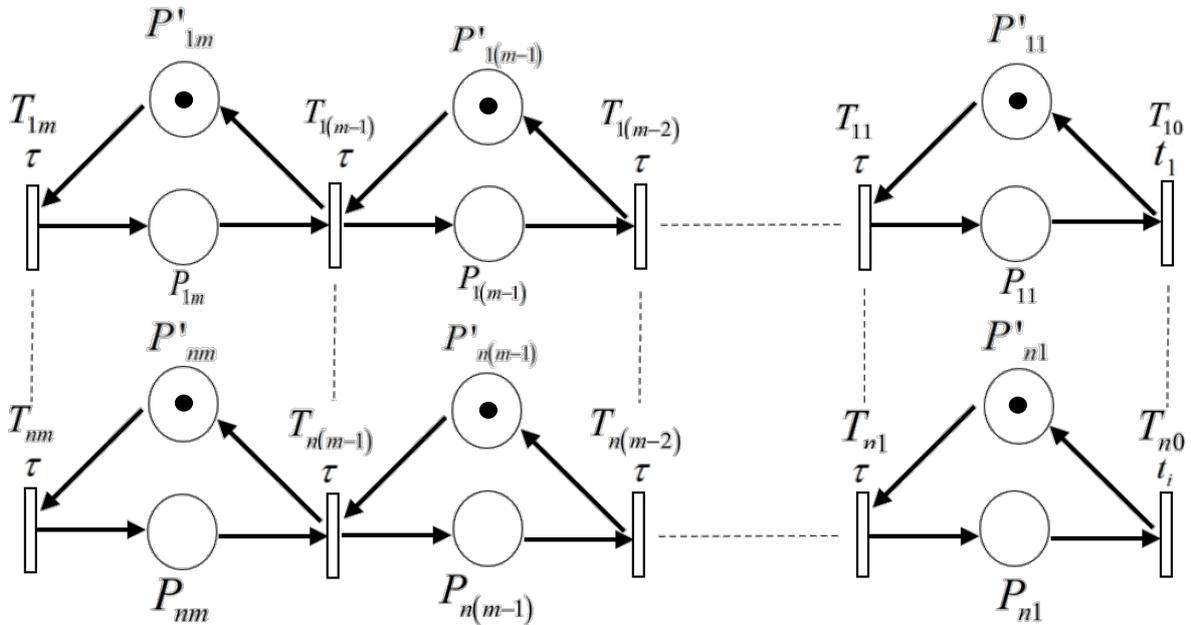


Figure 3.3 : Modèle RdP d'un FF flow rack de de n casiers et m emplacement.

Dans notre exemple d'étude, on suppose que notre système FF flow-rack contienne 16 casiers ($n=16$), chacun possède 04 emplacements ($m=4$). Un seul type de médicament par casier (Voir Figure 3.4).

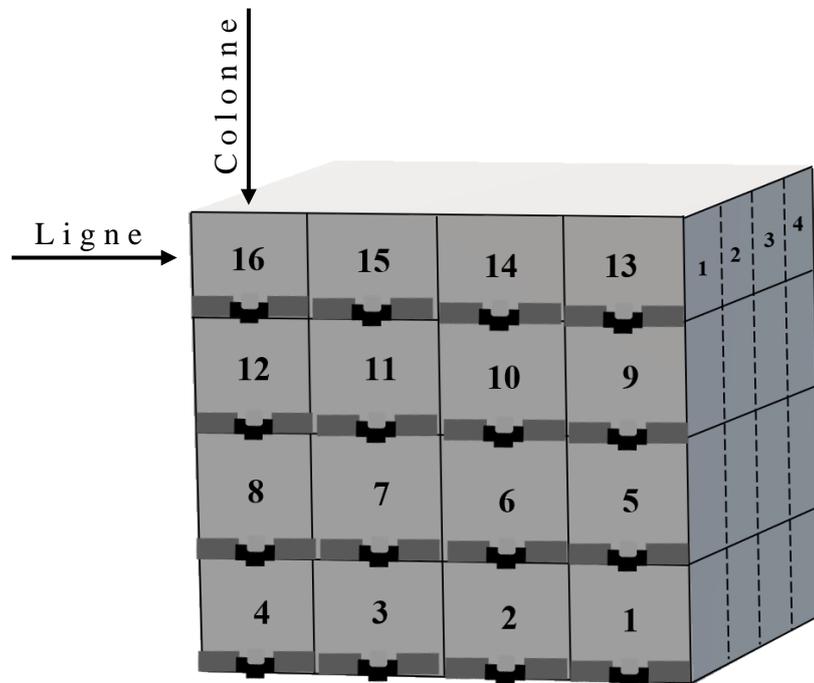


Figure 3.4 : Un flow-rack à chute libre composés de 16 casiers et 04 emplacements par casier.

Le placement de ces médicaments se fait suivant ces deux priorités :

- De mettre les médicaments fréquemment utilisés dans des casiers de la même colonne.
- Mettre ces médicaments dans des compartiments dont les colonnes sont adjacentes (de proche en proche).

Pour déterminer le numéro de la colonne à partir du numéro du casier, on utilise le Modulo qui correspond au reste d'une division euclidienne. En effet, on divise le numéro du casier par le nombre de colonnes du rack et on retient le reste de la division qui donne le numéro de la colonne dans lequel se trouve le médicament.

Par exemple, on prend les numéros des casiers suivants (5, 6, 14, 15) et on les divise par 04 (nombre de colonnes) :

Calcul du Modulo :

mod C'est le reste de la Division

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 4 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

(1)

$$n = 5 ; \quad 5 \text{ mod } 4 = 1$$

Donc le casier numéro 5 appartient à la 1ère colonne

$$n = 6 ; \quad 6 \text{ mod } 4 = 2$$

Donc le casier numéro 6 appartient à la 2ème colonne

$$n = 14 ; \quad 14 \text{ mod } 4 = 2$$

Donc le casier numéro 5 appartient aussi à la 2ème colonne

$$n = 15 ; \quad 15 \bmod 4 = 3$$

Donc le casier numéro 5 appartient à la 3ème colonne

3.3. Modèle du problème d'affectation des médicaments en RdP temporisés

Le paramètre de temps est un enjeu crucial, Pour cela on va mettre ce paramètre en évidence. Le temps de chute des produit (médicaments) est négligeable par rapport au temps du déplacement des produit dans le convoyeur, Le temps du franchissement des transitions noté τ (le déplacement des médicaments à l'intérieur du casier) est constant dans tous les casiers du flow-rack à chute libre et supposé très faible.

On considère t_i le temps de livraison d'un médicament à partir du casier i . Notons que les temps de livraison des casiers d'une même colonne sont sensiblement identiques. Pour connaître les t_i identiques, il suffit de calculer $i \bmod c$; tel que c 'est le nombre de colonnes du rack. La figure 3.5 représente le modèle RdP-t des casiers de la première colonne (casiers numéros 1, 5, 9, 13) ayant le même temps de livraison t_1 .

