جامـــــــــعة وهـــران 2

كلية العلـــــــــــوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير

مطبوعة

سلسلة تمارين محلولة في بحوث العمليات

السنة الثانية ليسانس الجذع المشترك

السداسي الثاني

مقدمة من طرف:

السيد(ة) :......بومدين نادية.................................

الرتبة :..................MCA.............................

السـنة:............2021/2022...

«سلسلة تمارين محلولة في بحوث العمليات »

مقدمـــــــة

إن التطور الحاصل في مختلف مجالات الحياة يتطلب التعامل مع التغيرات الحاصلة بأسلوب عملي قائم على أساس العلم والمنطق والتفكير الرشيد الذي يسبق اتخاذ القرارات المختلفة، وتواجه المؤسسات والشركات على اختلاف أنواعها تحديات كبيرة في عالم اليوم الذي يوصف بأنه " عصر المعرفة أو عصر المعلوماتية أو الاقتصاد الرقمي، لذا فإن المدراء ومتخذي القرارات فيها لابـــد وأن يتمتعوا بقدر كبير من الإلمام بالأساليب العلمية الحديثة وخصوصا الكمية منها لتساعدهم في مجالات اتخاذ القرارات المختلفة.

ويأتي علم بحوث العمليات ليوفر أساليب كثيرة يمكن تبنيها في حل كثير من المشكلات الإدارية خصوصا وأن هـــذا العلم كـــان قـــد نجـــــح نجاحـــا بـــاهرا عنـــدما اعتمدت أساليبه فـــي المجال العســـكري أثنـــاء الحرب العالمية الثانية، إن هذا العلم أصـــبح اليوم مـــادة دراسية فـــي جميع المعاهـــد والجامعات في العالم وبدون استثناء على اختلاف تخصصاتها ، ونحن الآن في العالم النامي أحوج ما نكون إلى اللجوء إلى هذا العلـــم والاستعانة بأساليبه بغـــرض التعامـــل مع الكثير من مشاكلنا وحث الطلبة والعاملين على اعتماد الأساليب الكمية في بحـــوثهم لزيادة دقة النتائج التي يتوصلون إليها.

هدف هذه المطبوعة

إنجاز هذه المطبوعة رغبة منا في إغناء المكتبة الجامعية بموضوعات هذا العلم، وهي موجهـــة لطلبة السنة الثانية ليسانس في ميدان العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية لمختلف الاختصاصات، وتتضمن هذه المطبوعة على فصول عديدة وقد تناول الفصل الأول المدخل إلى بحـــوث العمليات ومراحل التحليل الكمي، أما الفصل الثاني فقد تناول البرمجة الخطية مفهومهـــا وكيفية صياغة النموذج الرياضي لها وطريقة الحل البياني، فقد ركز الفصل الثالث على معالجة مسائل البرمجة الخطية بعدة متغيرات باستخدام طريقة السمبليكس، وأوضح الفصل الرابع فكرة النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية ومساهمته في إيجاد الحلول المثلى، أما الفصل الخامس فقد استمر مع البرمجة الخطية ولكنه انفرد بتوضيح فكرة نماذج النقل، وعرض الفصل السادس حالة خاصة من نماذج النقل ألا وهي نماذج التخصيص.

« Intitulé du Polycopié»

Description du cours :

Le développement en cours dans divers domaines de la vie nécessite de faire face aux changements en cours de manière pratique basée sur la science, la logique et la pensée rationnelle qui précèdent la prise de diverses décisions. Les institutions et les entreprises de toutes sortes font face à de grands défis dans le monde d'aujourd'hui, qui est décrit comme "l'ère de la connaissance, l'ère de l'information ou l'économie numérique." Par conséquent, les gestionnaires et les décideurs doivent avoir une grande connaissance des méthodes scientifiques modernes, en particulier des méthodes quantitatives, pour les aider dans diverses décisions- faire des zones. La science de la recherche opérationnelle vient fournir de nombreuses méthodes qui peuvent être adoptées dans la résolution de nombreux problèmes administratifs, d'autant plus que cette science a connu un grand succès lorsque ses méthodes ont été adoptées dans le domaine militaire pendant la Seconde Guerre mondiale. Maintenant dans le monde en développement qui a un besoin urgent de recourir à cette science et d'utiliser ses méthodes dans le but de traiter nombre de nos problèmes et d'exhorter les étudiants et les travailleurs à adopter des méthodes quantitatives dans leurs recherches pour accroître la précision des résultats auxquels ils parviennent.

Objectifs

La réalisation de cette publication s'inscrit dans notre volonté d'enrichir la bibliothèque universitaire des thématiques de cette science, et elle s'adresse aux étudiants de deuxième année de licence dans le domaine des sciences économiques, des sciences de gestion et des sciences commerciales pour diverses disciplines. Le deuxième traitait du concept de programmation linéaire et comment formulé son modèle mathématique et la méthode de résolution graphique. Le troisième chapitre portait sur le traitement des problèmes de programmation linéaire à plusieurs variables à l'aide de la méthode du simplexe. Le quatrième chapitre expliquait l'idée du modèle correspondant au modèle de programmation linéaire et sa contribution à la recherche de solutions optimales. Quant au cinquième chapitre, il poursuivait avec la programmation linéaire, mais lui seul a précisé la notion de modèles de transfert, et le sixième chapitre a présenté un cas particulier du transport modèles, qui sont les modèles d'allocation.

« Title Polycopy»

Course description:

Ongoing development in various areas of life requires coping with ongoing changes in a practical way based on science, logic and rational thinking that precedes making various decisions. Institutions and businesses of all kinds face great challenges in today's world, which is described as "the knowledge age, the information age, or the digital economy." Therefore, managers and decision makers must have a great knowledge of modern scientific methods, especially quantitative methods, to help them in various decision-making areas. The science of operational research comes to provide many methods that can be adopted in solving many administrative problems, especially since this science achieved great success when its methods were adopted in the military field during World War II. . Now in the developing world which urgently needs to resort to this science and to use its methods in order to deal with many of our problems and to urge students and workers to adopt quantitative methods in their research to increase the accuracy of the results they arrive at.

Goals

The production of this publication is part of our desire to enrich the university library with the themes of this science, and it is aimed at second-year undergraduate students in the field of economics, management sciences and commercial sciences. for various disciplines. The second dealt with the concept of linear programming and how to formulate its mathematical model and the graphical solution method. The third chapter dealt with the treatment of multivariate linear programming problems using the simplex method. The fourth chapter explained the idea of the model corresponding to the linear programming model and its contribution to the search for optimal solutions. As for the fifth chapter, he continued with linear programming, but he alone clarified the notion of transfer models, and the sixth chapter presented a particular case of transport models, which are allocation models.

فهرس المحتويات

برنامج مقياس "بحوث العمليات"

السنة الثانية علوم اقتصادية، تجارية والتسيير

- **مقدمة في بحوث العمليات**
  - ماذا نعني ببحوث العمليات ؟
  - بحوث العمليات ونظرية اتخاذ القرار
  - مواضيع ومسائل بحوث العمليات

القسم الأول : البرمجة الخطية

I. الفصل الأول : صياغة نماذج البرمجة الخطية

1. مسائل الاستهلاك الأمثل لمستلزمات الإنتاج
2. مسائل المزيج الإنتاجي (تركيب الوجبة الغذائية)
3. مسائل النقل
4. المشكل العام لمسائل البرمجة الخطية

II. الفصل الثاني : المفهوم الهندسي العام لمسائل البرمجة الخطية

1. الحل البياني لمسائل البرمجة الخطّية
2. تصنيف وخواص حلول البرمجة الخطّية

III. الفصل الثالث :طريقة السيمبليكس SIMPLEX في حل مسائل البرمجة الخطّية

1. تمهيد حول طريقة السيمبليكس
2. مراحل الحل الرياضي لمسائل simplex
3. طريقة الأساس المصطنع في حل مسائل simplex
4. الحالة المتداعية في البرمجة الخطية
5. المفهوم الاقتصادي العام لطريقة simplex

IV. الفصل الرابع : الترافق في مسائل البرمجة الخطّية LA QUALITE

1. المفهوم الاقتصادي العام للترافق
2. النموذج العام المرافق لمسائل البرمجة الخطية
3. خصوصيات الترافق

جامعـــــــــــــة وهـــــــــــران 02

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والتسيير

السنـــــــــة الثانيــــــــــــــــــــة

تمارين تطبيقية خاصة بالفصل الأول من البرنامج والمتعلق بالبرمجة الخطية

FORMULATION MATHEMATIQUE D'UN PROBLEME ECONOMIQUE

السنة الجامعية 2021-2022

تمريــــــــن رقــــم 01   مشكلــــــــــــة إنــــتاج

تنتج الشركة الوطنية للصناعات الكيماوية ثلاث منتجات تمر كل منها بثلاث مراحل إنتاجية ويستغرق إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتوج في كل مرحلة إنتاجية قدرا من الوقت كما هو مبين في الجدول التالي الذي يوضح أيضا الطاقة إنتاجية اليومية لكل مرحلة معبرا عنها بالساعات :

المرحلة الإنتاجية / المنتوج	الوقت اللازم للوحدة بالساعة ①	②	③	الطاقة لكل مرحلة
A	3	6	2	/
B	4	/	8	/
C	2	4		/
الطاقة لكل مرحلة ساعة / يوم	43	40	38	

إذا كان ربح الوحدة من المنتجات الثلاث هو على الترتيب **4**، **3**، **2**، (دج) تريد الشركة تحديد الكميات التي يجب إنتاجها يوميا لتحقيق أقصى حجم إنتاج ممكن بشرط أنها تحصل على ربح إجمالي يومي لا يقل عن **75 000** دج وبافتراضي أن السوق قادرة على استيعاب أي كميّة تعرض للبيع.

أكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة الاقتصادية

الحــــــــــــــــل :

نفرض،

$X_1 =$ **الكمية المنتجة من المنتوج** A

$X_2 =$ **الكمية المنتجة من المنتوج** B

$X_3 =$ **الكمية المنتجة من المنتوج** C

فيكون لدينا

دالة الهدف

$$[MAX]\ F(X) = X_1 + X_2 + X_3 \ \rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 43 \\ 6X_1 \qquad\quad + 4X_3 \leq 40 \\ 2X_1 + 8X_2 \qquad\quad \leq 38 \\ 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 75\,000 \\ X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0\ ;\ X_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

القيود الهيكلية

قيود عدم السلبية

تمريـــــــــن رقـــــم 02 مســــــــــألة تنظيـــــــــم

أرض زراعية مساحتها **50** هكتار يمكن أن تزرع ثلاثة أنواع من المزروعات A_1و A_2و A_3. الربح الصافي للهكتار الواحد من كل نوع من هذه الأنواع هو **440** للهكتار المزروع من النوع الأول و**800** للنوع الثاني، **300** للنوع الثالث إذا علمنا أن الهكتار الواحد المزروع من النوع الأول يكلف من ساعات العمل **25** والنوع الثاني **40** والثالث **15** ساعة عمل فإذا علمنا أن الكلفة للهكتار الواحد بالدينار هو **300** لـــ **A1**و **400** إذا زرعنا بـــ A_2و **200** إذا زرعناه بـــ A_3 وإذا علمنا أن ساعات العمل الكلية المتوفرة هي **1000** ساعة عمل والمبلغ المتوفر لهذه المزرعة للقيام بإنتاجها هو **150000** دج.

المطلوب : تنظيم الإنتاج في هذه المزرعة بحيث زراعة المنتجات تحقق أقصى ربح ممكن.

- أكتب النموذج الرياضي للمسألة المفروضة.

الحل : تنظيم المعطيات على شكل جدول

الربح الصافي للهكتار الواحد	الكلفـــة للهكتار الواحد	ساعات العمل للهكتار	أنواع المزروعات
400	300	25	A_1
800	400	40	A_2
300	200	15	A_3
/	150000	1000	الاحتياطي

نفرض :

X_1 : المساحة المزروعة من النوع A_1

X_2 : المساحة المزروعة من النوع A_2

X_3 : المساحة المزروعة من النوع A_3

فيكون لدينا

دالة الهدف :→ $[MAX]F(x) = 400\,X_1 + 800\,X_2 + 300\,X_3$

القيود الهيكلية

قيود عدم السلبية

$$\begin{cases} 25X_1 + 40X_2 + 15X_3 \leq 1000 \\ 300X_1 + 400X_2 + 200X_3 \leq 150000 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ X_1 \geq 0\,;\ X_2 \geq 0\,;\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

تمريـــــــــن رقــــم03 مشكلـــة مزيـــج إنتاجـــي

يقوم الديوان الجهوي للحليب بوهران بإنتاج ثلاثة أنواع جديدة من المواد الاستهلاكية باستعمال نوعين من مشتقات الحليب (A_1,A_2)بكميات محدودة **1000** و **1500** وحدة – المعدلات اللازمة لإنتاج وحدة بضاعة من كلال المشتقين، سعر بيع الوحدة وتكلفة الوحدة من كل نوع بضاعة معطات في الجدول التالي :

	A_2	A_1	السعر	التكلفة
P_1	**10**	**12**	**7**	**4**
P_2	**5**	**7**	**6**	**3.50**
P_3	**3**	**8**	**3**	**2**

المدّة الزمنية اليومية لإنتاج وحدة من البضاعة **P1** هي ضعف المدّة لإنتاج وحدة من**P2** وثلاثة مرّات المدة لإنتاج وحدة من **P3** فاذا خصّص الديوان كل طاقته الإنتاجية لإنتاج البضاعة الأولى فقط يكون أقصى حجم انتاج ممكن من هذه البضاعة هو **2500** وحدة – يريد الديوان تحديد الكميات الواجب إنتاجها يوميا من كل نوع بضاعة والتي تحقق أكبر حجم ممكن لرقم أعمال الديوان بشرط أن الربح الإجمالي لا يقل عن **10 000** وحدة نقدية.

- أكتب هذه المسألة الاقتصادية على شكل نموذج برمجة خطية.

الحل :

نفرض ، X_1 : الكمية الواجب إنتاجها من البضاعة الأولى P_1

X_2 : الكمية الواجب إنتاجها من البضاعة الثانية P_2

X_3 : الكمية الواجب إنتاجها من البضاعة الثالثة P_3

فيكون لدينا

$$[MAX]F(x) = 7\,X_1 + 6\,X_2 + 3\,X_3$$
$$(A_1) : 10\,X_1 + 5\,X_2 + 3\,X_3 \leq 1000$$
$$(A_2) : 12\,X_1 + 7\,X_2 + 8\,X_3 \leq 1500$$

$$\left(\text{الربح}\right) \rightarrow (7-4)\,X_1 + \big((6-3.5)\,X_2 + (3-2)\big)X_3 \geq 10000$$
$$\left(\text{حجم الانتاج}\right) \rightarrow X_1 + (6-3.5)\,X_2 + (3-2)X_3 \leq 2500$$
$$X_1 \geq 0\,;\; X_2 \geq 0\,;\; X_3 \geq 0$$

تمريـــــــــن رقــم 04   مسألـــــة إنـــــــتاج

لإنتاج ثلاثة أنواع من الأحذية (شتوي، صيفي، وخريفي) تستخدم الشركة الجزائرية للحذاء في عملية الإنتاج أربعة أنواع من المواد الأولية (جلد طبيعي، جلد اصطناعي، نايلون والقماش) والتي لهل أسعار مختلفة – احتياطي المواد الأربعة، عدد الأحذية الممكن إنتاجها من **1000** m^2 من المواد الأولية معطات في الجدول التالي :

الأحذية(1000) / مادة $(1000\ m^2)$	عدد الأحذية الممكن إنتاجها من $1000\ m^2$ شتوي	صيفي	خريفي	الاحتياطي $(1000\ m^2)$	تكلفة الوحدة $(1000\ m^2)$ (10^9)
جلد طبيعي	**26.5**	**51**	–	**0.9**	**14.4**
جلد اصطناعي	**7.8**	**26**	–	**0.8**	**16**
نايلون	–	**45.7**	**5**	**5.0**	**12.8**
قماش	–	–	**72.5**	**6.0**	**10.5**

تريد الشركة تحديد الكميات الضرورية من كل مادة أولية لإنتاج الأنواع الثلاث من الأحذية والتي تحقق لها أدنى تكاليف إجمالية ممكنة علما بأنها تسعى إلى لإنتاج على الأقل **21000** وحدة شتوية، **30000** صيفية و **500000** وحدة خريفية.

المطلوب : صياغة هذه المسألة الاقتصادية على شكل نموذج رياضي.

