جامـــــــعة وهـــران 2 – محمد بن أحمد –
كلية العلــوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم: العلوم التجارية

عنوان المطبوعة:

سلسلة أعمال موجهة في الإحصاء التطبيقي

من إعداد:

د. بلقايد براهيم أستاذ محاضر قسم (أ)
د. بن لحسن الهواري أستاذ محاضر قسم (أ)

الســــــــــنة الجامعية: 2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

مقدمة عامة

مقدمة عامة:

هذه المطبوعة هي عبارة عن سلسلة أعمال موجهة لمقياس الاحصاء التطبيقي لطلبة كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، وإلى كل من يريد الإلمام والإطلاع والإحاطة بتمارين المقياس، ولكي يستفيد الطلبة من القاعدة التي اكتسبوها من المحاضرات.

وقد وزعت هذه السلسلة على أربعة فصول، حيث أن كل فصل يتضمن مجموعة سلاسل للأعمال الموجهة، وكل سلسلة تحتوي على مجموعة مخلتفة ومتنوعة من التمارين، مع تقديم حلول نمودجية، الهدف منها اطلاع الطلبة على كيفية طرح الأسئلة والتمارين المتعلقة بهذا المقياس ومنهجية الإجابة عليها.

تناولنا في الفصل الأول سلسلتين من الأعمال الموجهة والتي كانت متعلقة بمدخل إلى توزيع المعاينة، حيث أن السلسلة الأولى تطرقنا فيها إلى التوزيع الطبيعي أو العادي(Z) ، أما الثانية خصصناها لتوزيع المعاينة.

أما الفصل الثاني تطرقنا فيه إلى التقديرات من خلال ثلاثة سلاسل للأعمال الموجهة، عالجنا في السلسلة الثالثة التقدير عند النقطة، والرابعة التقدير بالمجال لتوقع الرياضي المجموعة الأم، أما الخامسة تناولنا فيها التقدير بالمجال لنسبة نجاح المجموعة الأم.

أما فيما يخص الفصل الثالث عالجنا فيه ثمانية سلاسل للأعمال الموجهة حول اختبار الفرضيات، حيث تناولنا في السلسلة السادسة اختبار الفرضيات لنسبة نجاح المجموعة الأم –عينة واحدة-، السابعة اختبار الفرضيات لتوقع رياضي المجموعة الأم –عينة واحدة-، أما الثامنة اختبار الفرضيات لنسبة نجاح ولتوقع رياضي المجموعة الأم –عينتين-، أما التاسعة والعاشرة تطرقنا فيهما إلى مجال الثقة واختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم –عينة واحدة- و–عينتين- على التوالي. منتقلين إلى السلسلة الحادية عشر متناولين فيها اختبار حسن المطابقة والسلسلة الثانية عشر معالجينا فيها اختبار فرض الاستقلالية، وصولا إلى الثالثة عشر والتي خصصناها لاختبار الفرضيات لعدة توقعات رياضية.

أما فيما يتعلق بالفصل الرابع والاخير استعرضنا فيه سلسلة واحدة وهي الرابعة عشر حول الانحدار الخطي ومعامل الارتباط.

الفصل الأول:

مدخل إلى توزيع المعاينة

سلسلة أعمال موجهة رقم (01):

(التوزيع الطبيعي أو العادي Z)

التمرين (1):

X متغير عشوائي يتبع قانون برنولي بنسبة نجاح تساوي 0.2 ، كررت التجربة الإحصائية 1000 مرة.

- ما هو التوقع الرياضي والتباين لمجموع النجاح في كل هذه التجارب بطريقتين مختلفتين ؟

التمرين (2):

X متغير عشوائي يمثل توزيع المصابيح الكهربائية ، ويتبع التوزيع الطبيعي بتوقع 100 ساعة وتباين 64 ساعة.

- أحسب احتمال أن المصابيح اختيرت عشوائيا لها عمر ما بين 110 ساعة و 120 ساعة ؟

التمرين (3):

رميت زهرة نرد و قلنا أننا تحصلنا على نجاح إذا كانت نتيجة الرمي هذا أقل أو مساوية للرقم 4. ليكن X متغير عشوائي يعبر على حالة النجاح .

- أحسب التوقع الرياضي و التباين لهذا المتغير العشوائي X ؟

التمرين (4):

افترض أن التجربة الإحصائية المذكورة أعلاه في التمرين (3) كررت 1500 مرة.

وليكن Y مجموع عدد النجاحات التي نتحصل عليها في هذه 1500 تجربة.

- ما هو احتمال أن يكون Y محصورا ما بين 1800 و 2200 ؟

التمرين (5):

إليك مجموع الطلبة الدين تحصلوا على النقاط التالية :

مجال النقاط	0 – 2.5	2.5 - 5	5 - 7.5	7.5-10	10-12.5	12.5- 15	15-17.5	17.5- 20
التكرار	20	30	40	50	50	40	30	20

- بدون اللجوء إلى أية حسابات، وضح إن كانت النقاط أعلاه آتية من مجموعة أم عادية و لماذا؟

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (01):

التمرين 01 :

x_i متغير عشوائي يتبع قانون برنولي حيث:

$$\boldsymbol{x_i \backsim B(p = 0.2)} \quad / \quad q = 1 - p$$

كررت التجربة الاحصائية 1000 مرة. $(n = 1000)$

- حساب التوقع الرياضي والتباين لمجموع النجاح في كل هذه التجارب بطريقتين مختلفتين:

$$E(x) = ? \quad / \quad V(x) = ?$$

طريقة 1:

بما أن x_i متغير عشوائي يتبع قانون برنولي فإن مجموع النجاح $(\Sigma\, x_i)$ يتبع قانون ثنائي الحدين حيث:

$$\boldsymbol{\Sigma x_i \backsim B(n = 100, p = 0.2)}$$

- $E(\Sigma\, x_i) = n * p = 1000 * 0.2 = \mathbf{200}$
- $V(\Sigma\, x_i) = n * p * q = 1000 * 0.2 * 0.8 = \mathbf{160}$

طريقة2:

بتطبيق مبرهنة الحد المركزي التي تقول كل ما هو في صيغة الجمع يتبع القانون الطبيعي (العادي)، وبهذا فإن $(\Sigma\, x_i)$ يتبع القانون العادي.

لدينا: $\boldsymbol{x_i \backsim B(p = 0.2)}$

و : $E(x_i) = p = 0.2 \quad / \quad V(x_i) = p * q = 0.16$

$$\boldsymbol{\Sigma x_i \backsim B(n\,, p) \;\; \backsim \;\; \mathrm{N}(\,\mathrm{E}(\,\Sigma\, \mathrm{x_i})\,;\; \mathrm{V}(\,\Sigma\, \mathrm{x_i})\,)}$$

- $E(\Sigma\, x_i) = \Sigma\, E(\,x_i) = n\, E(\,x_i) = 1000 \text{ x } 0.2 = \mathbf{200}$
- $V(\Sigma\, x_i) = \Sigma\, V(\,x_i) = n\, V(\,x_i) = 1000 \text{ x } 0.16 = \mathbf{160}$

التمرين 02 :

x_i متغير عشوائي يمثل توزيع المصابيح الكهربائية ويتبع القانون الطبيعي (العادي) حيث:

- حساب احتمال أن المصابيح اختيرت عشوائيا لها عمر ما بين 110ساعة و 120ساعة:

$$P(110 \leq x_i \leq 120) = ?$$

$$x_i \backsim N(\mu = 100 ; \delta = 8)$$

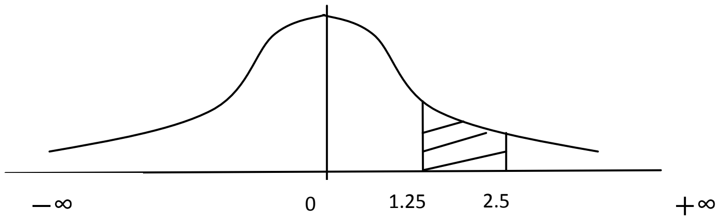
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0;1)$$

$$P(110 \leq x_i \leq 120) = P\left(\frac{110-\mu}{\delta} \leq \frac{x_i - \mu}{\delta} \leq \frac{120-\mu}{\delta}\right)$$

$$= P\left(\frac{110-100}{8} \leq \mathrm{Z} \leq \frac{120-100}{8}\right) = P(1.25 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= P(-\infty \leq Z \leq 2.5) - P(-\infty \leq Z \leq 1.25)$$

$$= \emptyset(2.5) - \emptyset(1.25) = 0.9938 + 0.8944 = \mathbf{0.0994}$$



<u>التمرين 03 :</u>

رميت زهرة نرد وقلنا أننا تحصلنا على نجاح إذا كانت نتيجة الرمي هذا أقل أو مساوية للرقم4.

$$S = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

ليكن x_i متغير عشوائي يعبر على حالة النجاح وهو يتبع قانون برنولي حيث:

$$\boldsymbol{x_i \backsim B(p = \frac{4}{6})}$$

- حساب التوقع الرياضي والتباين ل x_i : $\quad E(x_i) =? \quad / \quad V(x_i) =?$

p **:** احتمال النجاح

q : احتمال الفشل حيث $\quad (q = 1 - p)$

$\boldsymbol{x_i}$	0	1	Total
P($\boldsymbol{x_i}$)	2/6	4/6	1

طريقة1:

$$-E(x_i) = p = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$-V(x_i) = p * q = \frac{4}{6} * \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$$

طريقة2:

$$- E(x_i) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_i . \mathrm{P}(x_i)$$

$$E(x_i) = \left(0 * \frac{2}{6}\right) + \left(1 * \frac{4}{6}\right) = \frac{4}{6} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$- \mathrm{V}(x_i) = \mathrm{E}({x_i}^2) - [\mathrm{E}(x_i)]^2$$

$$E({x_i}^2) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} {x_i}^2 . \mathrm{P}(x_i)$$

$$\mathrm{E}({x_i}^2) = \left(0^2 * \frac{2}{6}\right) + \left(1^2 * \frac{4}{6}\right) = \frac{4}{6} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$\mathrm{V}(x_i) = \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$$

التمرين 04:

نفترض أن التجربة الاحصائية المذكورة أعلاه في التمرين رقم 03 السابق كررت 1500 مرة.

y_j متغير عشوائي يعبر على مجموع عدد النجاحات التي نتحصل عليها في 1500 تجربة.

$$n = 1500 \quad / \quad y_j = \sum_{i=1}^{1500} x_i$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{1500} x_i \backsim \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{n} = \mathbf{1500}, \boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$$

- حساب احتمال أن يكون y_j محصورا بين 1800 و2200:

بما أن حجم العينة كبيرة وباستعمال مبرهنة الحد المركزي يمكننا تقريب توزيع ثنائي الحدين إلى التوزيع العادي ويصبح:

$$y_j = \sum_{i=1}^{1500} x_i \sim \mathbf{N}(\,\mathbf{E}(\,\mathbf{\Sigma\, x_i})\,;\; \mathbf{V}(\,\mathbf{\Sigma\, x_i})\,)$$

$$E(\,\Sigma\, x_i) = \Sigma\, E(\,x_i) = n\,E(\,x_i) = 1500 \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1000} = \mu_y$$

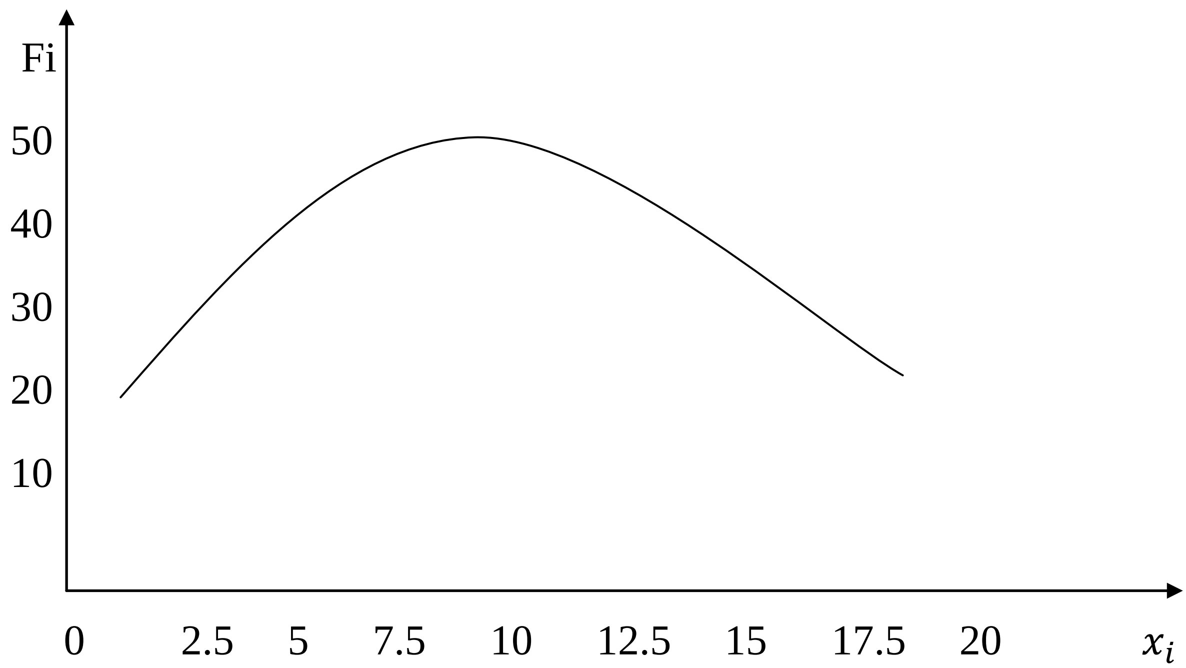
$$V(\,\Sigma\, x_i) = \;\Sigma\, V(\,x_i) = n\,V(\,x_i) = 1000 \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} = \mathbf{333.33} = \delta^{\mathbf{2}}_{\mathrm{y}} \;= 333.33$$

$$y_j \sim \mathbf{N}(\;\mu_{\mathrm{y}} = 1000\;;\; \delta^{\mathbf{2}}_{\mathrm{y}} = \mathbf{333.33}\,)$$

$$Z_j = \frac{y_j - 1000}{18.25} \sim N(0;1)$$

$$P\big(1800 \le y_j \;\le 2200\big) = P\left(\frac{1800-1000}{18.25} \le \mathrm{Z} \le \frac{2200-1000}{18.25}\right)$$
$$= P(43.83 \le Z \le 65.74) = \emptyset(\infty) - \emptyset(\infty) \approx \mathbf{0}$$

التمرين (05):



بما أن الشكل البياني (المنحنى) لمجال النقاط مع تكراراتها على شكل جرس أي متناظر ومتماثل حول الوسط فإن النقاط آتية من مجموعة أم عادية.

سلسلة أعمال موجهة رقم (02):

(توزيع المعاينة)

التمرين (06): $x_i \sim N(\mu = 5 ; \delta = 4)$ / $i = 1,2\ldots\ldots,5$

ليكن: $T = \sum_{i=1}^{5} x_i$

أحسب الاحتمالات التالية :

1- احتمال أن لا يتجاوز المجموع القيمة 20 ؟

2- احتمال أن لا يكون أقل من 30؟

3- احتمال أن يساوي 25؟

التمرين (07):

تتضمن مجموعة أم (المجتمع) 1000 عنصرا مستقلا وموزعين حسب القانون العادي (الطبيعي) بحيث يكون التوقع الرياضي يساوي 10 وتباينه 100.

أخذت عينة حجمها 40.

- ما هو احتمال أن يقع المتوسط الحسابي ما بين 8 و 11 ؟

التمرين (08):

أخذت عينة حجمها 30 من مجموعة أم، حيث توقع المجموعة الأم يساوي 10 وتباينها 25 وحجمها يساوي 400.

- ما هو الاحتمال أن يكون متوسط العينة محصورا ما بين 8 و 12 ؟

التمرين (09):

لتكن مجموعة أم موزعة حسب القانون العادي حيث متوسطها الحسابي 10 وتباينها 16.

سحبنا عينة حجمها 100 (أي الملاحظات 100).

- ما هو احتمال أن يكون مجموع الملاحظات محصورا ما بين 996 و 1004 ؟

التمرين (10): أخذت عينة عدد عناصرها 100 من مجموعة أم تتبع قانون بواسون بتوقع رياضي 10 وتباين 10.

- أحسب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة محصورا ما بين 8 و 12 ؟

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (02):

التمرين (06):

$$x_i \sim N(\mu = 5\,;\delta = 4) \qquad / \quad i = 1,2\ldots\ldots,5$$

وليكن: $T = \sum_{i=1}^{5} x_i$ / $n = 5$

1- حساب: $P(T < 20) = ?$

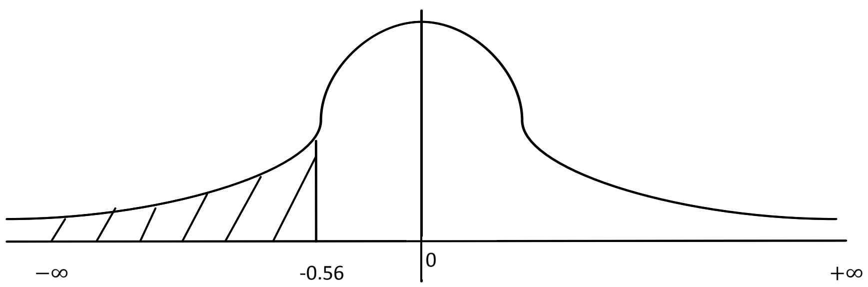
بتطبيق مبرهنة الحد المركزي فإن $\Sigma\, x_i$ يتبع القانون العادي حيث:

$$\Sigma\, x_i \sim N(n.\mu = 25\,; n.\delta^2 = 80)$$

$$Z_i = \frac{\Sigma x_i - 25}{8.94} \sim N(0;1)$$

طريقة1:

$$P(T < 20) = P\left(\Sigma\, x_i < 20\right) = P\left(Z \le \frac{20-25}{8.94}\right) = P(Z \le -0.56) = 1 - \emptyset(0.56) = 1 - 0.7123 = \mathbf{0.2877}$$



طريقة2: بتطبيق مبرهنة الحد المركزي فإن ‾ يتبع القانون العادي حيث:

$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}}\ ;\ \delta_{\bar{x}})$$

- $\mu_{\bar{x}} = \mu = 5$
- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = 1.78$

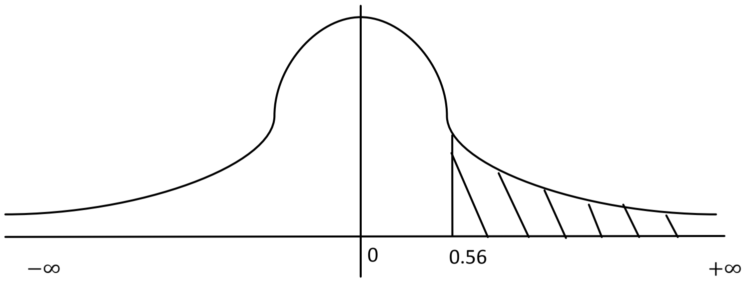
$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = 5\ ;\ \delta_{\bar{x}} = 1.78)$$

$$Z_i = \frac{\bar{x}-5}{1.78} \sim N(0;1)$$

$$P(T<20)=\ P(\Sigma x_i<20)=P\left(\frac{\Sigma x_i}{n}<\frac{20}{n}\right)=P(\bar{x}<4)\ =$$
$$P\left(\frac{\bar{x}-5}{1.78}<\frac{4-5}{1.78}\right)=P(\mathrm{Z}<-0.56)=1-\emptyset(0.56)=1-0.7123$$
$$=\mathbf{0.2877}$$

2- حساب: $P(T>30)=?$

$$P(T>30)=\ P(\Sigma x_i>30)=P\left(\frac{\Sigma x_i}{n}>\frac{30}{n}\right)=P(\bar{x}>6)\ =$$
$$P\left(\frac{\bar{x}-5}{1.78}>\frac{6-5}{1.78}\right)=P(\mathrm{Z}>0.56)=1-\emptyset(0.56)=1-0.7123$$
$$=\mathbf{0.2877}$$



3- حساب: $P(T=25)=?$

$$P(T=25)=\ P(\Sigma x_i=25)=P(\bar{x}=5)\ =\ P\left(\mathrm{Z}=\frac{5-5}{1.78}\right)=$$
$$P(\mathrm{Z}=0)=\mathbf{0}$$

احتمال Z يساوي قيمة ثابتة هو **0** (مساحة نقطة 0).