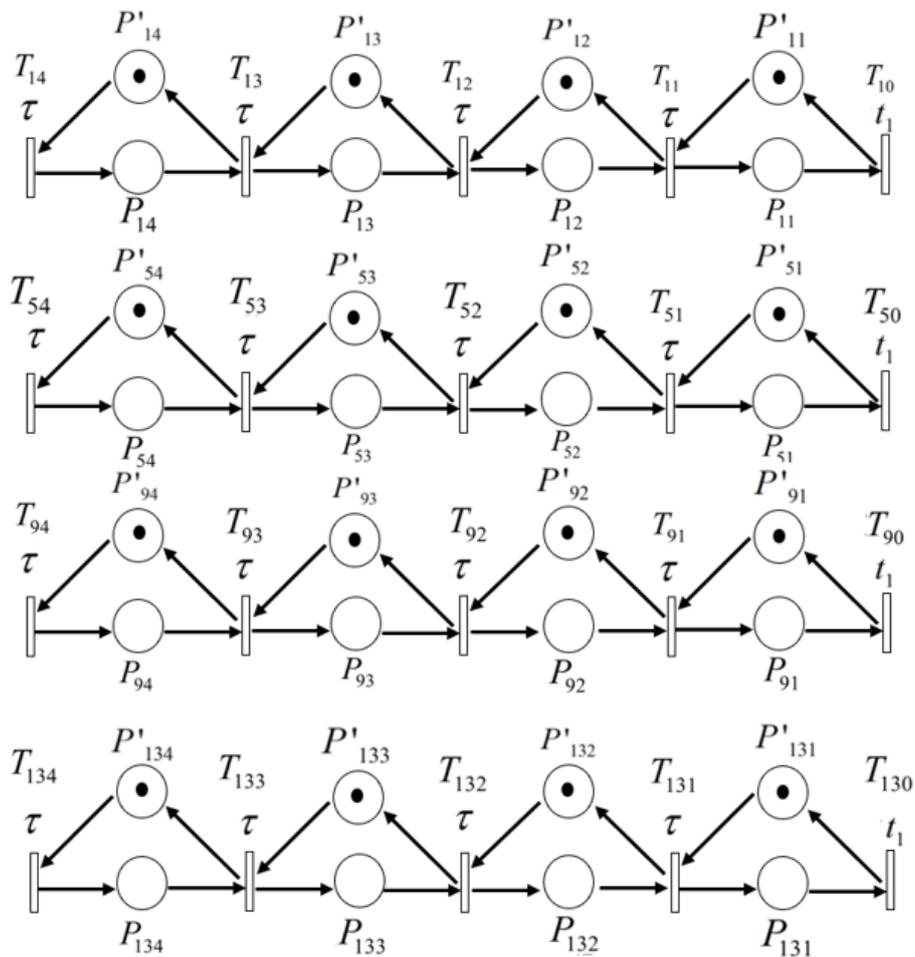


Figure 3.5 : Modèle RdP temporisés du système.

Par la suite, nous revenons à notre cas d'étude.

On va représenter le réseau de Petri temporisés "RdP-t "d'un FF flow-rack composé de 16 casiers et 04 emplacements par casier (voir Figure 3.4)

Dans ce cas t le temps de récupération des médicaments varie en fonction des colonnes des racks de ce système où :

- t_1 : temps de livraison prévu d'un produit (médicament) qui a été stocké dans un casier quelconque de la 1^{ère} colonne du FF flow-rack.
- t_2 : temps de livraison prévu d'un produit (médicament) qui a été stocké dans un casier quelconque de la 2^{ème} colonne du FF flow-rack.
- t_3 : temps de livraison prévu d'un produit (médicament) qui a été stocké dans un casier quelconque de la 3^{ème} colonne du FF flow-rack.
- t_4 : temps de livraison prévu d'un produit (médicament) qui a été stocké dans un casier quelconque de la 4^{ème} colonne du FF flow-rack.

–
Sachant que la 1^{ère} colonne est la plus proche du point de livraison, et 4^{ème} colonne est la plus éloignée du point de livraison, alors on a :

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$

On obtient alors le RdP-t (figure 3.6) suivant :

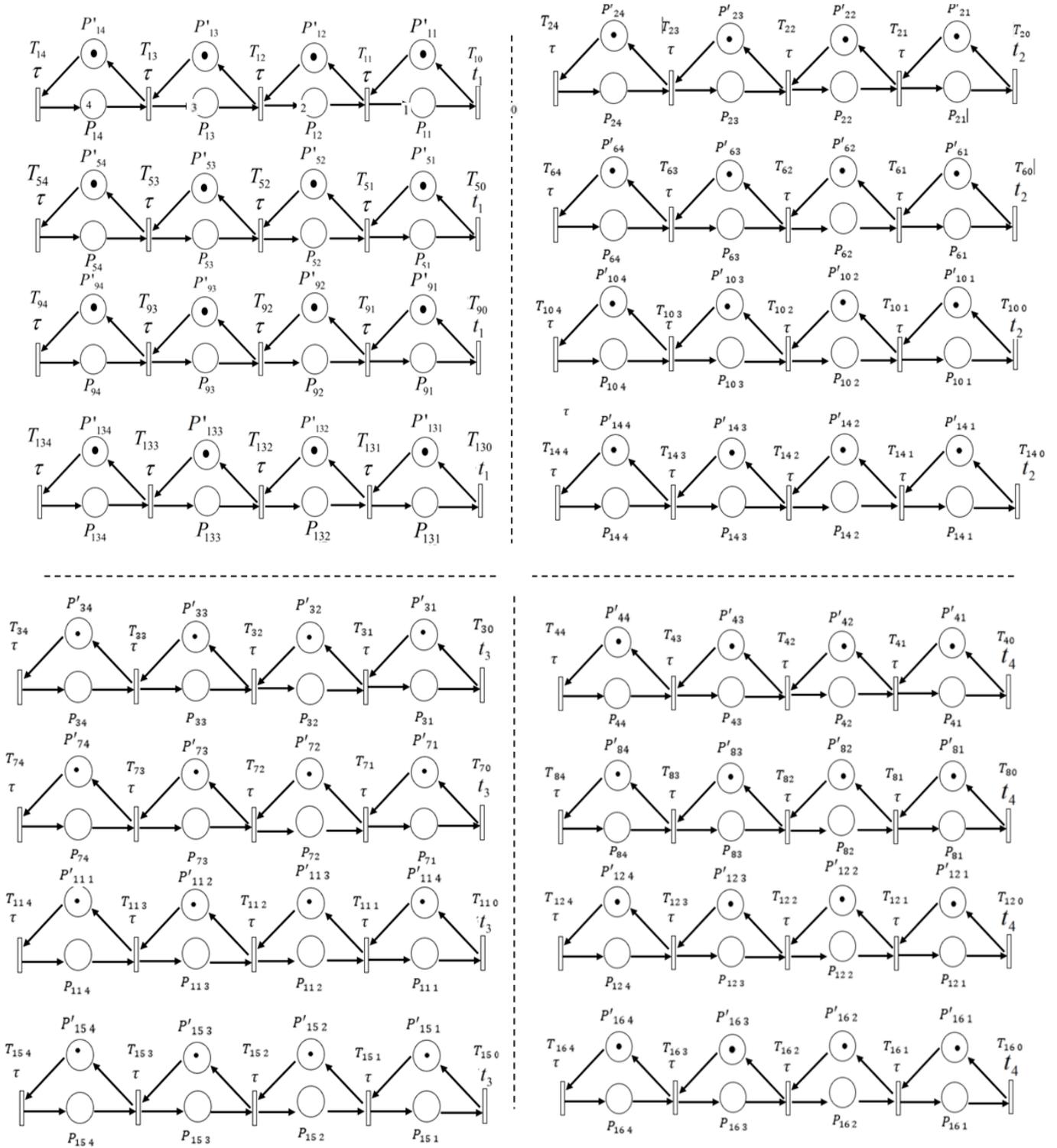


Figure 3.6 : Modèle RDP temporisés du système composé de 16 casiers et 04 emplacements par casier.