الحل :

نفترض ، X_1 : الكمية الضرورية من الجلد الطبيعي لإنتاج الأحذية

X_2 : الكمية الضرورية من الجلد الاصطناعي لإنتاج الأحذية

X_3 : الكمية الضرورية من النايلون لإنتاج الأحذية

X_4 : الكمية الضرورية من القماش لإنتاج الأحذية

فيكون لدينا

$$[MAN]F(x) = 14.4\,X_1 + 16\,X_2 + 12.8\,X_3 + 10.5\,X_4$$

$$\begin{cases} 26.5X_1 + 7.8X_2 \geq 21 \\ 51X_1 + 26X_2 + 45.7X_3 \geq 30 \\ 5X_3 + 72.5X_4 \geq 500 \\ X_1 \leq 0.9 \\ X_2 \geq 0.8 \\ X_3 \geq \cdots \end{cases}$$

قيود الإنتـــاج (القيدان الأول والثاني)

قيود الاحتياطي (القيود الثالث إلى الخامس)

تمريـــــــــن رقـــــم 05

لإنتاج أربعة أنواع من البضائع (P_4,P_3,P_2,P_1) تستخدم إحدى المؤسسات، إلى جانب عدّة مستلزمات أنتاج، مادة أولية خاصة غير موجودة بوفرة في السوق وبمعدلات إنتاج **6**، **2**، **3** و **5** وحدات – نظرا للظروف الخاصة لتخزين هذه البضائع يفرض على المؤسسة إنتاج على الأكثر **500** وحدة من مجموع البضائع P_2 و P_3وعلى الأكثر **700** ومن البضاعة الرابعة.

تريد المؤسسة تحديد برنامج إنتاج البضائع الأربعة الذي يحقق لها أدنى استهلاك ممكن من المادة الأولية الخاصة بشرط أن الربح الإجمالي المحصل عليه لا يقل عن **2000** وحدة نقدية وأن المبلغ المخصص لشراء المادة الأولية الخاصة لا يفوق **300** و.ن.

علما بأن : – ربح الوحدة لكل بضاعة هو **5**، **2**، **3** و **4**.

– سعر شراء الوحدة من المادة الأولية الخاصة هو **10** و.ن.

<u>**المطلوب**</u>– أكتب هذه المسألة الاقتصادية على شكل نموذج برمجة خطيّة.

الحل :

نفترض ، X_1 : الكمية المنتجة من البضاعة P_1

X_2 : الكمية المنتجة من البضاعة P_2

X_3 : الكمية المنتجة من البضاعة P_3

X_4 : الكمية المنتجة من البضاعة P_4

فيكون لدينا

دالة الهدف: $\rightarrow$ $[MAX]F(x) = 6\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 + 5X_4$

$$\begin{cases} X_2 + X_3 \leq 500 \longrightarrow P_3 \text{ و } P_2 \text{ إنتاج} \\ X_4 \leq 700 \longrightarrow P_4 \text{ إنتاج} \\ 51X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 \geq 2000 \longrightarrow \text{الربح} \\ \left.\begin{array}{c} \begin{cases}(10\times 6)X_1 + (10\times 2)X_2 + (10\times 3)X_3 + (10\times 5)X_4 \leq 300 \\ 60X_1 + 20X_2 + 30X_3 + 50X_4 \leq 300\end{cases} \\ ou \\ \left\{6X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 5X_4 \leq \frac{300}{10} = 30\right. \end{array}\right\} \longrightarrow \text{قيد مبلغ شراء المادة الأولية} \\ X_j \geq 0 \; \{j = 1,2,3,4\} \end{cases}$$

جامعـــــــــــة وهـــــــــران 02

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والتسيير

السنـــــــة الثانيـــــــــــــــــة

المفهوم الهندسي العام لمسائل البرمجة الخطية

السنة الجامعية 2021-2022

تمرين رقم **01** حالة وجود حلول مثلى في مسائل البرمجة الخطية

تقوم أحد المصانع بإنتاج نوعين من السلع (P_1, P_2) باستخدام واحج من مستلزمات ٱنتاج (M) بكمية محدودة وهي **1800** وحدة، إنتاج وحدة من البضاعة P_1 يتطلب استعمال **3** وحدات من M وإنتاج وحدة من البضاعة P_2 يتطلب استعمـــــال **2** وحدات من M.

نظرا لاحتياجات السوق يجب أن الإنتاج الكلي للمصنع من البضاعة P_1 لا يفوق **400** وحدة وانتاجه من البضاعة P_2 لا يفوق **600** وحدة.

علما بأن ربح الوحدة من P_1 هو **30** دج وربح الوحدة من P_2 هو **20** دج، يريد المصنع تحديد الكميات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين من السلع والتي تحقق أكبر ربح إجمالي ممكن.

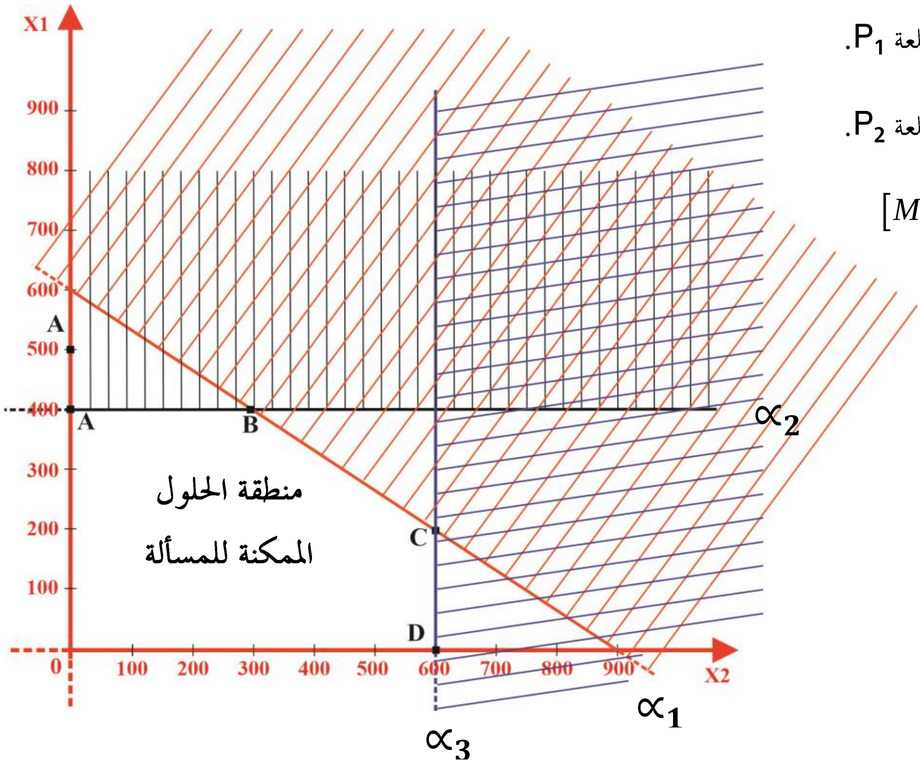
المطلوب :

1) كتابة النموذج الرياضي للمسألة.

2) تحديد الحل الأمثل لهذه المسألة باستعمال طريقة الرسم البياني.

3) إعطاء المفهوم الاقتصادي للحل الأمثل.

<u>الحل</u> : نفرض :



X_1: الكمية التي يجب إنتاجها من السلعة P_1.

X_2: الكمية التي يجب إنتاجها من السلعة P_2.

$$[MAX]F(X) = 30x_1 + 20x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 1800 \\ x_1 \qquad\quad \leq 400 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 = 1800$$

$$(\alpha_1)\begin{cases} x_1 = 0, \ x_2 = 900 \\ x_1 = 600, \ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha_2) \ , x_1 = 400$$

$$(\alpha_3) \ , x_2 = 600$$

$(0): x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

$(A): x_1 = 400 \ ; \ x_2 = 0 \Rightarrow F(x) = 12000$

$(B): x_1 = 400 \ ; \ x_2 = 300 \Rightarrow F(x) = 12000 + 6000 = 18000$

$(C): x_1 = 200 \ ; \ x_2 = 600 \Rightarrow F(x) = 6000 + 12000 = 18000$

$(D): x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 600 \Rightarrow F(x) = 12000$

$[MAX]F(X) = 18000 \Rightarrow$ Les pts (B) et (C) constituent les solutions optimales du problème.

$$\begin{cases}[MAX]F(X)=18000 \\ x_1=400 \ , \ x_2=300\end{cases}$$ الحل الأمثل

$$\begin{cases}[MAX]F(X)=18000 \\ x_1=200 \ , \ x_2=600\end{cases}$$

Etant donné que les points B et C sont les extrémités d'un segment tons les points du segment B et X consistent une solution optimale à ce problème, puisqu'ils vérifient l'équation.

$$3x_1+2x_2 \leq 1800$$

المسألة تحتوي على عدة حلول مثلى

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \text{varie entre 200 et 400} \\ x_2 \text{varie entre 300 et 600}\end{array}\right\}[MAX]F(X)=18000$$

المفهوم الاقتصادي :

1) أقصى ربح ممكن ان يحصل عليه المصنع هو **18000** دج ولذلك يجب عليه إنتاج **400** وحدة من المنتوج **P_1** و**300** وحدة من المنتوج **2**P واستهلاك كل احتياطي المستلزم (M) **(18000)** وهكذا يون حجم انتاج السلعة **P_1** يساوي أقصى طلب في السوق وحجم إنتاج السلعة **P_2** يكون يقل بـــ **300**وحدة من أقصى حجم الطلب في السوق.

2) أقصى ربح ممكن ان يحصل عليه المصنع هو **18000** دج ولذلك، يجب عليه أنتاج **200** من **P_1** و**600** من **P_2** واستهلاك كل احتياطي المستلزم (M) وهكذا يكون حجم الطلب من السلعة **P_1** يقل بـــ **200** وحدة عن حجم الطلب في السوق وحجم إنتاج **P_2** يساوي أقصى حجم الطلب في السوق.

تمرين رقم 02 **حالة عدم وجود حل امثل**

حدد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي لمسألة برمجة خطية

$$[MAX]F(X) = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 24 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0$$

الحـــــل :

$$x_1 + 2x_2 = 12$$

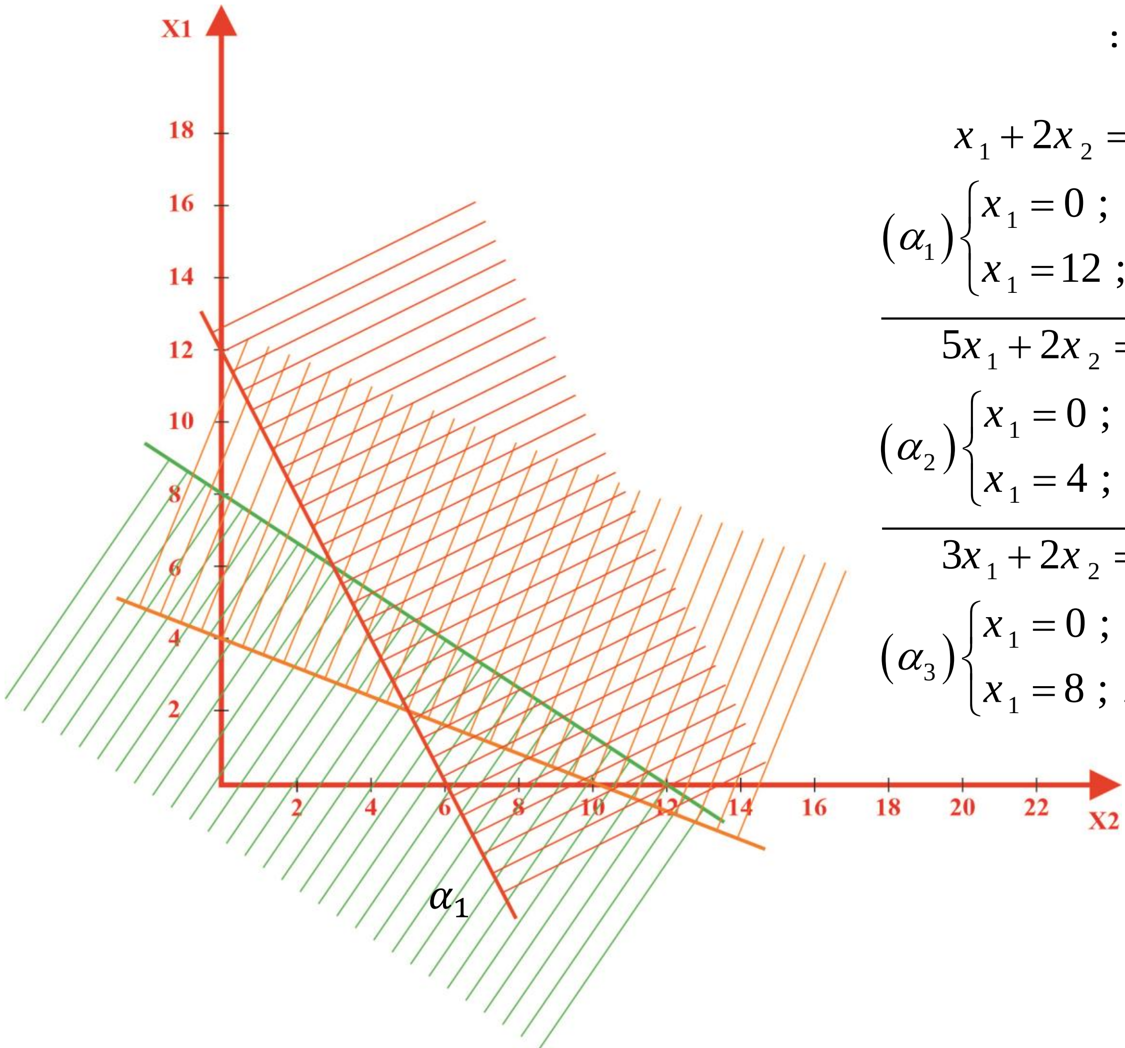
$$(\alpha_1)\begin{cases} x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 6 \\ x_1 = 12 \ ; \ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$5x_1 + 2x_2 = 20$$

$$(\alpha_2)\begin{cases} x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 10 \\ x_1 = 4 \ ; \ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 = 24$$

$$(\alpha_3)\begin{cases} x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 12 \\ x_1 = 8 \ ; \ x_2 = 0 \end{cases}$$



نظرا لعدم وجود منطقة الحلول الممكنة تحقق كل الشروط في نفس الوقت فليس هناك حلا ممكنا لهذه المسألة وبالتالي ليس هناك حلا أمثلا للمسألة.

تمرين رقم 03 حالة عدم وجود حل أمثل محدد

لدينا النموذج الرياضي التالي لمسألة برمجة خطية

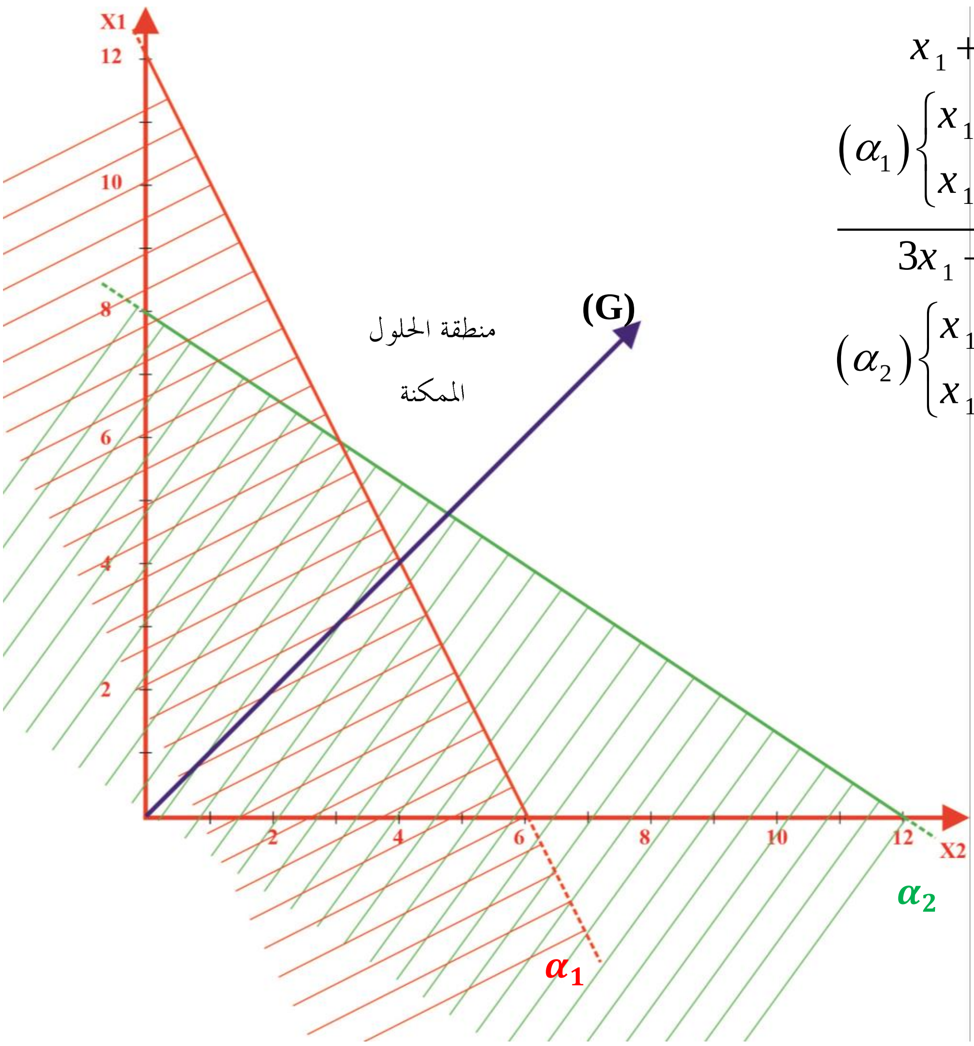
$$[MAX]\,F(X) = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0$$

حدد الحل الأمثل لهذا النموذج

الحـــــــــل :

$$x_1 + 2x_2 = 12$$
$$(\alpha_1)\begin{cases} x_1 = 0\ ;\ x_2 = 6 \\ x_1 = 12\ ;\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 = 24$$
$$(\alpha_2)\begin{cases} x_1 = 0\ ;\ x_2 = 12 \\ x_1 = 8\ ;\ x_2 = 0 \end{cases}$$



- منطقة الحلول الممكنة للمسألة غير محددة وبما أنه يراد التعظم فالدالة F(X) ليس لها حد أقصى محدد وبالتالي المسألة ليس لها حد أمثل محدد F(X) تأخذ أي قيمة كبيرة دون ان يكون لها حد أقصى.