التمرين (07):

N=1000 / μ=10 / $\delta^2=100$ / n=40

- حساب احتمال: $P(8\le\bar{x}\ \le 11)=\ ?$

ليكن x_i متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي (العادي) بحيث:

$$x_i \backsim N(\mu=10;\delta=10)$$

بتطبيق مبرهنة الحد المركزي فإن $\bar{x}$ يتبع القانون العادي حيث:

$$\bar{x} \rightsquigarrow N(\mu_{\bar{x}} \ ; \ \delta_{\bar{x}})$$

- $\mu_{\bar{x}} = \mu = 10$
- $n=40 < 0.05 * N = 50$

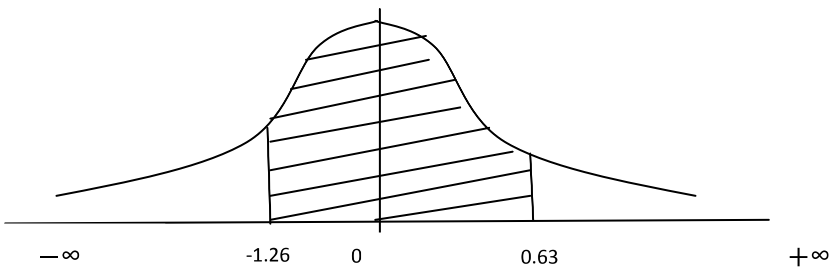
إذن لا نستعمل معامل التصحيح

- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{40}} = 1.58$

$$\bar{x} \rightsquigarrow N(\mu_{\bar{x}} = 10 \ ; \ \delta_{\bar{x}} = 1.58)$$

$$Z_i = \frac{\bar{x}-10}{1.58} \rightsquigarrow N(0;1)$$

$$P(8 \le \bar{x} \le 11) = P\left(\frac{8-10}{1.58} \le Z \le \frac{11-10}{1.58}\right) = P(-1.26 \le Z \le 0.63)$$
$$= P(-\infty \le Z \le 0.63) - P(-\infty \le Z \le -1.26)$$
$$= \emptyset(0.63) - [1 - \emptyset(1.26)] = 0.7357 - [1 - 0.8962]$$
$$= \mathbf{0.6319}$$



التمرين (08):

$$\text{N=400} \ / \ \mu=10 \ / \ \delta^2 = 25 \ / \ n=30$$

- حساب احتمال: $P(8 \le \bar{x} \le 12) = \ ?$

ليكن x_i متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي (العادي) بحيث:

$$x_i \rightsquigarrow N(\mu = 10; \delta = 5)$$

بتطبيق مبرهنة الحد المركزي فإن $\bar{x}$ يتبع القانون العادي حيث:

$$\bar{x} \rightsquigarrow N(\mu_{\bar{x}} \ ; \ \delta_{\bar{x}})$$

- $\mu_{\bar{x}} = \mu = 10$
- n=30 $> 0.05 * N = 20$

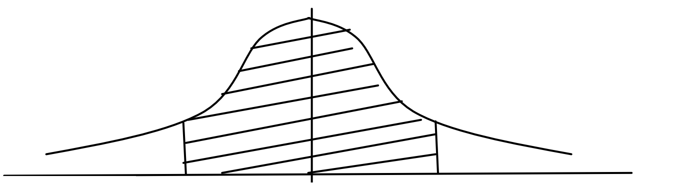
إذن نستعمل معامل التصحيح

- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{5}{\sqrt{30}} * \sqrt{\frac{400-30}{400-1}} = 0.87$

$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = 10 \ ; \ \delta_{\bar{x}} = 0.87)$$

$$Z_i = \frac{\bar{x}-10}{0.87} \sim N(0;1)$$

$$P(8 \le \bar{x} \le 12) = P\left(\frac{8-10}{0.87} \le \ Z \le \frac{12-10}{0.87}\right) = P(-2.29 \le Z \le 2.29)$$
$$= P(-\infty \le Z \le 2.29) - P(-\infty \le Z \le -2.29)$$
$$= 2 * \emptyset(2.29) - 1 = 2 * (0.9890) - 1 = \mathbf{0.9780}$$



التمرين (09):

μ=10 / $\delta^2 = 16$ / n=100

- حساب احتمال: $P(996 \le \Sigma x_i \ \le 1004)=\ ?$

ليكن x_i متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي (العادي) بحيث:

$$x_i \sim N(\mu = 10; \delta = 4)$$

بتطبيق مبرهنة الحد المركزي فإن $\bar{x}$ يتبع القانون العادي حيث:

$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} \ ; \ \delta_{\bar{x}})$$

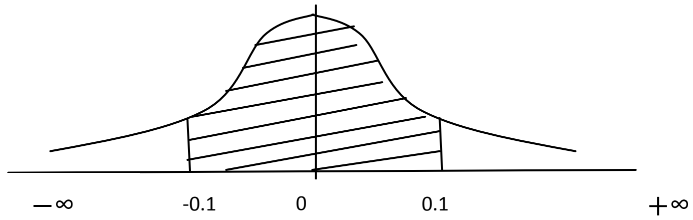
- $\mu_{\bar{x}} = \mu = 10$

- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0.4$

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} = 10 \ ; \ \delta_{\bar{x}} = 0.4)$$

$$Z_i = \frac{\bar{x}-10}{0.4} \backsim N(0;1)$$

$$P(996 \leq \Sigma x_i \ \leq 1004) = P\left(\frac{996}{n} \leq \frac{\Sigma x_i}{n} \leq \frac{1004}{n}\right)$$
$$= P(9.96 \leq \bar{x} \leq 10.04) = P\left(\frac{9.96-10}{0.4} \leq \ Z \leq \frac{10.04-10}{0.4}\right)$$
$$= P(-0.1 \leq Z \leq 0.1) = 2 * \emptyset(0.1) - 1 = 2 * (0.5398) - 1$$
$$= \mathbf{0.0796}$$



<u>التمرين (10):</u>

ليكن x_i متغير عشوائي يتبع التوزيع بواسون بحيث:

$$x_i \ \backsim P(\lambda = 10)$$

$$E(x_i) = \lambda = 10 \quad / \quad V(\,x_i) = \ \lambda = 10 \quad / \quad n{=}100$$

<u>حساب احتمال:</u> $P(8 \leq \bar{x} \ \leq 12)= \ ?$

بتطبيق مبرهنة الحد المركزي نقوم بتقريب قانون بواسون الى القانون الطبيعي وبالتالي:

$$x_i \ \backsim N(\mu = 10; \delta = \sqrt{10})$$

وبتطبيق مبرهنة الحد المركزي مرة ثانية فإن $\bar{x}$ يتبع القانون الطبيعي حيث:

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} = \mu = 10 \ ; \ \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = 0.31)$$

$$Z_i = \frac{\bar{x}-10}{0.31} \backsim N(0;1)$$

$$P(8 \leq \bar{x} \leq 12) = P\left(\frac{8-10}{0.31} \leq \; Z \leq \frac{12-10}{0.31}\right) = P(-6.45 \leq Z \leq 6.45)$$
$$= P(-\infty \leq Z \leq +\infty) \approx \mathbf{1}$$

الفصل الثاني:

التقديرات

سلسلة أعمال موجهة رقم (03):

(التقدير عند النقطة)

التمرين (11):

إليك العينة التالية : 6-6-4-2-8-6-4-2

1- أحسب أحسن تقدير عند النقطة للتوقع الرياضي ولتباين المجموعة الأم ؟

2- ما هو تبريرك النظري ؟

التمرين (12):

ما هو أحسن تقدير نقطوي للتوقع ولتباين مجموعة أم أخذت منها العينة التالية :

0-3-2-1-2-1-1

التمرين (13):

أخذت عينة حجمها 40 من مجموعة أم حجمها 240، علما أن الانحراف المعياري للمجموعة الأم يساوي 18 .

- ما هو احتمال أن يبتعد متوسط العينة عن متوسط المجتمع بأكثر من 4 ؟

التمرين (14):

سحبنا عينة عشوائية حجمها 66 عنصرا من مجموعة أم لتقدير التوقع الرياضي لهذه المجموعة الأم، وكان معلوما أن الانحراف المعياري لهذه المجموعة الأم هو 25 .

1- أحسب احتمال أن يختلف الوسط الحسابي للعينة عن وسط المجتمع بما لا يزيد عن 6 ؟

2- أحسب أكبر فرق محتمل ب 0.90 بين وسط العينة ووسط المجموعة الأم ؟

التمرين (15):

ما هو حجم العينة الذي يجب أن يستعمل حتى نضمن أن احتمال بأن يختلف المتوسط الحسابي للعينة عن متوسط المجتمع بأكثر من 1 يساوي 0.008، علما أن الانحراف المعياري للمجتمع يساوي 2.5 .

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (03):

التمرين (11):

x_i= {6-6-4-2-8-6-4-2} / n=8

1- حساب أحسن تقدير عند النقطة للتوقع الرياضي ولتباين المجموعة الأم:

$\bar{x}$ هو أحسن تقدير عند النقطة للتوقع الرياضي للمجموعة الأم μ.

s^2 هو أحسن تقدير عند النقطة لتباين للمجموعة الأم δ^2.

	6	6	4	2	8	6	4	2	**38**
$(x_i-\bar{x})^2$	1.5625	1.5625	0.5625	7.5625	10.5625	1.5625	0.5625	7.5625	**31.5**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{38}{8} = \mathbf{4.75}$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2}{n-1} = \frac{31.5}{7} = \mathbf{4.5}$$

$\hat{\mu} = \bar{x} = 4.75$
$\widehat{\delta^2} = s^2 = 4.5$

2- التبرير النظري: $\bar{x}$ و s^2 هما احصائيتان غير منحزتان وفعالتان ومكثفتان.

التمرين (12):

x_i= {0-3-2-1-2-1-1} / n=7

- حساب أحسن تقدير عند النقطة للتوقع الرياضي ولتباين المجموعة الأم:

$\bar{x}$ هو أحسن تقدير عند النقطة للتوقع الرياضي للمجموعة الأم μ.

s^2 هو أحسن تقدير عند النقطة لتباين للمجموعة الأم δ^2.

	0	3	2	1	2	1	1	**10**
x_i^2	0	9	4	1	4	1	1	**20**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{10}{7} = \mathbf{1.42}$$

$$s^2 = \frac{\sum \boldsymbol{x_i}^2 - n.\bar{x}^2}{n-1} = \frac{20-[7*(1.42)^2]}{6} = \mathbf{0.945}$$

$\widehat{\mu} = \bar{x} = \mathbf{1.42}$
$\widehat{\delta^2} = \mathbf{s^2} = \mathbf{0.945}$

التمرين (13):

N=240 / n=40 / $\delta = 18$

- حساب احتمال: $P(|\bar{x} - \mu| > 4) = ?$

ليكن x_i متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي.

بتطبيق مبرهنة الحد المركزي فإن $\bar{x}$ يتبع القانون العادي حيث:

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} \; ; \; \delta_{\bar{x}})$$

- $\mu_{\bar{x}} = \mu$
- n=40 $> 0.05 * N = 20$

إذن نستعمل معامل التصحيح

- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{18}{\sqrt{40}} * \sqrt{\frac{240-40}{240-1}} = 2.60$

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} = \mu \; ; \; \delta_{\bar{x}} = 2.60)$$

$$Z_i = \frac{\bar{x} - \mu}{2.60} \backsim N(0;1)$$

$$P(|\bar{x} - \mu| > 4) = 1 - P(|\bar{x} - \mu| \leq 4)$$

$$P(|\bar{x} - \mu| \leq 4) = P(-4 \leq \bar{x} - \mu \leq 4) = P\left(\frac{-4}{\delta_{\bar{x}}} \leq Z \leq \frac{4}{\delta_{\bar{x}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-4}{2.6} \leq Z \leq \frac{4}{2.6}\right) = P(-1.53 \leq Z \leq 1.53) = 2 * \emptyset(1.53) - 1$$
$$= \mathbf{0.8740}$$

$$P(|\bar{x} - \mu| > 4) = 1 - P(|\bar{x} - \mu| \leq 4) = 1 - 0.8740 = \mathbf{0.1260}$$

التمرين (14):

$$n = 66 \quad / \quad \delta = 25$$

1- حساب احتمال: $P(|\bar{x} - \mu| < 6) = \ ?$

ليكن x_i متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي.

بتطبيق مبرهنة الحد المركزي فإن $\bar{x}$ يتبع القانون العادي حيث:

$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = \mu \ ; \ \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}})$$

$$Z_i = \frac{\bar{x} - \mu}{\delta_{\bar{x}}} \sim N(0; 1)$$

- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{66}} = 3.07$

$$P(|\bar{x} - \mu| < 6) = P(-6 \leq \bar{x} - \mu \leq 6) = P\left(\frac{-6}{\delta_{\bar{x}}} \leq Z \leq \frac{6}{\delta_{\bar{x}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-6}{3.07} \leq Z \leq \frac{6}{3.07}\right) = P(-1.95 \leq Z \leq 1.95) = 2 * \emptyset(1.95) - 1$$
$$= 2(0.9744) - 1 = \mathbf{0.95}$$

2- حساب أكبر فرق محتمل بحيث: $P(|\bar{x} - \mu| < K) = 0.90$

$$P(-K \leq \bar{x} - \mu \leq +K) = 0.90 \leftrightarrow P\left(\frac{-K}{\delta_{\bar{x}}} \leq Z \leq \frac{K}{\delta_{\bar{x}}}\right) = 0.90$$

$$= 2 * \emptyset\left(\frac{K}{\delta_{\bar{x}}}\right) - 1 = 0.90 \leftrightarrow \emptyset\left(\frac{K}{\delta_{\bar{x}}}\right) = 0.950$$

نقرأ من الجدول الطبيعي (Z_i) ونحصل على:

$$\frac{K}{\delta_{\bar{x}}} = 1.64 \leftrightarrow K = 1.64 * \delta_{\bar{x}} \leftrightarrow K = 1.64 * \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$K = 1.64 * \frac{25}{\sqrt{66}} \approx \mathbf{5}$$

<u>التمرين (15):</u>

$$P(|\bar{x} - \mu| > 1) = 0.008 \quad / \quad \delta = 2.5$$

- <u>حساب حجم العينة</u>: $n = ?$

$$P(|\bar{x} - \mu| > 1) = 0.008 \leftrightarrow 1 - P(|\bar{x} - \mu| \leq 1) = 0.008$$

$$P(|\bar{x} - \mu| \leq 1) = 1 - 0.008 = 0.992$$

$$P(-1 \leq \bar{x} - \mu \leq +1) = 0.992 \leftrightarrow P\left(\frac{-1}{\delta_{\bar{x}}} \leq Z \leq \frac{1}{\delta_{\bar{x}}}\right) = 0.992$$

$$= 2 * \emptyset\left(\frac{1}{\delta_{\bar{x}}}\right) - 1 = 0.992 \leftrightarrow \emptyset\left(\frac{1}{\delta_{\bar{x}}}\right) = 0.996$$

نقرأ من الجدول الطبيعي (Z_i) ونحصل على:

$$\frac{1}{\delta_{\bar{x}}} = 2.65 \leftrightarrow \delta_{\bar{x}} = \frac{1}{2.65} = 0.377$$

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = 0.377 \leftrightarrow n = \left(\frac{\delta}{0.377}\right)^2 = \left(\frac{2.5}{0.377}\right)^2 \approx \mathbf{44}$$

سلسلة أعمال موجهة رقم (04):

(التقدير بالمجال لتوقع الرياضي المجموعة الأم)

التمرين (16):

أخذت عينة عشوائية من 25 وحدة وسطها الحسابي 80 ، تم سحبها من مجتمع عدد وحداته 1000 وبانحراف معياري يساوي 30.

1- أوجد مجال الثقة للتوقع الرياضي لمجوعة الأم بثقة 90% ،95% ،99% ؟

2- على ما تدل الفروق في النتائج المتحصل عليها ؟

التمرين (17):

أخذت عينة عشوائية من مجموعة أم حيث أن حجم المجموعة الأم يساوي 35 وحجم العينة 20 أدت العينة إلى الإحصائيات التالية : $\bar{x} = 10$ / $s = 25$

1- ما هو مجال الثقة لتوقع المجموعة الأم بثقة تساوي 99% ؟

2- كيف تكون إجابتك إذا كان الانحراف المعياري للمجموعة الأم يساوي 30 ؟

التمرين (18):

ما هو مجال الثقة لتوقع مجموعة أم أخذت منها العينة التالية:

9-13-12-6-8-10 استعمل α= 5%

التمرين (19):

T يتبع قانون ستودنت وعدد درجات حريته يساوي 10 .

- ما هو الاحتمال أن لا يتجاوز T القيمة 1.372 ؟

التمرين (20):

أخذت عينة حجمها 100 ووجد أن متوسطها الحسابي يساوي 10 و تباينها 16.

- ما هو مجال الثقة لتوقع الرياضي للمجموعة الأم إذا كانت المجازفة تساوي 5% ؟

التمرين (21):

ما هو حجم العينة الذي أن يستعمل إذا أردنا الوصول إلى مجال الثقة ل μ بثقة تساوي 95% ومدى المجال يساوي 0.12، علما أن الانحراف المعياري للمجتمع يساوي 0.05

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (04):

التمرين (16):

N=1000 / $\bar{x}$=80 / $\delta = 30$ / n=25

1- ايجاد مجال الثقة للتوقع الرياضي للمجموعة الأم (μ)عند مستوى الثقة 90%:

δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z_i).

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}\right) = \text{C}= 90\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}]$$

$$* \text{C}= 90\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C}= 10\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.95} = \mathbf{1.64}$$

القيمة 1.64 مقروأة من جدول توزيع الطبيعي (Z_i).

$$* n=25 < 0.05 * N = 50$$

إذن لا نستعمل معامل التصحيح

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{30}{\sqrt{25}} = 6$$

$$\mu \in [80 \pm (1.64 * 6)]$$

$$\mu \in [80 \pm 9.84]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{70.16}\ ;\ \mathbf{89.84}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C}= \mathbf{90\%}}$$

- ايجاد مجال الثقة للتوقع الرياضي للمجموعة الأم (μ)عند مستوى الثقة 95%:

$$* \text{C}= 95\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C}= 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = \mathbf{1.96}$$

$$\mu \in [80 \pm (1.96 * 6)]$$

$$\mu \in [80 \pm 11.76]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu \in [68.24\ ;\ 91.76]\ avec\ \text{C}= 95\%}}$$

- إيجاد مجال الثقة للتوقع الرياضي للمجموعة الأم (μ)عند مستوى الثقة 99%:

$$* \text{ C}= 99\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C}= 1\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = \mathbf{2.57}$$

$$\mu \in [80 \pm (2.57 * 6)]$$

$$\mu \in [80 \pm 15.48]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu \in [64.52\ ;\ 95.48]\ avec\ \text{C}= 99\%}}$$

2- الاستنتاج:

كلما زاد مستوى الثقة (C↑)، تنقص مستوى المعنوية (المجازفة (α ↓)، وترتفع قيمة Z المقروأة من جدول الطبيعي (Z ↑)، ويؤدي ذلك إلى زيادة في طول المجال. إذن التقدير بالمجال هو أكثر غموضة وأقل دقة.

التمرين (17):

N=35 / $\bar{x}$=10 / $s = 25$ / n=20 / C= 99% / $\alpha = 1\%$

1- إيجاد مجال الثقة للتوقع الرياضي للمجموعة الأم (μ):

δ غير معلومة وحجم العينة صغيرة ($n < 30$) إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}\right) = \text{C}= 99\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{V}= n - 1 = 19 \\ t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.005} = 2.861 \end{array}\right.$$ ← (T) مقروأ من جدول توزيع ستودنت

- n=20 $> 0.05 * N = 1.75$

إذن نستعمل معامل التصحيح

- $\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{s}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{25}{\sqrt{20}} * \sqrt{\frac{35-20}{35-1}} = 3.711$

$$\mu \in [10 \pm (2.861 * 3.711)]$$

$$\mu \in [10 \pm 10.617]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{-0.617}\ ;\ \mathbf{20.617}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C}= \mathbf{99\%}}$$

2- ايجاد مجال الثقة للتوقع الرياضي للمجموعة الأم (μ) إذا كان $\delta = 30$:

δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z_i).

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}\right) = \text{C}= 90\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}]$$

$* \text{C}= 99\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C}= 1\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{2.57}$

- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{30}{\sqrt{20}} * \sqrt{\frac{35-20}{35-1}} = 4.457$

$$\mu \in [10 \pm (2.57 * 4.457)]$$

$$\mu \in [10 \pm 11.454]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{-1.454}\ ;\ \mathbf{21.454}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C}= \mathbf{99\%}}$$

التمرين (18):

x_i= {10-8-6-12-13-9} / n=8 / $\alpha = 5\%$

- ايجاد مجال الثقة ل μ :

δ غير معلومة وحجم العينة صغيرة $(n < 30)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}\right) = \text{C}= 95\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} . \widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

	10	8	6	12	13	9	**58**
$(x_i\text{-}\bar{x})^2$	0.11	2.75	13.39	5.47	11.15	0.43	**33.3**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{58}{6} = \mathbf{9.66}$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2}{n-1} = \frac{33.3}{5} = \mathbf{6.66}$$

$$s = \sqrt{s^2} = 2.58$$

$$\begin{cases} V = n - 1 = 5 \\ t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.571 \end{cases}$$

مقروأ من جدول توزيع ستودنت (T) ←

- $$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{2.58}{\sqrt{6}} = 1.05$$

$$\mu \in [9.66 \pm (2.571 * 1.05)]$$

$$\mu \in [9.66 \pm 2.69]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{6.97}\ ;\ \mathbf{12.35}]\ \boldsymbol{avec}\ C = \mathbf{95\%}}$$

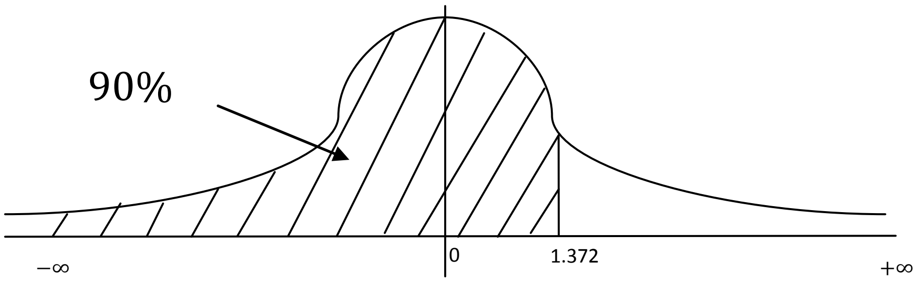
التمرين (19):

T يتبع قانون ستودنت بعدد درجات حرية 10 (V=10).