3.4. Affectation des médicaments et contrôle de flow-rack à chute libre

3.4.1. Synthèse de contrôleur

L'objectif de l'approche de contrôle du système FF flow-rack est de placer les médicaments les plus utilisés ensemble dans des compartiments adjacents près du point de livraison (de proche en proche) en se basant sur les deux priorités dont nous avons déjà parlé.

Nous proposons dans le présent mémoire une méthode simple, cette méthode consiste à développer un contrôleur (min, +) qui va privilégier le placement de deux médicaments fréquemment utilisés, dans une même colonne ou une colonne proche.

Chaque combinaison de deux médicaments peut avoir 2 types de contraintes qui doivent être satisfaites : les contraintes de capacité et les contraintes d'utilisation mutuelle. Nous parlons donc d'une Matrice d'utilisation mutuelle des médicaments (MUM).

3.4.2. Formulation du problème de contrôle

Dans cette sous-section, nous proposons une approche formelle pour contrôler un RdP soumis à plusieurs contraintes. Le rôle du contrôleur calculé est la satisfaction des contraintes de capacité et les contraintes d'utilisation mutuelle imposées au réseau de graphes d'événements temporels conflictuels considéré, qui décrit le système flow-rack à chute libre.

Soient I_1, I_2, I_3 et I_4 quatre médicaments différents. On obtient alors le modèle GETCs du procédé de la figure 3.7 conformément au modèle de la figure 3.4. Dans le modèle RdP d'affectation, on représente un casier par une place ; car on n'a pas besoin de représenter le déplacement d'un médicament à l'intérieur d'un casier, étant donné qu'on s'intéresse seulement à la face du stockage.

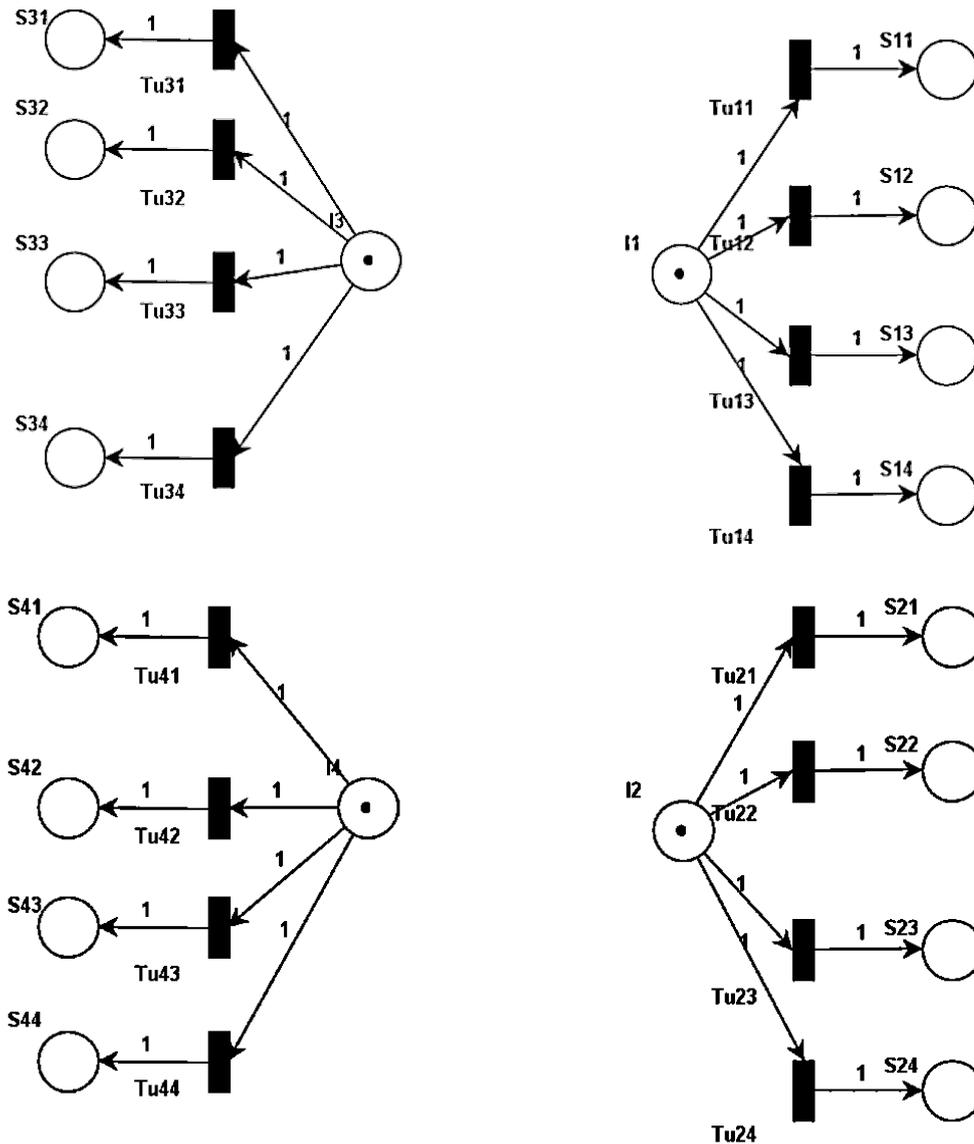


Figure 3.7 : Modèle RdP du processus d'affectation.

Soient :

I_d : Place du médicament d à affecter (type de médicament)

T_{dn} : Affectation du médicament d au casier numéro n

S_{dn} : Un médicament d se trouvant dans le compartiment numéro n

3.4.3. Généralisations des contraintes

Nous avons deux types de contraintes :

Contrainte de capacité : c'est la contrainte qui exige qu'un emplacement est réservé à un seul médicament.

La contrainte d'utilisation mutuelle : elle impose que deux médicaments fréquemment utilisés doivent être placés dans des compartiments voisins en respectant la première priorité de notre étude (de mettre les médicaments fréquemment utilisés dans des casiers de la même colonne près du convoyeur)

Une affectation complète consiste à franchir chacune des transitions exactement une fois. Les médicaments devant être placés dans des emplacements proches, est traduite en contraintes sur les marquages des places, elles sont déterminées à partir de la matrice d'utilisation mutuelle des médicaments (MUM).