المسألة تحتوي على حلول ممكنة لكن لا يمكننا تحديد الحل الذي يعظم دالة الهدف.

تمرين رقم **04** مسألة تدنية

يريد المطعم الجامعي أن يقدم وجبة غذائية للطلبة تتضمن نوعين من الطعام A_1, A_2 بناء على توجيهات مديرية الصحة تبين أن الطالب يحتاج يوميا إلى **09** ملغ على الأقل من فيتامين V_3 وإلى **08** ملغ على القل من V_2 وإلى **12** ملغ على الأقل من V_3 ومن المعلوم أن :

- **01** كلغ من الطعام A_1 يعطي **03** ملغ من V_1، **01** ملغ من V_2 ، **01** ملغ من V_3
- **01** كلغ من الطعام A_2 يعطي **01** ملغ من V_1، **02** ملغ من V_2 ، **06** ملغ من V_3
- كلفة الكلغ الواحد من الطعام A_1 هي **4** دج
- كلفة الكلغ الواحد من الطعام A_2 هي **6** دج

المطلوب : تحديد الكميات الواجبة من الطعام A_1, A_2 التي تدخل في تركيب الوجبة الغذائية والتي تحقق أقل قيمة ممكنة للتكاليف الاجمالية.

الحـــــل :

x_1 : الكمية من الطعام A_1 التي تدخل في تركيب الوجبة الغذائية

x_2 : الكمية من الطعام A_2 التي تدخل في تركيب الوجبة الغذائية

دالة الهدف $\Rightarrow \left[MIN \right] F(X) = 4x_1 + 6x_2$

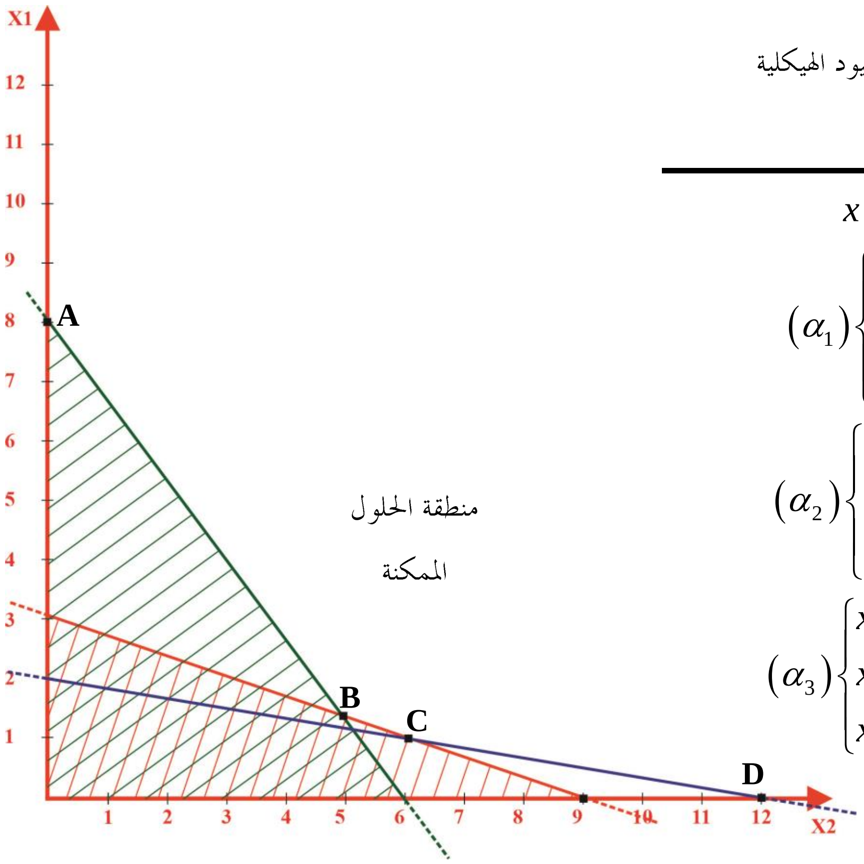
القيود الهيكلية
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \,,\, x_2 \ge 0$$

$$(\alpha_1)\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 9 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \end{cases}$$

$$(\alpha_2)\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 4 \\ x_1 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 8 \end{cases}$$

$$(\alpha_3)\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 12 \\ x_1 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 2 \\ x_1 = 2 \ \Rightarrow \ x_2 = 12 \end{cases}$$



تحديد الحل الأمثل :

$(A): x_1 \,;\, x_2 = 0 \Rightarrow F(x) = 48$ ج

(B) : عن طريق تقاطع معادلتي المستقيمين

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ -x_1 - 6x_2 = 12 \end{cases}$$

$$-4x_2 = -4$$

$x_2 = 1 \Rightarrow F(x) = 30$ ج   د

$$x_1 = 6$$

$$(C):\begin{cases} \alpha_1 : 3x_1 + x_2 = 9 \\ \alpha_2 : x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$-5x_2 = -15$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow F(x) = 26$$

$$(D): x_1 = 0 \,,\, x_2 = 9 \Rightarrow F(x) = 54$$

<u>الحـــل الأمثـــل :</u>

أدنى قيمة للتكاليف الإجمالية على الوجبة الغذائية التي يقدمها المطعم الجامعي هي **26** دج ويجب ان تحتوي على **2** ملغ من A_1 و **3** ملغ من A_2 وهكذا تكون الكمية من V_1 التي تدخل في الوجبة الغذائية تساوي الحد الأدنى المطلوب، والكمية من V_2 تساوي الحد الأدنى المطلوب والكمية من V_3 تفوق الحد الأدنى المطلوب بـــ **08** وحدات (**20-12**).

<u>تمرين رقم</u> 05 مسألة تعظيم

شركة نفطال تقوم بإنتاج نوعين من البنزين للسيارات (A_2,A_1) وذلك باستعمال أربعة أنواع من مشتقات البترولية (B_4,B_3,B_2,B_1).

- إنتاج وحدة من النوع A_1 تتطلب استهلاك **2** وحدات من B_1، وحدة واحدة من B_2 ، **4** وحدات من B_3، وعدم استهلاك المشتق B_4.
- إنتاج وحدة من النوع A_2 تتطلب استهلاك **2** وحدات من B_1، **2** وحدات من B_2 ، **4** وحدات من B_4، وعدم استهلاك المشتق B_3.

يمكن للشركة توفير كميات محدودة من المشتقات البترولية وهي على التوالي : **1200**، **800**، **1600** و **1200** وحدات.

علما بأن ربح الوحدة من A1 هو **3** دج وربح الوحدة من A2 هو **5** دج.

تريد نفطال تحديد الكميات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين من البنزين والتي تحقق اكبر ربح ممكن

<u>**المطلوب**</u> : **1**) عن طريق الرسم البياني، حدّد تركيب الإنتاج الذي تحقق القيمة المثلى للربح الإجمالي.

2) أعطي المفهوم الاقتصادي للحل الأمثل.

الحــــل :

نفرض : x_1 : الكمية المنتجة من النوع A_1

x_2 : الكمية المنتجة من النوع A_2

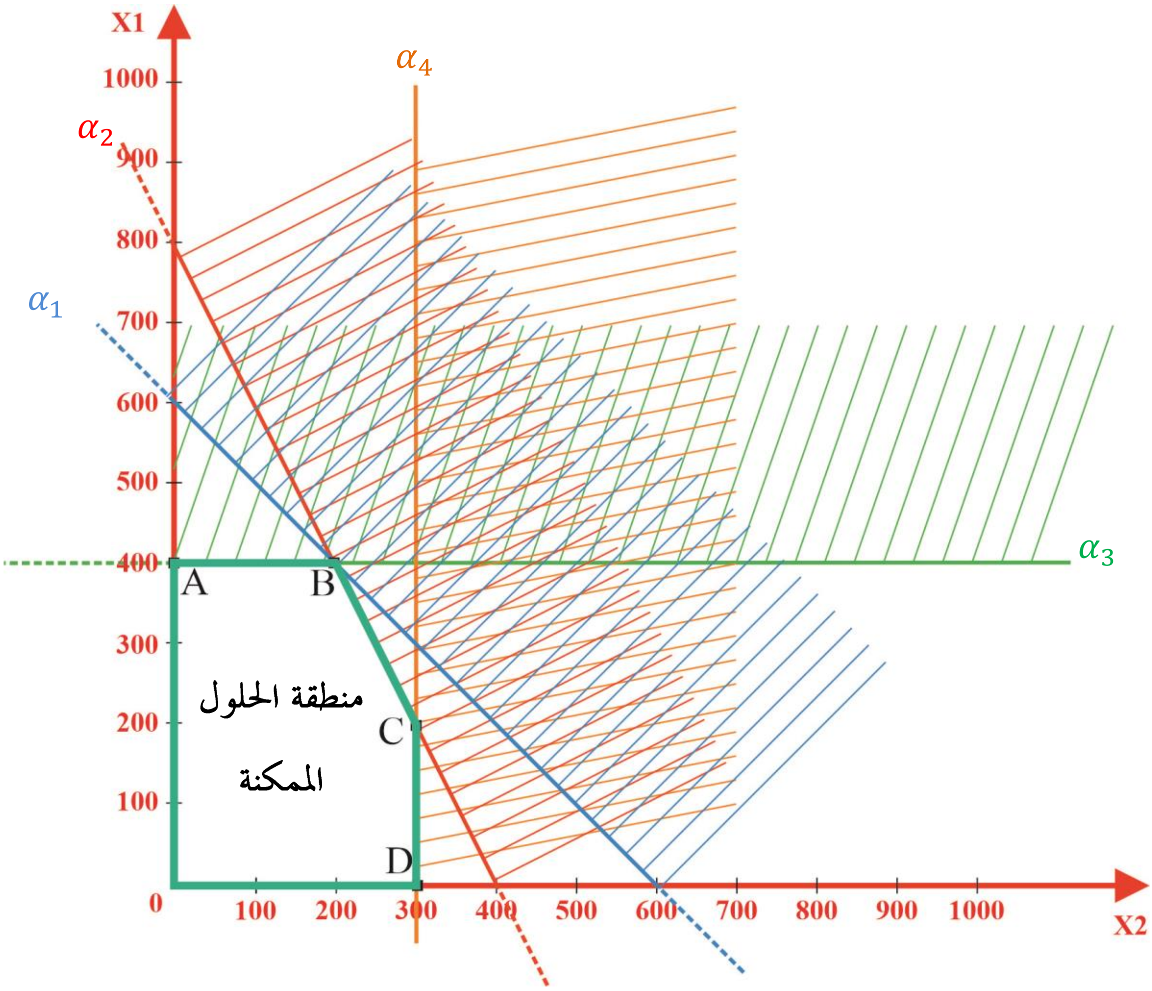
$$
\begin{aligned}
&[MAX]F(X) = 3x_1 + 5x_2 \\
&\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{matrix}
\begin{cases}
2x_1 + 2x_2 \le 1200 \\
x_1 + 2x_2 \le 800 \\
4x_1 + \qquad \le 1600 \\
\qquad 4x_2 \le 1200
\end{cases} \\
&x_j \ge 0 \quad ; \quad j=\{1,2\}
\end{aligned}
$$

$$2x_1 + 2x_2 = 1200 \qquad (\alpha_1)\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 600} \\ x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 600} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 800 \qquad (\alpha_2)\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 400} \\ x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 800} \end{cases}$$

$$4x_1 = 1600 \qquad (\alpha_3)\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0} \\ x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 400} \end{cases}$$

$$4x_2 = 1200 \qquad (\alpha_4)\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 300} \\ x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 600} \end{cases}$$



<u>تحديد الحل الأمثل :</u>

$(0): x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

$(A): x_1 = 400 \; ; \; x_2 = 0 \Rightarrow F(x) = 12000$

$(B): \boxed{x_1 = 400} \; ; \; \boxed{x_2 = 200} \Rightarrow F(x) = 2200$

$(C): x_1 = 200 \; ; \; x_2 = 300 \Rightarrow F(x) = 2100$

$(D): x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 300 \Rightarrow F(x) = 1500$

الحل الأمثل :

أقصى ربح إجمالي يمكن الحصول عليه هو **2200** دج ولهذا يجب إنتاج **400** و من A_1 و **200** و من A_2 واستهلاك كل

الاحتياطي من B_1,B_2,B_3، وعدم استهلاك **400** وحدة من B_4.

جامعـــــــــــــة وهـــــــــــــران 02

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والتسيير

السنــــــــــــــة الثانيـــــــــــــــة

المقـــــــياس : بحـــــــــوث العمليــــــات

تمارين تطبيقية

حول طريقة السيمبلكس

-

Application de la méthode du simplex (cas où l'origine est solution de base) + base artificielle

السنة الجامعية 2021-2022

تمريـــن رقـــم: **01** طريقة السيمبلكـــــــــس

$$[MAX]F(x) = 10X_1 + 12X_2 + 6X_3 + 8X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7$$

$$\begin{array}{l} R_1: \\ R_2: \\ R_3: \\ \\ \end{array}\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 500 \\ 2X_1 + X_2 \qquad + 3X_4 + X_6 = 800 \\ X_3 + 2X_4 + X_7 = 500 \\ X_j > 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} X_5 & X_6 & X_7 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل الأساسي الابتدائي هو :

$$F(x) = 0$$

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0 \,; X_5 = 500 \,; X_6 = 800 \,;\; X_7 = 200$$

B	CB	XB	10 X_1	12 X_2	6 X_3	8 X_4	0 X_5	0 X_6	0 X_7	θ
X_5	0	500	1	1	1	1	1	0	0	500
X_6	0	800	2	1	0	3	0	1	0	800
X_7	0	200	0	0	1	2	0	0	1	-
Fj		0	0	0	0	0	0	0	0	
$Fj - Cj$			-10	-12	-6	-8	0	0	0	
X_2	12	500	1	1	1	1	1	0	0	
X_6	0	300	1	0	-1	2	-1	1	0	
X_7	0	200	0	0	1	2	0	0	1	
Fj		6000	12	12	12	12	12	0	0	
$Fj - Cj$			2	0	6	4	12	0	0	

الحل الأمثل هو :

$$\begin{cases} [MAX]F(X) = 6000 \\ X_2 = 500\ ;\ X_6 = 300\ ;\ X_7 = 200 \\ X_1 = X_3 = X_4 = X_5 = 0 \end{cases}$$

- Solution unique déterminée

2ème question (voir page 1bis)

(page 1bis)

السؤال التالي للتمرين رقم 01 :

إذا افترضنا أن المسألة الاقتصادية المطروحة من خلال هذا النموذج هي تحديد الكميات الواجب انتاجها (X_1,X_2,X_3,X_4) من أربعة أنواع من البضائع (P_1,P_2,P_3,P_4) باستعمال ثلاثة أنواع من مستلزمات الإنتاج (R_1,R_2,R_3) بكميات محدودة **(200,800,500)**، والتي تحقق أكبر ربح ممكن، أعطي المفهوم الاقتصادي للحل الأمثل.