- حساب احتمال: $P(T < 1.372) = ?$

$$= P(T < 1.372) = 1 - P(T > 1.372) = 1 - 10\% = \mathbf{90\%}$$

نقرأ القيمة (10%) من جدول توزيع ستودنت (T).



التمرين (20):

$$\bar{x}=10 \quad / \quad s^2 = 16 \quad / \quad n=100 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

1- ايجاد مجال الثقة للتوقع الرياضي للمجموعة الأم (μ):

δ غير معلومة وحجم العينة كبيرة $(30 < n)$ إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z_i).

$$P\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\overline{x}}} \le \mu \le \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\overline{x}}}\right) = \text{C}= 95\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

$* \ \alpha = 5\% \to Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.96}$

- $\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0.4$

$$\mu \in [10 \pm (1.96 * 0.4)]$$

$$\mu \in [10 \pm 0.784]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{9.216}\ ;\ \mathbf{10.784}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C}= \mathbf{95}\%}$$

التمرين (21):

$$\delta = 0.05 \quad / \quad \text{C}= 95\% \quad / \quad \alpha = 5\%$$

δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z_i).

طول المجال = مدى المجال = $2.Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x}} = 0.12$

- ايجاد حجم العينة: $n = \ ?$

$* \ C = 95\% \rightarrow \alpha = 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.96}$

$$2.Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x}} = 0.12 \ \leftrightarrow \ 2.Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}} = 0.12 \ \leftrightarrow ? \ n = \left(\frac{2.Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \ . \ \delta}{0.12}\right)^2$$

$$n = \left(\frac{2*1.96*0.05}{0.12}\right)^2 \approx \mathbf{3}$$

سلسلة أعمال موجهة رقم (05):

(التقدير بالمجال لنسبة نجاح المجموعة الأم)

التمرين (22):

عدد المنخرطين في اتحادية العمال 5000 عامل، بعث رئيس هذه الاتحادية إلى 500 منخرط يسألهم إذا كانوا يرغبون في الاندماج مع اتحادية ثانية.

نفرض أن نسبة العمال الذين يرغبون في هذا الاندماج هو $\pi = 0.7$

1- ما هو احتمال أن نسبة نجاح العينة تكون أكبر من 0.75 ؟

2- ما هو احتمال أن نسبة نجاح العينة لن تبتعد عن نسبة النجاح لمجموعة الأم بأكثر من0.05 ؟

التمرين (23):

لجأت شركة مسوقة لنوع من المواد المنظفة X إلى خدمات مكتب دراسات في التسويق، والغاية من هذا هو تحديد نسبة الزبائن الذين يفضلون هذا المنتوج X على منافسه Y.

أخذت عينة من 100 زبون فتحصلنا على الإحصائيات التالية:

59 زبون يفضلون النوع X.

37 زبون يفضلون النوع Y.

04 زبائن لا رأي لهم.

1- ما هو مجال الثقة لنسبة الزبائن الذين يفضلون المنتوج X علما أن $\alpha = 1\ \%$ ؟

2- ماذا لو كان حجم مجموعة الأم يساوي 1000 ؟

التمرين (24):

اختيرت عينة عشوائية حجمها 500 حذاء من إنتاج أحد المصانع، فوجد أن 80 حذاء فاسدا.

- أوجد مجال الثقة لنسبة الأحذية الفاسدة في الإنتاج كله عند ثقة 95 %

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (05):

التمرين (22):

$$N=5000 \quad / \quad n=500 \quad / \quad \pi = 0.7$$

1- حساب احتمال: $P(\rho > 0.75) = ?$

$$\rho \backsim N(\pi\,; \delta_\pi)$$

$$Z_i = \frac{\rho - \pi}{\delta_\pi} \backsim N(0;1)$$

π: نسبة النجاح للمجموعة الأم (المجتمع).

ρ: نسبة النجاح للعينة.

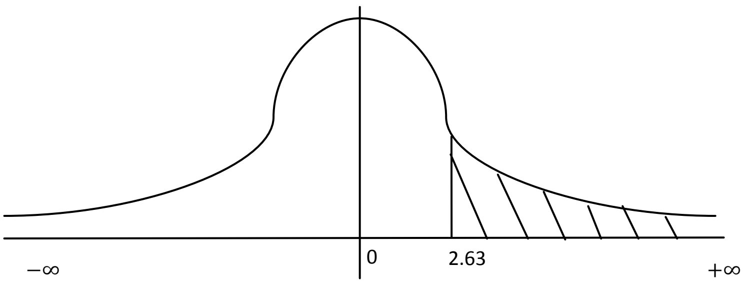
δ_π: الانحراف المعياري للمجموعة الأم.

- $n=500 > 0.05 * N = 250$

إذن نستعمل معامل التصحيح

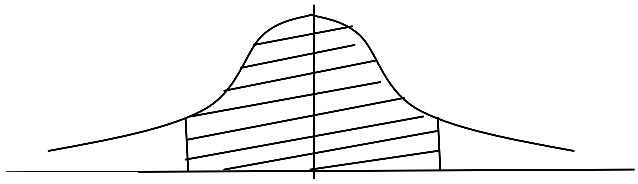
- $\delta_\pi = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.7*0.3}{500}} * \sqrt{\frac{5000-500}{5000-1}} = 0.019$

$$P(\rho > 0.75) = P\left(Z > \frac{0.75-0.7}{0.019}\right) = P(Z > 2.63) = 1 - \emptyset(2.63)$$
$$= \mathbf{0.0043}$$



2- حساب احتمال: $P(|\rho - \pi| < 0.05) = ?$

$$P(|\rho - \pi| < 0.05) = P(-0.05 \le \rho - \pi \le 0.05)$$
$$= P\left(\frac{-0.05}{\delta_\pi} \le Z \le \frac{0.05}{\delta_\pi}\right) = P\left(\frac{-0.05}{0.019} \le Z \le \frac{0.05}{0.019}\right)$$
$$= P(-2.63 \le Z \le 2.63) = 2 * \emptyset(2.63) - 1 = \mathbf{0.9914}$$



التمرين (23):

$$n\text{=}100 \quad / \quad \alpha = 1\%$$

1- ايجاد مجال الثقة لنسبة الزبائن الذين يفضلون المنتوج X:

نسبة نجاح الزبائن الذين يفضلون المنتوج X في العينة هو: $\text{p}= \frac{59}{100} = 0.59$

$$P\left(\text{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\text{p}} \le \pi \le \text{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\text{p}}\right) = \text{C}= 99\%$$

$$\pi \in [\text{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\text{p}}]$$

$$* \ \text{C}= 99\% \rightarrow \alpha = 1\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{2.57}$$

- $\delta_{\text{p}} = \sqrt{\frac{\text{p}(1-\text{p})}{n}} = \sqrt{\frac{059*0.41}{100}} = 0.049$

$$\pi \in [0.59 \pm (2.57 * 0.049)]$$

$$\pi \in [0.59 \pm 0.125]$$

$$\boxed{\pi \in [\mathbf{0.465}\ ;\ \mathbf{0.715}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C}= \mathbf{99\%}}$$

2- ماذا لو كان: N=1000

- $n\text{=}100 > 0.05 * N = 50$

إذن نستعمل معامل التصحيح

$$- \quad \delta_{p} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{059*0.41}{100}} * \sqrt{\frac{1000-100}{1000-1}} = 0.046$$

$$\pi \in [0.59 \pm (2.57 * 0.046)]$$

$$\pi \in [0.59 \pm 0.118]$$

$$\boxed{\pi \in [\mathbf{0.472}\ ;\ \mathbf{0.708}]\ \boldsymbol{avec}\ \ C= \mathbf{99\%}}$$

التمرين (24):

$$n=500 \quad / \quad C= 95\%$$

1- ايجاد مجال الثقة لنسبة الأحذية الفاسدة:

نسبة الأحذية الفاسدة في العينة هو: $p= \frac{80}{500} =0.16$

$$P\left(p - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{p} \leq \pi \leq p + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{p}\right) = C= 95\%$$

$$\pi \in [p \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{p}]$$

$$* \ C= 95\% \rightarrow \alpha = 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.96}$$

$$- \quad \delta_{p} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.16*0.84}{500}} = 0.016$$

$$\pi \in [0.16 \pm (1.96 * 0.016)]$$

$$\pi \in [0.16 \pm 0.031]$$

$$\boxed{\pi \in [\mathbf{0.129}\ ;\ \mathbf{0.191}]\ \boldsymbol{avec}\ \ C= \mathbf{95\%}}$$

الفصل الثالث:

اختبار الفرضيات

سلسلة أعمال موجهة رقم (06):

(اختبار الفرضيات لنسبة نجاح المجموعة الأم –عينة واحدة-)

التمرين (25):

اليك العينة التالية حيث 1 يساوي نجاحا و 0 يساوي رسوبا: 1-0-0-1-1-1-0-1-1-1-0-1-1-0

1- ما هو أحسن تقدير نقطوي لنسبة النجاح للمجموعة الأم ؟

2- اختبر الفرضيات التالية عند $\alpha = 5\ \%$:

$H_0 : \pi = 0.4$ $H_0 : \pi = 0.4$ $H_0 : \pi = \pi_0 = 0.4$

$H_1 : \pi > 0.4$ $H_1 : \pi < 0.4$ $H_1 : \pi \# 0.4$

التمرين (26):

قرر أحد الزبائن أن يأخذ عينة حجمها 100 وحدة من حمولة تقدم إليه من طرف مورده، وحدد القانون التالي:

إذا كانت نسبة الوحدات الفاسدة أقل أو مساوية ل 0.07 إذن يتم قبول الحمولة وإلا يرفضها، كما أنه هناك فرضيتين هما $\pi_0 = 0.05$ و $\pi_1 = 0.1$

1- ما هي قيمة كل من α وβ ؟

2- هل سيرتفع أو يتقلص α وβ إذا غير قانون قبول أو رفض الحمولة إلى 0.08 ؟

3- هل سترتفع α وβ إذا تغير حجم العينة إلى 200 ؟

التمرين (27):

$$H_0 : \pi = \pi_0 = 0.05$$

$$H_1 : \pi \# \pi_0$$

علما أن حجم العينة هو 100 و نفترض أن الخطأ من النوع الأول هو 10 %.

1- ما هي قيمة P_1* و P_2* القيم الفاصلة ، و وضح ما هو قانون القرار؟

2- استعمل قانون القرار أعلاه لحساب قبول H_0 لما تكون $\pi = 0.55$ ؟

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (06):

التمرين (25):

x_i= {0-1-1-0-1-1-1-0-0-1} / n=10

1- حساب أحسن تقدير عند النقطة لنسبة نجاح المجموعة الأم:

p هو أحسن تقدير عند النقطة لنسبة نجاح المجموعة الأم π.

$$\mathrm{p} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{6}{10} = \mathbf{0.6}$$

$$\boxed{\hat{\pi} = \mathrm{p} = \mathbf{1.42}}$$

2- اختبر الفرضيات التالية عند α= 5 % :

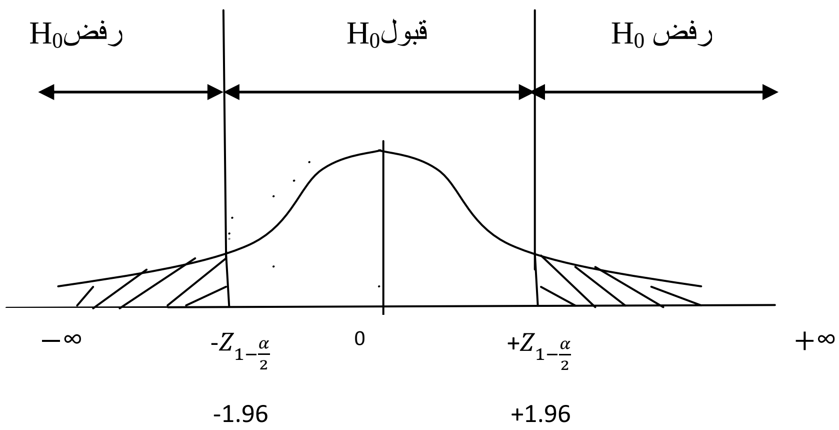
نستعمل التوزيع الطبيعي.

أ- اختبر الفرضيات لنسبة نجاح المجموعة الأم π: **(عينة واحدة)**

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \pi = \pi_0 = 0.4$

$H_1 : \pi \# 0.4$



القيمة الفاصلة: $\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$* \, \alpha = 5\% \rightarrow \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \pm \mathbf{1.96}$$

القيمة الحسابية: Z_c

$$Z_c = \frac{\mathrm{p} - \boldsymbol{\pi_0}}{\boldsymbol{\delta_{\pi_0}}}$$

$$\delta_{\boldsymbol{\pi_0}} = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.4*0.6}{10}} = 0.154$$

$$Z_c = \frac{0.6-0.4}{0.154} = \mathbf{1.29} \in [-1.96\ ;+1.96]$$

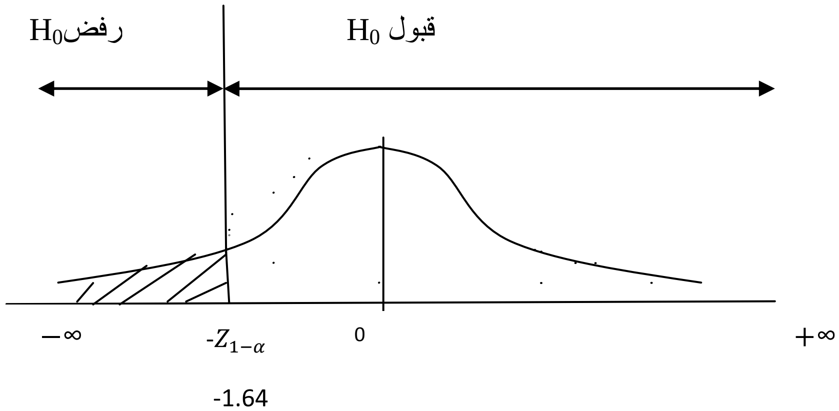
القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α= 5 % إذن نسبة نجاح مجموعة الأم تساوي 0.4

ب-اختبر الفرضيات لنسبة نجاح المجموعة الأم π: **(عينة واحدة)**

اختبار ذو ذيل أيسر

$H_0 : \pi = \pi_0 = 0.4$

$H_1 : \pi < 0.4$



القيمة الفاصلة: $-Z_{1-\alpha}$

$$* \ \alpha = 5\% \rightarrow -Z_{1-\alpha} = \mathbf{-1.64}$$

القيمة الحسابية: سبق حسابها: $\boldsymbol{Z_c} = \mathbf{1.29}$

$$\boldsymbol{Z_c = 1.29} > -1.64$$

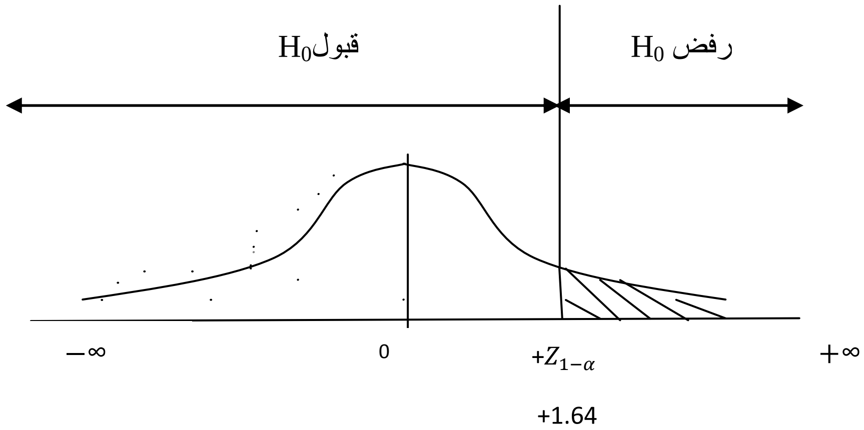
القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α= 5 % إذن نسبة نجاح مجموعة الأم تساوي 0.4

ت-اختبر الفرضيات لنسبة نجاح المجموعة الأم π: **(عينة واحدة)**

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \pi = \pi_0 = 0.4$

$H_1 : \pi > 0.4$



القيمة الفاصلة: $(+Z_{1-\alpha})$

$$* \ \alpha = 5\% \rightarrow +Z_{1-\alpha} = \mathbf{+1.64}$$

القيمة الحسابية: سبق حسابها: $\boldsymbol{Z_c} = \mathbf{1.29}$

$$\boldsymbol{Z_c = 1.29 < +1.64}$$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α= 5 % إذن نسبة نجاح مجموعة الأم تساوي 0.4

التمرين (26):

$$\pi_0 = 0.05 \ \ / \ \ \pi_1 = 0.1 \ \ / \ \ n=100 \ \ / \ \ \rho^* = 0.07$$

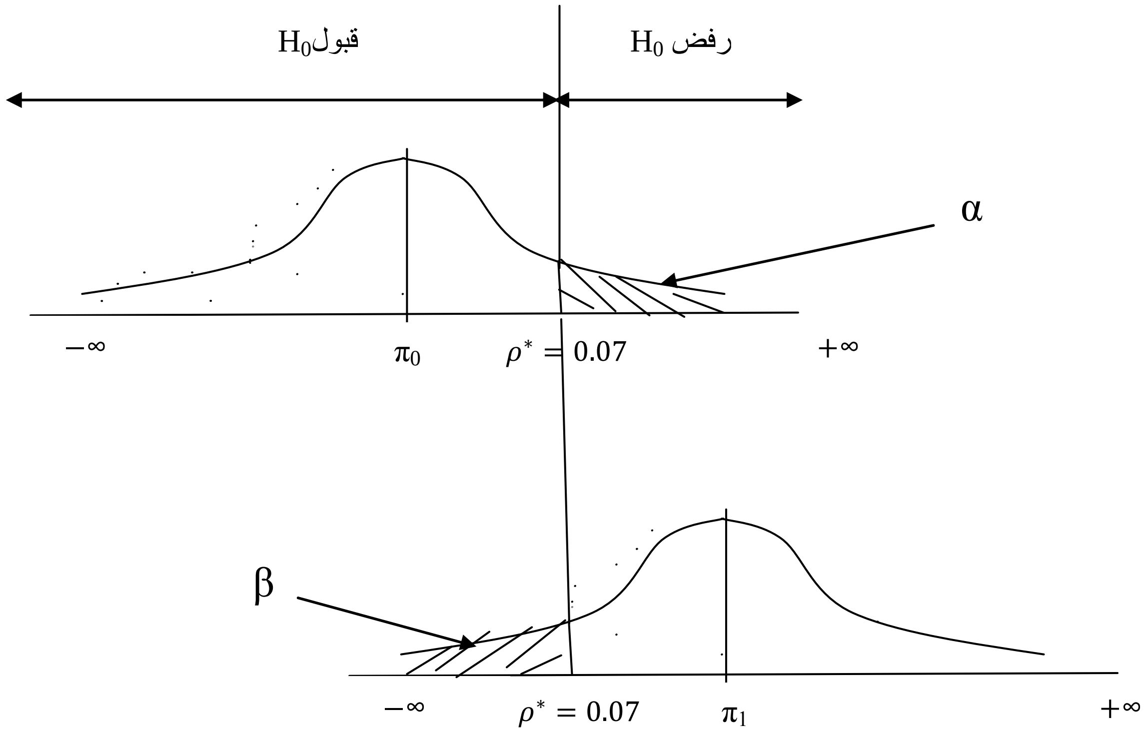
1- حساب الخطأ من النوع الأول α و الخطأ من النوع الثاني β:

ذو ذيل أيمن

$H_0 : \pi = \pi_0 = 0.05$

$H_1 : \pi = \pi_1 = 0.1 \ \ (\pi > \pi_0)$

ρ^*: القيمة الفاصلة التي تفصل بين الرفض والقبول.



-α =P(H_0رفض / H_0صحيحة) = $P(p > \rho^*/ H_0) = P\left(Z_i > \frac{\rho^*-\pi_0}{\delta_{\pi_0}}\right)$

$$\delta_{\pi_0} = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.05*0.95}{100}} = 0.021$$

$$\alpha = P\left(Z_i > \frac{0.07-0.05}{0.021}\right) = P(Z_i > 0.95) = 1 - \emptyset(0.95) = \mathbf{0.17}$$

-β =P(H_0قبول / H_0خاطئة) = $P(p < \rho^*/ H_1) = P\left(Z_i < \frac{\rho^*-\pi_1}{\delta_{\pi_1}}\right)$

$$\delta_{\pi_1} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n}} = \sqrt{\frac{0.1*0.9}{100}} = 0.03$$

$$\beta = P\left(Z_i < \frac{0.07-0.1}{0.03}\right) = P(Z_i < -1) = 1 - \emptyset(1) = \mathbf{0.1587}$$

2- حساب α و β إذا كانت القيمة الفاصلة تساوي 0.08: ($\rho^* = 0.07$)

-α =P(H_0رفض / H_0صحيحة) = $P(p > \rho^*/ H_0) = P\left(Z_i > \frac{0.08-0.05}{0.021}\right)$

$$= P(Z_i > 1.42) = 1 - \emptyset(1.42) = \mathbf{0.0770}$$

-β =P(H$_0$قبول / H$_0$خاطئة) = P($p < \rho^*$/ H$_1$) = $P\left(Z_i < \frac{0.08-0.1}{0.03}\right)$

$$= P(Z_i < -0.66) = 1 - \emptyset(0.66) = \mathbf{0.2546}$$

<u>الاستنتاج:</u> نستنتج أنه إذا كان الاختبار ذو ذيل أيمن فإنه كلما زادت القيمة الفاصلة (↑ *) فإن الخطأ من النوع الأول سيتقلص (α ↓) والخطأ من النوع الثاني سيرتفع (β ↑).