3.4.4. Matrice d'utilisation mutuelle des médicaments (MUM)

S : Matrice d'utilisation mutuelle des médicaments de dimension $d \times d$ tel que $S_{jk} \in [0,1]$, la valeur 0 indique le degré le plus faible d'utilisation mutuelle entre deux médicaments, tandis qu'une valeur de 1 représente le degré d'utilisation mutuelle le plus haut entre deux médicaments. Nous supposons que $S_{jj} = 0$.

I : matrice binaire de S de dimension $d \times d$

$$I_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si les médicaments } j \text{ et } k \text{ sont très demandés ensemble (si } S_{jk} \geq y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec j, k : indices de médicament à allouer au compartiments, $(j, k) \in [1, d]$

y : seuil de binarisation, $y \in]0,1]$

Remarque 3.4 notre matrice d'utilisation mutuelle des médicaments peut être remplie par les valeurs suivantes :

- La valeur 0 indique que ces médicaments ne sont pas très demandés ensemble.
- La valeur 1 indique qu'ils sont utilisés fréquemment ensemble.

3.4.5. Description des contraintes

Soit $M_{dn}(t)$ le marquage de la place S_{dn} .

Pour chaque transition interne nous associons une fonction compteur notée $x_{dn}(t)$ et $x'_{dn}(t)$, et pour chaque transition source notée T_{udn} , on affecte une fonction compteur $u_{dn}(t)$. Par conséquent, le marquage d'une place peut être décrit par :

$$M_{dn}(t) = x_{dn}(t) - x'_{dn}(t) \quad (2)$$

Selon le modèle de RdP du procédé, une contrainte d'utilisation mutuelle limite la somme du marquage des lieux contraints à deux, elle peut être exprimée par :

$$\sum_{(d,n) \in [1,d] \times [1,n]} M_{dn}(t) \leq 2 \quad (3)$$

Conformément à (2), l'inéquation (3) peut être réécrite comme suit :

$$x_{dn}(t) - x'_{dn}(t) \leq 2 \quad (4)$$

Ce qui est équivalent à la forme suivante de l'algèbre Min-Pus :

$$\otimes (d,n) \in [1,d] \times [1,n] x_{dn}(t) \leq 2 \otimes (d,n) \in [1,d] \times [1,n] x'_{dn}(t) \quad (5)$$

On considère que le marquage de chaque lieu contraint a exactement un chemin avec la transition de contrôle T_{udn} du modèle de compartiment des CTEGs correspondant. Le compteur $x_{dn}(t)$ peut être exprimé par l'inégalité :

$$x_{dn}(t) \leq u_{dn}(t) \quad (6)$$

En algèbre Min-Plus, cette inégalité implique :

$$\otimes (d,n) \in [1,d] \times [1,n] x_{dn}(t) \leq 2 \otimes (d,n) \in [1,d] \times [1,n] u_{dn}(t) \quad (7)$$

En raison de (7), l'inégalité (5) (qui représente la contrainte d'utilisation mutuelle) est vérifiée si la condition suivante est vraie :

$$\otimes (d,n) \in [1,d] \times [1,n] u_{dn}(t) \leq 2 \otimes (d,n) \in [1,d] \times [1,n] x'_{dn}(t) \quad (8)$$

Par conséquent, toutes les lois de commande de la forme $u_{dn}(t)$ qui satisfont la condition (8), représentent une solution qui respecte la contrainte d'utilisation mutuelle imposée. Par conséquent, pour chaque contrainte, cette condition doit être vérifiée afin de contrôler l'ensemble du système FF flow-rack.

Tant que nous voulons éviter les solutions qui bloquent les transitions d'entrée dès le début ($u_{dn}(t) = 0$) et que nous avons une solution réalisable du problème d'allocation. La loi de commande $u_{dn}(t)$ devrait avoir trois formes possibles : $u_{dn}(t) = x'_{dn}(t)$; $u_{dn}(t) = 1 \otimes x'_{dn}(t)$ ou $u_{dn}(t) = 2 \otimes x'_{dn}(t)$. La première est représentée par une place de contrôle non marquée et la seconde est représentée par une place de contrôle marquée avec 1 jeton, la troisième est représentée par une place de contrôle marquée avec 2 jetons.

Si la loi de commande $u_{dn}(t)$ est partagée entre deux (ou plus) contraintes, on considère évidemment celle qui est minimale.

3.4.6. Calcul du contrôleur

On considère un exemple simple consistant à affecter quatre (4) médicaments différents dans un flow-rack à chute libre contient quatre (4) casiers (quatre compartiments $n=4$). La figure 3.8 monte notre cas d'étude.

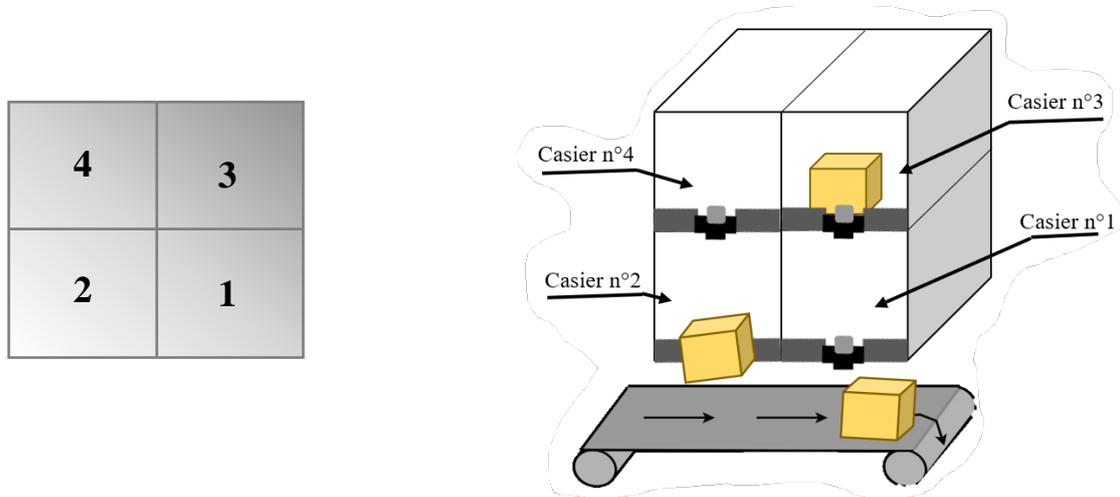


Figure 3.8 : un flow-rack à chute libre composés de 04 casiers.

3.4.7. Exemple d'application :

Pour chaque couple de médicaments fréquemment utiliser ensemble, on procède de la même manière pour déterminer les places de contrôle empêcher d'affecter des médicaments dans des compartiments voisins.

