جامـــــــعة وهـــران 2 – محمد بن أحمد –
كلية العلــوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم: العلوم المالية والمحاسبة

عنوان المطبوعة:

محاضرات في الإحصاء 3

– مدعمة بأمثلة محلولة –

من إعداد:

د. بلقايد براهيم أستاذ محاضر قسم (أ)

الســـــــــنة الجامعية: 2020

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة عامة

مقدمة عامة:

هذه المطبوعة هي عبارة عن محاضرات في الاحصاء 3 مدعمة بأمثلة محلولة حسب البرنامج الوزاري لمقياس "إحصاء 3" للسنة الثانية في مختلف الشعب لكلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير بالجزائر والعديد من الدول العربية ، وإلى كل من يريد الإلمام والإطلاع والإحاطة بمحاضرات المقياس.

هذه المطبوعة عبارة عن حوصلة لتجربة بيداغوجية تمثلت في تدريس هذا المقياس في العديد من المؤسسات الجامعية والمدارس العليا ذلك لفترة تزيد عن خمسة عشر سنة، ما جعلنا نحاول تثمين هذه الخبرة في شكل مطبوعة مبسطة تحتوي على محاضرات في الاحصاء 3 بشكل ميسر خدمة للطالب و الجامعة والعلم والمعرفة، و لأجل ذلك جاءت هذه المطبوعة على شكل محاضرات مختصرة مزودة بأمثلة محلولة من أجل تسهيل الادراك للطالب و جعله يرقى الى التمكن و الفهم.

تتضمن هذه المطبوعة ستة محاور ابتدأنا بالاطار المفاهيمي لمختلف مصطلحات المقياس، مرورا بتوزيع المعاينة، عروجا بنظرية التقدير، لنتطرق فيما بعد الى اختبار الفرضيات، لنتناول بعد ذلك اختبار حسن المطابقة والاستقلالية، وصولا الى معامل الارتباط والانحدار الخطي.

المحور الأول:

الإطار المفاهيمي

أولا: المجتمع: Population

1. مفهوم المجتمع:

المجتمع هو مجموعة عناصرلها خاصية أو عدة خصائص مشتركة تميزها عن غيرها من العناصر الأخرى، إذن فالمجتمع هو عبارة عن جميع المفردات التي يمكن أن يأخذها المتغير. أما في الاحصاء فإن مفهوم المجتمع يستخدم في مجالات أوسع، فهو لا يشمل مجتمعات فحسب، بل يشمل المجموعات المختلفة للموضوعات المختلفة من ظواهر طبقية وأشياء مهما كانت ذات خصائص مشتركة.

ولهذا يمكن للإحصائي أن يعرف المجتمع تبعا لأغراضه الخاصة بأنه مجموعة معينة من الحيوانات أو الأشجار أو الأفراد، ويمكن أن يكون المجتمع لباحث تربوي مجموعة معينة من الطلاب، كأن يكون طلبة كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير لجامعة وهران2 أو طلاب كلية أخرى وهكذا.

وبهذا يمكن أن نلخص من أن المجتمع هو عبارةعن مجموعة الملاحظات الممكنة لخاصية تحث الدراسة.

2. تصنيفات المجتمع:

يمكن تصنيف المجتمع إلى نوعين:

1.2- المجتمع المحدود: وهو الذي يمكن حساب أفراده، كما في حالة أعداد الطلاب أو عدد أفراد الشعب الجزائري.

2.2- المجتمع غير المحدود: وهو الذي لا يمكن حساب أفراده، كما في حالة عدد الملاحظات أو التجارب العلمية أو عدد المحاضرات التي تلقى في الجامعات عبر كافة أنحاء العالم.

3. معالم المجتمع: Paramète d’une Population

نقصد بمعالم المجتمع مجموعة من خصائصه مثل: المتوسط، التباين، الانحراف المعياري...الخ، ومن خصائص المجتمع أيضا طبيعة توزيعه الاحتمالي $f(x)$ كأن يكون طبيعيا أو غيره.

4. مزايا استخدام المجتمع:

- دقة النتائج المتحصل عليها، والوثوق في كفاءتها نظرا لجمع البيانات من كل فرد شمله البحث من دون ترك مفردة أو حالة.
- تجنب أخطاء التعميم التي تأتي من استخدام بيانات مأخوذة من عينة محددة من المجتمع، وتطبيق نتائجها على المجتمع كله.
- تتفادى هذه الطريقة الأخطاء الشائعة والناجمة في غيرها من الطرق (طريقة العينة)، خاصة خطأ التحيز وخطأ الصدفة.

5. عيوب استخدام المجتمع:

- ❖ التكلفة الكبيرة حيث يحتاج إلى امكانيات كبيرة.
- ❖ يستغرق وقتا طويلا، وتبذل فيه جهود كبيرة في جمع البيانات وتصنيفها.
- ❖ يحتاج إلى جهاز اداري وفني ضخم.

ثانيا: العينة: Echantillon

1. مفهوم العينة:

نستخدم كلمة العينة كثيرا في حياتنا اليومية، إذ عندما يمرض الشخص يطلب الطبيب فحص عينة من دمه أي جزء منه. كذلك عندما نريد شراء سلعة معينة كالحبوب (القمح، الأرز...) نختار جزءا من هذه السلعة للتأكد من جودتها، ولإتخاذ قرار شرائها أوعدم شرائها. إن عملية الاختيار قد تكون جيدة ومناسبة بحيث يمكننا من الوصول إلى القرارالصحيح، وقد تكون خاطئة تعطي نتائج مضللة.

وتعرف العينة بأنها ذلك الجزء من المجتمع الذي يجري اختيارها وفق قواعد وطرق علمية بحيث تمثل المجتمع تمثيلا صحيحا.

وتعرف كذلك بأنها مجموعة جزئية مأخوذة من المجتمع تشترك في خاصية أو خصائص معينة، ويشترط أن تكون ممثلة له، فقد يكون من المخطئ تعميم نتائج العينة إلى مستوى المجتمع.

مثال:

- ❖ ترغب هيأة معينة بالبحوث السياسية في تقدير نسبة الناخبين المساندين لمرشح معين في 10 ولايات، فتقوم باستجواب 100 ناخب من كل ولاية. الناخبون في الولايات العشر يمثلون المجتمع بينما 1000 ناخب المستجوبون يمثلون العينة.
- ❖ قد ترغب الإدارة العسكرية في تقدير الوزن المتوسط للجندي، فتقوم بأخذ أوزان عينة من 100 جندي من بين مجموعة الجنود (المجتمع).

2. مزايا استخدام العينة:

- ❖ العينة تكتفي بعدد محدود من المفردات وليس جميعها، وذلك اقتصادا في الجهد والمال، وكذلك ربحا للوقت.
- ❖ سريعة في اعطاء نتائج البحوث مقارنة بأسلوب الحصر الشامل.
- ❖ قد يترتب على الدراسة إهلاك العناصر محل الدراسة، لهذا نستخدم العينة.
- ❖ بعض العناصر تكون صعبة الحصول عليها، لهذا نكتفي بالعينة.
- ❖ تتيح للباحث التعمق في مصادر الأحكام واتخاذ القرارات.

- ❖ تستخدم لأنها أقل عرضة للأخطاء مع الأساليب الأخرى.
- ❖ يعد استخدام العينة من الوسائل المعنية بإثراء البحوث العلمية الأصلية.
- ❖ أنها طريقة مناسبة، حيث يمكن تحديد مدى الثقة في نتائجها، وكذا نسبة تمثيلها للمجتمع.

3. عيوب استخدام العينة:

- ❖ أخذ عينة من مصدر خاطئ، كأن يستخدم دليل الهاتف للحصول على عينة تمثل الرأي العام.
- ❖ التحيز الشخصي، ويحدث ذلك حينما يأخذ الباحث عينة مختارة من فئة معينة لها خصائص مميزة عن المجتمع الكلي.
- ❖ جمع بيانات ناقصة، فمثلا إهمال العامل الجغرافي عند دراسة المستوى الاقتصادي للسكان بتقسيم الأسر المبحوثة حسب دخلها.
- ❖ خطأ الصدفة، يزداد احتمال وورود هذا الخطأ كلما صغر حجم العينة.

4. أنواع العينات:

1.4- العينة التوافقية: هي العينة التي تساعد وتوافق الشخص الذي يريد أن يختبر شيء للمشاهدة.

2.4- العينة الناتجة عن رأي الخبير: قرار إدخال العناصر في العينة يرجع إلى خبير في المسألة تحت الدراسة.

هاتين العينتين السابقتين للذكر ليست عينة بمعنى الاحصائي، لأن هذه العينات يتم اختيارها بطريقة غير عشوائية، أي لا يعتمد على نظرية الاحتمالات، ومن عيوبها أنها لا تمثل مجتمع البحث تمثيلا دقيقا، ومن تم فإن نتائجها لا تصلح للتعميم على المجتمع ككل.

3.4- العينة العشوائية: من أجل أن تكون العينة ممثلة للمجتمع نستخدم العينة العشوائية، ونقول عن عينة أنها عشوائية إذا كان لكل مفردة في المجتمع نفس الاحتمال لأن تكون في العينة. وتتوفر العينة العشوائية على العديد من المزايا نلخص أهمها فيما يلي:

- ✓ **حذف التحيز:** هذا الأسلوب يؤكد أن مفردات العينة تم اختيارها بدون تحيز، ولكن إذا تم اختيار مفردات العينة تحكميا، فهناك دائما امكانية لوجود تحيز، وعلى الرغم من أن الاختيار العشوائي لا يضمن بأن تكون العينة ممثلة للمجتمع، إلا أنه يحذف مخاطر الاختيار المتحيز.
- ✓ **تحديد الثقة:** أسلوب العينة العشوائية يضع الأساس الاحصائي لتحديد الثقة المقترنة بالإستنتاج الاحصائي، والإستنتاج الاحصائي لا يمكن تنفيذه إذا كانت مفردات العينة تم اختيارها بطريقة أخرى خلاف الطريقة العشوائية.
- ✓ **التحكم في الخطأ:** أسلوب العينة العشوائية يسمح بالتحكم في الخطأ من خلال اختيار حجم العينة، ولكن مع الطرق غير العشوائية في اختيار العينة لا يمكن أن يتحقق مستوى مقبول من الخطأ.

ويمكن تقسيم العينة العشوائية إلى:

أ. العينة العشوائية البسيطة: هي العينة التي تؤخذ بشكل يعطي لأي عنصر من عناصر المجتمع نفس الفرصة لأن يكون ضمن العينة، وتستخدم في حالة المجتمعات المتجانسة والمحدودة، ويتم اختيار أفراد العينة بكتابة أرقام أفراد المجتمع على بطاقات متشابهة وخلطها بشكل جيد ثم تتم عملية السحب عن طريق القرعة، أو باستخدام جداول الأرقام العشوائية أو باستخدام الحاسوب الآلي.

ب. العينة العشوائية الطبقية: تستخدم في حالة المجتمعات المحدودة وغير المتجانسة، حيث يقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تسمى طبقات، حيث يتم اختيار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة (جامعة ←— كليات)، (مجتمع ←— طبقات – موظفين، عمال، فلاحين -). فهذه الطريقة تستخدم في الحالات التي تكون فيها نتائج البحث تعتمد على المتغيرات المفسرة مثلا: العمر، الجنس، الخبرة، الدخل، طبيعة النشاط، حجم المؤسسة.

ففي هذه الحالة يتم تقسيم المجتمع الاحصائي إلى مجموعات جزئية تعتمد على هذه الصفات وتسمى بالطبقات، ثم باستخدام طريقة العينة العشوائية يتم اختيار عينة جزئية تتناسب حجمها مع حجم الطبقة، وتشكل مجموعات العينات الجزئية المختارة ما يسمى بالعينة الطبقية.

ويتم اختيار عدد مفردات كل طبقة حسب العلاقة التالية:

$$\boxed{\textbf{عدد مفردات كل طبقة} = \frac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع}} \times \textbf{حجم العينة}}$$

<u>مثال1</u>: نريد اختيار عينة عشوائية مكونة من 30 طالب على أن تكون من الطلبة والطالبات من قسم العلوم التجارية المكون من 200 طالب و 100 طالبة.

- فما هو عدد الطلبة والطالبات التي تتشكل منها العينة؟

<u>الحل:</u>

عدد الطلبة الذكور $= \frac{200}{300} \times 30 = \mathbf{20}$ **طالبا**

عدد الطالبات $= \frac{100}{300} \times 30 = \mathbf{10}$ **طالبات**

وبالتالي تتكون العينة المطلوبة من 20 طالبا و 10 طالبات، وحجمها هو 30.

<u>مثال2</u>: في المثال السابق نفترض أن نسبة الطلبة الذكور هي 60% ونسبة الإناث 40%.

- فما هو عدد الطلبة الذكور والطالبات في عينة حجمها 30؟

<u>الحل:</u>

عدد الطلبة الذكور $= \frac{60}{100} \times 30 = \mathbf{18}$ **طالبا**

عدد الطالبات $= \frac{40}{100} \times 30 = \mathbf{12}$ **طالبات**

مثال3: إذا أردنا اختيار عينة من 20 طالبا من أقسام كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير التي تتألف من أربعة أقسام، وكان 30% من الطلبة من قسم علوم التسيير، و 25% من قسم العلوم المالية والمحاسبة، 25% من قسم العلوم الاقتصادية، 20% من قسم العلوم التجارية.

الحل:

- عدد الطلبة من قسم علوم التسيير = $20 \times \frac{30}{100} = \mathbf{6}$ **طلبة**
- عدد الطلبة من قسم علوم المالية والمحاسبة = $20 \times \frac{25}{100} = \mathbf{5}$ **طلبة**
- عدد الطلبة من قسم علوم الاقتصادية = $20 \times \frac{25}{100} = \mathbf{5}$ **طلبة**
- عدد الطلبة من قسم علوم التجارية = $20 \times \frac{20}{100} = \mathbf{4}$ **طلبة**

لاحظ أن حجم العينة المطلوب هو: 6+5+5+4 = **20 طالبا**

ج. العينة العشوائية المنتظمة: يتم اختيارها من خلال تحديد مجتمع الدراسة ووضع أفراده في قائمة بشكل عشوائي وإعطاء كل منهم رقما، ثم يتم تحديد قاعدة الاختيار وفق قسم حجم المجتمع على حجم العينة من أجل الحصول على طول الفترة، وبعد ذلك يتم إنتقاء أخذ الأرقام عشوائيا من بين الأرقام التي تساوي أو أقل من طول الفترة،ليتم اعتباره كعنصر أول من مفردات العينة، ويشرع في إضافة طول الفترة له للحصول على المفردة الثانية، وهكذا نستمر في إضافة العدد الثابت إلى غاية الوصول إلى العدد الممثل لحجم العينة المطلوب.

وبهذه الطريقة نكون قد حصلنا على متتالية حسابية حدها الأول هو الرقم المختارعشوائيا في البداية، وأساسها هو طول الفترة، وعدد حدودها هو حجم العينة.

وخلاصة القول أن العينة العشوائية المنتظمة يتم اختيار وحداتها بحيث تكون المسافة أو المدة بين كل وحدة وأخرى ثابتة لجميع وحدات العينة.