3- <u>حساب α و β إذا كانت حجم العينة تساوي 200:</u>

$$\pi_0 = 0.05 \quad / \quad \pi_1 = 0.1 \quad / \quad n=200 \quad / \quad \rho^* = 0.07$$

$$\delta_{\pi_0} = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.05*0.95}{200}} = 0.015$$

$$\delta_{\pi_1} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n}} = \sqrt{\frac{0.1*0.9}{200}} = 0.021$$

-α =P(H$_0$رفض / H$_0$صحيحة) = P($p > \rho^*$/ H$_0$) = $P\left(Z_i > \frac{0.07-0.05}{0.015}\right)$

$$= P(Z_i > 1.33) = 1 - \emptyset(1.33) = \mathbf{0.09}$$

-β =P(H$_0$قبول / H$_0$خاطئة) = P($p < \rho^*$/ H$_1$) = $P\left(Z_i < \frac{0.07-0.1}{0.021}\right)$

$$= P(Z_i < -1.5) = 1 - \emptyset(1.5) = \mathbf{0.06}$$

<u>الاستنتاج:</u> نستنتج أنه إذا كان الاختبار ذو ذيل أيمن فإنه كلما زادت حجم العينة (n ↑) فإن الخطأ من النوع الأول سيتقلص (α ↓) والخطأ من النوع الثاني سيقلص كذلك (β ↓).

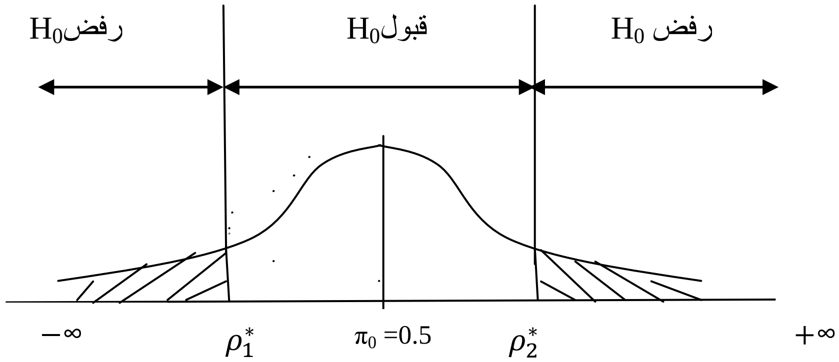
<u>التمرين (27):</u>

$$\pi_0 = 0.5 \quad / \quad \pi_1 = 0.55 \quad / \quad n=100 \quad / \quad \alpha = 10\%$$

1- <u>حساب القيم الفاصلة:</u> ρ_1^*=? / ρ_2^*=?

$H_0 : \pi = \pi_0 = 0.5$

$H_1 : \pi \# 0.5$



$$\rho_1^* = \pi_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\boldsymbol{\pi_0}}$$

$$\rho_2^* = \pi_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\boldsymbol{\pi_0}}$$

$$* \, \alpha = 10\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.64}$$

$$\delta_{\boldsymbol{\pi_0}} = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5*0.5}{100}} = 0.021$$

$$\rho_1^* = 0.5 - (1.64 * 0.021) = 0.5 - 0.034 = \mathbf{0.466}$$

$$\rho_2^* = 0.5 + (1.64 * 0.021) = 0.5 + 0.034 = \mathbf{0.534}$$

<u>القرار:</u>

قبول H_0 إذا كان : $\rho \in [\rho_1^* \,; \rho_2^*]$

رفض H_0 إذا كان : $\rho \notin [\rho_1^* \,; \rho_2^*]$

2- <u>حساب احتمال قبول H_0 لما تكون $\pi_1 = 0.55$:</u> (أي حساب β)

$$- \beta = P(H_0 \text{ قبول} / \pi_1 = 0.55) = P(\rho_1^* \le p \le \rho_2^*) = P\left(\frac{\rho_1^* - \pi_1}{\delta_{\pi_1}} \le Z_i \le \frac{\rho_2^* - \pi_1}{\delta_{\pi_1}}\right).$$

$$\delta_{\boldsymbol{\pi_1}} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n}} = \sqrt{\frac{0.55*0.45}{100}} = 0.049$$

$$\beta = P\left(\frac{0.466 - 0.55}{0.049} \le Z_i \le \frac{0.534 - 0.55}{0.049}\right)$$
$$= P(-1.71 \le Z_i \le -0.32) = \emptyset(1.71) - \emptyset(0.32)$$
$$= 0.9564 - 0.6255 = \mathbf{0.3309}$$

سلسلة أعمال موجهة رقم (07):

(اختبار الفرضيات لتوقع رياضي المجموعة الأم –عينة واحدة-)

التمرين (28):

أخذنا عينة مكونة من 16 شاب فوجدنا أن متوسط الطول لديهم 158سم وكان الانحراف المعياري للمجتمع معلوم ويساوي 5سم.

- اختبر الفرض القائل أن متوسط المجتمع الذي أخذت منه هذه العينة هو 160سم وذلك عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (29):

تعتقد شركة أن عمالها يتحصلون على دخل شهري يساوي على الأقل 10.000 دج.

أخذت عينة عشوائية ل 145 عامل من ضمن 120.000 عامل من هذه الشركة، فوجد أن المتوسط الحسابي لدخل هؤلاء ال 145 يساوي 9.953 دج وانحراف معياري يساوي 156 دج.

- اختبر إدعاء الشركة عند مستوى ثقة 95 % ؟

التمرين (30):

أدت عينة عشوائية حجمها 16 إلى متوسط حسابي يساوي 52 وانحراف معياري يساوي 20.
- هل هذه المعطيات تؤدي إلى رفض الافتراض أن التوقع الرياضي للمجموعة الأم يساوي أو أقل من 50 إذا كان الافتراض المقابل هو أن التوقع الرياضي للمجموعة الأم أكبر من 50 ؟
$\alpha = 5\%$.

التمرين (31):

أدت عينة عشوائية حجمها 100 إلى متوسط حسابي يساوي 52 و انحراف معياري يساوي 20.

- هل هذه المعطيات تؤدي إلى رفض الافتراض أن التوقع الرياضي للمجموعة الأم يساوي أو يفوق من 50 إذا كان الافتراض المقابل هو أن التوقع الرياضي للمجموعة الأم أقل من 50 ؟

استعمل $\alpha = 5\%$.

التمرين (32):

ليكن الافتراض التالي علما أن $\alpha = 5\%$:

$$H_0 : \mu = 7200$$

$$H_1 : \mu = 7500$$

- ما هو حجم العينة الذي يجب أن يستعمل حتى يكون الخطأ من النوع الثاني يساوي 5% ؟ علما أن الانحراف المعياري للمجموعة الأم يساوي 1000 .

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (07):

التمرين (28):

n=100 / $\bar{x} = 158$ / μ_0 =160 / $\delta = 5$ / α= 5%

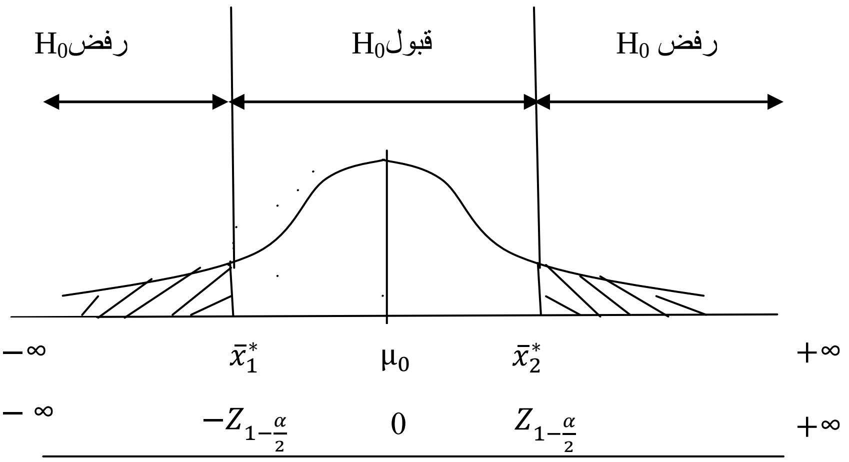
- اختبار الفرضيات للتوقع الرياضي للمجموعة الأم μ: (عينة واحدة)

δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu = \mu_0 = 160$

$H_1 : \mu \# \mu_0$



الطريقة 01:

حساب القيم الفاصلة:

$$\bar{x}_1^* = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}$$

$$\bar{x}_2^* = \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}$$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.96}$$

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = 1.25$$

$$\bar{x}_1^* = 160 - (1.96 * 1.25) = \mathbf{157.55}$$

$\bar{x}_2^* = 160 + (1.96 * 1.25) = \mathbf{162.45}$

بما أن متوسط العينة $\bar{x}$ ينتمي إلى مجال القيم الفاصلة أي:

$$\bar{x} = 158 \in [157.55\,;162.45]$$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α= 5 % إذن متوسط المجتمع الذي أخذت منه العينة هو 160.

الطريقة 02:

القيم الفاصلة: ($\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$)

$$* \alpha = 5\% \rightarrow \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mp \mathbf{1.96}$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_{\bar{x}}} = \frac{158 - 160}{1.25} = \mathbf{-1.6}$$

بما أن: $Z_c = -1.6 \in [-1.96\,;+1.96]$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α= 5 % إذن متوسط المجتمع الذي أخذت منه العينة هو 160.

التمرين (29):

N=120000 / n=145 / $\bar{x} = 9953$ / μ_0 =10000 / $s = 156$ / α= 5%

- اختبار إدعاء الشركة:

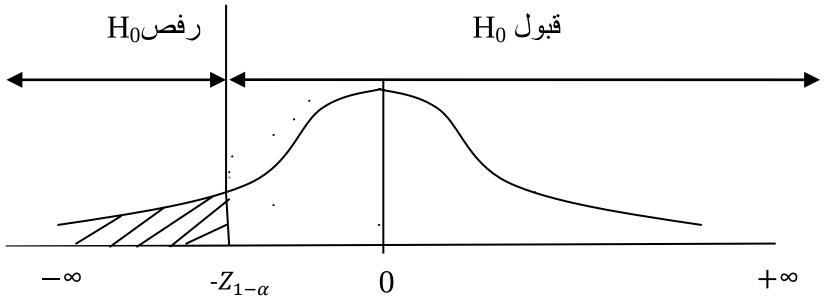
اختبار الفرضيات للتوقع الرياضي للمجموعة الأم μ: (عينة واحدة)

δ غير معلومة و حجم العينة كبيرة ($n > 30$) إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيل أيسر

$H_0 : \mu \geq 10000$

$H_1 : \mu < \mu_0$



القيمة الفاصلة: $(-Z_{1-\alpha})$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow -Z_{1-\alpha} = -1.64$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$$

- n=145 $< 0.05 * N = 600$

إذن لا نستعمل معامل التصحيح

- $\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{156}{\sqrt{145}} = 12.97$

$$Z_c = \frac{9953-10000}{12.97} = \mathbf{-3.62}$$

بما أن: $Z_c = -3.62 < -1.64$

<u>فإن القرار:</u> رفض H_0 وقبول H_1 عند α= 5 % إذن إدعاء الشركة خاطئ.

<u>التمرين (30):</u>

n=16 / $\bar{x} = 52$ / μ_0 =50 / $s = 20$ / α= 5%

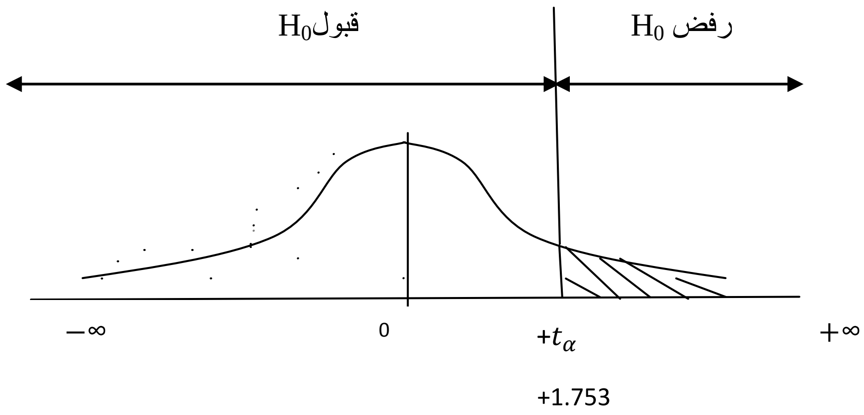
- <u>اختبار الفرضيات للتوقع الرياضي للمجموعة الأم µ:</u> (عينة واحدة)

δ غير معلومة و حجم العينة صغيرة ($n \leq 30$) إذن نستعمل توزيع ستودنت Student (T).

<u>اختبار ذو ذيل أيمن</u>

$H_0 : \mu \leq 50$

$H_1 : \mu > \mu_0$



القيمة الفاصلة: $(+t_\alpha)$

مقروأ من جدول توزيع ستودنت (T) ←

$$\begin{cases} V = n-1 = 15 \\ t_\alpha = t_{0.05} = 1.753 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

$$T_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$$

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{16}} = 5$$

$$T_c = \frac{52-50}{5} = \mathbf{0.4}$$

بما أن: $T_c = 0.4 < 1.753$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α= 5 % إذن نقبل الافتراض. أن التوقع الرياضي للمجموعة الأم أقل أو يساوي 50.

التمرين (31):

$$n=100 \;/\; \bar{x} = 49 \;/\; \mu_0 = 50 \;/\; s = 20 \;/\; \alpha = 5\%$$

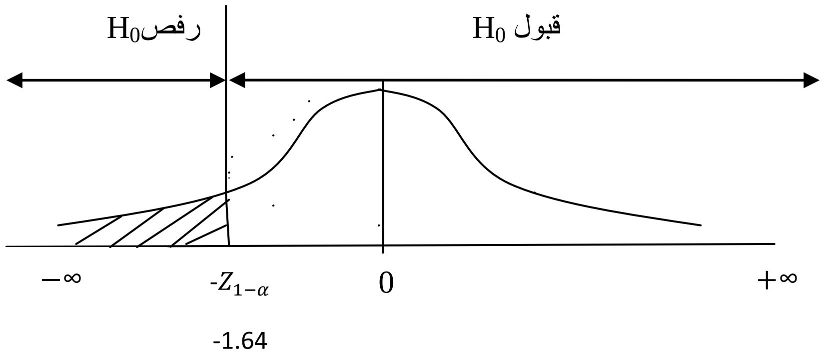
- اختبار الفرضيات للتوقع الرياضي للمجموعة الأم µ: (عينة واحدة)

δ غير معلومة و حجم العينة كبيرة ($n > 30$) إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيل أيسر

$H_0 : \mu \geq 50$

$H_1 : \mu < 50$



القيمة الفاصلة: $(-Z_{1-\alpha})$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow -Z_{1-\alpha} = -1.64$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$$

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$$

$$Z_c = \frac{49-50}{2} = \mathbf{-0.5}$$

بما أن: $Z_c = -0.5 > -1.64$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α= 5 % إذن نقبل الافتراض القائل أن التوقع الرياضي للمجموعة الأم يساوي أو يفوق 50.

التمرين (32):

$$\alpha = 5\% \ / \ \beta = 5\% \ / \ \delta = 1000 \ / \ \mu_0 = 7200 \ / \ \mu_1 = 7500$$

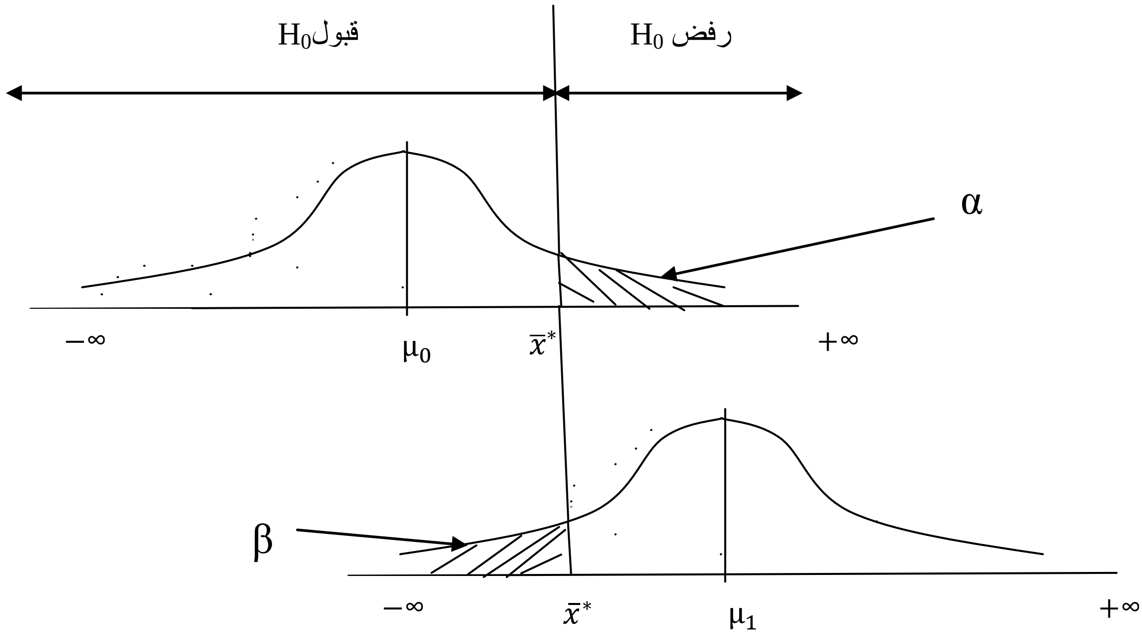
- تحديد حجم العينة: n=?

δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \mu = \mu_0 = 7200$

$H_1 : \mu = \mu_1 = 7500 \quad (\mu > \mu_0)$



$$\bar{x}^* = \mu_0 + Z_{1-\alpha}.\delta_{\bar{x}} = \mu_1 - Z_{1-\beta}.\delta_{\bar{x}}$$

$$*\ \alpha = 5\%\ et\ \beta = 5\% \ \rightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{1-\beta} = \mathbf{1.64}$$

$$\rightarrow \mu_0 + Z_{1-\alpha}.\delta_{\bar{x}} = \mu_1 - Z_{1-\beta}.\delta_{\bar{x}}$$

$$\rightarrow Z_{1-\alpha}.\delta_{\bar{x}} + Z_{1-\beta}.\delta_{\bar{x}} = \mu_1 - \mu_0$$

$$\rightarrow \delta_{\bar{x}}\ .(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) = \mu_1 - \mu_0$$

$$\rightarrow \delta_{\bar{x}} = \frac{\mu_1 - \mu_0}{Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}} = \frac{7500-7200}{1.64+1.64} = 91.46$$

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \ \rightarrow \ \boldsymbol{n} = \left(\frac{\delta}{\delta_{\bar{x}}}\right)^2 = \left(\frac{1000}{91.46}\right)^2 \approx \mathbf{120}$$

سلسلة أعمال موجهة رقم (08):

(اختبار الفرضيات لنسبة نجاح و لتوقع رياضي المجموعة الأم –عينتين-)

التمرين (33):

ترغب إحدى شركات تصليح السيارات في معرفة فروقات النسب في تصليح موديلين من السيارات. سحبت عينة عشوائية حجمها 400 شخصا من مالكي سيارات الموديل (1) ووجدت أن 53 منهم قدموا شكوى للتصليح، وسحبت عينة عشوائية ثانية حجمها 500 شخصا من مالكي سيارات الموديل (2) ووجد أن 78منهم قدموا شكوى للتصليح.

- اختبر إن كانت لا توجد فروق جوهرية بين نسبتي العطل في الموديلين عند $\alpha = 10\ \%$ ؟

التمرين (34):

في دورة جوان لامتحان مادة الإحصاء سجلنا النتائج التالية بعد تصحيح 250 ورقة:

$$S = 3.3 \quad / \quad \bar{x} = 10.3$$

و في نفس الامتحان في دورة سبتمبر سجلنا النتائج التالية بعد تصحيح 80 ورقة:

$$S = 4.1 \quad / \quad \bar{x} = 9.2$$

- هل الأوراق المصححة تتعلق بنفس المجتمع الطلبة عالما أن المجازفة 5 % ؟

التمرين (35):

يريد مسير إدخال نظام جديد لتحفيز العمال، وحتى يختبر فعالية هذا النظام أخذ عينة من العمال من النظام القديم والجديد وتحصل على النتائج التالية :

	النظام القديم	النظام الجديد
حجم العينة	15	10
متوسط العينة	146.5 وحدة/ساعة	152.3 وحدة/ساعة
تباين العينة	49	17

- اختبر فعالية النظام عند مستوى معنوية 5 % ؟

التمرين (36):

نريد أن نختبر إن كان التوقع الرياضي لنقاط مقياس الإحصاء لسنة 2008 مساويا لتوقع نفس الشعبة لسنة 2007. فتحصلنا على عينتين من هاتين المجموعتين علما أن $\alpha = 5\ \%$:

العينة A(2016): 9-7-16-8-13-12

العينة B(2015): 7-6-11-14-16-10-11

التمرين (5): نريد أن نقارن التوقع الرياضي لمستوى طلبة معسكر مع طلبة وهران، لهذا الغرض أخذت عينة من طلبة كلا الجامعتين فتحصلنا على الاحصائيات التالية: $\alpha = 5\ \%$

	طلبة معسكر	طلبة وهران
n	100	200
$\bar{x}$	12	16
S	8	18
N	250	20000

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (08):

التمرين (33):

$n_1=400$ / $p_1 = \frac{53}{400} = 0.1325$ / $n_2=500$ /$p_2 = \frac{78}{500} = 0.165$ / $\alpha = 10\%$

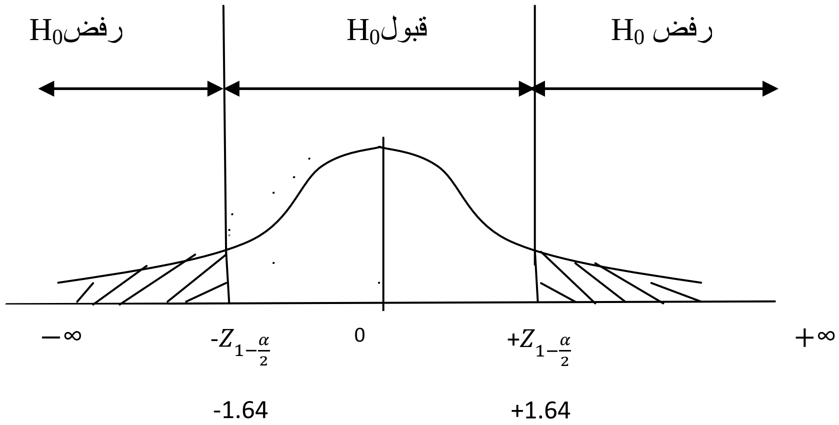
- اختبر الفرضيات لنسبة نجاح المجموعة الأم π: (عينتين)

نستعمل التوزيع الطبيعي.