On prend alors deux exemples simples comme suit :

3.4.7.1. Le 1^{er} Exemple :

On considère la matrice d'utilisation mutuelle binaire I entre 4 médicaments, tel que :

$$I_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les médicaments fortement utilisés mutuellement sont : $[(1;2), (1;4), (2;3), (3;4)]$

Nous considérons les dénominations suivantes :

M'_{dn} : Le marquage de la place S_{dn}

d : indice de type de médicament

n : indice de compartiment (casier)

Nous supposons qu'il existe quatre médicaments différents, nous avons donc 4 contraintes de capacité et 4 contraintes d'utilisation mutuelle. Les expressions des contraintes de capacité sont données comme suit :

$$(A_1): M'_{11} + M'_{12} + M'_{13} + M'_{14} \leq 1$$

$$(A_2): M'_{21} + M'_{22} + M'_{23} + M'_{24} \leq 1$$

$$(A_3): M'_{31} + M'_{32} + M'_{33} + M'_{34} \leq 1$$

$$(A_4): M'_{41} + M'_{42} + M'_{43} + M'_{44} \leq 1$$

Nous avons également la représentation suivante des contraintes d'utilisation mutuelle :

$$(A_5): M'_{11} + M'_{23} + M'_{43} \leq 2$$

$$(A_6): M'_{12} + M'_{24} + M'_{44} \leq 2$$

$$(A_7): M'_{31} + M'_{43} + M'_{33} \leq 2$$

$$(A_8): M'_{32} + M'_{23} + M'_{44} \leq 2$$

3.4.7.1.1. Les lois de contrôle :

La condition (8) implique que cette contrainte doit satisfaire les inégalités suivantes. Par conséquent, les lois de commande qui satisfont cette condition représentent une solution qui respecte la contrainte. Choisissons la loi de commande suivante comme une solution

(A₁)

$$u_{11}(t) \otimes u_{12}(t) \otimes u_{13}(t) \otimes u_{14}(t) \leq 1 \otimes x'_{11}(t) \otimes x'_{12}(t) \otimes x'_{13}(t) \otimes x'_{14}(t)$$

$$\begin{cases} u_{11}(t) = x'_{11}(t) \\ u_{12}(t) = 1 \otimes x'_{12}(t) \\ u_{13}(t) = 1 \otimes x'_{13}(t) \\ u_{14}(t) = x'_{14}(t) \end{cases}$$

(A₂)

$$u_{21}(t) \otimes u_{22}(t) \otimes u_{23}(t) \otimes u_{24}(t) \leq 1 \otimes x'_{21}(t) \otimes x'_{22}(t) \otimes x'_{23}(t) \otimes x'_{24}(t)$$

$$\begin{cases} u_{21}(t) = x'_{21}(t) \\ u_{22}(t) = x'_{22}(t) \\ u_{23}(t) = 1 \otimes x'_{23}(t) \\ u_{24}(t) = x'_{24}(t) \end{cases}$$

(A₃)

$$u_{31}(t) \otimes u_{32}(t) \otimes u_{33}(t) \otimes u_{34}(t) \leq 1 \otimes x'_{31}(t) \otimes x'_{32}(t) \otimes x'_{33}(t) \otimes x'_{34}(t)$$

$$\begin{cases} u_{31}(t) = x'_{31}(t) \\ u_{32}(t) = x'_{32}(t) \\ u_{33}(t) = x'_{33}(t) \\ u_{34}(t) = 1 \otimes x'_{34}(t) \end{cases}$$

(A₄)

$$u_{41}(t) \otimes u_{42}(t) \otimes u_{43}(t) \otimes u_{44}(t) \leq 1 \otimes x'_{41}(t) \otimes x'_{42}(t) \otimes x'_{43}(t) \otimes x'_{44}(t)$$

$$\begin{cases} u_{41}(t) = x'_{41}(t) \\ u_{42}(t) = 1 \otimes x'_{42}(t) \\ u_{43}(t) = x'_{43}(t) \\ u_{44}(t) = x'_{44}(t) \end{cases}$$

(A₅)

$$u_{11}(t) \otimes u_{23}(t) \otimes u_{43}(t) \leq 2 \otimes x'_{11}(t) \otimes x'_{23}(t) \otimes x'_{43}(t)$$

$$\begin{cases} u_{11}(t) = 2 \otimes x'_{23}(t) \\ u_{23}(t) = x'_{11}(t) \\ u_{43}(t) = x'_{43}(t) \end{cases}$$

(A₆)

$$u_{12}(t) \otimes u_{24}(t) \otimes u_{44}(t) \leq 2 \otimes x'_{12}(t) \otimes x'_{24}(t) \otimes x'_{44}(t)$$

$$\begin{cases} u_{12}(t) = 2 \otimes x'_{24}(t) \\ u_{24}(t) = x'_{44}(t) \\ u_{44}(t) = x'_{12}(t) \end{cases}$$

(A₇)

$$u_{31}(t) \otimes u_{23}(t) \otimes u_{43}(t) \leq 2 \otimes x'_{31}(t) \otimes x'_{23}(t) \otimes x'_{43}(t)$$

$$\begin{cases} u_{31}(t) = 2 \otimes x'_{43}(t) \\ u_{23}(t) = x'_{31}(t) \\ u_{43}(t) = x'_{23}(t) \end{cases}$$

(A₈)

$$u_{32}(t) \otimes u_{24}(t) \otimes u_{44}(t) \leq 2 \otimes x'_{32}(t) \otimes x'_{24}(t) \otimes x'_{44}(t)$$

$$\begin{cases} u_{32}(t) = x'_{44}(t) \\ u_{24}(t) = x'_{32}(t) \\ u_{44}(t) = 2 \otimes x'_{24}(t) \end{cases}$$

Nous sélectionnons pour chaque contrainte les lois de contrôle suivantes comme solutions :

$$\begin{array}{ll} u_{11}(t) = 2 \otimes x'_{23} \oplus x'_{11} & u_{21}(t) = 1 \otimes x'_{21} \\ u_{12}(t) = x'_{24} \oplus x'_{12} & u_{22}(t) = x'_{22} \\ u_{13}(t) = 1 \otimes x'_{13} & \dot{\quad} ; \quad u_{23}(t) = 1 \otimes x'_{23} \oplus x'_{11} \oplus x'_{31} \\ u_{14}(t) = x'_{14} & u_{24}(t) = x'_{32} \oplus x'_{44} \oplus x'_{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} u_{31}(t) = 2 \otimes x'_{43} \oplus x'_{31} & u_{41}(t) = x'_{41} \\ u_{32}(t) = x'_{44} \oplus x'_{32} & u_{42}(t) = 1 \otimes x'_{42} \\ u_{33}(t) = x'_{33} & \dot{\quad} ; \quad u_{43}(t) = x'_{43} \oplus x'_{23} \\ u_{34}(t) = 1 \otimes x'_{34} & u_{44}(t) = 2 \otimes x'_{24} \oplus x'_{12} \oplus x'_{44} \end{array}$$

Ainsi on obtient le Rdp contrôlé suivant (fig.3.9)