الجـــــــــــــــــــــواب :

أكبر قيمة للربح الإجمالي الممكن الحصول عليها هي **6000** وحدة نقدية وذلك بإنتاج **500** وحدة من البضاعة الثانية (P_2) وعدم انتاج البضائع P_3,P_1 و P_4 (بما أن **X2=500** و **X_1=X_3=X_4=0**)، من أجل هذا يستهلك كل الاحتياطي من المستلزم R_1 أي **500** وحدة (بما أن الكمية الفاضلة من R_1 هي **X_5=0**)، ويستهلك **600** وحدة R_2 (بما أن هناك كمية فاضلة من R_2 هي **X_6=300**)، وعدم استهلاك المستلزم R_3 (بما أن هناك الكمية الفاضلة من R_3 هي **X_7=200**= كل الاحتياطي).

Vous pouvez procéder de la même manière pour les autres exercices en supposant un problème économique au modèle mathématique et donner l'interprétation économique du résultat optimal obtenu.

<u>Méthode de SIMPLEX</u>   تمريـــــــــــن رقـــــم: **02**

$$[MAX]F(x) = 4X_1 + 3X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 4X_3 + X_4 &= 50 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 + X_5 &= 30 \\ 4X_1 + 5X_2 + 2X_3 + X_6 &= 80 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} X_4 X_5 X_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل الأساسي الابتدائي هو :

$$F(x) = 0$$

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0\,; X_4 = 50\,; X_5 = 30\,;\ X_6 = 80$$

B	C^B	X^B	4 X_1	3 X_2	1 X_3	0 X_4	0 X_5	0 X_6	θ
X_4	0	50	1	2	4	1	0	0	50
X_5	0	30	2	1	1	0	1	0	15
X_6	0	80	4	5	2	0	0	1	20
Fj		0	0	0	0	0	0	0	
$Fj - Cj$			-4	-3	-1	0	0	0	
X_4	0	35	0	3/2	7/2	1	-1/2	0	70/3
X_1	4	15	1	1/2	1/2	0	1/2	0	30
X_6	0	20	0	3	0	0	-2	1	20/3
Fj		60	4	2	2	0	2	0	
$Fj - Cj$			0	-1	1	0	0	0	
X_4	0	25	0	0	7/2	1	1/2	-1/3	
X_1	4	35/3	1	0	1/2	0	5/6	-1/6	
X_2	3	20/3	0	1	0	0	-2/3	1/3	
Fj		200/3	4	3	2	0	8/6	1/3	
$Fj - Cj$			0	0	0	0	8/6	1/3	

<u>الحل الأمثل هو :</u>

$$\begin{cases} [MAX]F(X) = {}^{200}/_{3} \\ X_1 = {}^{35}/_{3}\ ;\ X_2 = {}^{20}/_{3}\ ;\ X_4 = 25 \\ X_3 = X_5 = X_6 = 0 \end{cases}$$

ع الجديد $=$ ع القديم $-$ $\dfrac{\text{ع مقابل في السطر المحوري} \times \text{ع م ع م}}{\text{العنصر المحوري}}$

Méthode de SIMPLEX **تمريـــــــن رقـــم:03**

$$[MAX]F(x) = 4X_1 + 3X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$$

$$\begin{gathered} X_1 + X_2 + 4X_3 + X_4 = 50 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 + X_5 = 30 \\ 4X_1 + 5X_2 + 2X_3 + X_6 = 80 \end{gathered}$$

$$\begin{array}{c} X_4 X_5 X_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل الأساسي الابتدائي هو :

$$F(x) = 0$$

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0\,; X_4 = 25\,; X_5 = 16\,;\; X_6 = 40$$

B	C^B	X^B	4 X_1	3 X_2	1 X_3	0 X_4	0 X_5	0 X_6	θ
X_4	0	25	2	3	5	1	0	0	25/2
X_5	0	16	4	2	2	0	1	0	16/4
X_6	0	40	5	6	2	1	0	1	40/5
Fj		0	0	0	0	0	0	0	
$Fj - Cj$			-5	-3	-4	0	0	0	
X_4	0	17	0	2	4	1	-1/2	1	17/4
X_1	5	4	1	1/2	1/2	0	1/4	0	8
X_6	0	20	0	17/2	-1/2	0	-5/4	1	-
Fj		20	5	5/2	5/2	0	5/4	0	
$Fj - Cj$			0	-1/2	-3/2	0	5/4	0	
X_4	4	17/4	0	1/2	*1*	1/4	-1/8	0	
X_1	5	15/8	1	1/4	0	-1/8	5/16	0	
X_2	0	17/8	0	-15/4	0	3/8	21/16	1	
Fj		211/8	5	13/4	4	3/8	17/16	0	
$Fj - Cj$			0	1/4	0	3/8	17/16	0	

الحل الأمثل هو :

$$\begin{cases} [MAX]F(X) = {}^{211}/_{8} \\ X_1 = {}^{15}/_{8}\ ;\ X_3 = {}^{117}/_{4}\ ;\ X_6 = {}^{17}/_{8} \\ X_2 = X_4 = X_5 = 0 \\ -\ solution\ unique\ déterminée \end{cases}$$

تمريـــن رقـــم:04

Méthode de SIMPLEX avec utilisation de la base artificielle

$$[MIN]F(x) = 3X_1 + 3X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + MX_7$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 900 \\ X_1 \qquad - X_5 + X_7 = 500 \\ \qquad X_3 + X_6 = 100 \\ \qquad\quad X_j \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} X_2 X_7 X_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل الأساسي الابتدائي هو :

$$F(x) = 500M + 2700\,; \begin{cases} X_2 = 900\,; X_7 = 500\,; X_6 = 100 \\ X_1 = X_3 = X_4 = X_j = 0 \end{cases}$$

B	C^B	X^B	3 X_1	4 X_2	1 X_3	0 X_4	0 X_5	0 X_6	M X_7	θ
X_2	3	*900*	1	1	1	-1	0	0	0	*900*
X_7	M	*500*	1	0	0	0	-1	0	1	*(500)*
X_6	0	*100*	0	0	1	0	0	1	0	-
Fj		*500M+2700*	(M+3)	3	3	-3	-M	0	M	
$Fj - Cj$			*(M)*	*0*	*2*	*-3*	-M	0	0	
X_2	3	400	0	1	1	-1	1	0	-1	400
X_1	3	500	1	0	0	0	-1	0	1	-
X_6	0	100	0	0	1	0	0	1	0	(100)
Fj		2700	3	3	3	-3	0	0	0	
$Fj - Cj$			0	0	(2)	-3	0	0	-M	
X_2	3	300	0	1	0	-1	1	-1	-1	
X_1	3	500	1	0	0	0	-1	0	1	
X_3	1	100	0	0	1	0	0	1	0	
Fj		2500	3	3	1	-3	0	-2	0	
$Fj - Cj$			0	0	0	-3	0	-2	-M	

<u>الحل الأمثل هو :</u>

(2 solution optimales) $[MAN]F(X) = 2500$;

$$X_1 = 500\ ;\ X_2 = 300\ ;\ X_3 = 100\ ;\ X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = 0$$

Méthode de SIMPLEX avec utilisation de la base artificielle

تمريـــن رقم:05

$$[MIN]F(x) = 6X_1 + 4X_2 + 10X_3 + 0X_4 + 0X_5 + MX_7 + MX_6$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 + X_6 = 15 \\ X_1 + X_2 + X_3 - X_5 + X_7 = 10 \\ X_j \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_6 & X_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل الأساسي الابتدائي هو :

$$F(x) = 25M$$

$$X_6 = 15\ ;\ X_7 = 10\ ;\ X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$$

B	C^B	X^B	6 X_1	4 X_2	10 X_3	0 X_4	0 X_5	M X_6	M X_7	θ
X_6	M	15	1	2	1	-1	0	1	0	15/2
X_7	M	10	1	1	1	0	-1	0	1	10
Fj		25M	2M	3M	2M	-M	-M	M	M	
$Fj - Cj$			(2M-6)	(2M-4)	(2M-10)	-M	-M	0	0	
X_2	4	15/2	*1/2*	*1*	*1/2*	*-1/2*	*0*	*1/2*	0	
X_7	*M*	5/2	*1/2*	*0*	*1/2*	*1/2*	*-1*	*-1/2*	1	
Fj		$\frac{60+5M}{2}$	$\frac{M+4}{2}$	*4*	$\frac{M+4}{2}$	$\frac{M-4}{2}$	-M	$\frac{-M+4}{2}$	M	
$Fj - Cj$			$\frac{M-8}{2}$	0	$\frac{M-16}{2}$	$(\frac{M-4}{2})$	-M	$\frac{-3M+4}{2}$	0	
X_2	4	10	*1*	*1*	*1*	*0*	-1	0	1	
X_4	0	5	*1*	*0*	*1*	*1*	-2	-1	2	
Fj		40	*4*	*4*	*4*	*0*	*-4*	*0*	*4*	
$Fj - Cj$			*-2*	*0*	*-6*	*0*	*-4*	*-M*	*(-M+4)*	

<u>الحل الأمثل هو :</u>

(Solution unique déterminée)

$$\begin{cases} [MIN]F(X) = 40\ ; \\ X_2 = 10\ ;\ X_4 = 5\ ;\ X_1 = X_3 = X_5 = X_6 = X_7 = 0 \end{cases}$$

Méthode de SIMPLEX avec utilisation de la base artificielle

تمريــــــن رقـــم: **06**

$$[MIN]F(x) = 10X_1 + 12X_2 + 6X_3 + 12X_4 + 0X_5 + 0X_6 + MX_7$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_5 \geq 10000 \\ X_1 + X_2 \qquad - X_6 + X_8 \geq 4000 \\ \qquad X_3 + X_7 \leq 2000 \end{cases}$$

الحل الأساسي الابتدائي هو :

$$F(x) = 500M + 2700\,; \begin{cases} X_2 = 900\,; X_7 = 500\,; X_6 = 100 \\ X_1 = X_3 = X_4 = X_j = 0 \end{cases}$$

B	C^B	X^B	3 X_1	4 X_2	1 X_3	0 X_4	0 X_5	0 X_6	M X_7	M X_8	θ
X_4	12	10	1	1	1	1	-1	0	0	0	10
X_8	M	4	1	1	0	0	0	-1	0	0	0
X_7	0	2	0	0	1	0	0	0	1		-
Fj		120M+4	12+M	12+M	12	12	-12	-M	0	M	
$Fj-Cj$			M+2	M	6	0	-12	-M	0	0	
X_4	12	6	0	0	1	1	-1	1	0	-1	6
X_1	10	4	1	1	0	0	0	-1	1	1	-
X_7	6	2	0	0	1	0	0	0	1	0	2
Fj		112	10	10	12	12	-12	2	0	-2	
$Fj-Cj$			0	-2	6	0	-12	2	0	-2	
X_4	12	4	0	0	0	1	-1	1	-1	-1	4
X_1	10	4	1	1	0	0	0	-1	0	1	-
X_3	6	2	0	0	1	0	0	0	0	0	-
Fj		100	10	10	6	12	-12	+2	-6	-2	
$Fj-Cj$			0	-2	0	0	-12	+2	-6	-2-M	
X_6	0	4	0	0	0	1	-1	1	-1	-1	
X_1	10	8	1	1	0	1	-1	0	-1	0	
X_3	6	2	0	0	1	0	0	1	1	1	
Fj		92	10	10	10	6	10	-10	0	0	
$Fj-Cj$			0	-2	0	-2	-10	0	-4	-10-M	

الحل الأمثل هو :

$$F(X) = 92000 \ ;$$

$[MAN]\big[IF_j - c_j|.MIN\theta\big]$ dans le cas de Max

$[MAN]\big[IF_j - c_j|.MIN\theta\big]$ dans le cas de Min et tu choisi le θ des valeurs pareilles

جامعـــــــــــــــة وهـــــــــــــــران 02

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والتسيير

السنـــــــــــــــة الثانيـــــــــــــــــــة

المقـــــياس : بحـــــــــــــوث العمليـــــــــــــــات

تمارين تطبيقية خاصة بالفصل الرابع من البرنامج والمتعلق بمسائل الترافق في البرمجة الخطية

-

LA DUALITE EN PROGRAMMATION LINEAIRE

السنة الجامعية **2021–2022**

تمريــــــن رقــــــم: 01

أكتب النموذج المرافق للنموذج الرياضي التالي لمسألة برمجة خطية :

$$1°[MAX]F(X) = 5000X_1 + 2000X_2 + 1000X_3$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 5 \\ X_1 + X_2 + X_3 \leq 7 \\ X_1 + X_3 \leq 2 \\ X_1 \leq 1 \\ X_{1,2,3} \geq 0 \end{cases}$$

الأصلـــي

PRIMAL

$$[MIN]G(Y) = 5Y_1 + 7Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5$$

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 5000 \\ Y_1 + Y_2 \geq 2000 \\ Y_2 + Y_3 + Y_5 \leq 1000 \\ X_{1...5} \geq 0 \end{cases}$$

المرافــق

DUAL

$$2°[\text{MIN}]F(X) = X_2 + X_4 + 3X_5$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \quad +X_4 + X_5 & \geq 1 \\ \quad 4X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5 & \geq 2 \\ \quad 3X_2 \qquad + X_5 + X_6 & \geq 5 \\ \qquad X_j \geq 0 & \end{cases}$$

الأصلـــي

PRIMAL

$$[\text{MAX}]G(Y) = Y_1 + 2Y_2 + 5Y_3$$

$$\begin{cases} Y_1 & \leq 0 \\ 2Y_1 + 4Y_2 + 3Y_3 & \leq 1 \\ \qquad Y_3 & \leq 0 \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 & \leq 3 \\ \qquad\quad Y_3 & \leq 0 \\ \qquad X_i \geq 0 & \end{cases}$$

المرافــق

DUAL

تمريـــــن رقـــم: **02**

لدينا النموذج الرياضي التالي لمسألة برمجة خطية :

$$\left[MIN\right]F(X) = 9X_1 + 6X_2 + 15X_3$$

$$\begin{cases} A : X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 15 \\ B : X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 10 \end{cases}$$

$$X_{1,2,3} \geq 0$$

1) أكتب النموذج المرافق لهذا النموذج؟

2) بتطبيق طريقة SINPLEX على النموذج المرافق، أوجد الحل الأمثل له؟

3) استخرج الحل المثل للنموذج الأصلي؟

4) إذا افترضنا أن النموذج الأصلي يمثل مسألة اقتصادية يراد فيها تركيب وجبة غذائية تحقق أدنى قيمة للتكاليف الاجمالية من إدخال ثلاثة أنواع من الطعام (P_1,P_2,P_3)وأن الوجبة يجب أن تتكون من حد أدنى من نوعين من الفيتامينات (A,B)، أعطي المفهوم الاقتصادي للنموذج المرافق؟

الحل :

1) النموذج المرافق :

$$[MAX]\,G(X) = 15Y_1 + 10Y_2$$

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 \geq 9 \\ Y_1 + 3Y_2 \geq 6 \\ 2\mathrm{Y}_1 + Y_2 \leq 15 \\ Y_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

2) الحل الأمثل للنموذج المرافق :

$$[MAX]\,G(X) = 15Y_1 + 10Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5$$

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 + \mathrm{Y}_5 = 9 \\ Y_1 + 3Y_2 + Y_4 = 6 \\ 2\mathrm{Y}_1 + Y_2 + Y_5 = 15 \\ Y_{1,2,3,4,5} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_3 & Y_4 & Y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل الأساسي الابتدائي :

$$G(X) = 0 \;;\; \mathrm{Y}_1 = 0 \;;\; \mathrm{Y}_2 = 0 \;;\; \mathrm{Y}_3 = 9 \;;\; \mathrm{Y}_4 = 6 \;;\; \mathrm{Y}_5 = 15$$

B	C^B	Y^B	15 Y_1	10 Y_2	0 Y_3	0 Y_4	0 Y_5	θ
Y_3	0	9	1	1	1	0	0	9
Y_4	0	6	1	3	0	1	0	(6)
Y_5	0	15	2	1	0	0	1	15/2
Fj		0	0	0	0	0	0	
$Fj-Cj$			(-15)	-10	0	0	0	
Y_3	0	3	0	-2	1	-1	0	
Y_1	15	6	1	3	0	1	0	
Y_5	0	3	0	-5	0	-2	1	
Fj		90	15	45	0	15	0	
$Fj-Cj$			0 X_4	35 X_5	0 X_1	15 X_2	0 X_3	

$$[MAX]G(X)=90\ ;\ Y_1=6\ ;\ Y_2=0\ ;\ Y_3=3\ \ ;\ Y_4=0\ ;\ Y_5=3$$

3) الحل الأمثل للنموذج الأصلي :

$$[MIN]F(X)=90\ ;\ X_1=6\ ;\ X_2=15\ ;\ Y_3=0\ \ ;\ Y_4=0\ ;\ Y_5=35$$

4) المفهوم الاقتصادي للنموذج المرافق :

$$\left.\begin{array}{l} Y_1: \text{ربح الوحدة من الفيتامين} A \\ Y_2: \text{ربح الوحدة من الفيتامين} B \end{array}\right\}$$

* <u>دالة الهدف</u> : تعظيم الربح الإجمالي من تقديم A و B في الوجبة الغذائية من خلال إدخال الطعام P_3, P_2, P_1.