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \pi_1 = \pi_2$

$H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$



القيم الفاصلة: $\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$* \ \alpha = 5\% \rightarrow \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \pm \mathbf{1.64}$

القيمة الحسابية: Z_c

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\widehat{\delta_\rho}}}$$

$\widehat{\boldsymbol{\delta_\rho}}$: الانحراف معياري المشترك لنسبتي نجاح.

$$\widehat{\boldsymbol{\delta_\rho}} = \sqrt{\boldsymbol{\rho_c . (1 - \rho_c) . (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$\boldsymbol{\rho_c} = \frac{n_1 .\ p_1 + n_2 .\ p_2}{n_1 + n_2} = \frac{(400*01325)+(500*0.165)}{400+500} = \mathbf{0.1455}$$

$$\widehat{\delta_\rho} = \sqrt{(0.1455 * 0.8545).\left(\frac{1}{400} + \frac{1}{500}\right)} = \mathbf{0.023}$$

$$\boldsymbol{Z_c} = \frac{0.1325 - 0.165}{0.023} = \mathbf{-1.41}$$

بما أن: $Z_c = -1.41 \in [-1.64\ ; +1.64]$

<u>القرار:</u> قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 10\ \%$ إذن لا توجد فروق جوهرية بين نسبتي العطل في الموديلين.

<u>التمرين (34):</u>

n_1=250 / $\bar{x}_1 = 10.3$ / $s_1 = 3.3$ / α= 5%

n_2=80 / $\bar{x}_2 = 9.2$ / $s_2 = 4.1$

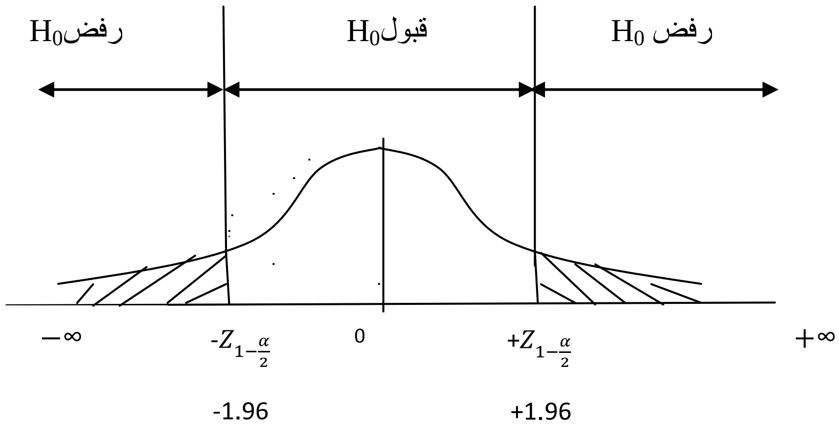
<u>- اختبار الفرضيات للتوقع الرياضي للمجموعة الأم µ:</u> (عينتين)

δ_1 و δ_2 مجهولتان و ($n_1 + n_2 > 30$) إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

<u>اختبار ذو ذيلين</u>

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



القيم الفاصلة: $\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$* \alpha = 5\% \rightarrow \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \pm\mathbf{1.96}$

القيمة الحسابية: Z_c

$$\boldsymbol{Z_c} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\widehat{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{D}}}}$$

$\widehat{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{D}}}$**:** الانحراف معياري المشترك لمتوسطين.

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{D}}} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(3.3)^2}{250} + \frac{(4.1)^2}{80}} = \mathbf{0.5}$$

$$\boldsymbol{Z_c} = \frac{10.3-9.2}{0.5} = \mathbf{2.2}$$

بما أن**:** $Z_c = 2.2 \notin [-1.96\ ;\ +1.96]$

القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن الأوراق المصححة لا تتعلق بنفس المجتمع.

التمرين (35):

n_1=15 / $\bar{x}_1 = 146.5$ / $s_1 = 49$ / α= 5%

n_2=10 / $\bar{x}_2 = 152.3$ / $s_2 = 17$

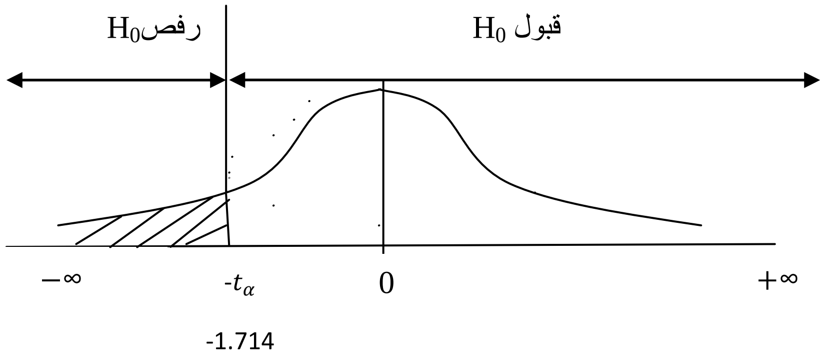
- اختبار الفرضيات للتوقع الرياضي للمجموعة الأم µ: (عينتين)

δ_1 و δ_2 مجهولتان و $(n_1 + n_2 \leq 30)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

اختبار ذو ذيل أيسر

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ نظام غيرفعّال

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ نظام فعّال



القيمة الفاصلة: ($-t_{\alpha}$)

مقروأ من جدول توزيع ستودنت (T) ←

$$\begin{cases} V = n_1 + n_2 - 2 = 23 \\ -t_{\alpha} = -t_{0.05} = -1.714 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

$$\boldsymbol{T_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\widehat{\delta_D}}}$$

$$\boldsymbol{\widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{s_1^2.(n_1 - 1) + s_2^2.(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}.\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\boldsymbol{\widehat{\delta_D} = 2.46}$$

$$T_c = \frac{146.5 - 152.3}{2.46} = \mathbf{-2.35}$$

بما أن: $T_c = -2.35 < -1.714$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن النظام فعّال.

التمرين (36):

$x_{iA} = \{9\text{-}7\text{-}16\text{-}8\text{-}13\text{-}12\}$ / $n_A = 6$ / $\alpha = 5\%$

$x_{iB} = \{7\text{-}6\text{-}11\text{-}14\text{-}16\text{-}10\text{-}11\}$ / $n_B = 7$

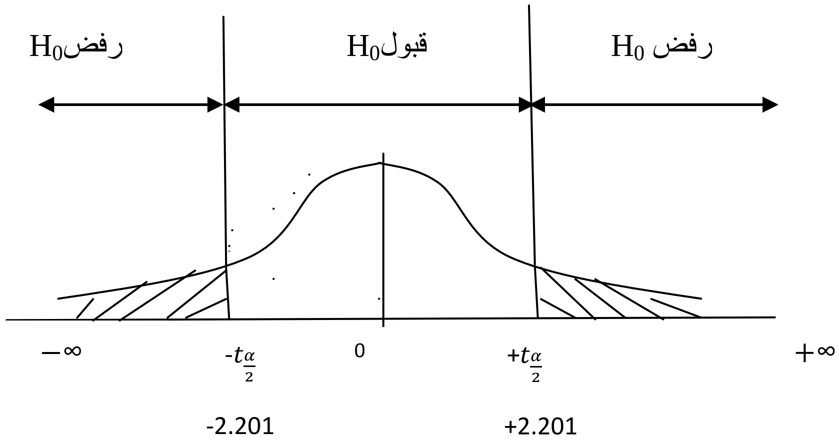
- اختبار الفرضيات للتوقع الرياضي للمجموعة الأم µ: (عينتين)

δ_1 و δ_2 مجهولتان و ($n_1 + n_2 > 30$) إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$



القيم الفاصلة: $\pm t_{\frac{\alpha}{2}}$

مقروأ من جدول توزيع ستودنت $(T) \leftarrow$

$$\begin{cases} V = n_A + n_B - 2 = 11 \\ \pm t_{\frac{\alpha}{2}} = \pm t_{0.025} = \pm 2.201 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

$$\boldsymbol{T_c = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\widehat{\delta_D}}}$$

$$\boldsymbol{\widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{s_A^2.(n_A - 1) + s_B^2.(n_B - 1)}{n_A + n_B - 2}.\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}}$$

	9	7	16	8	13	12	**65**
$x_{iA}{}^2$	81	49	256	64	169	144	**763**

	7	6	11	14	16	10	11	**75**
$x_{iB}{}^2$	49	36	121	196	256	100	121	**879**

$$\bar{x}_A = \frac{\sum x_{iA}}{n_A} = \frac{65}{6} = \mathbf{10.83}$$

$$s_A^2 = \frac{\sum x_{iA}{}^2 - n_A.\bar{x}_A{}^2}{n_A - 1} = \frac{763-[6*(10.83)^2]}{5} = \mathbf{11.75}$$

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_{iB}}{n_B} = \frac{75}{7} = \mathbf{10.71}$$

$$s_B^2 = \frac{\sum x_{iB}{}^2 - n_B.\bar{x}_B{}^2}{n_B - 1} = \frac{879-[7*(10.71)^2]}{6} = \mathbf{12.56}$$

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{s_A^2.(n_A-1)+s_B^2.(n_B-1)}{n_A+n_B-2}.\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)} = \mathbf{1.91}$$

$$T_c = \frac{10.83-10.71}{1.91} = \mathbf{0.06}$$

بما أن: $T_c = 0.06 \in [-2.201\,;+2.201]$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن التوقع الرياضي لنقاط مقياس الاحصاء لسنة 2016 يساوي توقع نفس الشعبة لسنة 2015.

التمرين (37):

n_1=100 / $\bar{x}_1 = 12$ / $s_1 = 8$ / N_1=250 / α= 5%

n_2=200 / $\bar{x}_2 = 16$ / $s_2 = 16$ / N_2=20000

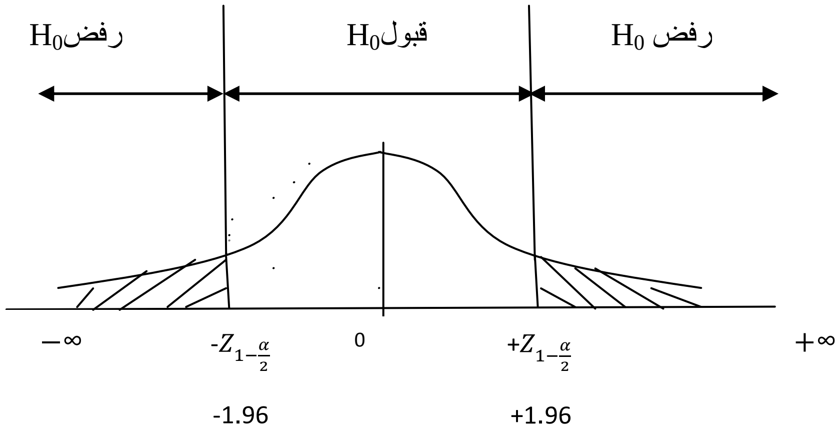
- اختبار الفرضيات للتوقع الرياضي للمجموعة الأم µ: (عينتين)

δ_1 و δ_2 مجهولتان و ($n_1 + n_2 > 30$) إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



القيم الفاصلة: $\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$* \ \alpha = 5\% \rightarrow \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \pm \mathbf{1.96}$$

القيمة الحسابية: Z_c

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\widehat{\delta_D}}}$$

- $n_1=100 > 0.05 * N_1 = 12.5$
- $n_2=200 < 0.05 * N_2 = 1000$

إذن نستعمل فقط معامل التصحيح العينة الأولى.

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} * \sqrt{\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}} = \sqrt{\frac{64}{100} + \frac{256}{200}} * \sqrt{\frac{250-100}{250-1}} = \mathbf{0.91}$$

$$\boldsymbol{Z_c} = \frac{12-16}{0.91} = \mathbf{-4.39}$$

بما أن: $Z_c = -4.39 \notin [-1.96 \,; +1.96]$

<u>القرار:</u> رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن مستوى طلبة معسكر يختلف عن مستوى طلبة وهران.

سلسلة أعمال موجهة رقم (09):

(مجال الثقة و اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم –عينة واحدة-)

التمرين (38):

إليك العينة العشوائية التالية : 28-24-17-20-21-25

1- ما هو مجال الثقة لتباين المجموعة الأم عند $\alpha = 5\ \%$ ؟

2- اختبر ما إذا كان تباين المجموعة الأم يساوي 2.4 عند نفس مستوى المعنوية ؟

التمرين (39):

يدعي أحد الأساتذة أن طريقة تعليمية لمقياس معين ذات فعالية كبيرة حيث أن المدة اللازمة لطلبته لحل مشكلة مركبة لا تتجاوز 30 ثانية.

أخذت عينة ل 21 طالب فوجد أن تباين هذه العينة يساوي 33 ثانية.

- استعمل $\alpha = 5\ \%$ لاختبار زعم الأستاذ ؟

التمرين (40): اختبر الفرضية التالية عند $\alpha = 5\ \%$:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma^2_0 = 0.005$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma^2_0$$

علما أن العينة حجمها 14 و تباين العينة 0.0045 .

التمرين (41):

يتبع x توزيع كي مربع (χ^2) و عدد درجات حريته يساوي 15 ، أحسب :

$P(x \geq 22.30) = ?$ / $P(x \leq 19.31) = ?$

حل سلسلة أعمال موجهة رقم (09):

التمرين (38):

x_i= {25-21-20-17-24-28} / n=8 / α= 5%

1- مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2:

نستعمل توزيع كي مربع (كي دو) (χ^2) .

$$P\left(\frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = C = 95\%$$

$$\sigma^2 \in [\frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}]$$

	25	21	20	17	24	28	**135**
x_i^2	625	441	400	289	576	784	**3115**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{135}{6} = \mathbf{22.5}$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2}{n-1} = \frac{3115-[6*(22.5)^2]}{5} = \mathbf{15.5}$$

$$\begin{cases} V = n-1 = 5 \\ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.025} = 12.83 \\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.975} = 0.83 \end{cases}$$

← (χ^2) مقروأ من جدول توزيع كي مربع

$$\sigma^2 \in [\frac{15.5*5}{12.83} ; \frac{15.5*5}{0.83}]$$

$$\boxed{\sigma^2 \in [\mathbf{6.03} ; \mathbf{93.37}] \; \boldsymbol{avec} \; C = \mathbf{95\%}}$$

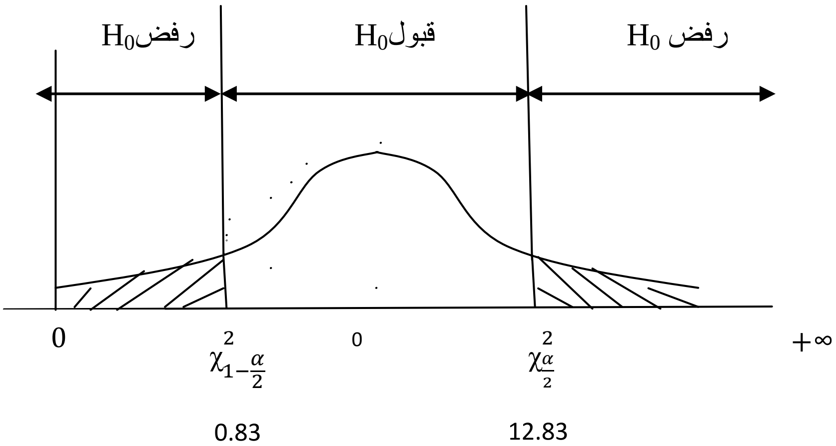
2- اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم σ^2: (عينة واحدة)

نستعمل توزيع كي مربع (χ^2).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \sigma^2 = \sigma^2_0$

$H_1 : \sigma^2 \neq 2.4$



القيم الفاصلة سبق حسابها في السؤال السابق.($\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$)

القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \frac{s^2.(n-1)}{\sigma^2_0}$$

$$\chi^2_c = \frac{15.5*5}{2.4} = \mathbf{32.29}$$

بما أن: $\chi^2_c = 32.29 \notin [0.83 ; 12.83]$

القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن تباين المجموعة الأم يختلف عن 2.4

التمرين (39):

$n=8$ / $s^2 = 33$ / $\sigma^2_0 = 30$ / $\alpha = 5\%$

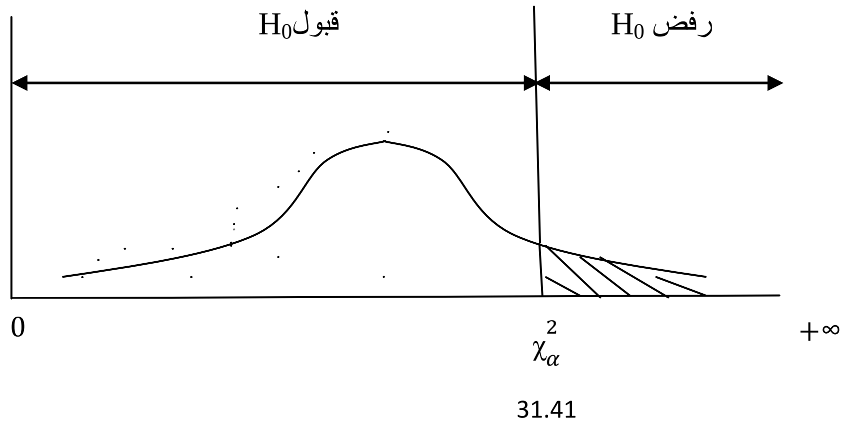
- اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم σ^2: (عينة واحدة)

نستعمل توزيع كي مربع (χ^2).

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \sigma^2 \leq 30$

$H_1 : \sigma^2 > 30$



القيمة الفاصلة: (χ^2_α)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V = n-1 = 20 \\ \chi^2_\alpha = \chi^2_{0.05} = 31.41 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \frac{s^2.(n-1)}{\sigma^2_0}$$

$$\chi^2_c = \frac{33*20}{30} = \mathbf{22}$$

بما أن: $\chi^2_c = 22 < 31.41$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن نقبل زعم الأستاذ.

التمرين (40):

$n=14$ / $s^2 = 0.0045$ / $\sigma^2_0 = 0.005$ / $\alpha = 5\%$

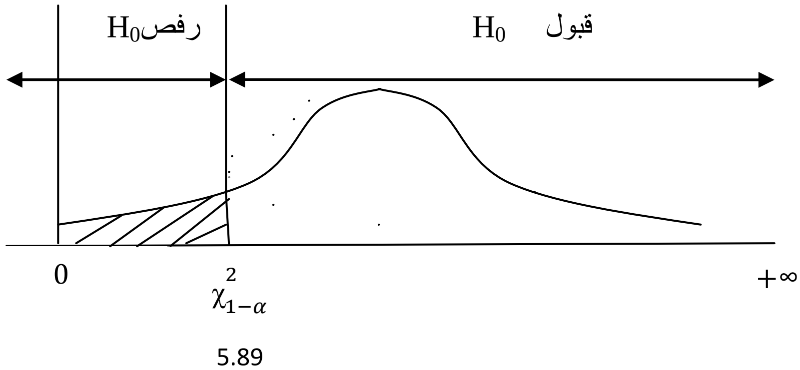
- اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم σ^2: (عينة واحدة)

نستعمل توزيع كي مربع (χ^2).

<u>اختبار ذو ذيل أيسر</u>

$H_0 : \sigma^2 = \sigma^2_0 = 0.005$

$H_1 : \sigma^2 < 0.005$



القيمة الفاصلة: (χ^2_{α})

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) $\leftarrow$

$$\begin{cases} V = n-1 = 13 \\ \chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0.95} = 5.89 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\boldsymbol{\chi^2_c = \frac{s^2.(n-1)}{\sigma^2_0}}$$

$$\chi^2_c = \frac{0.0045*13}{0.005} = \mathbf{11.7}$$

بما أن: $\chi^2_c = 11.7 > 5.89$

<u>القرار:</u> قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن تباين المجتمع يساوي 0.005

<u>التمرين (41):</u>

x_i متغير عشوائي يتبع توزيع كي مربع (χ^2) بعدد درجات الحرية 15.

$$x_i \backsim \boldsymbol{\chi^2} \quad \text{avec} \quad V=15$$

$- P(x \geq 22.30) = \alpha = 0.1 = 10\%$

- $P(x \leq 19.31) = 1 - P(x > 19.31) = 1 - 0.27 = \mathbf{0.73}$

نستخرج القيم من جدول توزيع كي مربع، فإن لم نجد القيمة نقوم بالحصر ما بين قيمتين ونستخرج النتيجة بعملية حسابية.