مثال4: نريداختيار عينة عشوائية حجمها 10 وفق طريقة العينة العشوائية المنتظمة من المجتمع الاحصائي السابق ذي الحجم 300. كيف يتم ذلك ؟

الحل:

1- باعتبار أن القائمة مرتبة عشوائيا، فإن طول الفترة يتم حسابه كما يلي:

$$\text{طول الفترة} = \frac{300}{10} = \mathbf{30}$$

2- يتم اختيار الرقم الأول عشوائيا على أن يكون أقل أو يساوي 30. وليكن العدد الأول من الصف الأول من جدول الأرقام العشوائية هو 11، أي الطالب ذو الرقم 11.

3- يشرع في إضافة 30 في كل مرة ليتم الحصول على الطلبة الذين تتألف منهم هذه العينة كما يلي: 11؛ 41؛ 71؛ 101؛ 131؛ 161؛ 191؛ 221؛ 251؛ 281.

د. العينة العشوائية الطبيقية: تستخدم هذه العينة في حالة المجتمعات الكبيرة أو لما تكون مفرداتها متباعدة جغرافيا، حيث يقسم المجتمع إلى مجموعات وتختار من هذه المجموعات عينة عشوائية بسيطة، ثم نأخذ جميع الأفراد في المجموعات المختارة وتسمى عينة عشوائية عنقودية من مرحلة واحدة، أما إذا اخترنا عينة عشوائية بسيطة من الأفراد من كل مجموعة مختارة فتسمى عينة عشوائية عنقودية ذات مرحلتين وهكذا.

أما اختيار مفردات العينة المراد دراستها فإنه يتم بنفس الطريقة المنتهجة في أسلوب العينة العشوائية البسيطة في حالة المجموعة الواحدة، أو العينة العشوائية العنقودية في حالة مجموعتين أو أكثر.

وخلاصة القول أن العينة العشوائية العنقودية هي عينة تختار عن طريق استخدام تجمعات (عناقيد) من المجتمع الأصلي بدلا من انتقاء المفردات بصفة مباشرة من هذا المجتمع، بعبارة أخرى عندما يكون المجتمع مجتمعا في وحدات متباينة.

<u>مثال5:</u> في دراسة بعنوان تطبيقات تكنولوجية المعلومات في إدارة الجماعات المحلية الجزائرية، نريد اختيار عينة عشوائية عنقودية من بلدية من بلديات الوطن الجزائري تتكون من 50 موظف إداري. بين كيف يتم ذلك؟

<u>الحل:</u>

1- في البداية نقوم بتقسيم المجتمع الاحصائي الممثل في بلديات الوطن الجزائري إلى مجموعات حسب الجهات أي: وسط؛ غرب؛ شرق؛ جنوب.

2- ثم نقوم باختيار جهة من بين الجهات الأربع بشكل عشوائي، ولنفرض أننا حصلنا عن طريق القرعة على منطقة الغرب الجزائري.

3- بعدها نقوم باختيار ولاية من بين ولايات الغرب الجزائري وبشكل عشوائي، ولنفرض أننا حصلنا على ولاية وهران.

4- وبعد تحديد قائمة بلديات ولاية وهران، نقوم باختيار بلدية من بينها بشكل عشوائي، ليتم تعيين البلدية ميدان الدراسة.

5- في الأخير يتم اختيار 50 موظف من موظفي هذه البلدية على أن يكون الاختيار أيضا بشكل عشوائي.

ثالثا: المعاينة: Echantillonnage

1. مفهوم المعاينة:

تعرف المعاينة بأنها عملية اختيار جزء من المجتمع الاحصائي للإستدلال على خواص المجتمع بأكمله عن طريق تعميم نتائج العينة. أما العينة كما سبق ذكرها هي جزء من المجتمع يتم اختياره لتمثيل المجتمع. ولتوضيح هذين المفهومين نورد المثال التالي: نفرض أننا نريد دراسة مستوى رضا العمال لإحدى الشركات، ونظرا لضخامة عدد موظفي هذه الشركة فقد تقرر اختيار عدد من العمال يمثلون المجتمع، إذن العمال الذين تم اختيارهم يمثلون العينة، حيث يشكلون جزءا من المجتمع يتضمن خصائصه، أما عملية اختيار هذه العينة وتعميم النتائج المتحصل عليها على المجتمع كله فتسمى بالمعاينة.

2. مفهوم المعاينة النفادية وغير النفادية: Echantillonnage exhaustif et non exhaustif

1.2- مفهوم المعاينة النفادية: تكون المعاينة نفادية عندما يكون السحب بدون ارجاع، لأن المجتمع يتناقص مع تكرار ومواصلة السحب، إذ يستحيل أن تظهر مفردة في العينة أكثر من مرة، وفي هذه الحالة لا تكون نتائج السحب مستقلة.

2.2- مفهوم المعاينة غير النفادية: هي تلك المعاينة التي يكون فيها السحب مع الإرجاع، وتسمى غير نفادية لأنها لا تؤدي إلى نفاد وزوال مفردات المجتمع، كما أن المفردة يمكن أن تظهر أكثر من مرة في العينة، وهنا تكون متغيرات العينة مستقلة ولها نفس التوزيع.

3. إحصائية المعاينة: Statistique de L’échantillonnage

لتقدير معالم المجتمع (متوسط المجتمع μ؛ تباين المجتمع σ^2؛ نسبة نجاح المجتمع p) ننطلق من بيانات العينة، حيث نحتاج إلى حساب معالم مثل: متوسط العينة $\bar{x}$؛ تباين العينة s^2؛ نسبة نجاح العينة p. بصفة عامة نسمي كل قيمة تحسب انطلاقا من بيانات العينة من أجل تقدير قيمة معالم المجتمع إحصائية المعاينة. نظريا إحصائية المعاينة هي كل دالة في المتغيرات العشوائية التي تمثل القيم المحصل عليها في العينة.

المحور الثاني:

توزيع المعاينة

تمهيد:

يعتبر أسلوب المعاينة من أهم الأساليب الإحصائية التي نستخدمها لدراسة مجموعة كبيرة من المفردات (تسمى المجتمع) بقصد التعرف على خواصها عن طريق دراسة مجموعة صغيرة من هذه المفردات (تسمى العينة)، حيث نقوم بدراسة هذه العينة بدقة للتعرف على خواصها وعرفة معالمها مثل: المتوسط الحسابي والتباين وغير ذلك من المقاييس الإحصائية، ثم نقوم بتعميم النتائج التي نحصل عليها على المجتمع الأصلي للتعرف على خواصه ومعالمه، وهذا هو الهدف الأساسي من الدراسة. وبالطبع لا يكون هذا التعميم من العينة إلى المجتمع له معنى أو قيمة علمية إلا إذا تم اختيار المفردات بطريقة نضمن بها أن تكون العينة ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا وصحيحا.

أولا: تعريف توزيع المعاينة وعدد العينات المسحوبة:

1. تعريف توزيع المعاينة:

نفرض أن لدينا مجتمعا من المفردات يتبع توزيعا احتماليا معينا، وأننا بصدد سحب عينة حجمها n من هذا المجتمع الذي حجمه N، بالطبع ليس معنى هذا أن هناك عينة واحدة يمكن سحبها ولكن يكون أمامنا عدد كبير من العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع والتي حجم كل منها هو n من المفردات.

والآن نفرض أننا سحبنا عينة حجمها n من هذا المجتمع، وحسبنا من هذه العينة مقياسا معينا وليكن المتوسط الحسابي $\bar{x}_1$، ثم سحبنا عينة ثانية لها نفس الحجم n وحسبنا منها نفس المقياس $\bar{x}_2$، ثم سحبنا عينة ثالثة وحسبنا منها نفس المقياس $\bar{x}_3$، وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع، سنجد أمامنا عددا كبيرا من القيم لنفس المقياس (المتوسط الحسابي) ولا نتوقع أن تكون جميع القيم التي تحصلنا عليها من العينات لهذا المقياس متساوية، وإنما ستكون مختلفة عن بعضها البعض وتكوّن مجتمعا آخر عدد مفرداته أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي.

وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس (المتوسط الحسابي) على أنه متغير عشوائي يأخذ قيما مختلفة (هي التي تحصلنا عليها من هذه العينات) ويتبع توزيعا معينا ربما يختلف أو لا يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي، ويسمى بتوزيع المعاينة لهذا المقياس هو المتوسط الحسابي أو التباين أو النسبة أو غيره من المقاييس الإحصائية.

2. عدد العينات المسحوبة من المجتمع:

لإيجاد عدد العينات الممكن سحبها من المجتمع حجمه N هناك حالتين: حالة السحب بالإرجاع وحالة السحب بدون ارجاع:

1.2- حالة السحب بالإرجاع: عدد العينات الممكن سحبها يساوي N^{n}

2.2- حالة السحب بدون ارجاع: تنقسم إلى قسمين:

- ✓ حالة السحب بدون ارجاع والترتيب غيرمهم: نستعمل التوفيقة

$$C_{\mathrm{N}}^{n}=\frac{\mathrm{N}!}{n!\,(\mathrm{N}-n)!}$$

- ✓ حالة السحب بدون ارجاع والترتيب مهم: نستعمل الترتيبة

$$A_{\mathrm{N}}^{n}=\frac{\mathrm{N}!}{(\mathrm{N}-n)!}$$

ملاحظة: في حالة السحب بدون ارجاع ولم يتم ذكر نوعية الترتيب، فإننا نعتبر الترتيب غير مهم.

مثال1: مجتمع يتكون من 5 مفردات هي (2؛ 4؛ 6؛ 8؛ 10)، قمنا بسحب جميع العينات المكونة من مفردتين والمطلوب هو:

1- تحديد العينات الممكن سحبها بدون ارجاع ؟
2- تحديد العينات الممكن سحبها إذا كان السحب بارجاع ؟
3- حساب متوسط وتباين المجتمع ؟

الحل:

x_i= {10-8-6-4-2} / N=5 / n=2

1- لإيجاد العينات الممكن سحبها بدون ارجاع نستخدم التوفيقة:

$$C_{\mathrm{N}}^{n}=\frac{\mathrm{N}!}{n!(\mathrm{N}-n)!}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\mathbf{10}$$

العينات الممكن سحبها هي:

$$\{(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(4,6),(4,8),(4,10),(6,8),(6,10),(8,10)\}$$

2- في حالة تم السحب مع الإرجاع نستخدم القائمة لتحديد عدد العينات الممكن سحبها:

$$\mathrm{N}^{n}=\ 5^{2}=\mathbf{25}$$

العينات الممكن سحبها هي:

$$\left\{\begin{matrix}(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(4,2),(4,4),(4,6),(4,8),(4,10),\\(6,2),(6,4),(6,6),(6,8),(6,10),(8,2),(8,4),(8,6),(8,8),(8,10),\\(10,2),(10,4),(10,6),(10,8),(10,10)\end{matrix}\right\}$$

3- حساب متوسط المجتمع (التوقع الرياضي للمجتمع) μ:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = \mathbf{6}$$

- حساب تباين المجتمع σ^2:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(2-6)^2+(4-6)^2+\cdots+(10-6)^2}{5} = \mathbf{8}$$

ثانيا: توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\bar{x}$:

نفرض أن لدينا مجتمعا، ولتكن مفرداته هي: x_1 ؛ x_2 ؛ x_3 ؛ ......الخ.

ونفرض أننا سحبنا من هذا المجتمع عينة حجمها n وحسبنا متوسطها الحسابي فوجدناه $\bar{x}_1$، ثم سحبنا عينة ثانية لها نفس الحجم وحسبنا متوسطها الحسابي فوجدناه $\bar{x}_2$، ثم سحبنا عينة ثالثة لها نفس الحجم وحسبنا متوسطها الحسابي فوجدناه $\bar{x}_3$، وهكذا بالنسبة لكل العينات التي حجمها n والتي يمكن سحبها من هذا المجتمع. سنجد في النهاية أننا سنحصل على مجموعة جديدة من المفردات هي المتوسطات الحسابية لهذه العينات وهي تكوّن مجتمعا جديدا يسمى مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجمها n والتي يمكن سحبها من المجتمع الأصلي، ويمكن كتابة مفردات المجتمع الجديد على النحو التالي: $\bar{x}_1$؛ $\bar{x}_2$؛ $\bar{x}_3$ ...الخ.

إن هذه المتوسطات تختلف عن بعضها، كما أنها تكوّن مجتمعا جديدا له توزيع احتمالي يهمنا معرفته ودراسته، ومجتمع المتوسطات الحسابية $\bar{x}$ أي مجتمع آخر له توزيع احتمالي يتمتع بجميع صفات وخواص التوزيعات الاحتمالية وبالطبع له متوسط وانحراف معياري.

1. متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات:

إذا كانت متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و $\bar{x}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع حيث حجم المجتمع يرمز له بالرمز N وحجم العينة يرمز لها بالرمز n، فإن التوقع الرياضي لمتوسط العينة $E(\bar{x})$ تكتب كما يلي:

لدينا: $$E(\mathrm{X_i}) = \mu \qquad / \qquad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

إذن: $$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{\sum}{n} E(\mathrm{X_i}) = E(\mathrm{X_i}) = \mu$$

وبهذا:
$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

مثال2: نفس معطيات المثال رقم 01 السابق:

1- أحسب التوقع الرياضي لمتوسط العينة $\mu_{\bar{x}}$ في حالة السحب بدون إرجاع ؟

2- أحسب التوقع الرياضي لمتوسط العينة $\mu_{\bar{x}}$ في حالة السحب بالإرجاع ؟

3- قارن بين $\mu_{\bar{x}}$ و μ ؟

الحل:

1- أحسب التوقع الرياضي لمتوسط العينة $\mu_{\bar{x}}$ في حالة السحب بدون إرجاع:

من أجل تحديد ذلك يجب حساب جميع الحالات الممكنة للمتوسط $\bar{x_i}$ حسب كل عينة.

العينة	المتوسط الحسابي
(2,4)	3
(2,6)	4
(2,8)	5
(2,10)	6
(4,6)	5
(4,8)	6
(4,10)	7
(6,8)	7
(6,10)	8
(8,10)	9

وانطلاقا من قيم المتوسط الحسابي في كل عينة نقوم بتكوين توزيع المعاينة له وحساب متوسطه كما يلي:

قيمة المتوسطات $\bar{x_i}$	التكرارات f_i	$\bar{x_i} \times f_i$
3	1	3
4	1	4
5	2	10
6	2	12
7	2	14
8	1	8
9	1	9
المجموع	**10**	**60**

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i \times f_i}{\sum f_i} = \frac{60}{10} = \mathbf{6}$$

وعندنا كذلك: $\mu_{\bar{x}} = \mu = 6$

2- أحسب التوقع الرياضي لمتوسط العينة $\mu_{\bar{x}}$ في حالة السحب بالإرجاع:

العينة	المتوسط الحسابي	العينة	المتوسط الحسابي	العينة	المتوسط الحسابي
(2,2)	2	(4,10)	7	(8,8)	8
(2,4)	3	(6,2)	4	(8,10)	9
(2,6)	4	(6,4)	5	(10,2)	6
(2,8)	5	(6,6)	6	(10,4)	7
(2,10)	6	(6,8)	7	(10,6)	8
(4,2)	3	(6,10)	8	(10,8)	9
(4,4)	4	(8,2)	5	(10,10)	10
(4,6)	5	(8,4)	6	-	-
(4,8)	6	(8,6)	7	-	-

وانطلاقا من قيم المتوسط الحسابي في كل عينة نقوم بتكوين توزيع المعاينة له وحساب متوسطه كما يلي:

قيمة المتوسطات $\bar{x}_i$	التكرارات f_i	$\bar{x}_i \times f_i$
2	1	2
3	2	6
4	3	12
5	4	20
6	5	30
7	4	28
8	3	24
9	2	18
10	1	10
المجموع	**25**	**150**

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i \times f_i}{\sum f_i} = \frac{150}{25} = \mathbf{6}$$

وعندنا كذلك: $\mu_{\bar{x}} = \mu = 6$

3- المقارنة بين $\mu_{\bar{x}}$ و μ:

	المجتمع	توزيع المعينة للمتوسطات في حالة بدون إرجاع	توزيع المعينة للمتوسطات في حالة بالإرجاع
متوسط	$\mu = 6$	$\mu_{\bar{x}} = 6$	$\mu_{\bar{x}} = 6$

من خلال الجدول السابق يتضح لنا أن قيمة متوسط المجتمع μ مساوية لمتوسط توزيع المعاينة للمتوسطات $\mu_{\bar{x}}$ سواء السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع.