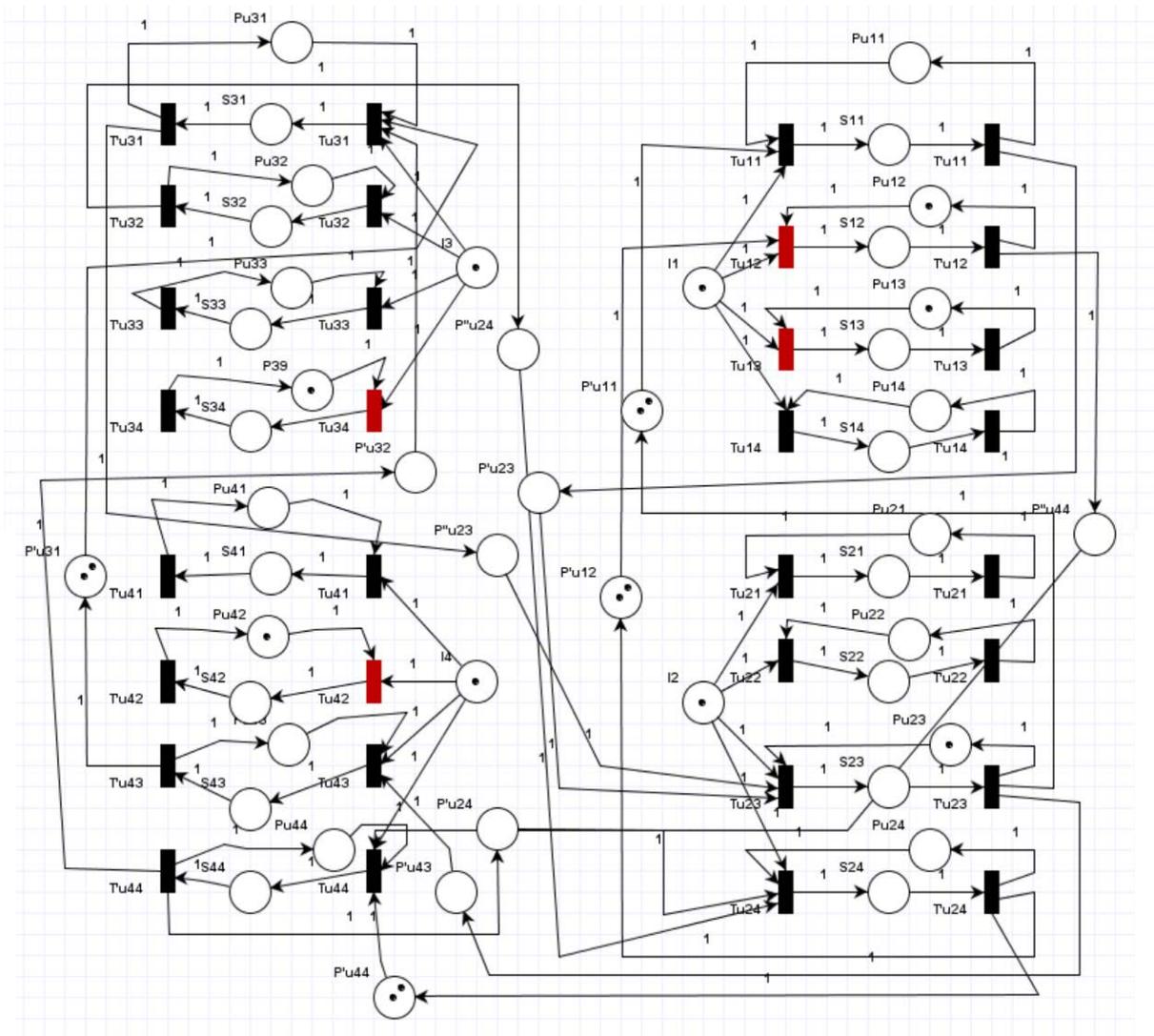


Figure 3.9 : Le modèle de réseau contrôlé des GETCs

L'interprétation de ce résultat donne que le médicament 1 est affecté dans deux compartiment 2 et 3 (les transition t_{u12} et t_{u13} sont franchissable)

Cette affectation donne une solution impossible qui ne respecte pas les contraintes de capacité (un emplacement est réservé à un seul médicament)

Ces résultats suggèrent que dans les combinaisons (1,2) et (1,4) donné par la matrice d'utilisation mutuelle des médicaments I , le système doit choisir entre le médicament 2 et le médicament 4 à propos de leur placement. Et c'est ce qui n'est pas notre cas.

3.4.7.2. Le 2^{ème} Exemple :

On prend alors un deuxième exemple, avec une matrice d'utilisation mutuelle binaire I entre 4 médicaments, tel que :

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les médicaments fortement utilisés mutuellement sont : $[(1;2),(3;4)]$

Nous supposons aussi qu'il existe quatre (4) médicaments différents, nous avons donc 4 contraintes de capacité et 4 contraintes d'utilisation mutuelle. Les expressions des contraintes de capacité sont données comme suit :

$$(A_1): M'_{11} + M'_{12} + M'_{13} + M'_{14} \leq 1$$

$$(A_2): M'_{21} + M'_{22} + M'_{23} + M'_{24} \leq 1$$

$$(A_3): M'_{31} + M'_{32} + M'_{33} + M'_{34} \leq 1$$

$$(A_4): M'_{41} + M'_{42} + M'_{43} + M'_{44} \leq 1$$

Nous avons également la représentation suivante des contraintes d'utilisation mutuelle :

$$(A_5): M'_{11} + M'_{23} \leq 2$$

$$(A_6): M'_{12} + M'_{24} \leq 2$$

$$(A_7): M'_{31} + M'_{43} \leq 2$$

$$(A_8): M'_{32} + M'_{44} \leq 2$$

3.4.7.2.1. Les lois de contrôle :

La condition (8) implique que cette contrainte doit satisfaire les inégalités suivantes. Par conséquent, les lois de commande qui satisfont cette condition représentent une solution qui respecte la contrainte. Choisissons la loi de commande suivante comme une solution.

(A₁)

$$u_{11}(t) \otimes u_{12}(t) \otimes u_{13}(t) \otimes u_{14}(t) \leq 1 \otimes x'_{11}(t) \otimes x'_{12}(t) \otimes x'_{13}(t) \otimes x'_{14}(t)$$

$$\begin{cases} u_{11}(t) = x'_{11}(t) \\ u_{12}(t) = x'_{12}(t) \\ u_{13}(t) = 1 \otimes x'_{13}(t) \\ u_{14}(t) = x'_{14}(t) \end{cases}$$

(A₂)

$$u_{21}(t) \otimes u_{22}(t) \otimes u_{23}(t) \otimes u_{24}(t) \leq 1 \otimes x'_{21}(t) \otimes x'_{22}(t) \otimes x'_{23}(t) \otimes x'_{24}(t)$$

$$\begin{cases} u_{21}(t) = 1 \otimes x'_{21}(t) \\ u_{22}(t) = x'_{22}(t) \\ u_{23}(t) = x'_{23}(t) \\ u_{24}(t) = x'_{24}(t) \end{cases}$$