سلسلة أعمال موجهة رقم(10):

(اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم –عينتين-)

التمرين (42):

اختبر الفرضيات التالية عند α= 5 % :

-1 $H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ $\quad s_1^2 = 200 \ / \ s_2^2 = 250 \ / n_1 = 10 \ / n_2 = 8$

$H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$

-2 $H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ $\quad s_1^2 = 220 \ / \ s_2^2 = 180 \ / n_1 = 7 \ / n_2 = 6$

$H_1 : \sigma^2_1 < \sigma^2_2$

-3 $H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ $\quad s_1^2 = 240 \ / \ s_2^2 = 280 \ / n_1 = 9 \ / n_2 = 5$

$H_1 : \sigma^2_1 \# \sigma^2_2$

التمرين (42):

نريد أن نختبر إن كان التشتت (التباين) لنقاط مقياس الإحصاء لسنة 2008 مساويا لتشتت نفس الشعبة لسنة 2007. فتحصلنا على عينتين من هاتين المجموعتين علما أن α= 10 % :

العينة A(2016): 9-7-16-8-13-12

العينة B(2015): 7-6-11-14-16-10-11

التمرين (43): لك العينتان (A) و (B) :

					1	1	2	0	1	2	0	1	0	1	**A**
2	2	1	2	2	2	1	0	1	1	0	1	0	1	2	***B***

- اختبر الفرض القائل أن تباين المجموعة A يساوي تباين المجموعة B عند α= 10 % ؟

التمرين (45): في التمرين رقم (36) السابق من سلسلة أعمال موجهة رقم (08)، نريد أن نقارن التباين بين الجامعتين ؟

حل سلسلة أعمال موجهة رقم(10):

التمرين (42):

- <u>اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم σ^2:</u> (عينين)

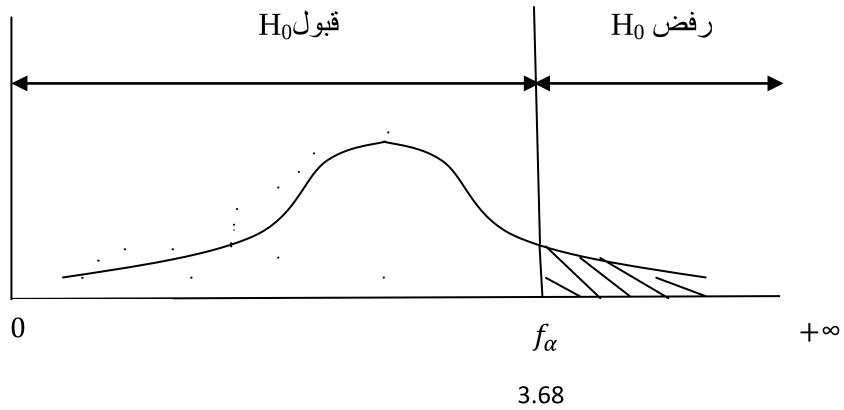
نستعمل توزيع فيشر Fisher (F).

-1 $s_1^2 = 200$ / $s_2^2 = 250$ / $n_1 = 10$ / $n_2 = 8$ / $\alpha = 5\%$

<u>اختبار ذو ذيل أيمن</u>

$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$

$H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$



القيمة الفاصلة: (f_α)

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = 9 \\ V_2 = n_2 - 1 = 7 \\ f_\alpha = F_{(\alpha;V_1/V_2)} = F_{(5\%;9/7)} = \mathbf{3.68} \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

$$\boldsymbol{F_c = \frac{s_1^2}{s_2^2}}$$

$$F_c = \frac{220}{250} = \mathbf{0.8}$$

بما أن: $F_c = 0.8 < f_\alpha$

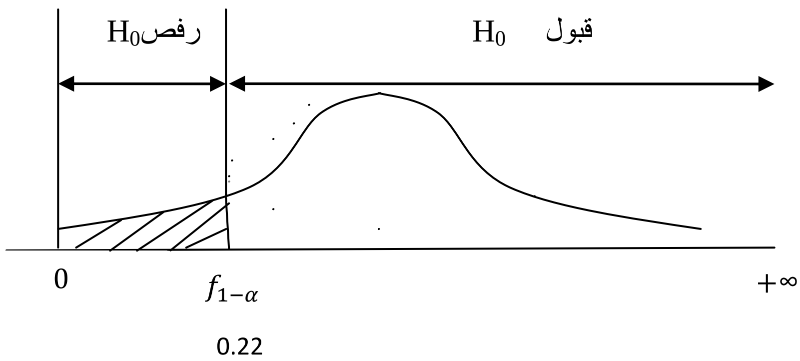
القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α = 5 % .

-2 $\alpha = 5\%$ / n_2 =8 / n_1 = 7 / $s_2^2 = 180$ / $s_1^2 = 220$

اختبار ذو ذيل أيسر

$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$

$H_1 : \sigma^2_1 < \sigma^2_2$



القيمة الفاصلة: $(f_{1-\alpha})$

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = 6 \\ V_2 = n_2 - 1 = 5 \\ f_{1-\alpha} = F_{(\alpha;V_2/V_1)} = \dfrac{1}{F_{(5\%;5/6)}} = \dfrac{1}{4.39} = \mathbf{0.22} \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

$$F_c = \frac{220}{180} = \mathbf{1.22}$$

بما أن: $F_c = 1.22 < f_{1-\alpha}$

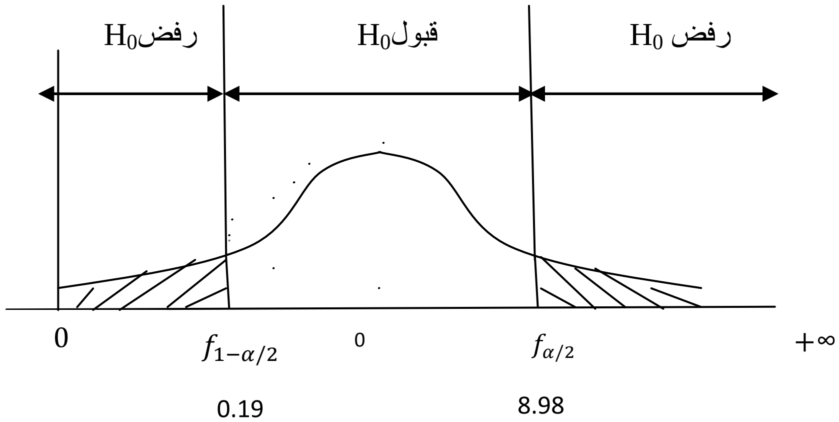
القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α = 5 % .

-3 $\alpha = 5\%$ / n_2 =5 / n_1 = 9 / $s_2^2 = 280$ / $s_1^2 = 220$

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$

$H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$



القيم الفاصلة: .($f_{1-\alpha/2}$ و $f_{\alpha/2}$)

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = 8 \\ V_2 = n_2 - 1 = 4 \\ f_{\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_1/V_2)} = F_{(2.5\%;8/4)} = \mathbf{8.98} \\ f_{1-\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_2/V_1)} = \dfrac{1}{F_{(2.5\%;4/8)}} = \dfrac{1}{5.05} = \mathbf{0.19} \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

$$F_c = \frac{220}{280} = \mathbf{0.85}$$

بما أن: $F_c = 0.85 \in \left[f_{1-\alpha/2} ; f_{\alpha/2} \right]$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ %

التمرين (43):

$x_{iA} = \{9\text{-}7\text{-}16\text{-}8\text{-}13\text{-}12\}$ / $n_A = 6$ / $\alpha = 5\%$

$x_{iB} = \{7\text{-}6\text{-}11\text{-}14\text{-}16\text{-}10\text{-}11\}$ / $n_B = 7$

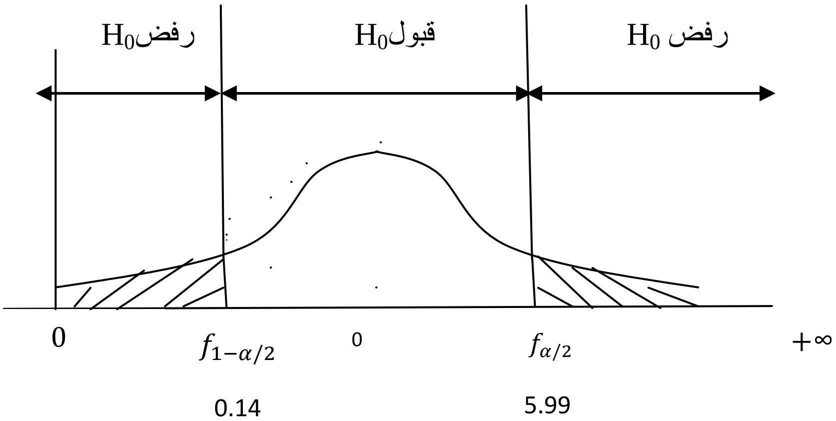
- اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم σ^2: (عينين)

نستعمل توزيع فيشر Fisher (F).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$

$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_A^2$



القيم الفاصلة: .($f_{1-\alpha/2}$ و $f_{\alpha/2}$)

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} V_A = n_A - 1 = 5 \\ V_B = n_B - 1 = 6 \\ f_{\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_A/V_B)} = F_{(2.5\%;5/6)} = \mathbf{5.99} \\ f_{1-\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_B/V_A)} = \dfrac{1}{F_{(2.5\%;6/5)}} = \dfrac{1}{6.98} = \mathbf{0.14} \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

$$\boldsymbol{F_c = \frac{s_A^2}{s_B^2}}$$

سبق حساب $\bar{x}_A$ و $\bar{x}_B$ و s_A^2 و s_B^2 في التمرين رقم (36) السابق بحيث:

$\bar{x}_A = 10.83$ / $s_A^2 = 11.75$ / $\bar{x}_B = 10.71$ / $s_B^2 = 12.56$

$F_c = \dfrac{11.75}{12.56} = \mathbf{0.93}$

بما أن: $F_c = 0.93 \in [\ 0.14\ ; 5.99]$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن تباين مقياس الاحصاء لسنة 2015 يساوي تباين نفس الشعبة لسنة 2016.

التمرين (44):

$$x_{iA} = \{1\text{-}0\text{-}1\text{-}0\text{-}2\text{-}1\text{-}0\text{-}2\text{-}1\text{-}1\} \quad / \quad n_A = 10 \quad / \quad \alpha = 10\%$$

$$x_{iB} = \{2\text{-}1\text{-}0\text{-}1\text{-}0\text{-}1\text{-}1\text{-}0\text{-}1\text{-}2\text{-}2\text{-}2\text{-}1\text{-}2\text{-}2\} \quad / \quad n_B = 15$$

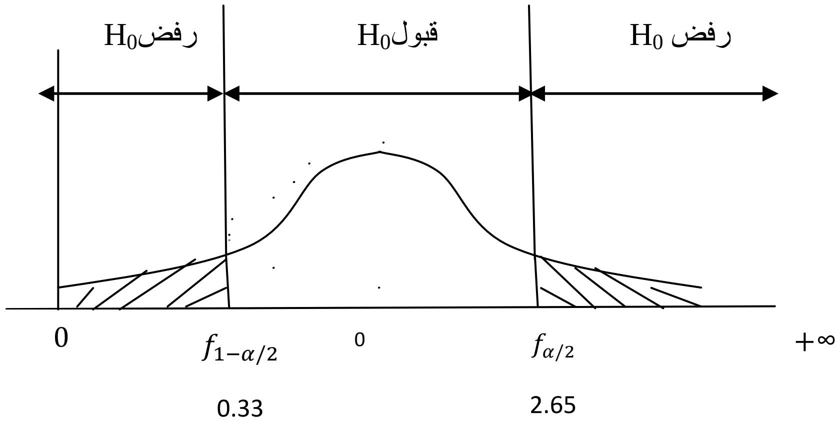
- اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم σ^2: (عينين)

نستعمل توزيع فيشر Fisher (F).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$

$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_A^2$



القيم الفاصلة: .($f_{1-\alpha/2}$ و $f_{\alpha/2}$)

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} V_A = n_A - 1 = 9 \\ V_B = n_B - 1 = 14 \\ f_{\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_A/V_B)} = F_{(5\%;9/14)} = \mathbf{2.65} \\ f_{1-\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_B/V_A)} = \dfrac{1}{F_{(5\%;14/9)}} = \dfrac{1}{3.03} = \mathbf{0.33} \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

$$F_c = \frac{s_A^2}{s_B^2}$$

	1	1	2	0	1	2	0	1	0	1	**9**
$x_{iA}{}^2$	1	1	4	0	1	4	0	1	0	1	**13**

	2	2	1	2	2	2	1	0	1	1	0	1	0	1	2	**18**
$x_{iB}{}^2$	4	4	1	4	4	4	1	0	1	1	0	1	0	1	4	**30**

$$\bar{x}_A = \frac{\sum x_{iA}}{n_A} = \frac{9}{10} = \mathbf{0.9}$$

$$s_A^2 = \frac{\sum x_{iA}{}^2 - n_A.\bar{x}_A{}^2}{n_A - 1} = \frac{13-[10*(0.9)^2]}{9} = \mathbf{0.54}$$

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_{iB}}{n_B} = \frac{18}{15} = \mathbf{1.2}$$

$$s_B^2 = \frac{\sum x_{iB}{}^2 - n_B.\bar{x}_B{}^2}{n_B - 1} = \frac{30-[15*(1.2)^2]}{14} = \mathbf{0.6}$$

$$F_c = \frac{0.54}{0.6} = \mathbf{0.9}$$

بما أن: $F_c = 0.9 \in [\ 0.33\ ;\ 2.65]$

<u>القرار:</u> قبول H_0 ورفض H_1 عند α = 5 % إذن تباين المجموعة (A) يساوي تباين المجموعة .(B)

سلسلة أعمال موجهة رقم(11):

(اختبار حسن المطابقة)

التمرين (45):

رميت زهرة نرد 120 مرة، فتحصلنا على النتائج التالية:

x	1	2	3	4	5	6
التكرار	25	17	15	23	24	16

- هل ينبغي رفض أم قبول زعم أن زهرة النرد هذه غير فاسدة عند α=5 % ؟

التمرين (46):

إذا علمت أن توزيع الجرائم التي سجلت في مدينة وهران سنة 2015 كانت كالتالي:

نوع الجريمة	قتل	اعتداء	سرقة	شغب
التكرار النسبي	0.012	0.054	0.323	0.611

وباستخدام عينة عشوائية من 500 جريمة حصلت في سنة 2016 وجدنا أن:

نوع الجريمة	قتل	اعتداء	سرقة	شغب
العدد	9	26	144	321

- هل أن توزيع الجريمة لسنة 2008 مشابه 2007 عند α=1 % ؟

التمرين (47):

نعلم أن المؤشر الثقافي عند الطلبة الجزائريين يتبع القانون الطبيعي بتوقع رياضي 72 و تباين 100. أخذت عينة ل 100 طالب مجهولين الجنسية و أحصي مؤشر كل واحد منهم، فتحصلنا على الجدول:

المؤشر	< 40	50-40	60-50	70-60	80-70	90-80	> 90
عدد الطلبة	8	7	18	25	32	3	7

- هل يمكن القول أن هذه العينة آتية من مجموعة الطلبة الجزائريين عند α=5 % ؟

التمرين (48):

تعتبر شركة فيليبس أن المصابيح التي تنتجها موزعة حسب القانون الطبيعي. أخذت عينة فتحصلنا على:

مدة التشغيل (ساعة)	110-100	120-110	130-120	140-130	150-140
عدد المصابيح	30	110	200	125	35

- اختبر إن كان زعم الشركة يوافق هذه العينة عند α=5 % ؟

التمرين (49):

تعتقد شركة رونو أن عدد الإصلاحات للسيارات الجدد خلال فترة الضمان يتبع قانون بواسون بمعامل **3**=λ، أخذت عينة ل 41 سيارة وأحصى عدد تصليح كل منها خلال فترة الضمان فتحصلنا على:

عدد الإصلاحات	0	1	2	3	4	5	6	7	8 أو أكثر
العدد	1	2	5	9	7	5	3	3	6

- هل ينبغي قبول أم رفض H_0 عند α=5 % ؟

حل سلسلة أعمال موجهة رقم(11):

التمرين (45):

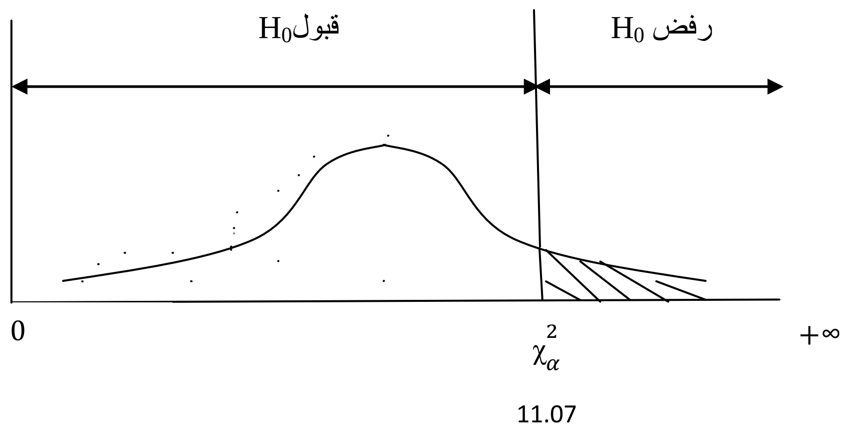
$$n = 120 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \chi^2 = 0$ زهرة نرد غير فاسدة

$H_1 : \chi^2 > 0$ زهرة نرد فاسدة



القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right)$$

θ_i**:** التكرارات الملحوظة (معطاة في التمرين).

e_i**:** التكرارات المتوقعة (نقوم بحسابها) كما يلي:

$$e_i = \left(\sum \theta_i\right) * P_i$$

$$e_i = 120 * \frac{1}{6} = \mathbf{20}$$

بما أن الاحتمالات متساوية فإن التكرارات المتوقعة تكون متساوية.

x_i	θ_i	P_i	e_i	$(\theta_i - e_i)^2$	$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
1	25		20	25	1.25
2	17		20	9	0.45
3	15		20	25	1.25
4	23		20	9	0.45
5	24		20	16	0.8
6	16		20	16	0.8
TOT	**120**	**1**	**120**	/	**5**

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right) = 5$$

القيمة الفاصلة: (χ_α^2)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ← $\begin{cases} V = k - 1 = 6 - 1 = 5 \\ \chi_\alpha^2 = \chi_{0.05}^2 = \mathbf{11.07} \end{cases}$

k: عدد أسطر العمود الأخيرمن الجدول.

بما أن: $\chi_c^2 = 5 < 11.07$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن زهرة نرد غير فاسدة.

التمرين (46):

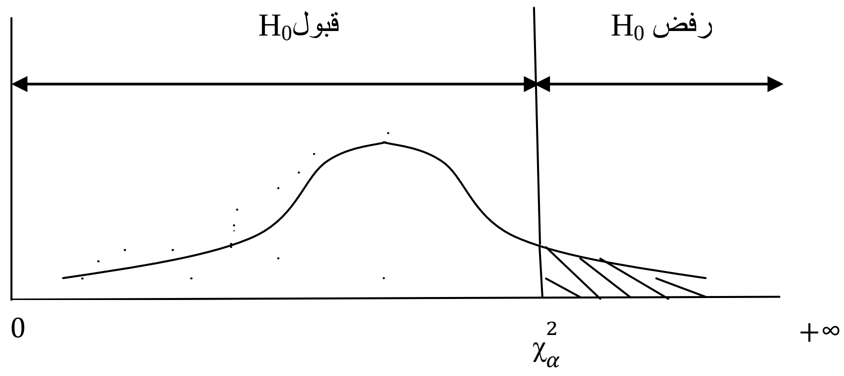
$n = 500$ / $\alpha = 1\%$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \chi^2 = 0$ توزيع الجريمة ل2016 مشابه ل2015

$H_1 : \chi^2 > 0$ توزيع الجريمة ل2016 غير مشابه ل2015



القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right)$$

θ_i: التكرارات الملحوظة (معطاة في التمرين).

e_i: التكرارات المتوقعة (نقوم بحسابها) كما يلي:

$$e_i = \left(\sum \theta_i\right) * P_i$$

P_i: الاحتمالات معطاة في التمرين (نستعمل نسب الملاحظة لسنة 2015).

النوع	θ_i	P_i	e_i	$(\theta_i - e_i)^2$	$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
قتل	9	0.12	6		1.5
إعتداء	26	0.054	27		0.037
سرقة	144		161.5		1.896
شغب	321	0.611	305.5		0.78
TOT	**500**	**1**	**500**	/	**4.21**

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right) = 4.21$$

القيمة الفاصلة: (χ^2_α)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V = k - 1 = 4 - 1 = 3 \\ \chi^2_\alpha = \chi^2_{0.01} = \mathbf{11.34} \end{cases}$$

k: عدد أسطر العمود الأخيرمن الجدول.

بما أن: $\chi_c^2 = 4.21 < 11.34$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن توزيع الجريمة ل2016 مشابه ل2015.