* <u>القيود الهيكلية</u> :

①يجب أن ربح الوحدة من الطعام P_1 لا يفوق تكلفة الوحدة من P_1

$$\underbrace{\underbrace{1Y_1}_{\text{ربح الوحدة } A} + \underbrace{1Y_2}_{\text{ربح الوحدة } B}}_{\text{ربح الوحدة من الطعام } P1} \leq \underbrace{9}_{\text{تكلفة الوحدة من } P_1}$$

②يجب أن ربح الوحدة من الطعام P_2 لا يفوق تكلفة الوحدة من P_1

$$\underbrace{\underbrace{1\,Y_1}_{\text{ربح المحصل عليه من } A} + \underbrace{3\,Y_2}_{\text{ربح المحصل عليه من } B \text{ في } P_2}}_{\text{ربح الوحدة من الطعام } P_2} \leq \underbrace{6}_{\text{تكلفة الوحدة من } P_2}$$

③يجب أن ربح الوحدة من الطعام P_3 لا يفوق تكلفة الوحدة من P_3

تمريــــــــــــــن رقـــــــــــم: 03

تريد شركة الخطوط الجوّية الجزائرية شراء ثلاثة أنواع من الطائرات الجديدة (C-B-A) لتوسيع نطاق خدماتها وقد خصص لذلك مبلغ **500** مليون دولار – ثمن الطائرة الواحدة من كل نوع هو بالترتيب **8**، **6** و **12** مليون دولار – الربح اليومي المقدر من استعمال كل طائرة؛ عدد الماحيين الذي يشكل طاقم الطائرة الجديدة وعدد الفنيين العاملين على صيانة الطائرة معطات في الجدول التالي :

		A	B	C	العدد المتاح
a_1	طاقم الطائرة	5	6	6	700
a_2	الفنيون	4	3	5	240
a_3	الربح اليومي	9	7	10	----

تدرس الشركة المشكلة المطروحة وذلك من أجل تحدي عدد الطائرات التي يجب شراؤها من كل نوع بحيث يتحقق معها أكبر ربح يومي ممكن.

المطلــــــــــــــوب

1/ أكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة الاقتصادية.

2/ أكتب النموذج المرافق لهذا النموذج.

3/ أعطي مفهوم الاقتصادي لمتغيرات، لدالة الهدف وللقيود الهيكلية للنموذج المرافق.

الحـــــــــــــــــل :

1/ النموذج الرياضي لهذه المسألة الاقتصادية :

$$\begin{cases} X_1: \text{عدد الطائرات الواجب شراؤها من النوع } A \\ X_2: \text{عدد الطائرات الواجب شراؤها من النوع } B \\ X_3: \text{عدد الطائرات الواجب شراؤها من النوع } C \end{cases}$$

$$[MAX]F(X) = 9X_1 + 7X_1 + 10X_3$$

$$\begin{cases} 8X_1 + 6X_2 + 12X_3 \leq 500 \rightarrow ((\quad \text{.غ الا سد ت ثمار} \\ 5X_1 + 6X_2 + 6X_3 \leq 700 \rightarrow ((\quad \text{طاق م الـ طائـ رة} \\ 4X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 240 \rightarrow ((\quad \text{عدد الـ فـ نـ يـ يون} \\ X_{1,2,3} \geq 0 \end{cases}$$

2/ النموذج المرافق :

$$[MIN]G(Y) = 500Y_1 + 700Y_2 + 240Y_3$$

$$\begin{cases} 8Y_1 + 5Y_2 + 4Y_3 \geq 9 \\ 6Y_1 + 6Y_2 + 3Y_3 \geq 7 \\ 12Y_1 + 6Y_2 + 5Y_3 \geq 10 \\ Y_{1,2,3} \geq 0 \end{cases}$$

3/ المفهوم الاقتصادي للنموذج المرافق :

Y_1: تكلفة استثمار مليون دولار لشراء الطائرة الجديدة ؛

Y_2: تكلفة استخدام عامل واحد من طاقم الطائرة ؛

Y_3: تكلفة استخدام عامل واحد من تقنيين صيانة الطائرة؛

* القيد الأول : يجب ان تكلفة الطائرة A لا تقل على ربح الطائرة A.

$$\underbrace{8Y_1} + 5Y_2 + 4Y_3 \geq 9$$

ت كل فة ا س ت ثما ر مل يون دولار ل شرا ء الطائ رة 8A	ت كل فة ا س تخدام عمال طاق م الطائ رة 5A	تكلفة استخدا م عمال صيانة الطائرة 4A	ح الطائ رة A

* القيد الثاني : يجب ان تكلفة الطائرة B لا تقل على ربح الطائرة B.

* القيد الثالث : يجب ان تكلفة الطائرة C لا تقل على ربح الطائرة C.

* دالة الهدف : تدنية التكاليف الاجمالية من استخدام الطائرات الجديدة A،B، C والناتجة من مبلغ الاستثمار، طاقم الطائرة وعدد الفنييون.

تمريـــــن رقـــم: 04

مؤسسة تقوم بإنتاج نوعين من البضائع P_1 و P_2، خلال المرحلة الإنتاجية تمر هذه البضائع بثلاثة أنواع من الماكنات

C،B،A وقت مرور وحدة من P_1 بالماكنات الثلاثة هو على التوالي :

ساعة واحدة، ساعتان وساعة واحدة ($1^h, 2^h, 1^h$) ؛

وقت مرور وحدة من P_2بالماكنات من نوع A؛ **25** ماكنة من نوع B و **25** ماكنة من النوع C كل ماكنة يمكن لها

أن تشتغل يوميا على الأكثر **08** ساعات.

ربح الوحدة من P_1هو **3** (ون) وربح الوحدة من P_2هو **4** (ون) تريد المؤسسة تحديد الكميات التي يجب إنتاجها من

P_1وP_2 والتي تحقق لها أكبر قيمة ممكنة للربح الإجمالي اليومي.

المطلـــــــــوب :

1/ عن طريق الرسم البياني، حدّد تركيب الإنتاج الذي يحقق القيمة المثلى للربح الإجمالي؛

2/ أعطي المفهوم الاقتصادي للحل المثل؛

3/ أعطي المفهوم الاقتصادي للنموذج المرافق (المتغيرات، دالة الهدف والقيود الهيكلية).

الحـــــــــل :

1/ الحل الأمثل للمسألة الاقتصادية :

$$\begin{cases} X_1 : \text{الكمية التي يجب إنتاجها يوميا من } P_1 \\ X_2 : \text{الكمية التي يجب إنتاجها يوميا من } P_2 \end{cases}$$

$$[MAX]F(X) = 3X_1 + 4X_2$$

$$\begin{cases} A : X_1 + X_2 \leq (15\times 8) = 120 \ heures \\ B : 2X_1 + X_2 \leq (25\times 8) = 200 \ heures \\ C : X_1 + 2X_2 \leq (25\times 8) = 200 \ heures \\ X_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$\alpha_1 : X_1 + X_2 = 120$

$X_1 = 0 \; ; \; X_2 = 120$

$X_1 = 120 \; ; \; X_2 = 0$

$\alpha_2 : 2X_1 + X_2 = 200$

$X_1 = 0 \; ; \; X_2 = 200$

$X_1 = 100 \; ; \; X_2 = 0$

$\alpha_3 : X_1 + 2X_2 = 200$

$X_1 = 0 \; ; \; X_2 = 100$

$X_1 = 200 \; ; \; X_2 = 0$

$(O) : X_1 = 0 \; ; \; X_2 = 0 \; ; \; F(X) = 0$

$(A) : X_1 = 100 \; ; \; X_2 = 0 \; ; \; F(X) = 300$

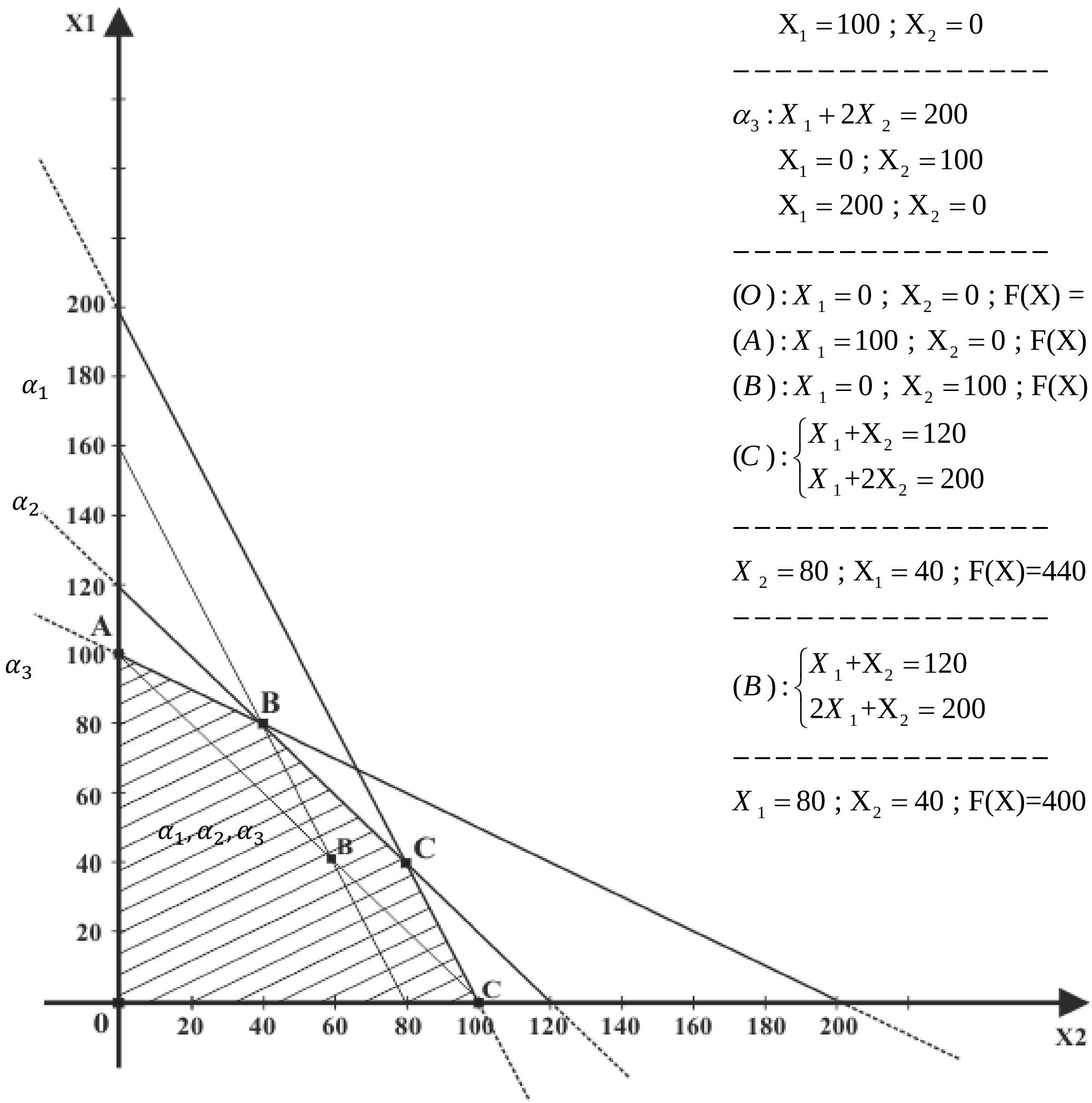
$(B) : X_1 = 0 \; ; \; X_2 = 100 \; ; \; F(X) = 400$

$$(C) : \begin{cases} X_1 + X_2 = 120 \\ X_1 + 2X_2 = 200 \end{cases}$$

$X_2 = 80 \; ; \; X_1 = 40 \; ; \; F(X) = 440$

$$(B) : \begin{cases} X_1 + X_2 = 120 \\ 2X_1 + X_2 = 200 \end{cases}$$

$X_1 = 80 \; ; \; X_2 = 40 \; ; \; F(X) = 400$



2/ المفهوم الاقتصادي للحل الأمثل:

أقصى ربح ممكن تحصل عليه المؤسسة هو **440** وحدة ولذلك يجب عليها إنتاج **40** وحدة من البضاعة **P1**و **80** وحدة من البضاعة الثانية/يوميا ومن أجل هذا تستعمل المؤسسة كل الطاقة ٱنتاجية اليومية للماكنات من النوع A (**120**) وتستعمل إلاّ **160** ساعة من الطاقة الإنتاجية القصوى اليومية للماكنات من النوع B، وتستعمل كل الطاقة الإنتاجية اليومية للماكنات من النوع C.

3/ كتابة النموذج المرافق :

$$[MIN]G(Y) = 120\,Y_1 + 200\,Y_2 + 200\,Y_3$$

$$\begin{cases} Y_1 + 2\,Y_2 + Y_3 \geq 3 \\ Y_1 + Y_2 + 2\,Y_3 \geq 4 \\ \quad Y_{1,2,3} \geq 0 \end{cases}$$

Y_1: تكلفة استخدام مدّة ساعة للماكنات من النوع A؛

Y_2: تكلفة استخدام مدّة ساعة للماكنات من النوع B؛

Y_3: تكلفة استخدام مدّة ساعة للماكنات من النوع C؛

F(X) : التكاليف الإجمالية اليومية الناتجة من استعمال الماكنات من النوع

جامعـــــــــــــــــة وهـــــــــــــران 02

كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير

السنـــــــــــة الثانيــــــــــــــــــــــــــــة

مقياس بحوث العمليات

تمارين تطبيقية خاصة بالفصل الخامس :

مسائل النقل

التمرين الأول :

لدينا المعلومـــــــات التاليـــــة عن الكميـــات المتاحـــة من بضاعـــــة معينـــــة في أربعة مخازن، **(A1, A2, A3, A4)** والكميات المطلوبة من نفس البضاعة لثلاثة أسواق **(B1, B2, B3)** وتكلفة نقل الواحدة من كل مخزن إلى كل سوق :

م.إ / م.إ	B1	B2	B3	العرض
A1	7	4	7	80
A2	1	4	2	100
A3	2	3	6	140
A4	6	5	6	180
الطلب	**200**	**180**	**120**	**500**

المطلـــــــــوب :

أوجد خطة نقل هذه البضاعة من المخازن إلى الأسواق والتي تحقق أدنى قيمة التكاليف الإجمالية.

التمرين الثاني :

لدينا مسألة النقل التالية :

م.إ \ م.إ	B1	B2	B3	B4	B5	العرض
A1	10	7	4	1	4	150
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	400
الطلب	**200**	**200**	**150**	**100**	**350**	

المطلـــــــــــــوب :

1- أوجد خطة نقل باستعمال طريقة المفاضلة المزدوجة وبين أنها ليست بالخطة التي تحقق قيمة مثلى للتكاليف.

2- حدد الخطة التي تحقق أدنى قيمة للتكاليف الإجمالية.

التمرين الثالث :

لدينا مسألة النقل التالية :

م.إ / م.إ	B1	B2	B3	B4	B5	العرض
A1	2	12	16	24	32	200
A2	32	20	16	12	30	800
A3	8	2	18	22	26	200
A4	6	4	14	14	30	200
الطلب	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**1400** / **1500**

المطلـــــــــــوب :

1- أوجد خطة نقل باستعمال طريقة المفاضلة المزدوجة وبين أنها بالخطة المثلى.

2- بين ان المسألة تحتوي على خطة ثانية مثلى واستخرج هذه الخطة.

جامعـــــــــــــــة وهـــــــــــران 02

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والتسيير

السنـــــــــة الثانيـــــــــــــــــــــــــة

تمارين تطبيقية خاصة لمسائل النقل

(مسائل النقل المغلقة)

PROBLEME TYPE DE TRANSPORT

تمارين تطبيقية خاصة لمسائل النقل

(مسائل النقل المغلقة)

تمرين رقم :01

لدينا المعلومـــــــات التاليـــــــة عن الكميـــات المتاحـــــة من بضاعـــــــة معينـــــــة في أربعة مخازن، (A1, A2, A3, A4) والكميات المطلوبة من نفس البضاعة لثلاثة أسواق (B1, B2, B3) وتكلفة نقل الواحدة من كل مخزن إلى كل سوق :

م.إ / م.إ	B1	B2	B3	العرض
A1	7	4	7	80
A2	1	4	2	100
A3	2	3	6	140
A4	6	5	6	180
الطلب	**200**	**180**	**120**	**500**

المطلـــــــــــوب :

أوجد خطة نقل هذه البضاعة من المخازن إلى الأسواق والتي تحقق أدنى قيمة التكاليف الإجمالية.