2. تباين توزيع المعاينة للمتوسطات:

إذا كان x_i متغيرعشوائي يمثل مجتمع ما حجمه N و $\bar{x_\iota}$ متغير عشوائي يمثل متوسط عينة حجمها n مسحوبة من ذات المجتمع، فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يكتب كما يلي:

- في حالة السحب بالإرجاع: $\delta_{\bar{x}}{}^2 = \frac{\delta^2}{n} \rightarrow \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

- في حالة السحب بدون إرجاع: $\delta_{\bar{x}}{}^2 = \frac{\delta^2}{n} * \frac{N-n}{N-1} \rightarrow \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

تسمى النسبة $\frac{N-n}{N-1}$ معامل الإرجاع أو معامل التصحيح.

مثال3: نفس معطيات المثال السابق.

1- أحسب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}{}^2$ في حالة السحب بدون إرجاع ؟

2- أحسب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}{}^2$ في حالة السحب بالإرجاع ؟

3- قارن بين تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}{}^2$ وتباين المجتمع δ^2 في كل حالة ؟

الحل:

1- أحسب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}{}^2$ في حالة السحب بدون إرجاع:

قيمة المتوسطات $\bar{x_\iota}$	التكرارات f_i	$\bar{x_\iota}^2$	$\bar{x_\iota}^2 \times f_i$
3	1	9	9
4	1	16	16
5	2	25	50
6	2	36	72

7	2	49	98
8	1	64	64
9	1	81	81
المجموع	**10**	**-**	**390**

$$\delta_{\bar{x}}{}^{2}= \frac{\sum \bar{x_i}{}^{2}\mathrm{x}\,\mathrm{f_i}}{\sum \mathrm{f_i}} - \mu_{\bar{x}}{}^{2} = \frac{390}{10} - 6^2 = \mathbf{3}$$

وعندنا كذلك: $\delta_{\bar{x}}{}^{2} = \frac{\delta^2}{n} * \frac{N-n}{N-1} = \frac{8}{2} * \frac{5-2}{5-1} = \mathbf{3}$

2- أحسب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}{}^{2}$ في حالة السحب بالإرجاع:

قيمة المتوسطات $\bar{x_i}$	التكرارات $\mathrm{f_i}$	$\bar{x_i}{}^{2}$	$\bar{x_i}{}^{2}\mathrm{x}\,\mathrm{f_i}$
2	1	4	4
3	2	9	18
4	3	16	48
5	4	25	100
6	5	36	180
7	4	49	196
8	3	64	192
9	2	81	162
10	1	100	100
المجموع	**25**	**-**	**1000**

$$\delta_{\bar{x}}{}^{2}= \frac{\sum \bar{x_i}{}^{2}\mathrm{x}\,\mathrm{f_i}}{\sum \mathrm{f_i}} - \mu_{\bar{x}}{}^{2} = \frac{1000}{25} - 6^2 = \mathbf{4}$$

وعندنا كذلك: $\delta_{\bar{x}}{}^{2} = \frac{\delta^2}{n} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$

3- المقارنة بين تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}{}^{2}$ وتباين المجتمع δ^2 في كل حالة:

	المجتمع	**توزيع المعينة للمتوسطات في حالة بدون إرجاع**	**توزيع المعينة للمتوسطات في حالة بالإرجاع**
تباين	δ^2=8	$\delta_{\bar{x}}{}^{2}$=3	$\delta_{\bar{x}}{}^{2}$=4

من خلال الجدول السابق يتضح لنا أن قيمة تباين جاءت مختلفة في الحالات الثلاثة، أي في المجتمع وحالتي السحب.

ومما سبق نستخلص ما يلي:

✓ $\bar{x}$ قيمة ثابتة في العينة الواحدة، ولكن إذا كان لدينا عددا كبيرا من العينات فإن $\bar{x}$ يعتبر متغير عشوائي والتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $\bar{x}$ يطلق عليه توزيع المعاينة للمتوسط، وبالتالي فإن إمضاءات توزيع المعاينة للمتوسط هي:

$\mu_{\bar{x}}$: المتوسط الحسابي أو التوقع الرياضي لتوزيع المعاينة.

${\delta_{\bar{x}}}^2$: التباين لتوزيع المعاينة.

$\delta_{\bar{x}}$: الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة ويسمى الخطأ المعياري للمتوسط.

✓ متوسط توزيع المعاينة للمتوسط يساوي متوسط المجتمع (التوقع الرياضي للمجتمع) سواء السحب بالإرجاع أو بدون ارجاع.

3. <u>نوع توزيع المعاينة للمتوسط:</u>

سيتم هنا تناول طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون المجتمع طبيعيا أو غير طبيعي:

1.3- نوع توزيع المعاينة لمتوسط العينة عندما يكون للمجتمع توزيع طبيعي:

إذا كان المجتمع الذي تتم منه المعاينة له توزيع طبيعي بمتوسط (توقع) μ وتباين δ^2، فإن متوسط العينة المسحوبة أيضا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{x}}$ وتباين ${\delta_{\bar{x}}}^2$، ويكتب:

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}}\ ;\ \delta_{\bar{x}})$$

$$Z_i = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}} \backsim N(0;1)$$

<u>مثال4:</u> تخضع علامات الطلبة في مادة الاحصاء التطبيقي للتوزيع الطبيعي بمعدل 12 وانحراف معياري 2. سحبت عينة عشوائية حجمها 36 طالبا.

<u>المطلوب:</u>

1- أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة ؟
2- أحسب احتمال أن يزيد معدل علامات الطلبة عن 13 ؟
3- أحسب احتمال أن يكون معدل الطلبة ما بين 11.5 و 13 ؟

<u>الحل:</u> ليكن x_i متغير عشوائي يعبر عن نقاط الطلبة في مادة الاحصاء التطبيقي ويتبع التوزيع الطبيعي.

$$\mu = 12 \quad / \quad \delta = 2 \quad / \quad n = 36$$

1- حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة:

- $\mu_{\bar{x}} = \mu = 12$
- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{36}} = \frac{1}{3}$

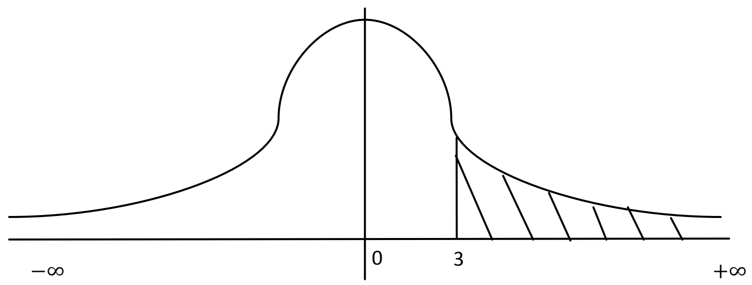
2- حساب الاحتمال: $P(\bar{x} > 13) = ?$

بما أن x_i متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي فإن $\bar{x}$ هو كذلك يتبع التوزيع الطبيعي.

$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = 12 \; ; \; \delta_{\bar{x}} = \frac{1}{3})$$

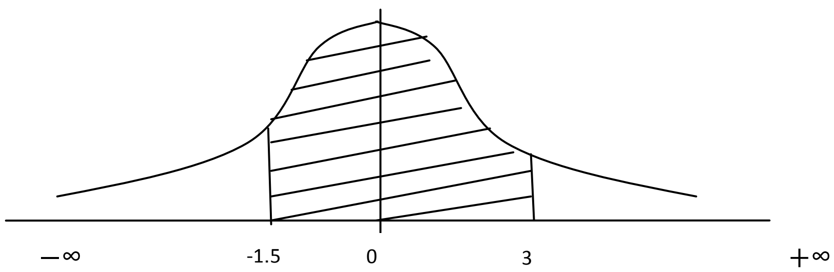
$$Z_i = \frac{\bar{x}-12}{1/3} \sim N(0;1)$$

$$P(\bar{x} > 13) = P\left(\frac{\bar{x}-12}{1/3} > \frac{13-12}{1/3}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(-\infty \le Z \le 3) = 1 - \emptyset(3) = 1 - 0.9987 = \mathbf{0.0013}$$



3- حساب الاحتمال: $P(11.5 \le \bar{x} \le 13) = ?$

$$P(11.5 \le \bar{x} \le 13) = P\left(\frac{11.5-12}{1/3} \le \frac{\bar{x}-12}{1/3} \le \frac{13-12}{1/3}\right)$$
$$= P(-1.5 \le Z \le 3) = P(-\infty \le Z \le 3) - P(-\infty \le Z \le -1.5)$$
$$= \emptyset(3) - [1 - \emptyset(1.5)] = 0.9987 - [1 - 0.9332] = \mathbf{0.9319}$$



2.3- نوع توزيع المعاينة لمتوسط العينة عندما يكون للمجتمع توزيع غيرطبيعي:

عند سحب جميع العينات العشوائية الممكنة من مجتمع متوسطه μ وتباينه δ^2، وكانت هوية توزيع المجتمع غير الطبيعي، فأن توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\bar{x}$ هو تقريبا يتبع التوزيع الطبيعي في حالة العينات ذات الأحجام الكبيرة $(n \ge 30)$، وهذا الإستنتاج الاحصائي يعرف بمبرهنة الحد المركزي

(نظرية النهاية المركزية)[1]. تقول هذه النظرية: إذا كان حجم العينة كبيرا ($n \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، بغض النظر عن شكل المجتمع الأصلي ذو المتوسط μ والانحراف المعياري δ، وبذلك يمكن حساب احتمال أن $\bar{x}$ لعينة عشوائية من خلال القيمة الإحصائية (المعيارية) ل Z وفق العلاقة التالية:

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} \ ; \ \delta_{\bar{x}})$$

$$Z_i = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}} \backsim N(0;1)$$

- $\mu_{\bar{x}} = \mu$
- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

في حالة المجتمع محدود والمعاينة بدون ارجاع نستبدل العبارة $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ بالعبارة:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

عمليا تستخدم هذه الصيغة المعدلة بمعامل الإرجاع أو ما يعرف بمعامل التصحيح للإنحراف المعياري عندما يكون ($n \geq 0.05 * N$)، ومن هذا نستخلص أن:

$$\begin{cases} \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n < 0.05 * N \ \underline{\text{ou}} \ N = ? \\ \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si} \quad n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

<u>مثال5:</u> مجتمع حجمه 1200 ومتوسطه 40 وانحرافه المعياري 15، نستخرج كل العينات الممكنة.

<u>المطلوب:</u> أحسب المتوسط والانحراف المعياري لمتوسط المعاينة للمتوسطات في الحالتين التاليتين:

- حجم العينة تساوي 49.
- حجم العينة تساوي 81.

<u>الحل:</u>

$$\mu = 40 \quad / \quad \delta = 15 \quad / \quad N = 1200$$

- <u>حساب المتوسط والانحراف المعياري لمتوسط المعاينة للمتوسطات في الحالة n =49:</u>

[1] أنيس اسماعيل كنجو: "الإحصاء والإحتمال"، مكتبة العبيكان، الرياض، 2000.

- $\mu_{\bar{x}} = \mu = 40$
- n=49 $< 0.05 * 1200 = 60$

إذن لا نستعمل معامل التصحيح

- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{49}} = 2.14$

- حساب المتوسط والانحراف المعياري لمتوسط المعاينة للمتوسطات في الحالة 81= n:

- $\mu_{\bar{x}} = \mu = 40$
- n=81 $> 0.05 * 1200 = 60$

إذن نستعمل معامل التصحيح

- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{15}{\sqrt{81}} * \sqrt{\frac{1200-81}{1200-1}} = 1.61$

مثال6: في أحد اختبارات الذكاء كان متوسط الدرجات هو 1000 والانحراف المعياري هو 125، فإذا أعطي الاختبار لعينة عشوائية من 100 شخص.

المطلوب: ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة محصور ما بين 970 و 1030 ؟

الحل:

$$\mu = 1000 \quad / \quad \delta = 125 \quad / \quad n = 100$$

- حساب الاحتمال: $P(970 \le \bar{x} \le 1030) = \ ?$

توزيع المجتمع مجهول وحجم العينة ($n \ge 30$)، وبالإستناد على مبرهنة الحد المركزي نستنتج أن $\bar{x}$ يتبع القانون الطبيعي.

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} \ ; \ \delta_{\bar{x}})$$

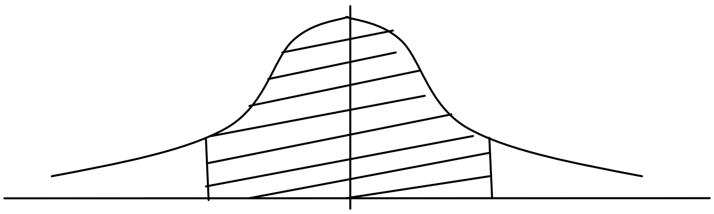
$$Z_i = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}} \backsim N(0;1)$$

- $\mu_{\bar{x}} = \mu = 1000$
- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{125}{\sqrt{100}} = 12.5$

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} = 1000 \ ; \ \delta_{\bar{x}} = 12.5)$$

$$Z_i = \frac{\bar{x} - 1000}{12.5} \backsim N(0;1)$$

$$P(970 \le \bar{x} \le 1030) = P\left(\frac{970-1000}{12.5} \le \ Z \le \frac{1030-1000}{12.5}\right)$$
$$= P(-2.4 \le Z \le +2.4) = 2 * P(-\infty \le Z \le 2.4) - 1$$
$$= 2 * \emptyset(2.4) - 1 = 2 * (0.9918) - 1 = \mathbf{0.9836}$$



مثال7: شركة مختصة في صناعة الحافلات وتقترح 70 كغ لوزن الراكب بانحراف معياري 24 كغ. إذا علمت أنها قامت بتصميم حافلة لنقل العمال حمولتها القصوى هي 2400 كغ وتتسع إلى 36 راكب.

المطلوب: ما هو احتمال أن تحمل هذه الحافلة أكبر من حمولتها ؟

الحل:

$$\mu = 70 \quad / \quad \delta = 24 \quad / \quad n = 36$$

نلاحظ أن:

$$\bar{x} = \frac{2400}{36} = 80$$

- حساب الاحتمال: $P(\bar{x} \ > 80) = \ ?$

توزيع المجتمع مجهول وحجم العينة ($n \ \ge 30$)، وبالإستناد على مبرهنة الحد المركزي نستنتج أن $\bar{x}$ يتبع القانون الطبيعي.