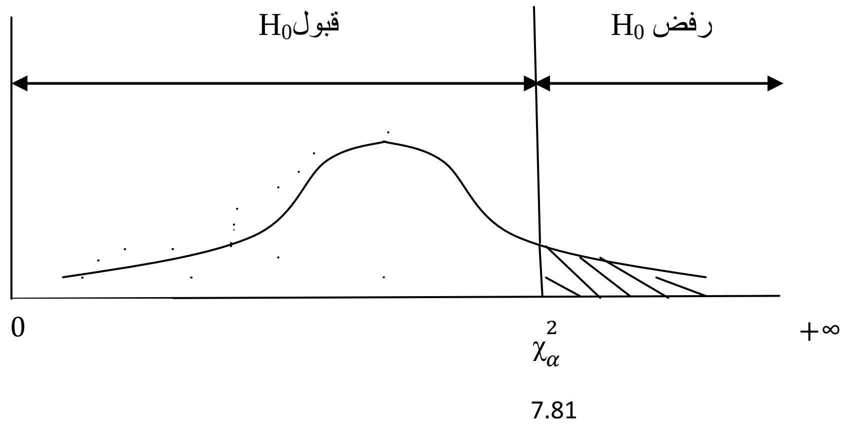
التمرين (47):

$$n = 100 \quad / \quad \alpha = 5\% \ / \quad \mu = 72 \quad / \quad \delta^2 = 100$$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

العينة آتية من مجموعة الطلبة الجزائريين يتبع التوزيع الطبيعي $H_0 : x_i \sim N(\mu = 72; \delta = 10)$

العينة ليست آتية من مجموعة الطلبة الجزائريين يتبع التوزيع الطبيعي $H_1 : x_i \nsim N(\mu = 72; \delta = 10)$



x_i :متغير عشوائي يعبر عن مؤشر الثقافي عند الطلبة الجزائريين.

$$Z_i = \frac{x_i - 72}{10} \sim N(0; 1)$$

القيمة الحسابية: (χ_c^2)

$$\boldsymbol{\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i} \right)}$$

$$\boldsymbol{e_i = \left(\sum \theta_i\right) * P_i}$$

$\boldsymbol{P_i}$**:** الاحتمالات تحسب بالتوزيع الطبيعي.

- $P(x_i < 40) = P\left(\frac{x_i-\mu}{\delta} < \frac{40-\mu}{\delta}\right) = P\left(Z < \frac{40-72}{10}\right) = P(Z < -3.2) =$
$1 - \emptyset(3.2) = \mathbf{0.0007}$

- $P(40 \le x_i \le 50) = P(-3.2 \le Z \le -2.2) = \emptyset(3.2) - \emptyset(2.2) = \mathbf{0.0132}$

- $P(50 \le x_i \le 60) = P(-2.2 \le Z \le -1.2) = \emptyset(2.2) - \emptyset(1.2) = \mathbf{0.1012}$

- $P(60 \le x_i \le 70) = P(-1.2 \le Z \le -0.2) = \emptyset(1.2) - \emptyset(0.2) = \mathbf{0.3056}$

- $P(70 \le x_i \le 80) = P(-0.2 \le Z \le 0.8) = \emptyset(0.8) - [1 - \emptyset(0.2)] = \mathbf{0.3674}$

- $P(80 \le x_i \le 90) = P(0.8 \le Z \le 1.8) = \emptyset(1.8) - \emptyset(0.8) = \mathbf{0.1760}$

- $P(x_i > 90) = 1 - \sum P_{i-1}$= **0.0359**

x_i	θ_i	P_i	e_i	$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
<40	8		0.07	
40-50	7 ***33***		1.32 ***11.51***	***40.12***
50-60	18		10.12	
60-70	25		30.56	1.01
70-80	32		36.74	0.61
80-90	3 ***10***		17.60 ***21***	***5.9***
>90	7	0.0359	3.59	
TOT	**100**	**1**	**100**	**47.65**

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right) = 47.65$$

ملاحظة هامة: نقوم بدمج الأسطر ل e_i التي تحتوي على تكرارات أقل من 5 حتى تفوق 5 بالسطر الذي يليها أو يسبقها، وفي نفس الوقت نقوم بدمج نفس الأسطر ل θ_i.

القيمة الفاصلة: (χ_α^2)

V= $k - m - 1 = 4 - 0 - 1 = 3 \leftarrow$ (χ^2) مقروأ من جدول توزيع كي مربع

$\chi_\alpha^2 = \chi_{0.05}^2$= **7.81**

k: عدد الأسطر بعد الدمج، أي نقرأ عدد الأسطر من العمود الأخير ($(\boldsymbol{\theta_i} - \boldsymbol{e_i})^2/\boldsymbol{e_i}$).

m: عدد المعالم المقدرة.

بما أن: $\chi_c^2 = 47.65 > 7.81$

القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن العينة ليست آتية من مجموعة الطلبة الجزائريين يتبع التوزيع الطبيعي.

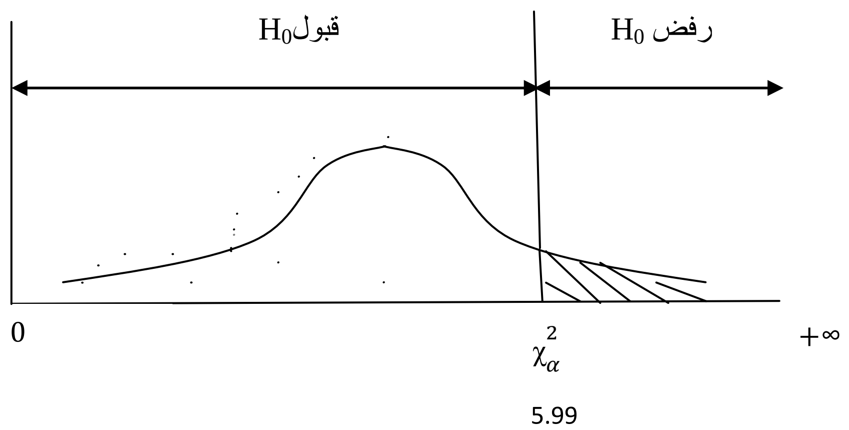
التمرين (48):

$$n = 500 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

المصابيح يتبع التوزيع الطبيعي $H_0 : x_i \backsim N(\mu = ? ; \delta = ?)$

المصابيح لا يتبع التوزيع الطبيعي $H_1 : x_i \not\backsim N(\mu = ? ; \delta = ?)$



x_i :متغير عشوائي يعبر عن مدة تشغيل المصابيح.

$$x_i \backsim N(\mu = ? ; \delta = ?)$$

$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0; 1)$$

معالم المجموعة الأم μ و δ مجهولة ، إذن نقوم بتقديرهما باحصائيات العينة $\bar{x}$ و s، وذلك من أجل حساب الاحتمالات لإيجاد التكرارات المتوقعة (e_i).

الفئات	مركز الفئة x_i	θ_i	$\theta_i.x_i$	$\theta_i.(x_i-\bar{x})^2$
100-110	105		3150	12607.5
110-120	115		12650	12127.5
120-130	125		25000	50
130-140	135		16875	11281.25
140-150	145		5075	13308.75
TOT	/	**500**	**62750**	49375

$$\bar{x} = \frac{\sum(\theta_i.x_i)}{\sum\theta_i} = \frac{62750}{500} = \mathbf{125.5}$$

$$s^2 = \frac{\sum(\theta_i.(x_i-\bar{x})^2)}{\sum\theta_i-1} = \frac{49375}{499} = \mathbf{98.94}$$

$$s=\sqrt{s^2}= 9.94$$

$$x_i \sim N(\hat{\mu} = \bar{x} = 125.5\ ;\ \hat{\delta} = s = 9.94)$$

$$Z_i = \frac{x_i-125.5}{9.94} \sim N(0;1)$$

القيمة الحسابية: (χ_c^2)

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i-e_i)^2}{e_i}\right)$$

$$e_i = (\sum\theta_i)*P_i$$

P_i**:** الاحتمالات تحسب بالتوزيع الطبيعي.

- $P(x_i < 100) = P\left(Z < \frac{100-125.5}{9.94}\right) = P(Z < -2.56) = 1 - \emptyset(2.56) = \mathbf{0.0052}$

-$P(100 \le x_i \le 110) = P(-2.56 \le Z \le -1.56) = \emptyset(2.56) - \emptyset(1.56) = \mathbf{0.0542}$

-$P(110 \le x_i \le 120) = P(-1.56 \le Z \le -0.55) = \emptyset(1.56) - \emptyset(0.55) = \mathbf{0.2318}$

-$P(120 \le x_i \le 130) = P(-0.55 \le Z \le 0.45) = \emptyset(0.45) - [1 - \emptyset(0.55)]$

$$= \mathbf{0.3824}$$

- $P(130 \le x_i \le 140) = P(0.45 \le Z \le 1.45) = \emptyset(1.45) - \emptyset(0.45) = \mathbf{0.2529}$

- $P(140 \leq x_i \leq 150) = P(1.45 \leq Z \leq 2.46) = \emptyset(2.46) - \emptyset(1.45) = \mathbf{0.0666}$

- $P(x_i > 150) = 1 - \sum P_{i-1}$= **0.0069**

ملاحظة هامة: بما أن H_0 يتبع التوزيع الطبيعي فإننا نضيف في الجدول سطرين، سطر في الأول بإشارة أقل، وسطر في الأخير بإشارة أكبر، لأن التوزيع الطبيعي متناظر حول الوسط أي يأخذ القيم من $(-\infty)$ إلى $(+\infty)$.

x_i	θ_i		P_i	e_i		$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
<100	0			2.6		
100-110	30	***30***		27.1	***29.7***	***0.003***
110-120	110			115.9		0.3
120-130	200			191.2		0.405
130-140	125			126.45		0.016
140-150	35	***30***		33.3	***36.75***	***0.083***
>150	0		0.0069	3.45		
TOT	**500**		**1**	**500**		**0.807**

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right) = \mathbf{0.807}$$

القيمة الفاصلة: (χ_α^2)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) $\leftarrow$ V= $k - m - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$

$\chi_\alpha^2 = \chi_{0.05}^2$= **5.99**

k: عدد الأسطر بعد الدمج، أي نقرأ عدد الأسطر من العمود الأخيرل ($(\boldsymbol{\theta_i - e_i})^2/\boldsymbol{e_i}$).

m: عدد المعالم المقدرة (2) .

بما أن**:** $\chi_c^2 = 0.807 < 5.99$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن المصابيح تتبع التوزيع الطبيعي.

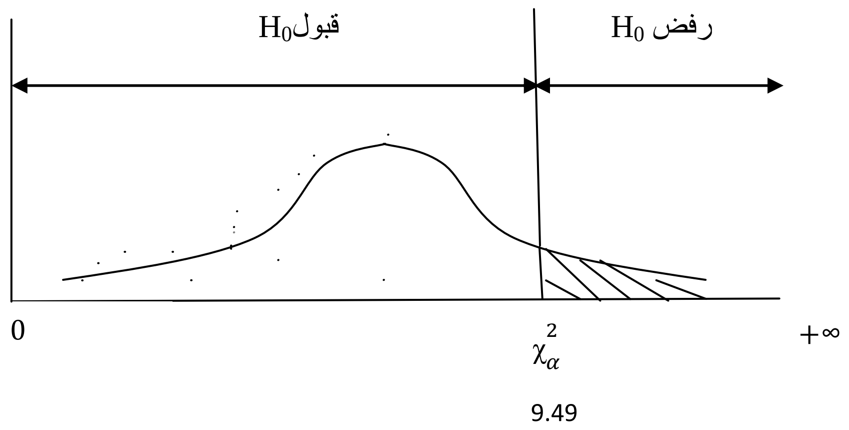
التمرين (49):

n =41 / $\alpha = 5\%$ / $\lambda = 3$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

عدد اصلاحات السيارات الجدد يتبع قانون بواسون بمعامل $\lambda = 3$ $\qquad H_0 : x_i \sim P(\lambda = 3)$

عدد اصلاحات السيارات الجدد لايتبع قانون بواسون بمعامل $\lambda = 3$ $\qquad H_1 : x_i \nsim P(\lambda = 3)$



x_i: متغير عشوائي يعبر عن عدد اصلاحات السيارات الجدد.

$$x_i \sim P(\lambda = 3)$$

$$P(x_i = k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$$

القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\boldsymbol{\chi^2_c} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\boldsymbol{\theta_i}-\boldsymbol{e_i})^2}{\boldsymbol{e_i}}\right)$$

$$\boldsymbol{e_i} = \left(\sum \boldsymbol{\theta_i}\right)*\boldsymbol{P_i}$$

$\boldsymbol{P_i}$: الاحتمالات تحسب بقانون بواسون.

- $P(x_i = 0) = e^{-3}.\frac{3^0}{0!} = \mathbf{0.049}$

- $P(x_i = 1) = e^{-3}.\frac{3^1}{1!} = \mathbf{0.147}$

- $P(x_i = 2) = e^{-3}.\frac{3^2}{2!} = \mathbf{0.220}$

- $P(x_i = 3) = e^{-3}.\frac{3^3}{3!} = \mathbf{0.220}$

- $P(x_i = 4) = e^{-3}.\frac{3^4}{4!}$ = **0.165**

- $P(x_i = 5) = e^{-3}.\frac{3^5}{5!}$ = **0.099**

- $P(x_i = 6) = e^{-3}.\frac{3^6}{6!}$ = **0.049**

- $P(x_i = 7) = e^{-3}.\frac{3^7}{7!}$ = **0.021**

- $P(x_i \geq 8) = 1 - \sum P_{i-1}$= **0.03**

<u>**ملاحظة هامة:**</u> بما أن H_0 يتبع توزيع بواسون فإننا نضيف في الجدول سطرفقط في الأخير بإشارة أكبر، لأن توزيع بواسون يأخذ قيم من (0) إلى $(+\infty)$.

x_i	θ_i	P_i	e_i	$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
0	1		2.009	
1	2 ***<u>3</u>***		6.027 ***<u>8.036</u>***	***<u>3.15</u>***
2	5		9.02	1.79
3	9		9.02	0
4	7		6.765	0.008
5	5		4.059	
6	3 ***<u>17</u>***	0.049	2.009 ***<u>8.159</u>***	***<u>9.58</u>***
7	3	0.021	0.861	
	6	0.03	1.23	
TOT	**41**	**1**	**41**	**14.52**

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right) = \mathbf{14.52}$$

القيمة الفاصلة: (χ_α^2)

$$\begin{cases} V = k - m - 1 = 5 - 0 - 1 = 4 \\ \chi_\alpha^2 = \chi_{0.05}^2 = \mathbf{9.49} \end{cases}$$

← مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2)

k: عدد الأسطر بعد الدمج، أي نقرأ عدد الأسطر من العمود الأخيرل ($(\theta_i - e_i)^2/e_i$).

m: عدد المعالم المقدرة (0) .

بما أن: $\chi_c^2 = 14.52 > 9.49$

القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن عدد اصلاحات السيارات الجدد لايتبع قانون بواسون بمعامل $\lambda = 3$.

سلسلة أعمال موجهة رقم(12):

(اختبار فرض الاستقلالية)

التمرين (50):

أخذت عينة عشوائية لمشاهدي التلفزة الجزائرية وسئلوا أي البرامج يفضلون، فتحصلنا على النتائج التالية:

البرامج/ جنس المشاهد	رجال	نساء
أفلام غربية	32	18
أفلام عربية	17	13
مسلسلات مصرية	27	33
مسلسلات مدبلجة	19	8
منوعات	24	16

- هل اختيار البرامج مستقل عن جنس المشاهد عند $\alpha=1$ % ؟

التمرين (51):

يمثل الجدول التالي توزيع 500 طالب حسب أوزانهم وأطوالهم:

الأطوال / الأوزان	50 -	60 -	70 -80
150 -	64	54	82
160 -	50	66	84
170 - 180	36	30	34

- هل أوزان الطلبة مستقلة عن أطوالهم عند $\alpha=5$ % ؟

حل سلسلة أعمال موجهة رقم(12):

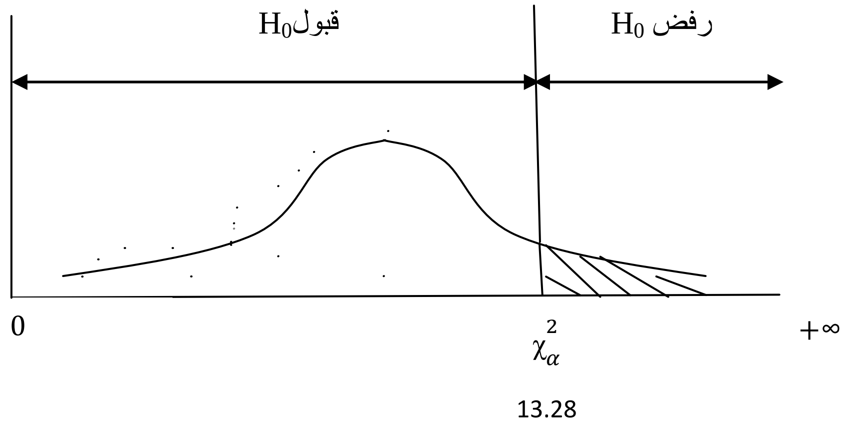
التمرين (50):

$n = 207 \quad / \quad \alpha = 1\%$

اختبار فرض الإستقلالية ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

اختبار ذو ذيل أيمن البرامج مستقلة عن جنس المشاهد $H_0 : \chi^2 = 0$

البرامج ليست مستقلة عن جنس المشاهد $H_1 : \chi^2 > 0$



القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{R}\left(\frac{(\theta_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right)$$

k**:** عدد أسطر الجدول.

R**:** عدد أعمدة الجدول.

θ_{ij}**:** التكرارات الملحوظة (معطاة في التمرين).

e_{ij}: التكرارات المتوقعة (نقوم بحسابها) كما يلي:

الجنس	رجال		نساء		
البرامج					المجموع
أفلام غربية	32	28.7	18	21.3	**50**
أفلام عربية	17	17.2	13	12.8	**30**
مسلسلات مصرية	27	34.5	33	25.5	**60**
مسلسلات مدبلجة	19	15.5	8	11.5	**27**
منوعات	24	23	16	17	**40**
المجموع	**119**	**119**	**88**	**88**	***207***

$e_{11} = \frac{50*119}{207} = 28.7$	$e_{12} = \frac{50*88}{207} = 21.3$
$e_{21} = \frac{30*119}{207} = 17.2$	$e_{22} = \frac{30*88}{207} = 12.8$
$e_{31} = \frac{60*119}{207} = 34.5$	$e_{32} = \frac{60*88}{207} = 25.5$
$e_{41} = \frac{27*119}{207} = 15.5$	$e_{42} = \frac{27*88}{207} = 11.5$
$e_{51} = \frac{40*119}{207} = 23$	$e_{52} = \frac{40*88}{207} = 17$

$\boldsymbol{\theta_{ij}}$	$\boldsymbol{e_{ij}}$	$\boldsymbol{(\theta_{ij} - e_{ij})^2}$	$\boldsymbol{(\theta_{ij} - e_{ij})^2 / e_{ij}}$
32	28.7	10.89	0.37
18	21.2	10.89	0.51
17	17.2	0.04	0.002
13	12.8	0.04	0.003
27	34.5	56.24	1.63
33	25.5	56.24	2.2
19	15.5	12.25	0.79
8	11.5	12.25	1.06
24	23	1	0.04
16	17	1	0.05
207	***207***	/	***6.65***

$$\boldsymbol{\chi_c^2} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{R} \left(\frac{(\theta_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \right) = \boldsymbol{6.65}$$

القيمة الفاصلة: (χ^2_{α})

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V = (k-1)*(R-1) \\ V = (5-1)*(2-1) = 4 \\ \chi^2_{\alpha} = \chi^2_{0.01} = \mathbf{13.28} \end{cases}$$

بما أن: $\chi^2_c = 6.65 < 13.28$

__القرار:__ قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 1$ % إذن البرامج مستقلة عن جنس المشاهد.

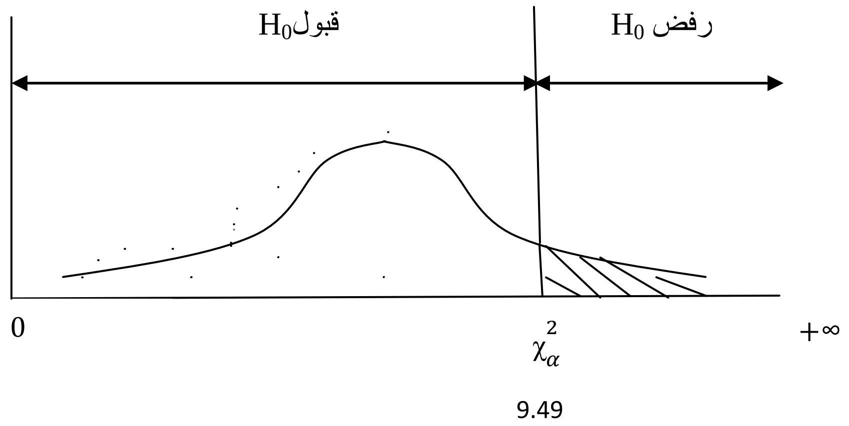
__التمرين (51):__

$n = 500$ / $\alpha = 5\%$

اختبار فرض الإستقلالية ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

__اختبار ذو ذيل أيمن__ أوزان الطلبة مستقلة عن أطوالهم $H_0 : \chi^2 = 0$

أوزان الطلبة ليست مستقلة عن أطوالهم $H_1 : \chi^2 > 0$



القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\boldsymbol{\chi^2_c} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{R}\left(\frac{(\theta_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right)$$

$$e_{ij} = \frac{\text{ملاحظات العمود} \sum \boldsymbol{j} * \text{ملاحظات السطر} \sum \boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}}$$

أوزانهم	50 -		60 -		80 - 70		
أطوالهم	θ_{ij}	e_{ij}	θ_{ij}	e_{ij}	θ_{ij}	e_{ij}	المجموع
- 150	64	60	54	60	82	80	**200**
- 160	50	60	66	60	84	80	**200**
180 - 170	36	30	30	30	34	40	**100**
المجموع	**150**	**150**	**150**	**150**	**200**	**200**	***500***

$e_{11} = \frac{200*150}{500} = 60$	$e_{21} = \frac{200*150}{500} = 60$	$e_{31} = \frac{200*200}{500} = 80$
$e_{21} = \frac{200*150}{500} = 60$	$e_{22} = \frac{200*150}{500} = 60$	$e_{32} = \frac{200*200}{500} = 80$
$e_{31} = \frac{100*150}{500} = 30$	$e_{32} = \frac{100*150}{500} = 30$	$e_{33} = \frac{100*200}{500} = 40$

θ_{ij}	e_{ij}	$(\theta_{ij} - e_{ij})^2$	$(\theta_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij}$
64	60	16	0.266
54	60	36	0.6
82	80	4	0.05
50	60	100	1.66
66	60	36	0.6
84	80	16	0.2
36	30	36	1.2
30	30	0	0
34	40	36	0.9
500	***500***	/	***5.47***

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{R} \left(\frac{(\theta_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \right) = 5.47$$

القيمة الفاصلة: (χ^2_{α})

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V = (k-1)*(R-1) \\ V = (5-1)*(3-1) = 8 \\ \chi^2_{\alpha} = \chi^2_{0.05} = \mathbf{15.51} \end{cases}$$

بما أن: $\chi^2_c = 5.47 < 15.51$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن أوزان الطلبة مستقلة عن أطوالهم.