الحــــــل :

1/ تحديد خطة ابتدائية باستعمال طريقة التكلفة الدنيا في الجدول :

		V_1	V_2	V_3	
	م.إ / م.إ.ن	**B1**	**B2**	**B3**	العرض
U_1	**A1**	7 / -	4 / 80	7 / -	80
U_2	**A2**	1 / 100	4 / -	2 / -	100
U_3	**A3**	2 / 100	3 / 40	6 / -	140
U_4	**A4**	6 / -	5 / 60	6 / 12	180
	الطلب	**200**	**180**	**120**	**500**

$F(X) = (4.80) + (1.100) + (2.100) + (3.40) + (5.60) + (6.120) = 1760$ وحدة

2/ اختبار أمثلية الحل :

$$U' + Vj = Cij$$
$$U_1 + V_2 = 4$$
$$U_2 + V_1 = 1$$
$$U_3 + V_1 = 2$$
$$U_3 + V_2 = 3$$
$$U_4 + V_2 = 5$$
$$U_4 + V_3 = 6$$

$$U_1 = 0$$
$$U_3 = 1$$
$$U_2 = 2$$
$$U_4 = 1$$
$$V_2 = 4$$
$$V_1 = 3$$
$$V_3 = 5$$

$$E_{ij} = C_{ij} - \left(U_i + V_j\right)$$
$$E_{11} = 7 - (0+3) = 4$$
$$E_{13} = 7 - (0+3) = 2$$
$$E_{22} = 4 - (-2+3) = 2$$
$$E_{23} = 2 - (-2+3) = \boxed{-1}$$
$$E_{33} = 6 - (-1+3) = 2$$
$$E_{41} = 6 - (-1+3) = 3$$

الحـــــل الأمثـــــــــــل :

$$F(X) = (4.80) + (1.60) + (2.40) + (2.140) + (5.100) + (6.80) = 1720$$

$$(m + n - 1) = 6$$

		V_1	V_2	V_3	
	م.إ / م.إ.ن	B1	B2	B3	العرض
U_1	A1	7 / -	4 / 80	7 / -	80
U_2	A2	1 / 60	4 / -	2 / 40	100
U_3	A3	2 / 140	3 / -	6 / -	140
U_4	A4	6 / -	5 / 100	6 / 80	180
	الطلب	200	180	120	500

$$U' + Vj = Cij$$
$$U_1 + V_2 = 4$$
$$U_2 + V_1 = 1$$
$$U_3 + V_1 = 2$$
$$U_3 + V_2 = 3$$
$$U_4 + V_2 = 5$$
$$U_4 + V_3 = 6$$

$$U_1 = 0$$
$$U_3 = 1$$
$$U_2 = 2$$
$$U_4 = 1$$

$$V_2 = 4$$
$$V_1 = 4$$
$$V_3 = 5$$

$$E_{ij} = C_{ij} - \left(U_i + V_j\right)$$
$$E_{11} = 7 - (0 + 4) = 3$$
$$E_{13} = 7 - (0 + 5) = 2$$
$$E_{22} = 4 - (-3 + 4) = 3$$
$$E_{23} = 3 - (-2 + 4) = 1$$
$$E_{33} = 6 - (-2 + 5) = 3$$
$$E_{41} = 6 - (1 + 4) = 1$$

بما أن جميع قيم $E_{ij} \geq 0$ فإن الخطة المثلى وهي :

A_1 يمون B_2 بـــ **80** وحدة

A_2 يمون B_1 بـــ **60** وحدة و B_3 بـــ **40** وحدة

A_3 يمون B_1 بـــ **140** وحدة

A_4 يمون B_2 بـــ **100**وحدةوB_3 بـــ **80** وحدة

أدنى قيمة لتكاليف النقل الاجمالية هي **1720** وحدة نقدية.

مسائـــــــل النقـــــل المغلقـــــــة

تمرين رقم 02 : لدينا مسألة النقل التالية :

م.إ / م.إ	B1	B2	B3	B4	B5	العرض
A1	10	7	4	1	4	150
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	400
الطلب	200	200	150	100	350	

المطلـــــــــــــوب :

3- أوجد خطة نقل باستعمال طريقة المفاضلة المزدوجة وبين أنها ليست بالخطة التي تحقق قيمة مثلى للتكاليف.

4- حدد الخطة التي تحقق أدنى قيمة للتكاليف الإجمالية.

الحـــــــــل :

م.إ / م.إ	B1	B2	B3	B4	B5	العرض
A1	10 / -	7 / -	4 / 50	1 w / 100	4 / -	150
A2	2 w / 200	7 / -	10 / 50	6 / -	11 / -	250
A3	8 / -	5 v / -	3 v / -	2 v / -	2 w / 200	200
A4	11 / -	8 v / 20	12 / 50	16 / -	13 / 150	400
الطلب	**200**	**200**	**150**	**100**	**350**	

$$F(X) = (4.50) + (1.100) + (2.200) + (10.50) + (2.200)$$
$$+ (8.200) + (12.50) + (13.50) = 5750$$ وحدة
$$m + n - 1 = 8$$

$U_1 + V_3 = 4$ $U_1 + V_4 = 1$ $U_2 + V_3 = 10$ $U_3 + V_5 = 2$ $U_4 + V_2 = 8$ $U_4 + V_3 = 12$ $U_4 + V_5 = 13$ $U_2 + V_1 = 2$	$U_1 = 0$ $U_2 = 6$ $U_3 = -3$ $U_4 = 8$ $V_1 = -4$ $V_2 = 0$ $V_3 = 4$ $V_4 = 1$ $V_5 = 5$

$$
\begin{aligned}
E_{11} &= 10 - (0+4) = 14 \\
E_{12} &= 7 - (0+0) = 7 \\
E_{15} &= 4 - (0+5) = \boxed{-1} \\
E_{22} &= 7 - (6+0) = 1 \\
E_{24} &= 6 - (6+1) = -1 \\
E_{25} &= 11 - (6+5) = 0 \\
E_{31} &= 8 - (-3+4) = 15 \\
E_{32} &= 5 - (-3+0) = 8 \\
E_{33} &= 3 - (-3+4) = 2 \\
E_{34} &= 2 - (-3+1) = 4 \\
E_{41} &= 11 - (8+4) = 7 \\
E_{44} &= 16 - (8+1) = 7
\end{aligned}
$$

لا توجد قيم سالبة لــ E_{ij} فالخطة ليست بالخطة التي تحقق القيمة المثلى للتكاليف

		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
	م.إ / م.إ	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	العرض
U_1	**A1**	10 / -	7 / -	4 / -	1 / 100	4 / 50	150
U_2	**A2**	2 / 200	7 / -	10 / 50	6 / -	11 / -	250
U_3	**A3**	8 / -	5 / -	3 / -	2 / -	2 / 200	200
U_4	**A4**	11 / -	8 / 200	12 / 100	16 / -	13 / 100	400
	الطلب	**200**	**200**	**150**	**100**	**350**	

$$F(X) = (1.100)+(4.50)+(2.200)+(10.50)+(2.200)$$
$$+(8.200)+(12.100)+(13.100)=5700 \text{ وحدة}$$
$$M+n-1=4+5-1=8$$

$$\begin{aligned}
U_1+V_4&=1\\
U_1+V_5&=4\\
U_2+V_1&=2\\
U_2+V_3&=10\\
U_3+V_5&=2\\
U_4+V_2&=8\\
U_4+V_3&=12\\
U_4+V_5&=13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_1&=0\\
U_2&=7\\
U_3&=-2\\
U_4&=9\\
V_1&=-5\\
V_2&=-1\\
V_3&=3\\
V_4&=1\\
V_5&=4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{11}&=10-(0+5)=15\\
E_{12}&=7-(0+1)=8\\
E_{13}&=4-(0+3)=1\\
E_{22}&=7-(7-1)=1\\
&\boxed{E_{24}=6-(7+1)=-2}\\
E_{25}&=11-(7+4)=0\\
E_{31}&=8-(-2-5)=15\\
E_{32}&=5-(-2-1)=8\\
E_{33}&=3-(-2+3)=2\\
E_{34}&=2-(-2+1)=3\\
E_{41}&=11-(9-5)=7\\
E_{44}&=16-(9+1)=6
\end{aligned}$$

$$F(X) = 5600$$ وحدة

$$\mathrm{M} + \mathrm{n} - 1$$

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	العرض
A1	10 / -	7 / -	4 / -	1 / 100	4 / 50	150
A2	2 / 200	7 / -	10 / 50	6 / -	11 / -	250
A3	8 / -	5 / -	3 / -	2 / -	2 / 200	200
A4	11 / -	8 / 200	12 / 100	16 / -	13 / 100	400
الطلب	**200**	**200**	**150**	**100**	**350**	

$$U_1+V_4=1$$
$$U_1+V_5=4$$
$$U_2+V_1=2$$
$$U_2+V_4=6$$
$$U_3+V_5=2$$
$$U_4+V_2=8$$
$$U_4+V_3=12$$
$$U_4+V_5=13$$

$$U_1=0$$
$$U_2=5$$
$$U_3=-2$$
$$U_4=9$$
$$V_1=-3$$
$$V_2=-1$$
$$V_3=3$$
$$V_4=1$$
$$V_5=4$$

$$E_{11}=10-(0-3)=13$$
$$E_{12}=7-(0-1)=8$$
$$E_{13}=4-(0+3)=1$$
$$E_{22}=7-(5-1)=3$$
$$E_{23}=10-(5+3)=2$$
$$E_{25}=11-(5+4)=2$$
$$E_{31}=8-(-2-3)=13$$
$$E_{32}=5-(-3+0)=8$$
$$E_{33}=3-(-2+3)=2$$
$$E_{34}=2-(-2+1)=3$$
$$E_{41}=11-(9-3)=5$$
$$E_{44}=16-(9+1)=6$$

** أن كل قيمة E_{ij} الخطة المثلى هي الخطة التي تحقق ***F(X)=5600***

م.إ / م.إ	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	العرض
A1	2 / 100	12 / -	20 / -	24 / 100	32 / 100	200
A2	32 / -	20 / -	16 / 100	12 / -	30 / 300	800
A3	8 / -	2 / 200	18 / -	22 / -	26 / -	200
A4	6 / -	4	14 / 200	14 / -	30 / -	200
A5	0 / -	0 / -	0 / -	0 / -	0 / 100	100
الطلب	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**1500**

$$U_1 + V_1 = 2$$
$$U_1 + V_5 = 32$$
$$U_2 + V_3 = 16$$
$$U_2 + V_4 = 12$$
$$U_2 + V_5 = 30$$
$$U_3 + V_2 = 2$$
$$U_4 + V_2 = 4$$
$$U_4 + V_3 = 14$$
$$U_5 + V_5 = 0$$

$$U_1 = 0$$
$$U_2 = -2$$
$$U_3 = -6$$
$$U_4 = -4$$
$$U_5 = -32$$

$$V_1 = +2$$
$$V_2 = +8$$
$$V_3 = +18$$
$$V_4 = +14$$
$$V_5 = +32$$

$$E_{12} = 12 - (0 + 8) = +$$
$$E_{13} = 20 - (0 + 18) = +$$
$$E_{14} = 24 - (-2 + 14) = +$$
$$E_{21} = 32 - (-2 + 2) = +$$
$$E_{22} = 20 - (-2 + 8) = +$$
$$E_{31} = 8 - (-6 + 2) = +$$
$$E_{33} = 18 - (-6 + 18) = +$$
$$E_{34} = 22 - (-6 + 14) = +$$
$$\boxed{E_{35} = 26 - (-6 + 32) = 0}$$
$$E_{41} = 6 - (-4 + 2) = +$$
$$E_{44} = 14 - (-4 + 14) = +$$
$$E_{45} = 30 - (-4 + 32) = +$$
$$E_{51} = 0 - (-32 + 2) = +$$
$$E_{52} = 0 - (-32 + 8) = +$$
$$E_{53} = 0 - (-32 + 18) = +$$
$$E_{54} = 0 - (-32 + 14) = +$$

$$[\text{MIN}]\,F(X) = 200 + 320 + 1600 + 4800 + 9000 + 400 + 2800 = 22000 \text{ Unités}$$

<table>
<tr><th>م.إ / م.إ</th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th><th>B4</th><th>B5</th><th>العرض</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>2 / 100</td><td>12 / -</td><td>20 / -</td><td>24 / 100</td><td>32 / 100</td><td>200</td><td rowspan="6">[MIN]F(X) =
200
3200
4800
4800
3000
5200
800
22000
Unités</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>32 / -</td><td>20 / -</td><td>16 / 100</td><td>12 / -</td><td>30 / 300</td><td>800</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>8 / -</td><td>2 / 200</td><td>18 / -</td><td>22 / -</td><td>26 / -</td><td>200</td></tr>
<tr><td>A4</td><td>6 / -</td><td>4</td><td>14 / 200</td><td>14 / -</td><td>30 / -</td><td>200</td></tr>
<tr><td>A5</td><td>0 / -</td><td>0 / -</td><td>0 / -</td><td>0 / -</td><td>0 / 100</td><td>100</td></tr>
<tr><td>الطلب</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td><td>500</td><td>1500</td></tr>
</table>

تمرين رقم 03 : لدينا مسألة النقل التالية :   **- مسألة النقـــل مفتوحـــــة**

1/ أوجد خطة نقل باستعمال طريقة المفاضلة المزدوجة وبيّن أنها الخطة المثلى.

2/ بيّن أن المسألة تحتوي على خطة ثانية مثلى واستخرج هذه الخطة.

م.إ / م.إ	B1	B2	B3	B4	B5	العرض
A1	2	12	16	24	32	200
A2	32	20	16	12	30	800
A3	8	2	18	22	26	200
A4	6	4	14	14	30	200
الطلب	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**1400 / 1500**

الحـــل : مسألة نقل مفتوحة الطلب > العرض

نضيف مصدر وهو **A5** وحجم عرضه يساوي |**1500-1400**| =**100** وحدة

$$[\text{MIN}]F(X) = 200 + 1600 + 4800 + 12000$$

$$+400 + 2800 = 21800 \text{ um}$$

$$m+n-1=9$$

Nbr de cases pleines =**7**

7= عدد الخلايا المليئة

م.إ / م.إ	B1	B2	B3	B4	B5	العرض
A1	**2 w** 100	**12** -	**16 T** 100	**24** -	**32** -	200
A2	**32** -	**20** -	**16** **T**	**12 w** 400	**30 T** 400	800
A3	**8** -	**2 w** -	**18** -	**22** -	**26 v** **T**	200
A4	**6** -	**4 v** -	**14 v** 200	**14** -	**30** -	200
A5	**0** -	**0** -	**0** -	**0** -	**0** 100	100
الطلب	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**1500**

$$U_1+V_1=2$$
$$U_1+V_3=16$$
$$U_2+V_3=16$$
$$U_2+V_4=12$$
$$U_2+V_5=30$$
$$U_3+V_2=2$$
$$U_3+V_5=26$$
$$U_4+V_3=14$$
$$U_5+V_5=0$$

$$U_1=0$$
$$U_2=0$$
$$U_3=-4$$
$$U_4=-2$$
$$U_5=30$$
$$V_1=2$$
$$V_2=6$$
$$V_3=16$$
$$V_4=12$$
$$V_5=30$$

$$E_{12}=12-(0+6)=6$$
$$E_{14}=20-(0+12)=12$$
$$E_{15}=32-(0+30)=2$$
$$E_{21}=32-(0+2)=30$$
$$E_{22}=20-(0+6)=14$$
$$E_{31}=8-(-4+2)=10$$
$$E_{33}=18-(-4+16)=6$$
$$E_{34}=22-(-4+12)=14$$
$$E_{41}=6-(-2+2)=6$$
$$E_{42}=4-(-2+6)=0$$
$$E_{44}=14-(-2+12)=+4$$
$$E_{45}=30-(-2+30)=2$$
$$E_{51}=0-(-30+2)=28$$
$$E_{52}=0-(-30+6)=24$$
$$E_{53}=0-(-30+16)=14$$
$$E_{54}=0-(-30+12)=18$$

- بما أن كل قيم $E_{ij} \geq 0$ فهذه الخطة تعتبر بالمثلى.
- نلاحظ $E_{42} = 0$ هذا يعني وجود حل أو خطة مثلى أخرى.

$$[\mathrm{MIN}]\mathrm{F(X)} = 21800$$

م.إ \ م.إ	B1	B2	B3	B4	B5	العرض
A1	2 w 100	12 -	16 T 100	24 -	32 -	200
A2	32 -	20 -	16 200	12 w 400	30 T 200	800
A3	8 -	2 w -	18 -	22 -	26 v 200	200
A4	6 -	4 v 200	14 v -	14 -	30 -	200
A5	0 -	0 -	0 -	0 -	0 100	100
الطلب	100	200	300	400	500	1500

جامعـــــــــــــــة وهـــــــــــران 02

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والتسيير

السنـــــــــة الثانيـــــــــــــــــــــــة

تمارين تطبيقية خاصة بمسائل التخصيص

PROBLEME D’AFFECTATION

السنة الجامعية 2021-2022

التمرين رقم : 01

تقوم المؤسسة الوطنية لتوزيع المواد الغذائية (EDIPAL)بتموين ستة (06) مدن بنوع من المواد الاستهلاكية من ستة (06) من مراكزها للتخزين الموجودة في أماكن مختلفة علما بأن تموين كل مدينة يتم من طرف مركز واحد للتخزين وأن تكلفة النقل نحدد في الجدول (DA/km).