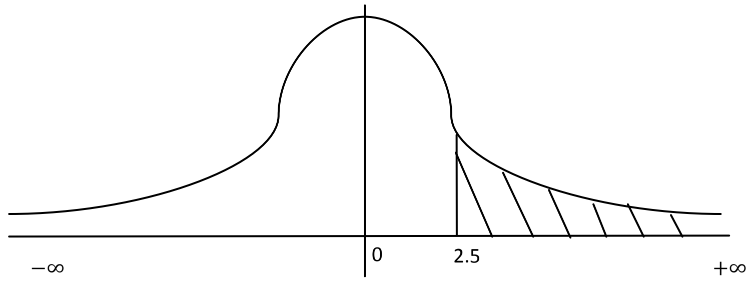
$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} \ ; \ \delta_{\bar{x}})$$

$$Z_i = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}} \backsim N(0;1)$$

- $\mu_{\bar{x}} = \ \mu = 70$
- $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{24}{\sqrt{36}} = 4$

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}} = 70 \ ; \ \delta_{\bar{x}} = 4)$$
$$Z_i = \frac{\bar{x} - 70}{4} \backsim N(0;1)$$

$$P(\bar{x} > 80) = P\left(\frac{\bar{x}-70}{4} > \frac{80-70}{4}\right) = P(Z > 2.5) = 1 - P(-\infty \leq Z \leq 2.5) = 1 - \emptyset(2.5) = 1 - 0.9938 = \mathbf{0.0062}$$



ثالثا: توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\overline{x_1} - \overline{x_2})$:

1. توزيع المعاينة للفرق $(\overline{x_1} - \overline{x_2})$ عندما يكون المجتمعين طبيعين وذو تباينين معلومين:

إذا كانت (x_1، x_2، x_3، ....، x_n) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه (توقعه) μ_1 وتباينه ${\delta_1}^2$ معلوم، وكانت (x_1، x_2، x_3، ....، x_n) عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع آخر له توزيع طبيعي أيضا متوسطه (توقعه) μ_2 وتباينه ${\delta_2}^2$ معلوم، ورمزنا لمتوسط العينة الأولى ب $\overline{x_1}$ و لمتوسط العينة الثانية ب $\overline{x_2}$، فإن المتغير العشوائي $(\overline{x_1} - \overline{x_2})$ يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$\overline{x_1} - \overline{x_2} \sim N(\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \; ; \; \delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}})$$

$$Z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - \mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}}{\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}} \sim N(0;1)$$

- $\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \mu_{\overline{x_1}} - \mu_{\overline{x_2}} = \mu_1 - \mu_2$
- $\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \delta_{\mathrm{D}} = \delta_{\overline{x_1}} + \delta_{\overline{x_2}} = \sqrt{\frac{{\delta_1}^2}{n_1} + \frac{{\delta_2}^2}{n_2}}$

مثال8: إذا كان متوسط الدخل الشهري لعائلات المدينة الأولى هو 16500دج مع انحراف معياري هو 2500دج ويتبع التوزيع الطبيعي، و متوسط الدخل الشهري لعائلات المدينة الثانية هو 15700دج مع انحراف معياري هم 2000دج ويتبع التوزيع الطبيعي. سحبنا عينة عشوائية من المدينة الأولى حجمها 125 عائلة وعينة أخرى مستقلة عن الأولى من المدينة الثانية حجمها 100 عائلة.

المطلوب:

1- أوجد احتمال أن يكون متوسط الدخل للعينة الأولى أكبر من متوسط الدخل للعينة الثانية بأكثر من 330دج ؟

2- أوجد احتمال أن يكون متوسط الدخل للعينة الأولى أقل من متوسط الدخل للعينة الثانية ؟

الحل:

$$\mu_1 = 16500 \quad / \quad \delta_1 = 2500 \quad / \quad n_1 = 125$$

$$\mu_2 = 15700 \quad / \quad \delta_2 = 2000 \quad / \quad n_2 = 100$$

- حساب الاحتمال: $P(\overline{x_1} - \overline{x_2} > 0) = \ ?$

بما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي فإن $(\overline{x_1} - \overline{x_2})$ يتبع التوزيع الطبيعي.

$$\overline{x_1} - \overline{x_2} \backsim N(\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \ ; \ \delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}})$$

$$Z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - \mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}}{\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}} \backsim N(0;1)$$

- $\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \mu_{\overline{x_1}} - \mu_{\overline{x_2}} = \mu_1 - \mu_2 = 16500 - 15700 = \mathbf{800}$

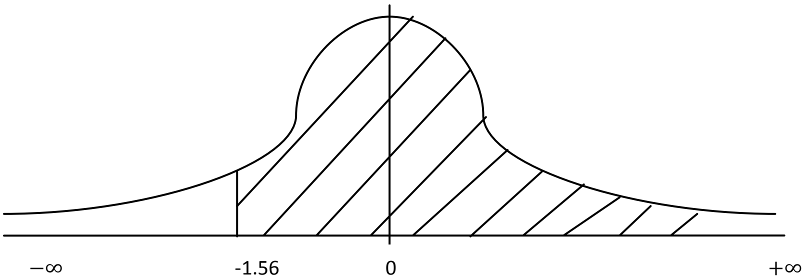
- $\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \delta_{\mathrm{D}} = \delta_{\overline{x_1}} + \delta_{\overline{x_2}} = \sqrt{\frac{{\delta_1}^2}{n_1} + \frac{{\delta_2}^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2500^2}{125} + \frac{2000^2}{100}} = \mathbf{300}$

$$\overline{x_1} - \overline{x_2} \backsim N(\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = 800 \ ; \ \delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = 300)$$

$$Z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - 800}{300} \backsim N(0;1)$$

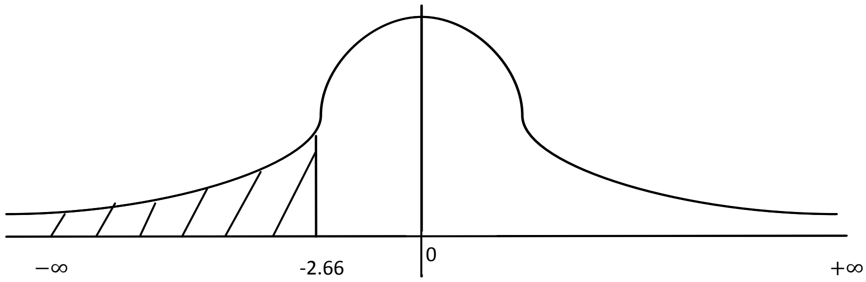
$$P(\overline{x_1} - \overline{x_2} > 0) = \ P\left(Z > \frac{330-800}{300}\right) = P(\mathrm{Z} > -1.56) =$$

$$P(-1.56 \le Z \le +\infty) = P(-\infty \le Z \le +1.56) = \emptyset(1.56) = \mathbf{0.9406}$$



- حساب الاحتمال: $P(\overline{x_1} - \overline{x_2} < 0) = \ ?$

$$P(\overline{x_1} - \overline{x_2} < 0) = P\left(Z < \frac{0-800}{300}\right) = P(Z < -2.66) =$$
$$P(-\infty \leq Z \leq -2.66) = 1 - \emptyset(1.56) = 1 - 0.9961 = \mathbf{0.0039}$$



2. <u>توزيع المعاينة للفرق $(\overline{x_1} - \overline{x_2})$ عندما يكون المجتمعين غير طبيعين وذو تباينين معلومين:</u>

إذا كانت (x_1، x_2، x_3، ....، x_n) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع متوسطه (توقعه) μ_1 وتباينه ${\delta_1}^2$ معلوم، وكانت (x_1، x_2، x_3، ....، x_n) عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع آخر متوسطه (توقعه) μ_2 وتباينه ${\delta_2}^2$ معلوم، ورمزنا لمتوسط العينة الأولى ب $\overline{x_1}$ و لمتوسط العينة الثانية ب $\overline{x_2}$. وكان حجم العينتين كبيرة بدرجة كافية ($n_1 + n_2 \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة $(\overline{x_1} - \overline{x_2})$ يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي وفق نظرية النهاية المركزية.

$$\overline{x_1} - \overline{x_2} \sim N(\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \; ; \; \delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}})$$

$$Z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - \mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}}{\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}} \sim N(0;1)$$

<u>مثال9:</u> سحبت عينتين عشوائيتين من شركتين مختلفتين لإنتاج الشوكولاطة، وكان معدل الأجور المدفوعة من قبل الشركة A إلى 36 عاملا تساوي 23000 دج بانحراف معياري 3600 دج، أما الأجور المدفوعة من قبل الشركة B إلى 40 عاملا تساوي 18000 دج بانحراف معياري 4000 دج.

<u>المطلوب:</u> أحسب احتمال أن معدل الأجور المدفوعة من قبل الشركة A لها متوسط على الأقل 6000 دج فأكثر من متوسط الأجور المدفوعة للشركة B ؟

<u>الحل:</u>

$$\mu_A = 23000 \quad / \quad \delta_A = 3600 \quad / \quad n_A = 36$$
$$\mu_B = 18000 \quad / \quad \delta_B = 4000 \quad / \quad n_B = 40$$

- حساب الاحتمال: $P(\overline{x_A} - \overline{x_B} \geq 6000) = ?$

المجتمعين مجهولين التوزيع وحجم العينتين كبيرة $(n_1 + n_2 \geq 30)$ فإن توزيع المعاينة **$(\overline{x_A} - \overline{x_B})$** يتبع التوزيع الطبيعي وفق لنظرية النهاية المركزية.

$$\overline{x_A} - \overline{x_B} \backsim N(\mu_{\overline{x_A}-\overline{x_B}} \;;\; \delta_{\overline{x_A}-\overline{x_B}})$$

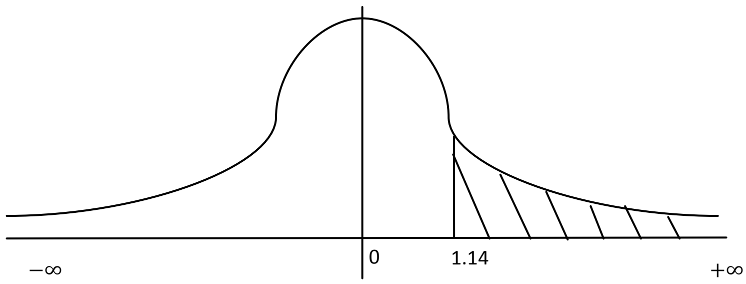
$$Z = \frac{(\overline{x_A} - \overline{x_B}) - \mu_{\overline{x_A}-\overline{x_B}}}{\delta_{\overline{x_A}-\overline{x_B}}} \backsim N(0;1)$$

- $\mu_{\overline{x_A}-\overline{x_B}} = \mu_{\overline{x_A}} - \mu_{\overline{x_B}} = \mu_A - \mu_B = 23000 - 18000 = \mathbf{5000}$
- $\delta_{\overline{x_A}-\overline{x_B}} = \delta_D = \sqrt{\frac{{\delta_A}^2}{n_A} + \frac{{\delta_B}^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{3600^2}{36} + \frac{4000^2}{40}} = \mathbf{871.77}$

$$\overline{x_A} - \overline{x_B} \backsim N(\mu_{\overline{x_A}-\overline{x_B}} = 5000 \;;\; \delta_{\overline{x_A}-\overline{x_B}} = 871.77)$$

$$Z = \frac{(\overline{x_A} - \overline{x_B}) - 5000}{871.77} \backsim N(0;1)$$

$$P(\overline{x_A} - \overline{x_B} \geq 6000) = P\left(Z > \frac{6000-5000}{871.77}\right) = P(Z > 1.14) =$$
$$1 - P(-\infty \leq Z \leq +1.14) = 1 - \emptyset(1.14) = 1 - 0.8729 = \mathbf{0.1271}$$



رابعا: توزيع المعاينة لنسبة العينة p :

هناك الكثير من الحالات التي تكون فيها المعلمة الأساسية هي النسبة، كنسبة الناخبين في مجتمع معين، نسبة الوحدات غير صالحة للإستعمال ويرمز للنسبة بالرمز P وتسمى نسبة المجتمع، حيث تمثل P احتمال تحقق الحادث أو الظاهرة في المجتمع.

بينما احتمال عدم تحقق الحادث أو الظاهرة في المجتمع فيرمز لها بالرمز q حيث أن p و q مكملان لبعضهما البعض ذلك أن: q=1-p، وانطلاقا من كون P نسبة المجتمع فإن p هي نسبة العينة وهي أفضل إحصائية يمكن استخدامها للإستدلال بالنسبة P وتحسب بالعلاقة التالية:

$$p = \frac{\text{عدد مفردات العينة التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة}}{\text{حجم العينة}}$$

1. <u>المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للنسبة p :</u>

إذا كان لدينا مجتمع ما نسبة صفة معينة فيه هي P، وتم سحب عينة منه ذات حجم n فإن نسبة هذه العينة هي p، وأن قيمة المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع هذه المعاينة يكونان كما يلي:

- $\mu_{p} = P$

$$\begin{cases} \delta_{p} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} & \text{si } n < 0.05 * N \quad \underline{\text{ou}} \quad N = ? \\ \delta_{p} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si } n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

حيث:

μ_{p}: متوسط توزيع المعاينة للنسبة.

P: نسبة النجاح في المجتمع.

q: نسبة الفشل في المجتمع. (q=1- p)

δ_{p}: الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للنسبة.

<u>**مثال10:**</u> حدد كلا من المتوسط والانحراف المعياري لنسبة العينة في الحالات التالية:

1- عينة حجمها 100، سحبت من مجتمع نسبته 0.5 ؟
2- عينة حجمها 100، سحبت من مجتمع نسبته 0.5 ؟
3- ما هو تعليقك على النتيجتين ؟

<u>**الحل:**</u>

1- <u>تحديد كلا من المتوسط والانحراف المعياري لنسبة العينة علما أن:</u>

$$P = 0.5 \;/\; n = 100$$

- ✓ <u>متوسط العينة للنسبة هو:</u> $\mu_{p} = P = 0.5$
- ✓ <u>الانحراف المعياري لنسبة العينة هو:</u> $\delta_{p} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{100}} = 0.05$

2- <u>تحديد كلا من المتوسط والانحراف المعياري لنسبة العينة علما أن:</u>

$$P = 0.5 \ / \ n = 20$$

- ✓ متوسط العينة للنسبة هو: $\mu_{\text{p}} = \text{P} = 0.5$
- ✓ الانحراف المعياري لنسبة العينة هو: $\delta_{\text{p}} = \sqrt{\frac{\text{P}(1-\text{P})}{n}} = \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{20}} = 0.11$

3- التعليق على النتائج: نلاحظ أن قيمة متوسط النسبة لم يتغير بتغير حجم العينة في نفس المجتمع، بينما ارتفعت قيمة الانحراف المعياري بانخفاض حجم العينة.