سلسلة أعمال موجهة رقم(13):

(اختبار فرضيات لعدة توقعات رياضية)

التمرين (52):

نريد أن نختبر: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

من أجل هذا أخذت 3 عينات كما هي موضحة في الجدول التالي:

العينة1	العينة2	العينة3
163	161	132
156	152	127
182	170	155
/	142	146
/	150	/

التمرين (53):

إليك العينات الثلاثة التالية :

العينة1	العينة2	العينة3
6	5	8
10	6	9
9	4	10
8	8	6
7	7	3
8	6	6

- هل هناك فروق بين المتوسطات المجاميع الثلاثة ؟

حل سلسلة أعمال موجهة رقم(13):

التمرين (52):

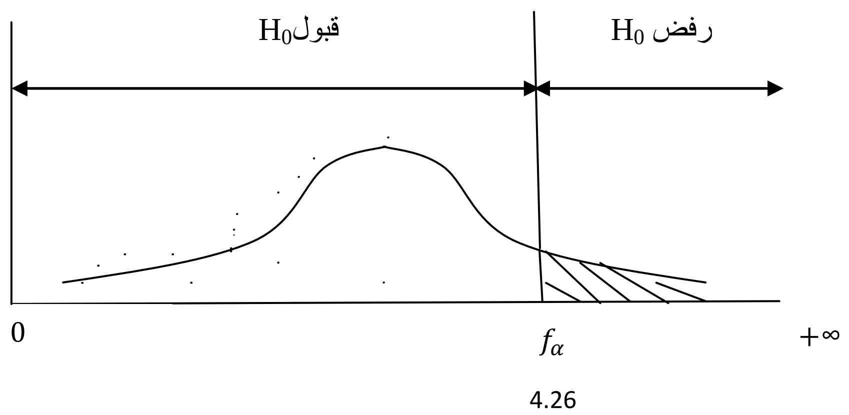
$$n_1=3 \ / \ n_2=5 \ / \ n_3=4 \ / \ \alpha = 5\%$$

اختبار فرضيات لعدة توقعات رياضية ← نستعمل توزيع فيشر (F)

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \mu_3 = \mu_2 = \mu_1$

H_1: على الأقل أحد التوقعات مختلف



القيمة الفاصلة: (f_α)

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} V_1 = R - 1 = 3 - 1 = 2 \\ V_2 = n - R = 12 - 3 = 9 \\ f_\alpha = F_{(\alpha; V_1/V_2)} = F_{(5\%;2/9)} = \mathbf{4.26} \end{cases}$$

R: عدد العينات (عدد الأعمدة).

n: عدد الملاحظات الكلية للعينات.

القيمة الحسابية: (F_c)

$$\boldsymbol{F_c = \frac{MSB}{MSW} = \frac{SSB/V_1}{SSW/V_2}}$$

SSW **:** Sun of Squares Within the Groupes. جمع تربيع داخل الأفواج

الأساس ***SSW*** يعبر عن التغيير الغير المفسر من طرف الأفواج.

$$SSW = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{R}(\,x_{ij} - \bar{x}_{j}\,)^2$$

i: مؤشر الملاحظة.

j: مؤشر العمود.

	x_{i1}	$(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$	x_{i2}	$(x_{i2} - \bar{x}_2)^2$	x_{i3}	$(x_{i3} - \bar{x}_3)^2$
1	163	16	161	36	132	64
2	156	121	152	9	127	169
3	182	225	170	225	155	225
4	/	/	142	169	146	36
5	/	/	150	25	/	/
TOT	***501***	***362***	***775***	***464***	***560***	***494***

- $\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{i1}}{n_1} = \frac{501}{3} = \mathbf{167}$

- $\bar{x}_2 = \frac{\sum x_{i2}}{n_2} = \frac{775}{5} = \mathbf{155}$

- $\bar{x}_3 = \frac{\sum x_{i3}}{n_3} = \frac{560}{4} = \mathbf{140}$

$\boldsymbol{SSW} = 362 + 464 + 494 = \mathbf{1320}$

$\boldsymbol{SSB}$ **:** Sun of Squares Between the Groupes. جمع تربيع ما بين الأفواج

الأساس $\boldsymbol{SSB}$ يعبر عن التغيير المفسر بين الأفواج.

$$\boldsymbol{SSB} = \sum_{j=1}^{R} n_{j}.\,(\,\bar{x}_{j} - \bar{\bar{x}}\,)^2$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum x_{ij}}{n} = \frac{501 + 775 + 560}{12} = \mathbf{153}$$

$$\boldsymbol{SSB} = n_1.\,(\,\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}\,)^2 + n_2.\,(\,\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}\,)^2 + n_3.\,(\,\bar{x}_3 - \bar{\bar{x}}\,)^2$$

$$\boldsymbol{SSB} = 3.(\,167-153\,)^2 + 5.(155-153\,)^2 + 4.(\,140-153\,)^2$$

$$\boldsymbol{SSB} = 588 + 20 + 676 = \mathbf{1284}$$

$$\boldsymbol{F_c} = \frac{MSB}{MSW} = \frac{SSB/\mathrm{v}_1}{SSW/\mathrm{v}_2} = \frac{1284/2}{1320/9} = \mathbf{4.37}$$

بما أن: $F_c = 4.37 > f_\alpha$

القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5\%$ إذن يوجد على الأقل أحد التوقعات مختلف عن التوقعات الأخرى .

التمرين (53):

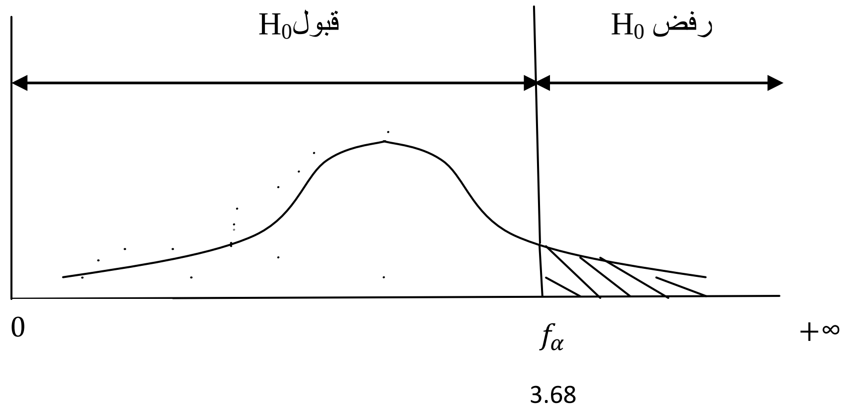
n_1=6 / n_2=6 / n_3=6 / $\alpha = 5\%$

اختبار فرضيات لعدة توقعات رياضية ← نستعمل توزيع فيشر (F)

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \mu_3 = \mu_2 = \mu_1$

H_1: على الأقل أحد التوقعات مختلف



القيمة الفاصلة: (f_α)

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} \mathrm{V}_1 = \mathrm{R} - 1 = 3 - 1 = 2 \\ \mathrm{V}_2 = n - \mathrm{R} = 18 - 3 = 15 \\ f_\alpha = \mathrm{F}_{(\alpha;\mathrm{v}_1/\mathrm{v}_2)} = \mathrm{F}_{(5\%;2/15)} = \mathbf{3.68} \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

$$F_c = \frac{MSB}{MSW} = \frac{SSB/v_1}{SSW/v_2}$$

$$SSW = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{R}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

	x_{i1}	$(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$	x_{i2}	$(x_{i2} - \bar{x}_2)^2$	x_{i3}	$(x_{i3} - \bar{x}_3)^2$
1	6	4	5	1	8	1
2	10	4	6	0	9	4
3	9	1	4	4	10	9
4	8	0	8	4	6	1
5	7	1	7	1	3	16
6	8	0	6	0	6	1
TOT	***48***	***10***	***36***	***10***	***42***	***32***

- $\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{i1}}{n_1} = \frac{48}{6} = \mathbf{8}$

- $\bar{x}_2 = \frac{\sum x_{i2}}{n_2} = \frac{36}{6} = \mathbf{6}$

- $\bar{x}_3 = \frac{\sum x_{i3}}{n_3} = \frac{42}{6} = \mathbf{7}$

$\boldsymbol{SSW} = 10 + 10 + 32 = \mathbf{52}$

$$\boldsymbol{SSB = \sum_{j=1}^{R} n_j.(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum x_{ij}}{n} = \frac{48 + 36 + 42}{12} = \mathbf{7}$$

$\boldsymbol{SSB} = n_1.(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}})^2 + n_2.(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}})^2 + n_3.(\bar{x}_3 - \bar{\bar{x}})^2$

$\boldsymbol{SSB} = 6.(8 - 7)^2 + 6.(6 - 7)^2 + 6.(7 - 7)^2$

$$SSB = 6 + 6 + 0 = \mathbf{12}$$

$$F_c = \frac{MSB}{MSW} = \frac{SSB/V_1}{SSW/V_2} = \frac{12/2}{52/15} = \mathbf{1.73}$$

بما أن: $F_c = 1.73 < f_\alpha$

<u>القرار:</u> قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن التوقعات الثلاثة متساوية.

الفصل الرابع:

الانحدار الخطي ومعامل الارتباط

سلسلة أعمال موجهة رقم(14):

(الانحدار الخطي ومعامل الارتباط)

التمرين (54):

تمثل البيانات التالية الطول و الوزن لمجموعة من الطلبة:

الطول x_i	170	172	174	169	170	180	182	183	165	168
الوزن y_i	69	65	76	68	71	78	85	84	64	63

1- أوجد معامل الارتباط ؟

2- هل توجد علاقة خطية بين x_i و y_i ؟

التمرين (55):

مهندس في العلوم الزراعية مهتم بالعلاقة التي يمكن أن تكون بين مردودية إنتاج الذرة x_i وكمية الأسمدة المستعملة y_i.

المعطيات مدونة في الجدول التالي:

المردودية x_i	16	18	23	24	28	29	26	31	32	34
الأسمدة y_i	20	24	28	22	32	28	32	36	41	41

1- ارسم سحابة النقاط ؟

لنعتبر أن العلاقة تأخذ الشكل الخطي: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$

2- عرف متغيرات النموذج؟

3- قدر معالم النموذج بطريقة المربعات الصغرى؟ اكتب المعادلة ؟

4- احسب معامل الارتباط الخطي ؟

حل سلسلة أعمال موجهة رقم(14):

التمرين (54):

1- حساب معامل الارتباط: (R)

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum x_i . y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\left[\sqrt{\sum x_i{}^2 - n.\bar{x}^2}\right].\left[\sqrt{\sum y_i{}^2 - n.\bar{y}^2}\right]}$$

x_i	y_i	$x_i.y_i$	$x_i{}^2$	$y_i{}^2$
170	69	11730	28900	4761
172	65	11180	29584	4225
174	76	13224	30276	5776
169	68	11492	28561	4624
170	71	12070	28900	5041
180	78	14040	32400	6081
182	85	15470	33124	7225
183	84	15372	33489	7056
165	64	10560	27225	4096
168	63	10584	28224	3969
1733	***723***	***125722***	***300683***	***52854***

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1733}{10} = \mathbf{173.3}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{723}{10} = \mathbf{72.3}$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{125722 - (10 * 173.3 * 72.3)}{\left[\sqrt{300683 - 10 * (173.3)^2}\right].\left[\sqrt{52854 - 10 * (72.3)^2}\right]} = \mathbf{0.937}$$

معامل الارتباط يساوي 93.7 %، وهذا يدل على وجودعلاقة طردية قوية بين طول ووزن الطلبة، أي كلما زاد الطول زاد الوزن.

2- هل توجد علاقة خطية بين x_i و y_i :

لمعرفة إن كانت هناك علاقة خطية بين x_i و y_i، يجب ايجاد معادلة الانحدار الخطي كما يلي:

$$y_i = \mathbf{a}\ x_i + b$$

$$a = \frac{\sum x_i . y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum {x_i}^2 - n.\bar{x}^2} = \frac{125722 - (10 * 173.3 * 72.3)}{300683 - 10 * (173.3)^2} = \mathbf{1.203}$$

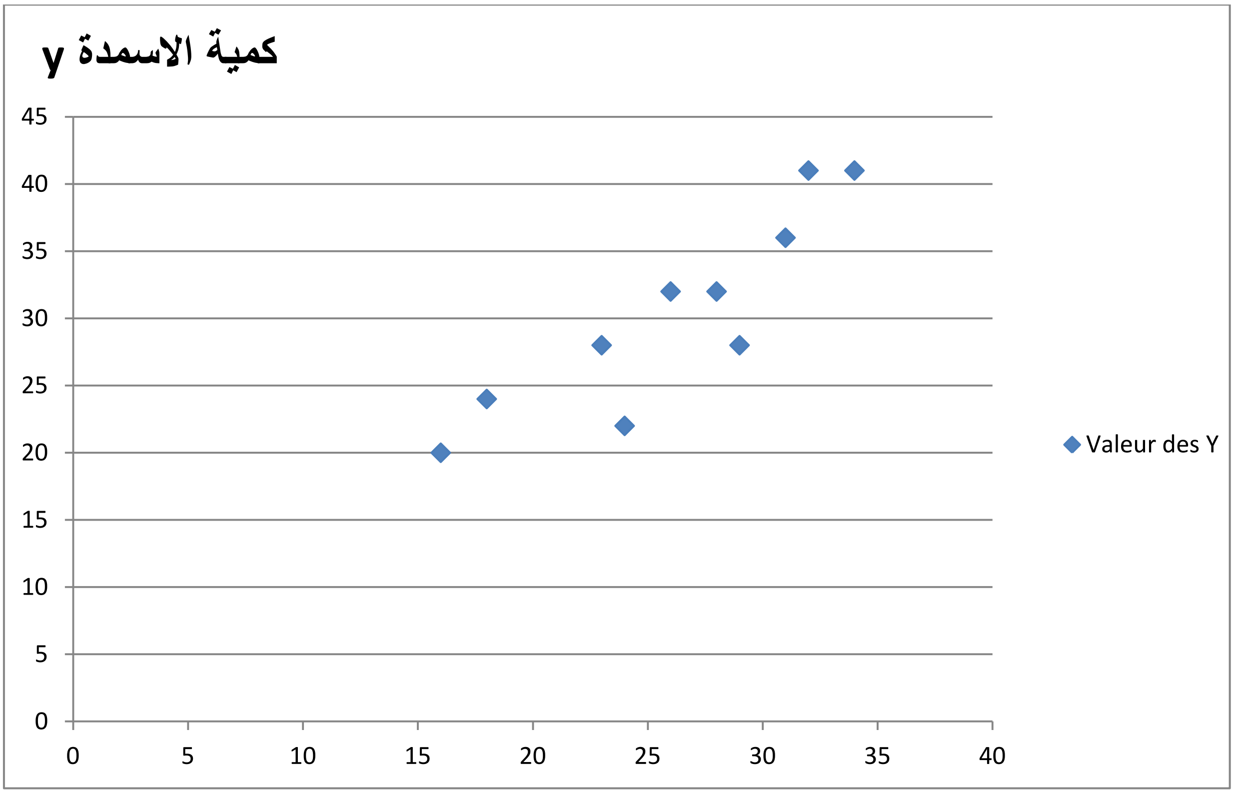
$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 72.3 - (1.203 * 173.3) = \mathbf{-136.238}$$

$$\boxed{y_i = \mathbf{1.203}\ x_i\ \mathbf{-136.238}}$$

تدل هذه المعادلة على أن زيادة وحدة واحدة في الطول (1سم) تؤدي إلى زيادة الوزن بمقدار (1.203كلغ).

التمرين (55):

1- رسم سحابة النقاط:



2- لنعتبر أن العلاقة تأخذ الشكل الخطي: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$

تعريف متغيرات النموذج:

y_i: المتغير التابع.

x_i: المتغير المستقل.

u_i: يمثل العوامل التي تفسر الظاهرة المدروسة.

3- تقدير معالم النموذج بطريقة المربعات الصغرى:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i.y_i$
16	20	256	400	320
18	24	324	576	432
23	28	529	784	644
24	22	576	484	528
28	32	784	1024	896
29	28	841	784	812
26	32	676	1024	832
31	36	961	1296	1116
32	41	1024	1681	1312
34	41	1156	1681	1394
261	***304***	***7127***	***9734***	***8286***

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{261}{10} = \mathbf{26.1}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 304 = \mathbf{30.4}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} + \hat{\beta}.\bar{x}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i.y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2} = \frac{8286 - (10 * 26.1 * 30.4)}{7127 - 10 * (26.1)^2} = \mathbf{1.11}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} + \hat{\beta}.\bar{x} = 30.4 - 1.11 * (26.1) = \mathbf{1.42}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x_i$$

$$\boxed{\hat{y}_i = \mathbf{1.42 + 1.11} x_i}$$

4 - حساب معامل الارتباط الخطي: (R)

$$R = \frac{\sum x_i.y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\left[\sqrt{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2}\right].\left[\sqrt{\sum y_i^2 - n.\bar{y}^2}\right]}$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{8286 - (10 * 26.1 * 30.4)}{\left[\sqrt{7127 - 10 * (26.1)^2}\right].\left[\sqrt{9734 - 10 * (30.4)^2}\right]}$$
$$= \frac{351.2}{(17.74) * (22.19)} = \mathbf{0.89}$$

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

1. أنيس اسماعيل كنجو: "الإحصاء والإحتمال"، مكتبة العبيكان، الرياض، 2000.
2. جورج كانافوس: "الإحصاء للتجاريين"، دار المريخ للنشر، الرياض، 2004.
3. د. ليونارد وج. كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى: "الإحصاء التجاري"، الدار الدولية للإستثمارات الدولية، مصر، 2004.
4. دلال القاضي وآخرون: "الإحصاء للإداريين والإقتصاديين"، دار حامد، عمان، 2005.
5. سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة: "مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي"، دار المسيرة، عمان، 2007.
6. سعد بن سعيد القحطاني: "الإحصاء التطبيقي"، مركز البحوث، معهد الإدارة العامة، الرياض، 2015.
7. سليمان محمد طشطوش: "أساسيات الإحصاء الرياضي"، دار اليازوري، عمان، 2012.
8. صلاح الدين حسين الهيتي: "الأساليب الإحصائية في العلوم الإدارية"، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2006.
9. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي: "الأساليب الاحصائية التطبيقية"، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، 2004.
10. عدنان عوض: "الإحصاء التطبيقي"، الشركة العربية المتحدة مع التعاون مع جامعة القدس المفتوحة، مصر، 2009.
11. عدنان كريم نجم الدين: "الإحصاء للإقتصاد والإدارة"، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2000.
12. لحسن عبد الله باشيوة: "الإحصاء وتطبيقاته على الحزمة الإحصائية"، دار الوراق للنشر والتوزيع، عمان، 2013.
13. محمد حسن محمد رشيد ومنى عطاء الله الشويلات: "مبادئ الإحصاء والإحتمالات ومعالجتها بإستخدام برنامج SPSS، دار الصفاء، عمان، 2012.
14. محمد خير سليم أبو زيد: "التحليل الاحصائي للبيانات بإستخدام برمجية SPSS، دار جرير، عمان، 2010.
15. محمد عبد العالي النعيمي: "الإحصاء التطبيقي"، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، 2008.
16. محمد عبد الفتاح الصيرفي: "الدليل التطبيقي للباحثين"، دار وائل، عمان، 2002.
17. محمد علي: "مقدمة في طرق الإحصاء وتقييم التجاريين"، دار المطبوعات الجديدة، مصر، 2006.
18. محمود البياتي وآخرون: "الإحصاء للإداريين والإقتصاديين"، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2005.
19. موراي سنجيل: "الإحصاء - ملخصات شوم-"، الدار الدولية للإستثمارات، 2003.

المراجع باللغة الأجنبية

20. Weiss Neil. N : "Elementary Statistics", 4th Ed Addision Wesley Longman, New York, 1999.

21. GLEN COWN , **Statistcal Data Analysis** , Clarendon , OXFORD , 1998.

22. N V Nagendram, **Probability and Statistical Applications –Distributions,** https://www.researchgate.net/publication/268870344_Probability_and_Statistical_ Applications_-_Distributions?enrichId=rgreq-36c95422c5fb776a6216f014d071617b-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzI2ODg3MDM0NDtBUzoxNjg4M Tg3Njg4ODM3MTJAMTQxNzI2MDkzOTcwMQ%3D%3D&el=1_x_3.

فهرس المحتويات