- ما هي خطّة توزيع هذه البضاعة التي تكلف المؤسسة أقل نفقات نقل للكيلومتر (km) الواحد؟

المدينة / المخزن	V1	V2	V3	V4	V5	V6	الكميات المتاحة
S1	17	43	27	14	39	52	**1**
S2	29	24	69	90	23	13	**1**
S3	18	90	62	12	16	70	**1**
S4	58	14	6	18	73	64	**1**
S5	15	41	38	36	40	60	**1**
S6	25	44	18	14	13	50	**1**
الكميات المطلوبة	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	

الحـــــــــل :

(I)

2	29	21	2	26	39
14	10	63	78	10	0
3	76	56	0	3	57
43	0	0	6	60	51
0	27	32	24	27	47
10	30	12	32	0	37

طرح أدنى قيمة في العمود

(II)

0	27	19	0	24	37
14	10	63	78	10	0
3	76	56	0	3	57
43	0	0	6	60	51
0	27	32	24	27	47
10	30	12	32	0	37

طرح أدنى قيمة في السطر

(IV)

0	12	4	0	21	22
29	10	63	93	22	0
3	61	41	0	0	42
58	0	0	21	72	51
0	12	17	24	24	32
13	18	0	35	0	25

(III)

0	24	16	0	21	34
17	10	63	81	10	0
3	73	53	0	0	54
46	0	0	9	60	51
0	24	29	24	24	44
13	30	12	35	0	37

- بما أن عدد الأصفار $\boxed{0}$ تساوي **n=6** فالتخصيص يعتبر بالأمثل.

- خطة نقل البضاعة التي تكلف المؤسسة أقل نفقات نقل للـــ km الواحد هي كالآتي :

المدينة / المخزن	V1	V2	V3	V4	V5	V6	الكميات المتاحة
S1	0	0	0	1	0	0	**1**
S2	0	0	0	0	0	1	**1**
S3	0	0	0	0	1	0	**1**
S4	0	1	0	0	0	0	**1**
S5	1	0	0	0	0	0	**1**
S6	0	0	1	0	0	0	**1**
الكميات المطلوبة	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	

أدنى قيمة للتكاليف النقل هي كالآتي :

$$[MIN]F(X) = 14 + 13 + 16 + 14 + 15 + 18 = 90 \text{ DA/km}$$

التمرين رقم : **02**

تريد المؤسسة الوطنية للصناعات الإلكترونية **(ENIE)** إنتاج خمسة أنواع جديدة من جهاز الراديو في الخمسة وحدات إنتاج التابعة لها والتي بإمكانها صنع أي نوع من هذه الأجهزة– نظرا لطاقتهم الإنتاجية المحدودة، حجم الإنتاج السنوي يختلف من كل وحدة إلى أخرى ومن كل نوع إلى آخر وذلك حسب الجدول أدناه (الوحدة بألف جهاز).

1/ ما هو التخصيص الأمثل الذي يمكن مؤسسة **(ENIE)** من الحصول سنويا على أكبر حجم للإنتاج الإجمالي من الأنواع الخمسة علما بانه يفرض على كل وحدة صنع نوع واحد من هذه الأجهزة نظرا لخصوصيات تقنية؟

2/ هل تتمكن شركة **(ENIE)** تلبية حاجيات السوق من الأجهزة الأولى والرابعة في حالة التخصيص المثل إذا كان حجم الطلب يساوي **17000** جهاز؟

الوحدة / الجهاز	U1	U2	U3	U4	U5
R1	9	8	6	5	10
R2	2	6	10	7	9
R3	3	1	4	9	10
R4	8	1	5	8	9
R5	10	9	7	8	2

$\left[C_{ij}\right]$

9	8	6	5	10
2	6	10	7	9
3	1	4	9	10
8	1	5	8	9
10	9	7	8	2

$\left[MAX\,C_{ij}\right]-C_{ij}$

(I)

1	2	4	5	0
8	4	0	3	1
7	9	6	1	0
2	9	5	2	1
0	1	3	2	8

(II)

1	1	4	4	0
8	3	0	2	1
7	8	6	0	0
2	8	5	1	1
0	0	3	1	8

طرح أدنى قيمة في العمود

(III)

1	1	4	4	0
8	3	0	2	1
7	8	6	0	0
1	7	4	0	0
0	0	3	1	8

طرح أدنى قيمة في السطر

(IV)

0	0	3	4	0
8	3	0	3	2
6	7	5	0	0
0	6	3	0	09
0	0	3	2	

عدد $\boxed{0}=h=5$

و / ج	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
R_1	0	1	0	0	0
R_2	0	0	1	0	0
R_3	0	0	0	0	1
R_4	0	0	0	1	0
R_5	1	0	0	0	0

التخصيص الأمثل

$$\left[MAX\right]F(X)=8+10+10+8+10=46=46000$$ سنة/جهاز

2/ يمكن لمؤسسة **(ENIE)** تلبية حاجيات السوق من الأجهزة الأولى والرابعة (**17000** و) في حالة التخصيص المثل

(**46000** و) وذلك بإعادة تخصيص U_1 لإنتاج R_1 (**9** و) وU_2 لإنتاج R_5 (**9** و) ويصبح أكبر إنتاج إجمالي ممكن هو :

$$[MAX\ ]F(X\ ) = 9+10+10+8+9 = 46 = 46و$$ **46000** جهاز/سنة

أو إعادة تخصيص U_5 لإنتاج **R4** (**9** و) و U_4 لإنتاج R_3 (**9** و) ويصبح أكبر إنتاج إجمالي ممكن هو :

$$[MAX\ ]F(X\ ) = 8+10+10+9+9 = 46 = 46000$$ **46000** جهاز/سنة

في الحالتين التخصيصات الأخرى تبقى بدون تغيير.

جامعـــــــــــــة وهـــــــــــــران 02

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والتسيير

السنــــــــــــة الثانيــــــــــــــــة

التحليل الشبكي (طريقة PERT)

القسم الرابع:

التحليل الشبكي (طريقة PERT)

1) تمهيد للتحليل الشبكي :

يستخدم التحليل الشبكي في دراسة المشاريع بشتى أشكالها الاقتصادية، الإنتاجية، العلمية، العسكرية وغيرها، إذ أن دراسة المشاريع الكبيرة والمعقدة والتي تتصف بمرحلة التنفيذ يتطلب وضع خرائط ودراسات تمهيدية لشرح كيفية تطور المشروع من ناحية تسلسل العمل الإنتاجي بما يتناسب مع الفترات الزمنية المقترحة والملائمة للعمل.

من هنا نشأت فكرة البحث عن أسلوب يساعد في تخطيط هذه المراحل تمهيدا لاتخاذ القرار الملائم لسير العمل بمختلف مجالاته، كما أن مثل هذه المشاريع تتطلب أن يكون سير العمل متوازيا ومتناسق في جميع أجزائه وأقسامه بحيث تستمر العملية الإنتاجية دون توقف أو تأخير ولذا فإن وضع الخرائط الزمنية للفترات اللازمة للانتهاء من كل مرحلة من المراحل الإنتاجيةأمر ضروري لتصميم المشروع وتصور إطاره العام قبل الشروع فيه.

إن التحليل الشبكي يعتمد على تقسيم المشروع الإنتاجي إلى مجموعة من المراحل التي ندعوها بالأحداث (évènement) حيث يتم تمثيلها بينيا بشكل دوائر تتصل فيها بينها بأسهم تبين الفترة الزمنية اللازمة للانتقال من حادثة إلى أخرى، ندعو هذه الأسهم بالنشاطات (Tâches)، وتقوم النشاطات المختلفة بترتيب الأحداث حسب تتابع زمني أو منطقي معين للعمل، حيث تشير إلى مكان وقوع الحادثة والفترة الزمنية اللازمة لإنتاج هذه الحادثة وعلاقتها بالأحداث الأخرى.

– لنأخذ في هذا المجال مشروع بناء سكن فنجد أن كل عمل يدخل في بناء السكن له عمل أو مجموعة من العمال تسبقه. فإذا أردنا بناء السكن فيجب أن يكون مبنيا على دعائم أي إنشاء الأساس وإذا أردنا إنشاء الأساس يجب حفر الأساس، وإذا أردنا وضع النوافذ فيجب وضع الجدران ويجب بناء السقف وهكذا ... نمثل كل مرحلة من مراحل البناء بدائرة (حادثة) والفترة الزمنية للانتهاء من المرحلة بسهم (نشاط) نضع عليه الفترة الزمنية اللازمة للقيام بهذا العمل كما هو في الشكل التالي :

ندعو مجموعة الدوائر والأسهم مجتمعة في شكل بياني "الشبكة" وتستخدم هذه الشبكات لتحديد أقل زمن ممكن للانتهاء من المشروع أو أقل تكلفة ممكنة لتحقيق عمليات الإنتاج الممكنة ووضع البدائل الممكنة لتقليص الفترات الزمنية أو الكلفة ضمن الشروط والموارد المتاحة للمشكلة المطروحة.

يتم تحليل الشبكات من خلال طرق وأساليب مختلفة سنتطرق لدراسة أهمها انتشارا واستعمالا وهي :

* طريقة المسار الحرج **C.P.M. (Critical Path Method) (Méthode du Chemin Critique)**

* طريقة **PERT** أو أسلوب تقييم ومراجعة البرامج **(Program Evaluation Review Technic) (Technique d'Ordonnancement et de Contrôle des Programmes)**

2) طريقة المسار الحرج .C.P.M

1. تحديد الشبكة البيانية

بنيت هذه الطريقة على أساس وضع نموذج شيكي للمشروع والذي يراد دراسته من خلال مجموعة من الدوائر والأسهم، حيث تمثل المرحلة الإنتاجية بالدائرة وهذا ما دعوناه بالحادثة، والفترة الزمنية اللازمة للإنتاج بسهم أو خط مستقيم يصل بين حادثين، وهذا ما دعوناه بالنشاط.

لنأخذ المشروع والذي ينص على بناء سكني ولنفرض انه عند وضع دراسة مرحلية لإنشاء البناء وجدنا أننا بحاجة إلى عشر مراحل لإتمام السكن، ندعو كل مرحلة بالحادثة وسوف نرمز إليها برقم متسلسل يسبق كل حادثة مجموعة من الحوادث ويمكن أن نظهرها في الشبكة التالية :

الفترة الزمنية	النشاطات	الحوادث		النشاطات	الحوادث		الفترة الزمنية
		السابقة	اللاحقة		السابقة	اللاحقة	
10	**A**	1	2	**K**	6	7	9
4	**B**	1	3	**L**	6	9	7
6	**C**	1	4	**M**	7	8	12
9	**D**	2	5	**N**	7	9	6
7	**E**	3	4	**O**	7	10	8
8	**F**	3	6	**P**	8	10	9
3	**G**	4	5	**Q**	9	10	11
10	**H**	4	6	**R**	-	-	-
4	**I**	4	7	-	-	-	-
5	**J**	5	8	-	-	-	-

بناء على هذا الجدول يمكن وضع الشبكة البيانية للمشروع مع ملاحظة أن الحادثة الأولى لا يسبقها أي نشاط وهذا يعني أن هذه الحادثة هي نقطة الانطلاق في الإنتاج. أما الحادثة العاشرة فنجد أنه لا يتبعها أي نشاط، وهذا يعني أنها نقطة النهاية أو المرحلة الأخيرة في المشروع، وانطلاقا من أن الحجم الزمني يمكن أن يسير من اليسار إلى اليمين، يمكن أن نرسم الحادثة الأولى في أقصى اليسار، والحادثة الأخيرة في أقصى اليمين ثم نوزع بينهم الحوادث على مراحل حسب تسلسل العمليات الإنتاجية، وللتخلص من تسميات المراحل والنشاطات فإننا نعطي للحوادث أرقاما متسلسلة حسب ما هو وارد في الجدول.

من خلال الجدول السابق يمكن أن نرسم الشبكة البيانية للمشروع على أن تتحقق فيها الشروط التالية :

م- يبدأ الشبكة البيانية بالحادثة البدائية والتي لا يصلها أي سهم وتنتهي بالحادثة النهائية التي لا يخرج منها أي سهم.

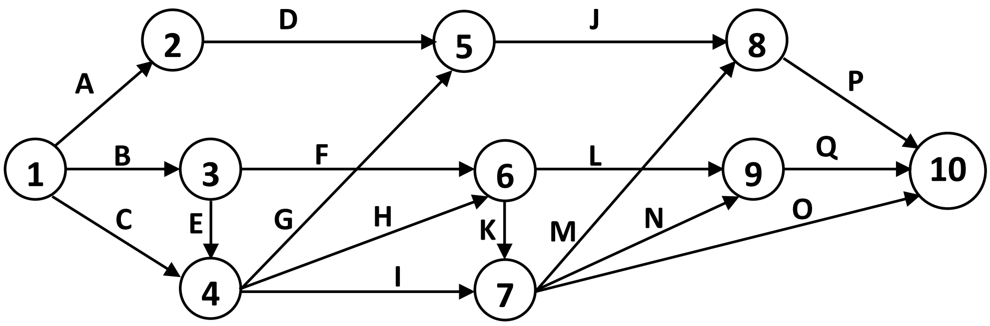
2- كل حادثة (دائرة) مرحلية يجب أن يصلها سهم (نشاط) واحد على الأقل ويخرج منها سهم واحد على الأقل، ويجوز أن يكون أكثر من ذلك.

3- كل نشاط (سهم) يجب أن تسبقه وتتبعه حادثة (دائرة) ماعدا الحادثة البدائية والنهائية.

4- يجب أ لا يكون في الشبكة أقسام معزولة ليس لها علاقة العمل في المشروع.

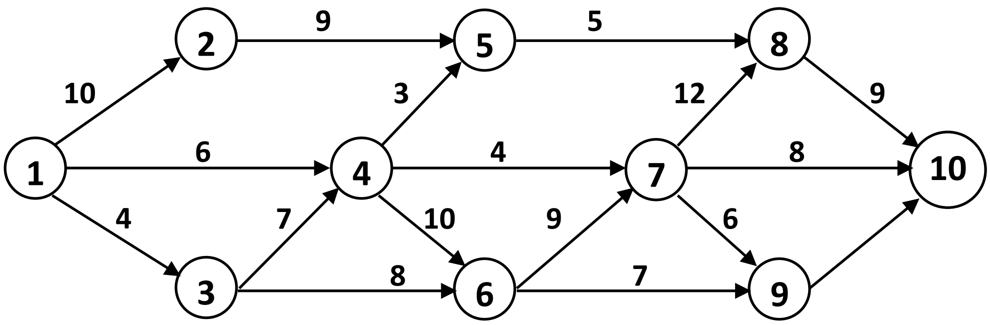
5- يكتب على كل سهم الزمن اللازم للانتهاء من الحادثة، أي فترة العمل اللازمة لإنجاز العمل من حادثة إلى أخرى تليها.

وانطلاقا من هذه المفاهيم والشروط يمكن رسم الشبكة البيانية حسب الجدول السابق بالشكل التالي الأولي :



إن وضع الشبكة البيانية بالشكل السابق لا ***** من حيث الشروط الأساسية للرسم البياني للشبكات، ومع هذا فإنه يمكن **** للشكل العام للشبكة ***** تعارض و**** في الرسم ويكون ذلك بوضع أفضليات للحوادث حسب مكان وزمان وقوعها في الشبكة حيث نقوم بتقسيم المراحل المختلفة للحوادث إلى طبقات في مستوى واحد حسب أفضلية ارتباط الحوادث بعضها.