2. نوع توزيع المعاينة للنسبة p :

إن توزيع المعاينة للنسبة p يمكن تقريبه إلى التوزيع الطبيعي للعينات كبيرة الحجم شرط تحقق الشرطين التاليين: $n * P \geq 5$ و $n * q \geq 5$ وهذا ما توضحه النظرية التالية التي تقول:

"إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع احصائي يتبع توزيع ذو الحدين الذي نسبته P، ووجد أن النسبة المتوفرة من العينة هي p، فإن توزيع المعاينة للنسبة p يقترب من التوزيع الطبيعي الذي متوسطه P وتباينه $\frac{\text{P}(1-\text{P})}{n}$ عندما يكون حجم العينة كبير بدرجة كافية وكانت كل من $n * P \geq 5$ و$n * q \geq 5$."

$$\text{p} \backsim N(\mu_{\text{p}} = \text{P} \ ; \quad \delta_{\text{p}} = \sqrt{\frac{\text{P}(1-\text{P})}{n}})$$

$$Z_i = \frac{\text{p} - \mu_{\text{p}}}{\delta_{\text{p}}} \backsim N(0;1)$$

مثال11: إذا كان احتمال نجاح طالب بدون ديون في قسم العلوم التجارية هو 0.8. أخذت عينة عشوائية حجمها 50 طالبا من أولئك الذين يدرسون في القسم.

المطلوب: ما هو احتمال أن تزيد نسبة هؤلاء الطلبة بدون ديون على 70% ؟

الحل:

$$P = 0.8 \ / \quad \text{q} = 1 - \text{P} = 0.2 \quad / \ n = 50$$

- حساب الاحتمال: $P(\text{p} > 0.7) = \ ?$

بما أن حجم العينة كبير و $n * P = 40 > 5$ و $n * q = 10 > 5$ فإن p يتبع التوزيع الطبيعي.

$$p \sim N(\mu_p \quad ; \quad \delta_p)$$

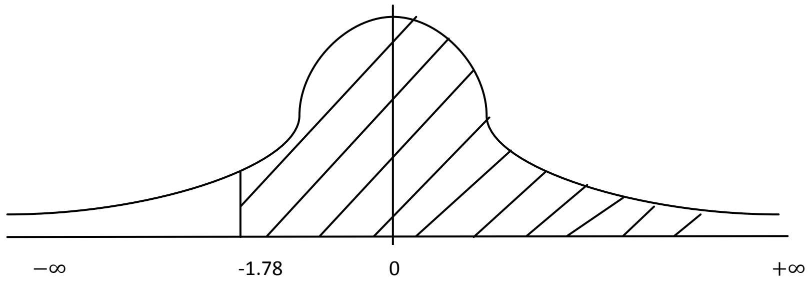
$$Z_i = \frac{p - \mu_p}{\delta_p} \sim N(0;1)$$

- $\mu_p = P = 0.8$
- $\delta_p = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{50}} = 0.056$

$$p \sim N(\mu_p = 0.8 \quad ; \quad \delta_p = 0.056)$$

$$Z_i = \frac{p - 0.8}{0.056} \sim N(0;1)$$

$$P(p > 0.7) = P\left(Z > \frac{0.7-0.8}{0.056}\right) = P(Z > -1.78) =$$
$$P(-1.78 \le Z \le +\infty) = P(-\infty \le Z \le +1.78) = \emptyset(1.78) = \mathbf{0.9625}$$



خامسا: توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين $(p_1 - p_2)$:

إذا أخذنا عينتان مستقلتان حجمهما n_1 و n_2 من مجتمعين يخضع أول هما لتوزيع ذو الحدين الذي نسبته P_1 والثاني يخضع كذلك لتوزيع ذو الحدين الذي نسبته P_2، فإن الفرق بين النسبتين من العينتين $(p_1 - p_2)$ سيخضع تقريبا إلى التوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينتين كبير كما يلي:

$$p_1 - p_2 \sim N(\mu_{p_1-p_2} \quad ; \quad \delta_{p_1-p_2})$$

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - \mu_{p_1-p_2}}{\delta_{p_1-p_2}} \sim N(0;1)$$

- $\mu_{p_1-p_2} = \mu_{p_1} - \mu_{p_2} = P_1 - P_2$
- $\delta_{p_1-p_2} = \delta_D = \sqrt{P_c(1-P_c)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$

- $P_c = \frac{P_1.n_1+P_2.n_2}{n_1+n_2}$

$$p_1 - p_2 \backsim N(\mu_{p_1-p_2} = P_1 - P_2 \; ; \quad \delta_{p_1-p_2} = \sqrt{P_c(1-P_c)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})})$$

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{P_c(1-P_c)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} \backsim N(0;1)$$

مثال12: نفترض أن المنتوج A مستعمل من 30% من المستهلكين في المنطقة الأولى، و 25% من المستهلكين في المنطقة الثانية. فإذا سحبنا عينتان حجم كل واحدة 200 من كل منطقة.

المطلوب: ما هو احتمال أن نسبة استعمال المنتوج من طرف مستهلكي العينتين يكون أكبر في المنطقة الثانية عن الأولى ؟

الحل:

$$P_1 = 0.3 \; / \quad q_1 = 0.7 \quad / \quad n_1 = 200$$

$$P_2 = 0.25 \; / \quad q_2 = 0.75 \quad / \quad n_2 = 200$$

- حساب الاحتمال: $P(p_1 - p_2 < 0) = \; ?$

$$p_1 - p_2 \backsim N(\mu_{p_1-p_2} \; ; \quad \delta_{p_1-p_2})$$

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - \mu_{p_1-p_2}}{\delta_{p_1-p_2}} \backsim N(0;1)$$

- $\mu_{p_1-p_2} = P_1 - P_2 = 0.3 - 0.25 = \mathbf{0.05}$

- $\delta_{p_1-p_2} = \delta_D = \sqrt{P_c(1-P_c)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$

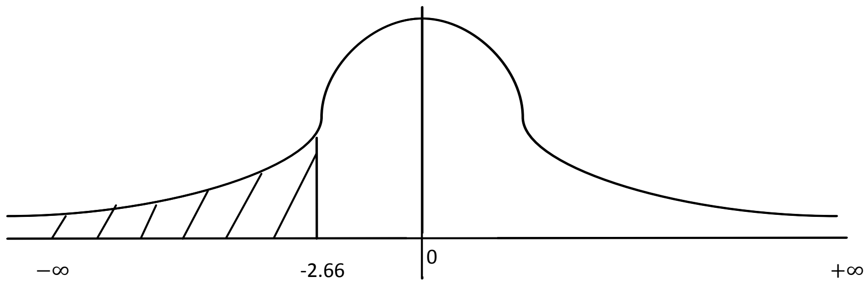
- $P_c = \frac{P_1.n_1+P_2.n_2}{n_1+n_2} = \frac{0.3*200+0.25*200}{400} = 0.275$

- $\delta_{p_1-p_2} = \delta_D = \sqrt{0.275(1-0.275)(\frac{1}{200}+\frac{1}{200})} = \mathbf{0.044}$

$$p_1 - p_2 \backsim N(\mu_{p_1-p_2} = 0.05 \; ; \quad \delta_{p_1-p_2} = 0.044)$$

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - 0.05}{0.044} \backsim N(0;1)$$

$$P(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2 < 0) = P\left(Z < \frac{0-0.05}{0.044}\right) = P(\mathrm{Z} < -1.13) =$$
$$P(-\infty \leq Z \leq -1.13) = 1 - \emptyset(1.13) = 1 - 0.8708 = \mathbf{0.1292}$$



سادسا: توزيع المعاينة لتباين العينة s^2:

إن تباين العينة s^2 هو أفضل احصائية يمكن استخدامها للإستدلال عن تباين المجتمع δ^2، تماما مثلما كانت $\bar{x}$ هي الأفضل ل μ.

1. المتوسط والانحراف المعياري لتباين العينة s^2:

إن تباين العينة s^2 والي حجمها n هو: $\mathrm{s}^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

- متوسط تباين العينة (متوسط القيم لجميع العينات الممكنة ذات الحجم n) هو:

$$\mathrm{E}(\mathrm{s}^2) = \delta^2$$

- الانحراف المعياري لتباين العينة هو:

$$\delta^2{}_S = \delta^2.\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

2. نوع توزيع المعاينة لتباين العينة s^2: مقدمة لتوزيع كي مربع:

إذا كانت (x_1 ،x_2 ،x_3 ،........، x_n) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع له توزيع الطبيعي متوسطه (توقعه) μ وتباينه δ^2، وكانت s^2 تباين العينة فإن المتغير $\boldsymbol{\chi}^2$ له توزيع كي مربع بدرجات حرية تساوي $n-1$.

حيث: $\chi^2 = \frac{s^2.(n-1)}{\sigma^2}$

إن توزيع كي مربع مثل توزيع ستودنت (T) من حيث أنه يتألف من مجموعة من المنحنيات، ولكنها تختلف عن توزيع T بأنها ملتوية إلى اليمين، والتي يتغير شكلها بتغيير عدد درجات الحرية

($V=n-1$) حيث بزيادة عدد درجات الحرية يصبح شكل المنحنى ملتويا نحو اليمين، ويقترب شكل المنحنى من منحنى التوزيع الطبيعي Z عندما يصبح عدد درجات الحرية ($V>30$).

وسنرجع بالتفصيل إلى توزيع كي مربع عند تطرقنا للتقدير بالمجال لتباين المجتمع.

مثال13: سحبت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بانحراف معياري 4.

المطلوب:

1- أوجد احتمال أن يكون تباين العينة أكبر أو يساوي 30 ؟

2- أوجد احتمال أن يكون تباين العينة أقل من 6 ؟

الحل:

$$\delta = 4 \quad / \quad n = 10$$

1- حساب الاحتمال: $P(s^2 \geq 30) = ?$

نستعمل توزيع كي مربع χ^2.

$$\begin{cases} V = n - 1 = 10 - 1 = 9 \\ P(s^2 \geq 30) = P\left(\frac{s^2.(n-1)}{\sigma^2} \geq \frac{30.(10-1)}{16}\right) = P\left(\chi^2 \geq 16.875\right) \end{cases}$$

من جدول توزيع كي مربع نحصل على:

$$P\left(\chi^2 \geq 16.875\right) = \mathbf{0.05}$$

2- حساب الاحتمال: $P(s^2 < 6) = ?$

$$\begin{cases} V = n - 1 = 10 - 1 = 9 \\ P(s^2 < 6) = P\left(\frac{s^2.(n-1)}{\sigma^2} < \frac{6.(10-1)}{16}\right) = P\left(\chi^2 < 3.375\right) \end{cases}$$

من جدول توزيع كي مربع نحصل على:

$$P\left(\chi^2 < 3.375\right) = 1 - P\left(\chi^2 \geq 3.375\right) = 1 - 0.95 = \mathbf{0.05}$$

سابعا: توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين s^2_1 و s^2_2:

إذا كانت s^2_1 و s^2_2 هما تبايني عينتين مستقلتين حجمهما على التوالي n_1 و n_2 مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس التوزيع وهو الطبيعي ذو التباينين σ^2_1 و σ^2_2 على الترتيب، فإن المتغير f حيث:

$F=\frac{s^2{}_1/б^2{}_1}{s^2{}_2/б^2{}_2}$ يكون له توزيع فيشر (F) بدرجات حرية على التوالي V_1 و V_2 بحيث: $V_1= n_1 -1$ و $V_2= n_2 -1$.

وما تجدر الاشارة إليه أن توزيع فيشر من أهم التوزيعات النظرية المستخدمة في دراسة الاحصاء التطبيقي، وهو توزيع ملتوي إلى اليمين ومداه نظريا يكون من الصفر إلى ما لا نهاية (فقيم F لا تكون سالبة)، وكلما زاد عدد درجات حريته فإنه يقترب من التوزيع الطبيعي.

مثال14: إذا كان لدينا: $n_1 = 16$ و $n_2 = 20$

- أوجد احتمال أن يأخذ المتغير F قيمة أكبر من 0.36 ؟

الحل:

$$n_1 = 16 \quad / \quad n_2 = 20$$

- حساب الاحتمال: $P(\text{F} > 0.36) = \ ?$

$$V_1= n_1 -1 =15 \qquad / \qquad V_2 = n_2 -1 =19$$

من جدول توزيع F نجد أن:

$$P\left(\text{F}_{(15;19)} > 0.36\right) = \mathbf{0.975}$$

تمارين غير محلولة:

التمرين 01:

إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي بتوقع 3 وتباين4.

1- ما هو احتمال أن يقع x ما بين 2 و 4 ؟

2- ما هو احتمال أن يكون x أكبر من 1 ؟

التمرين 02:

مجتمع احصائي يخضع للتوزيع الطبيعي، يتكون من المفردات التالية: (3 – 5 – 7 – 9). نسحب عينة من هذا المجتمع ذات حجم 2.

1- أحسب متوسط (التوقع) وتباين المجتمع ؟

2- أحسب عدد العينات الممكنة في حالة السحب بالارجاع والسحب بدون ارجاع ؟

3- أحسب متوسط وتباين توزيع المعاينة في حالة السحب بالارجاع والسحب بدون ارجاع ؟

التمرين 03:

مصنع ينتج كراسي ترتكز على قاعدة دائرية، اعتمادا على التجارب السابقة فإن مفتش الرقابة على العملية الانتاجية مقتنع أن متوسط قطر القاعدة الدائرية 5سم والانحراف المعياري لها هو 0.05سم، وتوزيع العملية الانتاجية هو التوزيع الطبيعي.

يهتم الفاحص بالمحافظة على متوسط قطر العملية الانتاجية عند 5سم، ولتحقيق ذلك تسحب عينات عشوائية بصفة دورية حجم كل منها 9 كراسي وذلك في محاولة لإكتشاف أية انحراف على الأرقام الطبيعية المشار إليها.

1- حدد توزيع المعاينة ل $\bar{x}$ ؟

2- نفرض أن الفاحص سحب عينة عشوائية من 9 كراسي وقيست أقطار قاعدتها ووجد أن متوسطها 5.004سم. فما هو احتمال أن متوسط القطر في هذه العينة العشوائية سيكون على الأقل 5.004سم ؟

3- ما هو حجم العينة التي يجب سحبها لتحقيق الخطأ المعياري ل $\bar{x}$ يساوي 0.001سم؟

التمرين 04:

سحبت عينة عشوائية حجمها 50 من مجتمع حجمه 400، حيث أن متوسط المجتمع يساوي 12 وتباينه يساوي 4.

1- أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة محصور ما بين 11 و13 ؟

2- أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة على الأكثر 12 ؟

التمرين 05:

مقاول قرر شراء كميات كبيرة من مصابيح الإضاءة عالية القوة من صاحب مصنع معين. صاحب المصنع أكد للمقاول أن هذه المصابيح لها متوسط عمر 100 ساعة بانحراف معياري 80 ساعة. المقاول قرر شراء مصابيح صاحب المصنع إذا كانمتوسط العمر لعينة عشوائية 64 من المصابيح هو 1010 ساعة على الأقل.

- ما هو احتمال أن المقاول سوف يشتري هذه المصابيح من هذا المصنع ؟

التمرين 06:

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان مستقلان x_1 و x_2، حيث أن x_1 يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 12 وتباين يساوي 40، و x_2 يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 8 وتباين يساوي 30. أخذنا عينة عشوائية من المجتمع الأول حجمها 20 و عينة عشوائية أخرى من المجتمع الثاني حجمها 15.

1- ما هو توزيع العيني للفرق بين متوسطي عينتين ؟
2- أحسب متوسط وتباين توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين ؟
3- ما هو احتمال أن لا يزيد الفرق بين المتوسطين عن 3 ؟

التمرين 07:

إذا كان متوسط العمر الانتاجي لمصابيح كهربائية ينتجها المصنع A هو 1000 ساعة وانحرافها المعياري هو 100 ساعة، بينما التي ينتجها المصنع B فمتوسط عمرها الانتاجي هو 800 ساعة وانحرافها المعياري هو 70 ساعة. سحبنا عينة عشوائية حجمها 100 مصباح من كل مصنع.