(A₃)

$$u_{31}(t) \otimes u_{32}(t) \otimes u_{33}(t) \otimes u_{34}(t) \leq 1 \otimes x'_{31}(t) \otimes x'_{32}(t) \otimes x'_{33}(t) \otimes x'_{34}(t)$$

$$\begin{cases} u_{31}(t) = x'_{31}(t) \\ u_{32}(t) = x'_{32}(t) \\ u_{33}(t) = x'_{33}(t) \\ u_{34}(t) = 1 \otimes x'_{34}(t) \end{cases}$$

(A₄)

$$u_{41}(t) \otimes u_{42}(t) \otimes u_{43}(t) \otimes u_{44}(t) \leq 1 \otimes x'_{41}(t) \otimes x'_{42}(t) \otimes x'_{43}(t) \otimes x'_{44}(t)$$

$$\begin{cases} u_{41}(t) = x'_{41}(t) \\ u_{42}(t) = 1 \otimes x'_{42}(t) \\ u_{43}(t) = x'_{43}(t) \\ u_{44}(t) = x'_{44}(t) \end{cases}$$

(A₅)

$$u_{11}(t) \otimes u_{23}(t) \leq 2 \otimes x'_{11}(t) \otimes x'_{23}(t)$$

$$\begin{cases} u_{11}(t) = 2 \otimes x'_{23}(t) \\ u_{23}(t) = x'_{11}(t) \end{cases}$$

(A₆)

$$u_{12}(t) \otimes u_{24}(t) \leq 2 \otimes x'_{12}(t) \otimes x'_{24}(t)$$

$$\begin{cases} u_{12}(t) = x'_{24}(t) \\ u_{24}(t) = 2 \otimes x'_{12}(t) \end{cases}$$

(A₇)

$$u_{31}(t) \otimes u_{43}(t) \leq 2 \otimes x'_{31}(t) \otimes x'_{43}(t)$$

$$\begin{cases} u_{31}(t) = 2 \otimes x'_{31}(t) \\ u_{43}(t) = x'_{43}(t) \end{cases}$$

(A₈)

$$u_{32}(t) \otimes u_{44}(t) \leq 2 \otimes x'_{32}(t) \otimes x'_{44}(t)$$

$$\begin{cases} u_{32}(t) = 2 \otimes x'_{44}(t) \\ u_{44}(t) = x'_{32}(t) \end{cases}$$

Nous sélectionnons pour chaque contrainte les lois de contrôle suivantes comme solutions :

$$u_{11}(t) = 2 \otimes x'_{23}(t) \oplus x'_{11}(t)$$

$$u_{12}(t) = x'_{24}(t) \oplus x'_{12}(t)$$

$$\boxed{u_{13}(t) = 1 \otimes x'_{13}(t)}$$

$$u_{14}(t) = x'_{14}(t)$$

$$u_{31}(t) = 2 \otimes x'_{31}(t) \oplus x'_{31}(t)$$

$$u_{32}(t) = 2 \otimes x'_{44}(t) \oplus x'_{32}(t)$$

$$u_{33}(t) = x'_{33}(t)$$

$$\boxed{u_{34}(t) = 1 \otimes x'_{34}(t)}$$

$$\boxed{u_{21}(t) = 1 \otimes x'_{21}(t)}$$

$$u_{22}(t) = x'_{22}(t)$$

$$; \quad u_{23}(t) = x'_{23}(t) \oplus x'_{11}(t)$$

$$u_{24}(t) = 2 \otimes x'_{12}(t) \oplus x'_{24}(t)$$

$$u_{41}(t) = x'_{41}(t)$$

$$\boxed{u_{42}(t) = 1 \otimes x'_{42}(t)}$$

$$; \quad u_{43}(t) = x'_{43}(t)$$

$$u_{44}(t) = x'_{32}(t) \oplus x'_{44}(t)$$

Ces solutions sélectionnées ont conduit à une commande du système FF flow-rack qui respecte les contraintes d'utilisation mutuelle des médicaments imposées. Ce contrôle est représenté par 22 places de contrôle, Fig. 3.10.