وبعد إعادة النظر في الشبكة السابقة وأولوية الحوادث يمكن وضع شبكة جديدة تعبر عن الحوادث السابقة بشكل أفضل على النحو التالي :



إن كل نشاط في الشبكة البيانية السابقة يتطلب إنفاق فترة زمنية أو مواد أولية، أو ساعات عمل، ويمكن إجراء دراسات لهذه المؤشرات معا، أو الاكتفاء بإحداهما حسب الطلب وموضوع المشكلة المعالجة، ولكن أهم هذه المؤشرات التي تجري على أساسها البحوث عادة هو عامل الزمن.

يتضح من الشكل البياني والجدول السابق أن هناك بداية واحدة ونهاية واحدة للشبكة وأن طول السهم لا يمثل إطلاقا أية أهمية زمنية ولا يشير إلى أي شيء عدا عن اتجاه مراحل العمل.

تستخدم الشبكات البيانية بشكل أساس لهدفين : الأول هو تحديد المسار الحرج والثاني تخفيض فترة تنفيذ المشروع.

تعريف المسار الحرج في الشبكة :

* **تحديد المسار الحرج في الشبكة :**

ندعو المسار "بالمسار الحرج" إذا كان يشكل أطول الطرق بين الحادثة الابتدائية والحادثة النهائية، بحيث يمر بعدد من الحوادث المتتالية والتي تتصل فيما بينها بعدد من النشاطات وتقدر بفترة تنفيذ المشروع بفترة المسار الحرج للشبكة البيانية.

في الشبكة البيانية لمثالنا السابق لدينا مجموعة كبيرة من المسارات منها :

المسار	**1-2-5-8-10**	وكلفته الزمنية	**10+9+5+9=33**
المسار	**1-3-6-9-10**	وكلفته الزمنية	**4+8+7+11=30**
المسار	**1-4-7-10**	وكلفته الزمنية	**6+4+8=18**
⋮	⋮	⋮	⋮
المسار	**1-3-4-6-7-8-10**	وكلفته الزمنية	**4+7+10+9+12+9=51**

فبعد تحديد الكلفة الزمنية لكل المسارات في الشبكة، فإن المسار (**1-3-4-6-7-8-10**) يشكل أطول طريق زمني بين نقطتي البداية والنهاية، وبعبارة أخرى يشكل أكبر فترة زمنية يحتاجها المشروع لإتمامه، ومقدار هذه الفترة **51** يوما على هذا فإنه يمثل المسار الحرج.

* تخفيض فترة تنفيذ المشروع :

تقدر فترة تنفيذ المشروع عادة بفترة المسار الحرج للشبكة البيانية وقد تظهر الحاجة ملحة في بعض الظروف إلى تقليص فترة انجاز المشروع، أو أن تقليص فترة مرحلة من مراحل المشروع، فعندها نلجأ إلى ما يدعى بـــ"عمليات المقايضة" وتعني هذه العمليات إمكانية التبادل بين التكلفة والزمن من أجل تقليص الفترة الزمنية بزيادة رأسمال الموضوع في المشروع.

إن تقليص الفترات الزمنية للمسار الحرج يتبعه عادة دراسة مقارنة لمراحل الإنتاج أو البناء التي يمكن معها تقليص فتراقما الزمنية، إذا أن كثيرا من المراحل لا يمكن تقليص فتراقما الزمنية كما لا بد من دراسة المنفعة **** للتقليص والفائدة التي نحصل عليها مقابل زيادة النفقات، حيث يتم اتخاذ القرارات بناء على العوامل السابقة.

3) تحديد مؤشرات الحادثة في شبكة CPM

Q3:طريقة PERT أو أسلوب تقيم مراجعة البرامج Program Evaluation Review Technic

من خلال طريقة **PERT** يمكن تحديد المسار الحرج بسهولة ودون اللجوء إلى حساب القيم الزمنية لجميع المسارات. فتستخدم هذه الطريقة كأداة مساعدة لدراسة إمكانية تقصير المسار الحرج في الشبكات البيانية ولمعرفة مدى الاحتياطي من الزمن الذي يمكن استغلاله في باقي المسارات غير الحرجة ودون بذل أية خسارة زمنية، إذ أن تقليص أو تمديد الفترة الزمنية لأي عمل يعتمد على زيادة أو نقصان النفقات المصروفة على هذا العمل.

إن الهدف من التحليل الشبكي بطريقة **CPM** هو الحصول على مؤشرات لكل حادثة من الحوادث التي تحتوي عليها الشبكة البيانية للمشروع وهي :

* الوقت المبكر للحادثة **ET**: نعرف هذا الوقت بالوقت الذي مضى على المشروع (على الإنتاج) ***** هذه الحادثة ويحسب هذا الوقت انطلاقا من الحادثة الأولى وحتى الحادثة الأخيرة من خلال العلاقة التالية :

$$\boxed{ET_{(j)} = MAX\{ET_{(j)} + t_{ij}\}}$$

(t_{ij}) : => الفترة الزمنية لإنجاز النشاط القادم من الحادثة (i) والمتجهة إلى الحادة (j) أو الفترة الزمنية لانتهاء النشاط (i,j)

* الوقت المتأخر للحادثة **LT**: نعرف هذا الوقت بالوقت الباقي للانتهاء من المشروع أو للانتهاء من العملية الإنتاجية ويحسب هذا الوقت انطلاقا من الحادثة الخيرة وحتى الحادثة الأولى من خلال العلاقة التالية (الوقت المتأخر لبدأ النشاط) :

$$\boxed{LT_{(i)} = MIN\{LT_{(j)} - t_{ij}\}}$$

* الوقت الفائض من الوقت (S): بالإضافة إلى المؤشرين السابقين تستخدم طريقة PERT لتحديد الفائض من الوقت (MARGE) (SLACK) للاستفادة منه في توفير الوقت او تخفيضه أو زيادة الإنتاج، ويحسب هذا المؤشر عادة من العلاقة التالية :

$$\boxed{S = LT_{(i)} - ET_{(j)}}$$

حيث :

$$\left.\begin{matrix} LT_{(i)} = MIN\{LT_{(j)} - t_{ij}\} \\ ET_{(j)} = MAX\{ET_{(j)} + t_{ij}\} \end{matrix}\right\}$$

- من اجل البحث عن الوقت المتأخر والوقت المبكر للحوادث في أية شبكة **PERT**، لا بد من البدأ في الحسابات انطلاقا من الحادثة الأولى وحتى الحادثة الأخيرة بالنسبة للوقت المبكر **(ET)**، وبالعكس فإننا نبدأ بالحسابات من الحادثة الأخيرة في الشبكة وحتى أول حادثة بالنسبة للوقت المتأخر **(LT)**.

4) تحديد المسار الحرج بطريقة CPM :

من خلال طريقة CPM يمكن تعريف المسار الحرج بالمسار الذي يمر بالحوادث التي يتساوى فيها الوقت المتأخر مع الوقت المبكر أي أنها لا تحتوي على أي وقت فائض إذ أن جميع النشاطات فيها تحقق العلاقة :

$$\boxed{ET = LT}$$

إن الوقت المتأخر والوقت المبكر لكل الحوادث التي تقع على المسار الحرج يكونان متساويين حسب العلاقات التالية :

$$\boxed{\{ET = LT = 0\}}$$

- بالنسبة للحادثة البدائية :

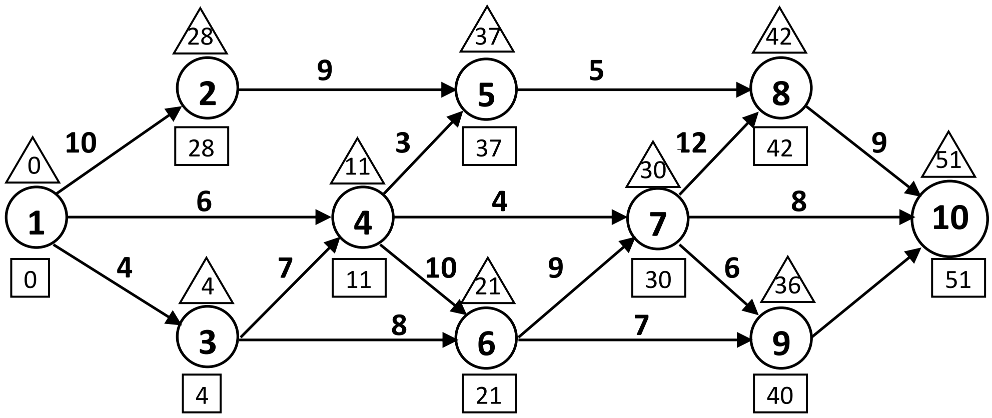
$$\boxed{\{\text{وقت المسار الحرج} = ET = LT\}}$$

بالنسبة للحادثة النهائية :

$$\boxed{\{LT = ET\}}$$

- بالنسبة للحوادث الأخرى على المسار الحرج :

* مثال تطبيقي : يمكن العودة إلى المثال السابق (المعطى في الفقرة السابقة) ولنحسب من خلاله وبطرقة PERT الوقت المبكر والوقت المتأخر لكل حادثة ومن ثم يمكن أن نصل وبسهولة إلى تحديد المسار الحرج من خلال الوقت الفائض :



يمكننا وضع قيم (ET) ضمن شكل مثلث إلى جانب كل حادثة: كما توضع قيم (LT) ضمن شكل مربع إلى جانب نفس الحادثة، بحيث يمكن لنا معرفة الوقت الفائض بالنسبة لكل حادثة من خلال نظرة بسيطة إلى الشبكة، وطرح الوقت المبكر من الوقت المتأخر.

قد تمت الحسابات العددية في الشبكة البيانية حسب العلاقات الرياضية لحساب الوقت المبكر والوقت المتأخر على النحو التالي : أنظر الصفحة : ...... و ......

1/ تحديد الوقت المبكر للحوادث في الشبكة :

$$-ET_1 = 0$$

$$-ET_2 = ET_1 + t_{12} = 0 + 10 = 10$$

$$-ET_3 = ET_1 + t_{13} = 10 + 4 = 4$$

$$-ET_4 = MAX\begin{cases}ET_1 + t_{14} = \\ ET_3 + t_{34} = \end{cases} \qquad MAX\begin{cases}0 + 6 \\ 4 + 7\end{cases} = 11$$

$$-ET_5 = MAX\begin{cases}ET_2 + t_{25} \\ ET_4 + t_{45}\end{cases} = \qquad MAX\begin{cases}10 + 9 \\ 11 + 3\end{cases} = 19$$

$$-ET_6 = MAX\begin{cases}ET_3 + t_{36} \\ ET_4 + t_{46}\end{cases} = \qquad MAX\begin{cases}4 + 8 \\ 11 + 10\end{cases} = 21$$

$$-ET_7 = MAX\begin{cases}ET_4 + t_{47} \\ ET_6 + t_{67}\end{cases} = \qquad MAX\begin{cases}11 + 4 \\ 21 + 9\end{cases} = 30$$

$$-ET_8 = MAX\begin{cases}ET_5 + t_{58} \\ ET_7 + t_{78}\end{cases} = \qquad MAX\begin{cases}19 + 5 \\ 30 + 12\end{cases} = 42$$

$$- ET_9 = MAX\begin{cases} ET_6 + t_{69} \\ ET_7 + t_{79} \end{cases} = \qquad MAX\begin{cases} 21 + 7 \\ 30 + 6 \end{cases} = 36$$

$$- ET_{10} = MAX\begin{cases} ET_7 + t_{710} \\ ET_8 + t_{810} \\ ET_9 + t_{910} \end{cases} = \qquad MAX\begin{cases} 30 + 8 \\ 42 + 9 \\ 36 + 11 \end{cases} = 51$$

1/ تحديد الوقت المتأخر للحوادث في الشبكة :

$$- LT_{10} = ET_{10} = 51$$

$$- LT_9 = LT_{10} + t_{910} = 51 - 11 = 40$$

$$- LT_8 = LT_{10} + t_{810} = 51 - 9 = 42$$

$$- LT_7 = MIN \begin{cases} LT_{10} + t_{710} \\ LT_9 + t_{79} \\ LT_8 - t_{78} \end{cases} = \qquad MIN \begin{cases} 51 - 8 \\ 40 - 6 \\ 42 - 12 \end{cases} = 30$$

$$- LT_6 = MIN \begin{cases} LT_7 + t_{67} \\ LT_9 + t_{69} \end{cases} = \qquad MIN \begin{cases} 30 - 9 \\ 40 - 7 \end{cases} = 21$$

$$- LT_5 = LT_8 - t_{58} = 42 - 5 = 37$$

$$- LT_7 = MIN \begin{cases} LT_7 + t_{47} \\ LT_6 + t_{46} \\ LT_5 - t_{45} \end{cases} = \qquad MIN \begin{cases} 30 - 4 \\ 21 - 10 \\ 37 - 3 \end{cases} = 11$$

$$- LT_8 = MIN \begin{cases} LT_4 + t_{34} \\ LT_6 + t_{36} \end{cases} = \qquad MIN \begin{cases} 11 - 7 \\ 21 - 8 \end{cases} = 4$$

$$- LT_2 = LT_5 - t_{25} = 37 - 9 = 28$$

$$- LT_1 = MIN\begin{cases} LT_4 + t_{14} \\ LT_3 + t_{13} \\ LT_2 + t_{12} \end{cases} = \qquad MIN\begin{cases} 11 - 6 \\ 4 - 4 \\ 28 - 10 \end{cases} = 0$$

المراجع

1) أكرم محمد عرفان المهتدي: " الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات"، دار صفاء للنشر والتوزيع، ط1، عمان، 2004.

2) جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري: " بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق"، دار جليس الزمان، عمان، 2008.

3) حامد سعد نور الشمرتي: " بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا"، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010.

4) حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " مدخل إلى بحوث العمليات"، دار مجدلاوي، عمان، 2007.

5) حسين محمود الجنابي: " الأحدث في بحوث العمليات" ، دار الحامد ،الأردن ، 2010.

6) دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال: " بحوث العمليات"، دار اليازور بالعلمة للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.

7) راتو لمحمد: " بحوث العمليات "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2 ،الجزائر، 2006.

8) سليمان محمد مرجان: " بحوث العمليات " ، دار الكتب الوطنية بن غازي، ليبيا،ط1 ،2002.

9) سهيلة عبد االله سعيد: " الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات"، دار الحامد، ط1 ، الأردن، 2007.

10) صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد،" تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ط 1 ،2009.

11) عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " المدخل لبحوث العمليات"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001.

12) عيس حيرش: " الأساليب الكمية في الإدارة "، دار الهدى، الجزائر، 2012.

13) فتحي خليل حمدان:" بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب"، دار وائل للنشر، ط1 ،الأردن، 2010.

14) فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، " مقدمة في بحوث العمليات"، دار وائل للنشر، ط4 ،الأردن، 2004.

15) لحسن عبد االله باشيوة: " بحوث العمليات " ، دار اليازور بالعلمة للنشر والتوزيع ،الأردن، 2011.

16) محمد دباس الحميد، محمد العزاوي: " الأساليب الكمية في العلوم الإدارية"، دار اليازوري، الأردن، 2013.

17) محمد صالح الحناوي، محمد توفيق ماضي: " بحوث العمليات في تخطيط و مراقبة الإنتاج "، الدار الجامعية، مصر، 2006.

18) محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني: " بحوث العمليات"، دار وائل للنشر، ط2 ،الأردن، 2011.

19) مكيد علي: " بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.

20) منعم زمزير المساوي:" بحوث العمليات مدخل علمي لإتخاذ القرارات"، دار وائل للنشر، ط1،الأردن، 2009.

21) هيلة عبد الله سعيد: " الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات"، دار حامد للنشر والتوزيع، الأردن، ط1 ،2007.

22) يزنا براهيم مقبل: "مقدمة في بحوث العمليات"، مكتبة المجتمع العربي للشر والتوزيع، ط1 ،الأردن، 2005.

المراجع باللغة الأجنبية

1) Gérald Baillargeon, «Programmation linéaire appliquée ", l'édition SMG, Québec, Canada, 1996.

2) GH .OPRIS, "Programmation linéaire " , O PU , Algérie , 1983 .

3) J.M.Boussard, J. J.Daudin," la programmation linéaire dans les modèles de production", Masson, Paris, 1998.

4) Mustapha Nabil," recherche opérationnelle et Mathématiques appliqués a la gestion des entreprises", Dunod, France,1985.

5) P.Chrétienne, Y.Pesyuex, G.Raudjean," Algorithmes et pratique de programmation linéaire", édition telmic, Paris, 1980