- أوجد احتمال أن يزيد متوسط العمر الانتاجي لمصابيح المصنع A عن متوسط العمر الانتاجي لمصابيح المصنع B بمقدار200 ساعة ؟

التمرين 08:

إذا كانت نسبة الديمقراطية من مجتمع الناخبين تساوي 60%، وتم سحب عينة عشوائية حجمها 150 ناخب من هذا المجتمع.

1- أوجد احتمال أن نسبة الديمقراطية في هذه العينة تكون أكبر من 65% ؟
2- ما هو احتمال أن نسبة العينة لن تبتعد عن نسبة المجتمع بأكثر من 0.05 ؟

التمرين 09:

يدرس في إحدى المدارس 500 تلميذا وتلميذة منهم 180 ذكور. سحبنا عينة عشوائية من هذه المدرسة تتمثل في 50 تلميذ وتلميذة.

- ما هو احتمال أن تكون نسبة الذكور في هذه المدرسة أكثر من 45% ؟

التمرين 10:

إذا كانت نسبة النجاح لطلبة السنة الأولى في قسم العلوم التجارية هي 80%،زكانت نسبة النجاح في قسم الحقوق هي 65%، وتم سحب عينة عشوائية حجمها 100 طالب من قسم العلوم التجارية وعينة أخرى حجمها 90 طالب من قسم الحقوق.

- أوجد احتمال أن تزيد نسبة النجاح في قسم العلوم التجارية عن نسبة النجاح في قسم الحقوق بمقدار 15% على الأكثر ؟

التمرين 11:

مجتمع احصائي معين يتزع توزيعا طبيعيا بانحراف معياري يساوي 5. سحبت عينة عشوائية حجمها 4 وحدات.

1- أوجد احتمال أن تباين العينة سوف يكون أقل من 2.5 ؟
2- أوجد احتمال أن تباين العينة سوف يكون أكبر أو يساوي 5 ؟

التمرين 12:

أخذت عينة عشوائية حجمها 11 من مجتمع احصائي معين، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 17 من مجتمع آخر مستقل عن الأول.

- أوجد احتمال أن نسبة تباين العينتين يكون على الأقل من 3.69 ؟

المحور الثالث:

نظرية التقدير

تمهيد:

إن دراسة الباحث للعينات وتوزيعاتها عن طريق احصاءاتها المحددة يهدف إلى الاستدلال على المعالم المناظرة لها في المجتمع، إلا أن تلك القيم التي يتم الحصول عليها عن طريق المعاينة لا تعكس بالضرورة القيم الحقيقية المناظرة لها فيه، مما يدفع الباحث إلى تقديرتلك المعالم أو المجالات التي تقع ضمنها بدرجة ثقة معينة.

في كل جوانب الحياة الاقتصادية والتجارية، في التجارة مثلا يوجد مشكل يتكون في معرفة مستوى المبيعات للسنة المقبلة، بأن هذا المستوى من المبيعات يعتمد عليه لتقويم الميزانية ومن تم يعتمد عليه كذلك في توظيف اليد العاملة ومستوى الاستثمار. فيمكن للإحصاء تقديم وسائل بالقيام بعملية التقدير، لكن هذه المساعدة محدودة، لأن الإحصاء يستعمل العينات للوصول إلى خلاصة عن المجتمع في المستقبل، وهذا الأخير في المستقبل صعب التحديد.

إذن يعد تقديرمعالم المجتمع الاحصائي بدلالة إحدى العينات العشوائية المأخوذة منه من أحد الأسباب الرئيسية لتحليل العينات، ويمكن التمييز بين نوعين من التقدير: **التقدير بالنقطة (التقدير النقطوي) والتقدير بالمجال (مجال أو فترة الثقة)**.

أولا: تعريف التقدير:

المقصود بالتقدير هو تقدير معالم المجتمع الاحصائي، والتي غالبا ما تكون مجهولة، ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها من بيانات العينة، فقد يكون المطلوب تقدير متوسط دخل الدولة، أو تقدير متوسط عمر الناخب، تقدير مبيعات السنة القادمة...الخ.

وهناك نوعان من التقدير، يسمى الأول **التقدير بالنقطة (التقدير النقطوي)**، ويسمى الثاني **التقدير بالمجال (مجال أو فترة الثقة)**.

ثانيا: شروط التقدير:

في الكثير من الأحيان تكون أكثر من احصائية واحدة قابلة للإستعمال كتقدير لمعلم مجهول المجتمع، مثال: يمكن استعمال متوسط العينة $\bar{x}$، الوسيط M_e، المنوال M_o لتقدير متوسط المجتمع μ، إلا أنه يجب أن تتوفر ثلاثة شروط في المقدر حتى يوصف بالمقدر الجيد وهي:

1. إحصائية غير منحازة:

نقول أن احصائية غير منحازة إذا كان التوقع الرياضي لهذه الاحصائية يساوي المعلم المقدر أي أن:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

مثال: يقال عن الإحصائية $\bar{x}$ هي مقدرة غير منحازة للمعلم المجهول μ لأن: $E(\bar{x}) = \mu$

ويقال عن الإحصائية s^2 هي مقدرة غير منحازة للمعلم المجهول δ^2 لأن:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \rightarrow \quad E(s^2) = \delta^2$$

أما:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \rightarrow \quad E(s^2) \neq \delta^2$$

2. إحصائية فعالة (الكفاءة):

نقول عن المقدر أنه فعال إذا كان له خطأ معياري أقل، بمعنى آخر أن تكون الإحصائية الأولى أكثر فعالية من الإحصائية الثانية إذا كان خطأها المعياري أقل من الخطأ المعياري للثانية.

مثال: نريد أن نجد المقدر الفعال للتوقع (المتوسط) المجتمع μ، لدينا الاختيار بين المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ والوسيط M_e:

إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي فإنه لدينا:

$E(\bar{x}) = \mu$ $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$	$E(M_e) = \mu$ $\delta_{M_e} = 1.2533\frac{\delta}{\sqrt{n}}$

بما أن $\delta_{M_e} > \delta_{\bar{x}}$ إذن الاحصائية $\bar{x}$ هي مقدر فعال لمتوسط المجتمع μ.

3. إحصائية مكثفة (التقارب):

نقول أن الاحصائية مكثفة إذا اقترب المُقدِر $\hat{\theta}$ من المُقدَر θ كلما اقترب حجم العينة n من ما لا نهاية.

$$\lim_{n\to+\infty} P(\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon) = 1$$

ε: قيمة صغيرة.

مثال: نقول أن متوسط العينة $\bar{x}$ هو احصائية مكثفة لمتوسط المجتمع μ لأن:

$$V(\bar{x}) = {\delta_{\bar{x}}}^2 = \frac{\delta^2}{n} = 0 \quad ؛ \quad E(\bar{x}) = \mu$$

$$n \rightarrow +\infty$$

وبهذا يمكن القول بأن الاحصائية $\bar{x}$ هي غير منحازة و فعالة و مكثفة ل μ.

ثالثا: التقدير بالنقطة (التقدير النقطوي):

يعد التقدير بالنقطة من أبسط طرق التقدير، وهو عبارة عن قيمة واحدة فقط يأخذها الثابت الاحصائي المقدر بدلالة التابع الاحصائي المقابل، والمحسوب من تلك العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع الاحصائي المراد تقدير أحد معالمه. بعبارة أخرى يتمثل التقدير بالنقطة في تقدير المعلمة بقيمة واحدة، مثال: يكون أفضل تقدير لتوقع (متوسط) المجتمع μ هو المتوسط الحسابي $\bar{x}$ المسحوب من عينة عشوائية سحبت من ذلك المجتمع، على اعتبار أن هناك احتمالا كبيرا ليكون المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ قريبا من متوسط المجتمع μ غير المعلوم.

ويجب التمييز بين المقدر والتقدير، فالمقدر هو قاعدة أو طريقة تستخدم فيها بيانات العينة لإيجاد قيمة رقمية لمعلمة المجتمع المجهولة، أما التقدير فهو القيمة الرقمية التي نتحصل عليها نتيجة استخدام هذه الطريقة.

خلاصة:

1- يعتبر المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ أحسن مقدر عند النقطة لتوقع (متوسط) المجتمع μ ونكتب $\widehat{\mu} = \bar{x}$.

2- يعتبر تباين العينة s^2 أحسن مقدر عند النقطة لتباين المجتمع δ^2 ونكتب $\widehat{\delta^2} = s^2$.

3- تعتبر نسبة العينة p أحسن مقدر عند النقطة لنسبة المجتمع P ونكتب $\widehat{P} = p$.

مثال1: اليك العينة التالية المسحوبة من مجتمع غير محدود: 5 – 10 – 8 – 6 – 15 – 16

- أحسب أحسن تقدير بالنقطة لتوقع (متوسط) وتباين المجتمع ؟

الحل:

$$x_i = \{5\text{-}10\text{-}8\text{-}6\text{-}15\text{-}16\} \quad / \quad n=6$$

$\bar{x}$ هو أحسن تقدير عند النقطة لمتوسط المجتمع μ.

s^2 هو أحسن تقدير عند النقطة لتباين المجتمع δ^2.

x_i	5	10	8	6	15	16	**60**
$(x_i-\bar{x})^2$	25	0	4	16	25	36	**106**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{60}{6} = \mathbf{10}$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2}{n-1} = \frac{106}{5} = \mathbf{21.2}$$

$\widehat{\mu} = \bar{x} = 10$
$\widehat{\delta^2} = s^2 = 21.2$

مثال2: لتقدير عدد الكلمات في أحد الكتب أخذت عينة حجمها 10 صفحات عشوائيا من ذلك الكتاب، وتم عد الكلمات فيه، فكان كما يلي:

309 – 310 – 295 – 305 – 300 – 297 – 291 – 303 – 317 – 283

1- كم تقدر متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة ؟
2- إذا كان الكتاب يحتوي على 400 صفحة، فكم تقدر عدد الكلمات فيه ؟
3- قدر الانحراف المعياري لعدد الكلمات في الصفحة الواحدة ؟

الحل:

نفرض أن x_i متغير عشوائي يعبر عن عدد الكلمات في الصفحة الواحدة.

x_i= {309-310-295-305-300-297-291-303-317-283} / n=10

1- تقدير متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{309 + 310 + \cdots + 283}{10} = \mathbf{301}$$

ومنه فإنه يتم تقدير متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة ب 301 كلمة.

$$\widehat{\mu} = \bar{x} = \mathbf{301}$$

2- عدد كلمات الكتاب الذي يحتوي 400 صفحة = متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة × عدد الصفحات = 301 × 400 = **120400**

3- تقدير الانحراف المعياري لعدد الكلمات في الصفحة الواحدة:

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(309-301)^2+(310-301)^2+\cdots+(283-301)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{898}{9}} = \mathbf{9.98}$$

$$\widehat{\delta} = s = \mathbf{9.98}$$

رابعا: التقدير بالمجال (مجال أو فترة الثقة):

إننا لا نتوقع الحصول على معالم المجتمع المقدرة بدون خطأ مهما كان التقدير، علما بأن التقدير يزداد ثقة بزيادة حجم العينة، ولكن لا يوجد سبب يرد امكانية الحصول على تقدير معالم بدون خطأ. لذا يجب إعطاء مجال أو فترة معينة لتوقع وقوع معالم المجتمع داخلها، ومثل هذه الفترة تسمى بفترة الثقة أو مجال الثقة أو التقدير بالمجال.

في التقدير بالمجال أو فترة الثقة نحصل على مدى أو فترة تتحدد بحدين (الحد الأدنى والحد الأعلى) واللذان نحصل عليهما من العينة. ونلاحظ هنا من أن التقدير بالمجال (مجال أو فترة الثقة) تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائي في الكثير من الحالات فمثلا: إذا قدرنا أن المتوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح ما بين 20 سنة كحد أدنى و 60 سنة كحد أعلى، نكون قد تحصلنا على تقدير لمتوسط أعمار الناخبين في المجتمع، ونلاحظ أن هذا المجال $[20 - 60]$ يحتوي على عدد لا نهائي من الأعمار، بمعنى أن العدد لا يقتصر فقط على الأعداد الصحيحة والتي تشمل السنوات، ولكنها تشمل أيضا كسور السنوات، الشهور والأيام...الخ.

إن تحديد المجال $[a - b]$ الذي يضم معالم المجتمع بإحتمال قدره $(C = 1 - \alpha)$ والذي يسمى مستوى الثقة حيث أن:

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha = C$$

حيث أن a و b متغيران، a تمثل الحد الأدنى و b الحد الأعلى.

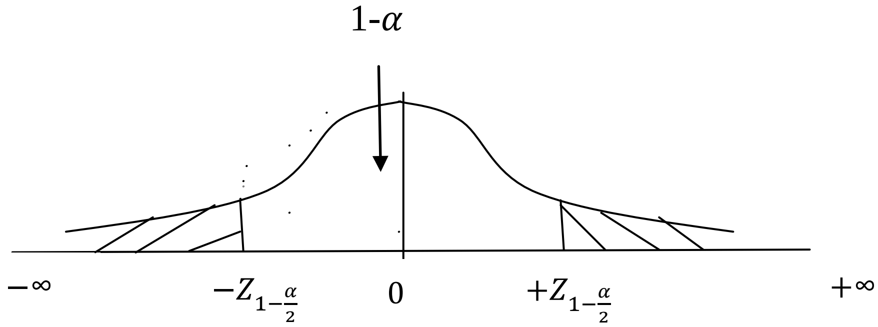
لو فرضنا أننا سحبنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع μ وانحراف معياري δ. فإن متوسط الحسابي لهذه العينة $\bar{x}$ يتبع كذلك التوزيع الطبيعي بتوقع (متوسط) $\mu_{\bar{x}}$ وخطأ معياري $\mu_{\bar{x}}$.

$$\bar{x} \backsim N(\mu_{\bar{x}}\ ;\ \delta_{\bar{x}})$$

وعندنا: $\mu_{\bar{x}} = \mu$

$$\bar{x} \backsim N(\mu\ ;\ \delta_{\bar{x}})$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\delta_{\bar{x}}} \backsim N(0;1)$$



إذن احتمال أن تقع Z بين قيمتين $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ هو $1 - \alpha$

نجد أن:

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha = C$$

وعندنا كذلك: $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\delta_{\bar{x}}} \sim N(0;1)$

إذن:

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\delta_{\bar{x}}} \leq +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha = C$$

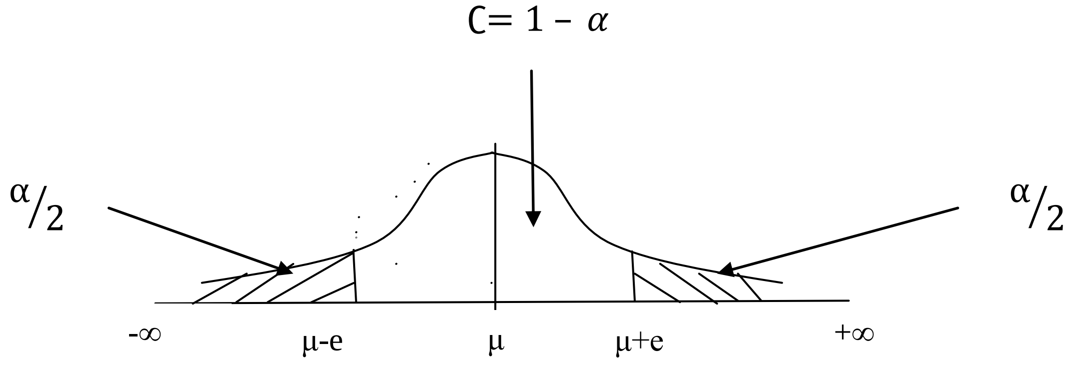
وبضرب الأطراف الثلاثة ب $\delta_{\bar{x}}$ نحصل على:

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}} \leq \bar{x}-\mu \leq +Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha = C$$

وبطرح $\bar{x}$ من كل حد، ثم الضرب بسالب واحد نحصل على:

$$\boxed{\boldsymbol{P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha = C}}$$

وهكذا نكون حددنا طرفي أو حدي المجال الذي يقع ضمنه التوقع (المتوسط) المجتمع μ، حيث أن الحد الأدنى للفترة هو $(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}})$ والحد الأعلى هو $(\bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}})$ باحتمال $(1 - \alpha)$.