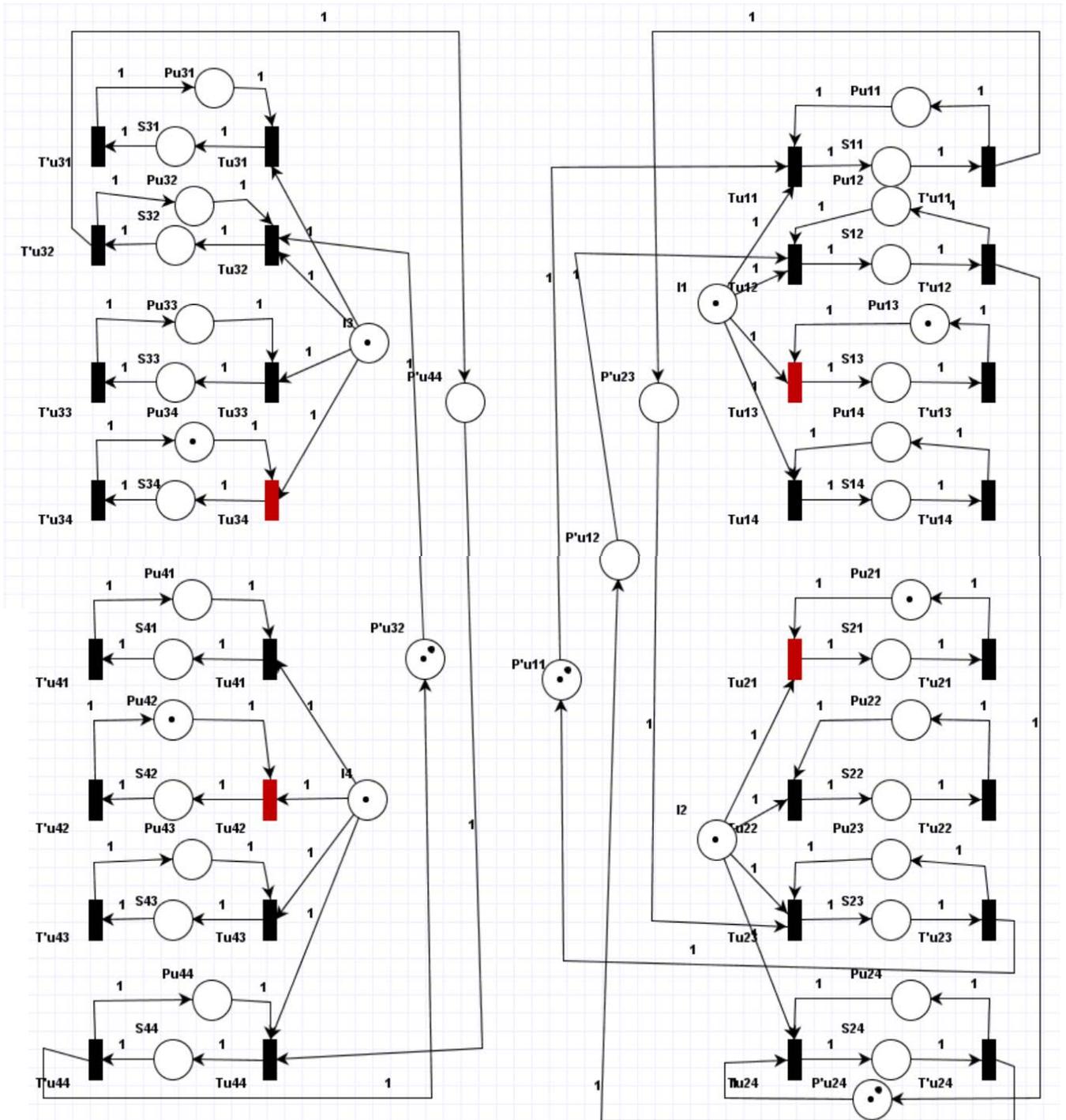


Figure 3.10 : Le modèle de réseau contrôlé des GETCs du 2^{ème} exemple

L'interprétation de ce résultat donne que le médicament 1 est affecté dans le compartiment 3 (S_{13}), le médicament 2 est affecté dans le compartiment 1 (S_{21}), le médicament 3 est affecté dans le compartiment 4 (S_{34}) et enfin, le médicament 4 est affecté dans le compartiment 2 (S_{42}).

Cette affectation donne une solution réalisable qui respecte les contraintes de capacités et les contraintes d'utilisation mutuelle et montre bien que les quatre médicaments différents respecte les combinaisons données par la matrice I d'utilisation mutuelle des médicaments.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

La dispensation des médicaments est devenue un enjeu crucial pour les pharmacies hospitalières, avec l'augmentation des volumes de médicaments distribués. Le souci reste de garantir une livraison rapide du médicament au patient pour se consacrer plus aux tâches propres au pharmacien à savoir le conseil et l'assistance aux patients.

Le pharmacien est obligé d'adopter différentes technologies de dispensations telles que l'utilisation du système de distribution automatisée de médicaments, qui permettent d'améliorer les facteurs de temps-coût et qualité.

Cette technologie de manutention automatisée moderne pour la distribution de médicaments consiste en un système de stockage et de récupération automatisé à rayonnage à chute libre (FF-flow-rack AS/RS). Le thème traité dans ce mémoire concerne la modélisation et le contrôle d'un système de distribution des médicaments à base d'un Flow-rack à chute libre par les réseaux de pétri temporisés et l'algèbre Min-plus.

Dans notre travail, nous avons proposé une méthode facile de modélisation du système par les réseaux de Petri pour représenter les compartiments et les médicaments dans le FF flow-rack. Cette méthode qui s'est révélée efficace, est basée sur le formalisme de l'algèbre Min-Plus. Après une modélisation du rack, nous avons modélisé le processus d'affectation des médicaments dans les différents racks. Nous avons effectué ensuite une synthèse de contrôleur pour trouver une solution d'affectation réalisable, en respectant deux types de contraintes : les contraintes de capacité et les contraintes d'utilisation mutuelle des médicaments. Les lois de contrôle établies sont des rétroactions d'état et peuvent être représentées par des places de contrôle qui imposent au système de respecter ces contraintes.

Pour des travaux futurs, il serait envisageable de calculer un contrôleur plus optimal. Il serait également très utile de développer un programme qui génère automatiquement les contraintes et le contrôleur à partir des données du rack (nombre de lignes, nombre de colonnes) et de la matrice d'utilisation mutuelle.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] METAHRI Dhiyaeddine, HACHEMI Khalid, Drug distribution: Evaluation of prescription drug delivery time of manual and automated distribution, October 2017, p.2
- [2] Karima TEBANI, Thèse de Doctorat, Commande temps réel d'une classe de systèmes à événements discrets sous contraintes par l'algèbre des dioïdes. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (2017)
- [3] MEKAPHARM, C. Fiche caractéristiques de l'automate APOTEKA. Accessed October 22, 2016. <http://mekapharm.com/apoteka/>. 1999.
- [4] Sarra Bouzidi, Asmaa Tabti et Khalid Hachemi. Design and Realization of an Automated Drug Distribution System Based on Arduino, EasyChair, 2022
- [5] METAHRI, D., & HACHEMI, K. (2020). Discrete Optimization Model of Free-Fall-Flow-Rack Based Automated Drug Dispensing System. In *Digital Health in Focus of Predictive, Preventive and Personalized Medicine* (pp. 87-100). Springer, Cham.
- [6] L. Harold J. Liff, B. Brian T. Eart, M. Robert, L. Wallace et H. N. Arthur A. Berube, « Drug dispensing system ». Etats unis Brevet 5713485, 3 February 1998.
- [7] Dhiyaeddine Metahri, Thèse Doctorat LMD (2019). Contribution à l'évaluation des performances d'un flow-rack AS/RS à chute libre, p.15
- [8] Frédéric Méry, L'officine à l'ère de l'automate. Sciences pharmaceutiques. hal-01733339 <https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01733339> Thèse de Doctorat Université Henri Poincaré - Nancy 1(2001)
- [9] METAHRI, D., & HACHEMI, K. (2017, May). Automated storage and retrieval systems: a performances comparison between Free-fall-flow-rack and classic flow-rack. In 2017 6th International Conference on Systems and Control (ICSC) (pp. 589-594). IEEE.
- [10] A. Hamzaoui et Z. Sari, Dual cycle time modelling and design optimization for the bidirectional flow-rack AS/RS (December 2020) <https://www.researchgate.net/publication/346978543>
- [11] METAHRI, D., & HACHEMI, K. (2018). Retrieval–travel-time model for free-fall-flow-rack automated storage and retrieval system. *Journal of Industrial Engineering International*, 14(4), 807-820.
- [12] Société française de pharmacie clinique, « Dictionnaire français de l'erreur médicamenteuse ». Source : http://optimiz-sih-circ.med.fr/Documents/Dictionnaire_SFPC_EM.pdf. [Accès le 18 Juillet 2020].

- [13] M. Amel. « Modélisation et vérification des systèmes de production distribués à l'aide d'UML et des réseaux de Petri », Mémoire Magister, Université Mohamed Khider Biskra, 2009.
- [14] R. David et H. Alla. Du grafctet au réseaux de petri. Editions Hermès, Paris, 1992.
- [15] D. A. Mohamed Khalid. « Etude et supervision des graphes d'événements temporisés et temporels : vivacité, estimation et commande ». Thèse de Doctorat, Université d'Angers ISTIA, 2005.
- [16] V. Robert. « Les Réseaux de Petri ». Toulouse : LAAS-CNRS, 2000. Source : <http://homepages.laas.fr/francois/POLYS/pnrv.pdf>. [Accès le 20 Juillet 2020].
- [17] D. A. M. Khalid. « Etudes et supervision des d'événements temporisés et temporels : vivacité, estimation et commande », Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2005.
- [18] L. Mehdi. « Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max,+). 1. Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. 2. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations ». Thèse de Doctorat, Université d'Angers ISTIA, 2003.
- [19] F. Baccelli, G. Cohen, G.-J. Olsder et J.-P. Quadrat. Synchronization and linearity : An Algebra for Discrete Event Systems. Wiley and Sons, 1992.