C: مستوى الثقة (متمم α).

α: مستوى المعنوية (المجازفة $\alpha = 1 - C$)

e: الخطأ المقبول ($e = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}}$)

والجدول التالي يوضح أهم مستويات الثقة ومعاملاتها ($Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$) في حالة استخدام التوزيع الطبيعي:

الجدول رقم 01: أهم مستويات الثقة ومعاملاتها في حالة استعمال التوزيع الطبيعي

مستوى الثقة C	%90	%95	%99
مستوى المعنوية $\alpha = 1 - C$	%10	%5	%1
معامل الثقة $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	1.64	1.96	2.57

1. التقدير بالمجال (فترة الثقة) لمتوسط (توقع) المجتمع μ:

1.1- التقدير بالمجال لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع δ^2 معلوما:

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذا توزيعا طبيعيا وتباينه معلوما، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وطالما نتكلم عن تقدير متوسط المجتمع μ فإن أول ما نفكر فيه هو المتوسط الحسابي للعينة. ومجال الثقة لمتوسط المجتمع μ في هذه الحالة يكون كما يلي:

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} .\ \delta_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$\mu \in [\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\bar{x}}\ ;\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\bar{x}}]$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\bar{x}}]$$

حيث:

$$\begin{cases} \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n < 0.05 * N \ \ \underline{\text{ou}} \ \ N = ? \\ \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si} \quad n \ge 0.05 * N \end{cases}$$

مثال3: أخذت عينة عشوائية تتكون من 100 عائلة جزائرية، فوجدنا أن متوسط الدخل الشهري لهذه العينة هو 25000 دج. نفترض كذلك أننا نعلم أن تباين الدخل الشهري للعائلات الجزائرية يساوي 25000 دج.

- ما هو مجال الثقة لمتوسط الدخل الشهري للعائلات الجزائرية عند مستوى الثقة 95%؟

<u>الحل:</u>

$$n = 100 \;/\; \bar{x} = 25000 \;/\; \delta^2 = 25000 \;/\; C = 95\%$$

δ (الانحراف المعياري للمجتمع) معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}\right) = C = 95\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}]$$

$$* \; C = 95\% \to \alpha = 1 - C = 5\% \to Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = \mathbf{1.96}$$

القيمة 1.96 مقروأة من جدول توزيع الطبيعي (Z).

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{25000}}{\sqrt{100}} = 15.81$$

$$\mu \in [25000 \pm (1.96 * 15.81)]$$

$$\mu \in [25000 \pm 30.98]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{24969.02}\;;\;\mathbf{25030.98}]\;\boldsymbol{avec}\;\mathbf{C = 95\%}}$$

إذا كررنا التجربة عدة مرات بنفس حجم العينة $(n = 100)$ فإننا نكون واثقين 95% بأن يكون متوسط المجتمع μ محصور بين القيمتين $\boxed{24969.02}$ دج و $\boxed{25030.98}$ دج.

<u>مثال4:</u> شركة مختصة في صناعة العجلات المطاطية تخضع أقطارها للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري 1 سم. أخذت عينة عشوائية حجمها 26 عجلة من مجتمع حجمه 200 عجلة فكان المتوسط الحسابي لأقطار هذه العجلات هو 40 سم.

- أوجد فترة الثقة 99% لمعدل أقطار العجلات التي تنتجها الشركة ؟

<u>الحل:</u>

$$N = 200 \;/\; n = 16 \;/\; \bar{x} = 40 \;/\; \delta = 1 \;/\; C = 99\%$$

δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}\right) = C = 99\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}]$$

$* \text{C}= 99\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C}= 1\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = \mathbf{2.57}$

$* n=16 > 0.05 * N = 10$

إذن نستعمل معامل التصحيح

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{1}{\sqrt{16}} * \sqrt{\frac{200-16}{200-1}} = 0.24$$

$$\mu \in [40 \pm (2.57 * 0.24)]$$

$$\mu \in [40 \pm 0.61]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{39.39}\ ;\ \mathbf{40.61}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C}= \mathbf{99}\%}$$

<u>مثال5:</u> أجرت اتصالات الجزائر دراسة عن فترة الثقة لإستخدام الهاتف للمكالمات المحلية. لذا سحبت عينة عشوائية محلية مكونة من 10000 نداء ووجد أن معدل استخدامهم للهاتف كان يساوي 4.2 دقيقة، وكان معلوما أن الانحراف المعياري لإستخدام الهاتف يساوي 3.1 دقيقة.

1- قدر قيمة متوسط مكالمات اتصالات الجزائر بمستوى ثقة 90% ثم 95% ثم 99% ؟

2- ماذا تستنتج ؟

<u>الحل:</u>

$$n = 10000\ /\ \bar{x} = 4.2\ /\ \delta = 3.1$$

1- <u>ايجاد مجال الثقة لمتوسط مكالمات اتصالات الجزائر (μ)عند مستوى الثقة 90%:</u>

δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}\right) = \text{C}= 90\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}]$$

$* \text{C}= 90\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C}= 10\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.95} = \mathbf{1.64}$

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{3.1}{\sqrt{10000}} = 0.031$$

$$\mu \in [4.2 \pm (1.64 * 0.031)]$$

$$\mu \in [4.2 \pm 0.05]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{4.15}\ ;\ \mathbf{4.25}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C}= \mathbf{90}\%}$$

- ايجاد مجال الثقة لمتوسط مكالمات اتصالات الجزائر (μ)عند مستوى الثقة 95%:

$$* \text{C} = 95\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C} = 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = \mathbf{1.96}$$

$$\mu \in [4.2 \pm (1.96 * 0.031)]$$

$$\mu \in [4.2 \pm 0.06]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{4.14}\ ;\ \mathbf{4.26}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C} = \mathbf{95\%}}$$

- ايجاد مجال الثقة لمتوسط مكالمات اتصالات الجزائر (μ)عند مستوى الثقة 99%:

$$* \text{C} = 99\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C} = 1\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = \mathbf{2.57}$$

$$\mu \in [4.2 \pm (2.57 * 0.031)]$$

$$\mu \in [4.2 \pm 0.079]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{4.121}\ ;\ \mathbf{4.279}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C} = \mathbf{99\%}}$$

2- الاستنتاج:

كلما زاد مستوى الثقة (C↑)، تنقص مستوى المعنوية (المجازفة α ↓)، ورتفع قيمة معامل الثقة Z المقروأة من جدول الطبيعي (Z ↑)، ويؤدي ذلك إلى زيادة في طول المجال (مدى المجال). إذن التقدير بالمجال هو أكثر غموضة وأقل دقة.

2.1- التقدير بالمجال لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمعδ^2 مجهولا وحجم العينة كبيرة ($30 \leq n$):

غالبا ما يكون تباين المجتمع مجهولا وحجم العينة كبيرة ($30 \leq n$)، وبتطبيق نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي. ونقوم بإستعمال الانحراف المعياري للعينة S بدل الانحراف المعياري للمجتمع δ المجهول، وفي هذه الحالة يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع كما يلي:

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\ \widehat{\delta_{\bar{x}}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\ \widehat{\delta_{\bar{x}}}\right) = 1 - \alpha = \text{C}$$

$$\mu \in [\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}\ ;\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}\ ]$$

حيث:

$$\begin{cases} \widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n < 0.05 * N \ \ \underline{\text{ou}} \ \ N = ? \\ \widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si} \quad n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

<u>مثال6</u>: أخذت عينة عشوائية مكونة من 100 مفردة بمتوسط 80 وانحراف معياري 30 من مجتمع مكون من 1000 مفردة.

- أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ عند مستوى الثقة 95%؟

<u>الحل:</u>

$$\text{N} = 1000 \ / \quad n = 100 \quad / \ \ \bar{x} = 80 \quad / \quad S = 30 \quad / \quad \text{C} = 95\%$$

δ مجهولة وحجم العينة كبيرة $(n > 30)$ إذن بتطبيق نظرية النهاية المركزية نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}\right) = \text{C} = 95\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

$$* \ \text{C} = 95\% \rightarrow \alpha = 1 - \text{C} = 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = \mathbf{1.96}$$

$$* \ n=100 > 0.05 * 1000 = 50$$

إذن نستعمل معامل التصحيح

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{30}{\sqrt{100}} * \sqrt{\frac{1000-100}{1000-1}} = 2.84$$

$$\mu \in [80 \pm (1.96 * 2.84)]$$

$$\mu \in [80 \pm 5.56]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{74.44} \ ; \ \mathbf{85.56}] \ \boldsymbol{avec} \ \ \text{C} = \mathbf{95\%}}$$

<u>مثال7</u>: أخذت عينة عشوائية من مصابيح كهربائية حجمها 64، ووجد أن متوسط أعمارها 800 ساعة، وبانحراف معياري 40 ساعة.

- قدر بالمجال معدل أعمار المصابيح عند مستوى الثقة 90%؟

الحل:

$$n = 64 \quad / \quad \bar{x} = 800 \quad / \quad S = 40 \quad / \quad C = 90\%$$

δ مجهولة وحجم العينة كبيرة $(30 < n)$ إذن بتطبيق نظرية النهاية المركزية نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}\right) = C = 95\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

$$* \, C = 90\% \rightarrow \alpha = 1 - C = 10\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.64}$$

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{40}{\sqrt{64}} = 6.66$$

$$\mu \in [800 \pm (1.64 * 6.66)]$$

$$\mu \in [800 \pm 10.93]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{789.07}\ ;\ \mathbf{810.93}]\ \boldsymbol{avec}\ C = \mathbf{90\%}}$$

3.1- التقدير بالمجال لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع δ^2 مجهولا وحجم العينة صغيرة $(30 > n)$:

إن تحديد مجال الثقة لمتوسط المجتمع في العينات الصغيرة والمأخوذة من مجتمعات طبيعية مجهولة التباين يقودنا الحديث على توزيع احتمالي يدعى توزيع ستودنت (T).

توزيع توزيع ستودنت (T) هو أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة تكمن تطبيقاته في نظرية المعاينة واختبارالفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي في العينات الصغيرة المسحوبة من مجتمعات مجهولة التباين، ودالة الكثافة الاحتمالية تكون كما يلي:

$$\text{f (t)} = \text{C}\ (1 + \frac{t^2}{V})^{-\text{V}+\frac{1}{2}}$$

$$-\infty < t < +\infty$$

حيث:

V: عدد درجات الحرية.

C: ثابت يعتمد على V ليجعل المساحة تحت المنحنى تساوي 1.

وفي هذه الحالة يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} .\ \widehat{\delta_{\bar{x}}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} .\ \widehat{\delta_{\bar{x}}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$\mu \in [\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} . \widehat{\delta_{\bar{x}}}\ ;\ \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} . \widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} . \widehat{\delta_{\bar{x}}}\ ]$$

يتم تحديد قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ باستخدام توزيع ستودنت كما يلي:

1- تحديد عدد درجات الحرية V انطلاقا من حجم العينة وفق العلاقة: $V = n - 1$

2- تحديد مستوى الثقة المراد واستنتاج المساحة $(\frac{\alpha}{2})$ والبحث عليها في السطر الأفقي أعلى الجدول.

3- التقاطع بين قيمة درجات الحرية V في العمود الأيسر والمساحة $(\frac{\alpha}{2})$ في السطر العلوي يحددان قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}}$.

<u>مثال8:</u> لمعرفة الوقت الذي تستغرقه العائلات أمام التلفزة ما بين الفترة الممتدة من 20:00 إلى 24:00 ليلا، سحبت عينة عشوائية حجمها 10 عائلة بمتوسط 2.50 ساعة وانحراف معياري 0.5 ساعة.

- أوجد مجال الثقة لمتوسط الوقت الذي تستغرقه العائلات أمام التلفزة من 20:00 إلى 24:00 ليلا عند مستوى الثقة 95% ؟

<u>الحل:</u>

$$n = 10 \quad / \quad \bar{x} = 2.5 \quad / \quad S = 0.5 \quad / \quad C = 95\%$$

δ مجهولة وحجم العينة صغيرة $(n < 30)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}. \widehat{\delta_{\bar{x}}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}. \widehat{\delta_{\bar{x}}}\right) = C = 95\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} . \widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

مقروأ من جدول توزيع ستودنت (T) ←

$$\begin{cases} V = n - 1 = 9 \\ t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.262 \end{cases}$$

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0.5}{\sqrt{10}} = 0.158$$

$$\mu \in [2.5 \pm (2.262 * 0.158)]$$

$$\mu \in [2.5 \pm 0.31]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu \in [2.19\ ;\ 2.81]\ avec\ C = 95\%}}$$

مثال9: بلغ عدد أفواج طلبة السنة الأولى جدع مشترك في كلية العلوم الاقتصادية 50 فوجا، وكانت معدلات الطلبة ل 5 أفواج من السنة الأولى جدع مشترك في مادة الإحصاء الوصفي كالآتي: 10.2 – 10.1 – 10 – 9.9 – 9.8

- قدر بالمجال لمتوسط معدلات الطلبة السنة الأولى جدع مشترك لكلية العلوم الاقتصادية في مادة الإحصاء الوصفي عند مستوى الثقة 90% ؟

الحل:

$$x_i = \{10.1 – 10 – 9.9 – 9.8 – 10.2\}$$

$$N=50 \quad / \quad n=5 \quad / \quad C= 90\% \quad / \quad \alpha = 10\%$$

δ مجهولة وحجم العينة صغيرة $(n < 30)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}\right) = C= 90\%$$

$$\mu \in [\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}.\widehat{\delta_{\bar{x}}}]$$

x_i	10.2	9.8	9.9	10	10.1	**50**
$(x_i-\bar{x})^2$	0.04	0.04	0.01	0	0.01	**0.10**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{50}{5} = \mathbf{10}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.1}{4}} = \mathbf{0.158}$$

$$\begin{cases} V = n-1 = 4 \\ t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.05} = 2.132 \end{cases}$$

مقروأ من جدول توزيع ستودنت (T) ←

$* \, n=5 > 0.05 * 50 = 2.5$

إذن نستعمل معامل التصحيح

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{0.158}{\sqrt{5}} * \sqrt{\frac{50-5}{50-1}} = 0.64$$

$$\mu \in [10 \pm (2.132 * 0.64)]$$

$$\mu \in [10 \pm 1.364]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu \in [8.636\,;\, 11.364]\ avec\ C= 90\%}}$$

خلاصة: في الأخير يمكننا أن نلخص الحالات الثلاثة للتقدير بالمجال لمتوسط المجتمع μ في الجدول التالي:

الجدول رقم 02: التقدير بالمجال (مجال أو فترة الثقة) لمتوسط المجتمع μ

الحالات	نوع التوزيع	مجال الثقة ل μ
الحالة 1	δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).	$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\bar{x}}]$
الحالة 2	δ مجهولة وحجم العينة كبيرة $(30 < n)$ إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).	$\mu \in [\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \widehat{\delta_{\bar{x}}}]$
الحالة 3	δ مجهولة وحجم العينة صغيرة $(30 > n)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).	$\mu \in [\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} . \widehat{\delta_{\bar{x}}}]$

المصدر: من إعداد الباحث

حيث:

$$\begin{cases} \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n < 0.05 * N \ \underline{\text{ou}} \ N = ? \\ \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si} \quad n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n < 0.05 * N \ \underline{\text{ou}} \ N = ? \\ \widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si} \quad n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

2. التقدير بالمجال للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$:

1.2- التقدير بالمجال للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عندما يكون تبايني مجتمعين σ^2_1 وσ^2_2 معلومين:

إذا سحبت عينة عشوائية من مجتمع له توزيع طبيعي بتوسط (توقع) μ_1 وتباينه $\delta_1{}^2$، وعينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع آخر له توزيع طبيعي بمتوسط (توقع) μ_2 وتباينه $\delta_2{}^2$. فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\overline{x_1} - \overline{x_2})$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي $(\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \mu_{\text{D}} = \mu_1 - \mu_1)$ وبانحراف معياري يساوي $(\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \delta_{\text{D}} = \sqrt{\frac{\delta_1{}^2}{n_1} + \frac{\delta_2{}^2}{n_2}})$.

وبالتالي فإن التقدير بالمجال (مجال أو فترة الثقة) للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ كما يلي:

$$P\left((\overline{x_1}-\overline{x_2})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \overline{(x_1}-\overline{x_2})+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\right)=1-\alpha=C$$

$$\mu_1-\mu_2 \in [(\overline{x_1}-\overline{x_2})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\ ;\ (\overline{x_1}-\overline{x_2})+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

$$\mu_1-\mu_2 \in [(\overline{x_1}-\overline{x_2}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

<u>مثال10:</u> سحبت عينة عشوائية حجمها 36 من مجتمع طبيعي تباينه 32، وسحبت عينة عشوائية ثانية حجمها 49 من مجتمع ثاني له توزيع طبيعي تباينه 70 مستقل عن الأول. فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة الأولى والثانية يساوي على التوالي 47 و 35.

- قدربالمجال الفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى الثقة 95% ؟

<u>الحل:</u>

$$\overline{x_1}=47 \quad / \quad \delta_1^{\ 2}=32 \quad / \quad n_1=36 \quad / \quad C=95\%$$

$$\overline{x_2}=35 \quad / \quad \delta_2^{\ 2}=70 \quad / \quad n_2=49$$

δ_1 و δ_2 معلومتان إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

$$P\left((\overline{x_1}-\overline{x_2})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \overline{(x_1}-\overline{x_2})+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\right)=95\%$$

$$\mu_1-\mu_2 \in [(\overline{x_1}-\overline{x_2}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

$$* \ C=95\% \rightarrow \alpha=1-C=5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.975}=\mathbf{1.96}$$

$$* \ \delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}=\sqrt{\frac{\delta_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{\delta_2^{\ 2}}{n_2}}=\sqrt{\frac{32}{36}+\frac{70}{49}}=1.52$$

$$\mu_1-\mu_2 \in [(47-35) \pm (1.96 * 1.52)]$$

$$\mu_1-\mu_2 \in [12 \pm 2.97]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu_1-\mu_2 \in [9.03\ ;\ 14.97]\ avec\ C=95\%}}$$

2.2- التقدير بالمجال للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ عندما يكون تبايني مجتمعين σ^2_{1} وσ^2_{2} مجهولين وحجم العينتين كبيرتين $(30 \le n_2+n_1)$:

غالبا ما يكون تبايني مجتمعين مجهولين وحجم العينتين كبيرتين $(30 \le n_2+n_1)$، وبتطبيق نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\overline{x_1}-\overline{x_2})$ يتبع التوزيع الطبيعي. ونقوم

باستعمال الانحراف المعياري للعينتين S_1 و S_2 بدل الانحراف المعياري للمجتمعين δ_1 و δ_2 المجهولين.

وفي هذه الحالة يكون التقدير بالمجال (مجال أو فترة الثقة) للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ يكون كما يلي:

$$P\left((\overline{x_1} - \overline{x_2}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{(x_1} - \overline{x_2}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\ ;\ (\overline{x_1} - \overline{x_2}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

حيث: $\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \hat{\delta}_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}$

مثال11: أخذت عينة عشوائية تتكون من 20 مصباح من انتاج المصنع الأول، فكان متوسط عمرها الانتاجي هو 1000 ساعة وانحرافها المعياري 100 ساعة، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى من مصنع ثاني تتكون من 26 مصباح فكان متوسط عمرها الانتاجي هو 1200 ساعة وانحرافها المعياري 200 ساعة.

- قدربالمجال الفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى الثقة 90% ؟

الحل:

$$\overline{x_1} = 1000 \quad / \quad S_1 = 100 \quad / \quad n_1 = 20 \quad / \quad C=90\%$$

$$\overline{x_2} = 1200 \quad / \quad S_2 = 200 \quad / \quad n_2 = 26$$

δ_1 و δ_2 مجهولتان وحجم العينتين كبيرتين $(n_1 + n_2 \geq 30)$. وبتطبيق نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\overline{x_1} - \overline{x_2})$ يتبع التوزيع الطبيعي (Z).

$$P\left((\overline{x_1} - \overline{x_2}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{(x_1} - \overline{x_2}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\right) = 90\%$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

$$* \ C= 90\% \rightarrow \alpha = 1 - C= 10\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = \mathbf{1.64}$$

$$* \ \hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \hat{\delta}_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{100^2}{20} + \frac{200^2}{26}} = 45.14$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [(1000 - 1200) \pm (1.64 * 45.14)]$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [-200 \pm 74.04]$$

$$\boxed{\mu_1 - \mu_2 \in [-274.04\ ;\ -125.96]\ avec\ C= 90\%}$$

3.2- التقدير بالمجال للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عندما يكون تبايني مجتمعين σ^2_1 وσ^2_2 مجهولين وحجم العينتين صغيرتين $(n_1 + n_2 < 30)$:

إن مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عندما يكون تبايني مجتمعين σ^2_1 و σ^2_2 مجهولين وبافتراض أنهما متساويين وحجم العينتين صغيرتين $(n_1 + n_2 < 30)$ فإننا في هذه الحالة نستعمل توزيع ستودنت (T) ويكون المجال كالآتي:

$$P\left((\overline{x_1} - \overline{x_2}) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \overline{(x_1} - \overline{x_2)} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\ ;\ (\overline{x_1} - \overline{x_2}) + t_{\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

حيث: $\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{S^2{}_1.(n_1-1)+S^2{}_2.(n_2-1)}{n_1+n_2-2}.\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

<u>مثال12:</u> سحبت عينة عشوائية من كلية العلوم الاقتصادية لجتمعة وهران 2، من أجل قياس مستوى الدراسة في مادة الإحصاء ولقسمين مختلفين (قسم العلوم التجارية وقسم العلوم المالية). حيث أخذنا 16 طالبا من قسم العلوم التجارية و 9 طلبة من قسم العلوم المالية وقدمنا لهم امتحان في مادة الاحصاء التطبيقي، فكانت النتائج كما هي موضحة في الجدول التالي:

	قسم العلوم التجارية (01)	قسم العلوم المالية (02)
حجم العينة n	16	9
متوسط العينة $\overline{x}$	12	10
تباين العينة S^2	4	5

- أوجد مجال الثقة للفرق بين متوسطي القسمين عند مستوى الثقة 95% ؟

<u>الحل:</u>

$$\overline{x_1} = 12 \quad / \quad S^2{}_1 = 4 \quad / \quad n_1 = 16 \quad / \quad C=95\%$$

$$\overline{x_2} = 10 \quad / \quad S^2{}_2 = 5 \quad / \quad n_2 = 9 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

δ_1 و δ_2 مجهولتين وبافتراض أنهما متساويتين وحجم العينتين صغيرتين $(n_1 + n_2 < 30)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

$$P\left((\overline{x_1} - \overline{x_2}) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \overline{(x_1} - \overline{x_2)} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\right) = 95\%$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} . \hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$$

مقروأ من جدول توزيع ستودنت (T) ←
$$\begin{cases} V = n_1 + n_2 - 2 = 23 \\ t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.069 \end{cases}$$

$$\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{S^2{}_1.(n_1 - 1) + S^2{}_2.(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}.(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$$

$$\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{4.(16-1)+5.(9-1)}{16+9-2}.(\frac{1}{16} + \frac{1}{9})} = 1.81$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [(12 - 10) \pm (2.069 * 1.81)]$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in [2 \pm 3.744]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 \in [-1.744\ ;\ +5.744]\ avec\ C = 95\%}}$$

4.2- التقدير بالمجال للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ باستعمال عينتين مزدوجتين (غير مستقلتين):

توجد الكثير من الحالات العملية التي ترتبط فيها البيانات الخاصة بالعينتين بصورة أو بأخرى، حيث تم جمع هذه البيانات في صورة أزواج من القيم المرتبة، في هذه الحالة نجد أن البيانات الموجودة في كل زوج من هذه الأزواج تكون غير مستقلة أي مرتبطة، مثل الأزواج $(x_i\ ;\ y_i)$ وأن x_i صفة لعنصر ما i و y_i صفة أخرى للعنصر نفسه، مثال: عند إجراء حيث $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ تجربة لدراسة تأثير دواء معين على ضغط الدم لعدد معين من المرضى، فيقاس قبل إعطاء الدواء وبعد إعطاء الدواء، أو عند دراسة أثر التحفيز على انتاجية العمال، نقيس انتاجية العمال قبل وبعد التحفيز. والتجارب من هذا النوع يكوم فيها حجم العينتين متساويتين حتما ($n_1 = n_2$).

في أغلب الحالات التي تكون فيها العينتين مزدوجتين يكون الهدف هو المقارنة بين متوسطي مجتمعين قبل وبعد اجراء معين، وفي هذه حالة نستعمل توزيع ستودنت (T)، ويكون مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_d = \mu_1 - \mu_2)$ كما يلي:

$$P\left(\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}} \leq \mu_d \leq \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$\mu_d \in [\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}]$$

$$\mu_d \in [\bar{d} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}]$$

حيث: $\bar{d}=\frac{\sum d_i}{n}$

d_i: يمثل الفرق بين المشاهدة الأولى والثانية (y_i ؛ x_i) أي الفرق بينn_1 و n_2 من أزواج المشاهدات القبلية والبعدية ($n_1 = n_2 = n$).

V: عدد درجات الحرية (V = n - 1).

S_d: الانحراف المعياري لعينة الفروق حيث: $S_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}$

مثال13: سحبت عينةعشوائية من 10 رياضيين ألعاب القوى، وسجل عدد ضربات القلب قبل السباق وبعد السباق، وكانت النتائج كما يلي:

قبل السباق x_i	10	12	8	11	12	14	10	13	12	8
بعد السباق y_i	15	14	11	15	16	19	14	17	16	13

- أوجد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسطي ضربات القلب ؟(هل يؤثر الركض على سرعة النبض)؟

الحل:

$$n_1 = n_2 = n = 10 \;\; / \;\; C = 95\% \;\; / \;\; \alpha = 5\%$$

δ_1 و δ_2 مجهولتين وبافتراض أنهما متساويتين والعينتين مزدوجتين (غير مستقلتين) وصغيرتين ($n_1 + n_2 < 30$) إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

$$P\left(\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}} \le \mu_d \le \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}\right) = 95\%$$

$$\mu_d \in [\bar{d} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}]$$

مقروأ من جدول توزيع ستودنت (T) ←
$$\begin{cases} V = n - 1 = 9 \\ t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.262 \end{cases}$$

x_i	y_i	$d_i = x_i - y_i$	$(d_i - \bar{d})^2$
10	15	-5	1
12	14	-2	4
8	11	-3	1
11	15	-4	0
12	16	-4	0
14	19	-5	1

10	14	-4	0
13	17	-4	0
12	16	-4	0
8	13	-5	1
/	/	**-40**	**8**

$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-40}{10} =$ **-4**

$S_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{8}{9}} =$ **0.942**

$$\mu_d \in [-4 \pm 2.262.\frac{0.942}{\sqrt{10}}]$$

$$\mu_d \in [-4 \pm 0.674]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu_d \in [-4.674\ ;\ -3.326]\ avec\ \complement = 95\%}}$$

خلاصة: في الأخير يمكننا أن نلخص الحالات الأربعة للتقدير بالمجال للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ في الجدول التالي:

الجدول رقم 03: التقدير بالمجال (مجال الثقة) للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$

الحالات	نوع التوزيع	مجال الثقة للفرق $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$
الحالة 1	δ_1 و δ_2 معلومتان إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).	$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$
الحالة 2	δ_1 و δ_2 مجهولتان وحجم العينتين كبيرتين $(30 \leq n_2 + n_1)$ إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).	$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}]$
الحالة 3	δ_1 و δ_2 مجهولتان وحجم العينتين صغيرتين $(30 > n_2 + n_1)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).	$\mu_1 - \mu_2 \in [(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{\mathrm{D}}]$
الحالة 4	δ_1 و δ_2 مجهولتان والعينتين مزدوجتين (غير مستقلتين) وصغيرتين $(30 > n_2 + n_1)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).	$\mu_d \in [\bar{d} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}]$

المصدر: من إعداد الباحث

حيث:

$$* \ \delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \sqrt{\frac{{\delta_1}^2}{n_1} + \frac{{\delta_2}^2}{n_2}}$$

$$* \ \hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}$$

$$* \ \widehat{\delta_{\mathrm{D}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{S}^2{}_1.(n_1-1)+\mathrm{S}^2{}_2.(n_2-1)}{n_1+n_2-2} . \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$* \ \mu_d = \mu_1 - \mu_2 \ \ / \ \ \bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} \ \ / \ \ d_i = x_i - y_i \ \ / \ \ S_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

3. التقدير بالمجال لنسبة المجتمع P:

إن تقدير النسبة في المجتمع تعتبر من الحالات المهمة لقياس الظواهر الاقتصادية، وبالذات التحليلية منها كتحليل اتجاهات النمو الاقتصادي، وقياس نسبة مواليد العام، ونسبة الدول التي لم توفي بالتزاماتها في المنظمات الدولية أو الاقليمية وغيرها، ونظرا لأنه من الصعوبة بمكان في الكثير من الأحيان حساب هذه النسبة مباشرة من المجتمع، فإنناغالبا ما نلجأ لتقدير هذه النسبة من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع.

إعتمادا على توزيع المعاينة للنسبة p وعلى القاعدة الأساسية إنشاء حدي الثقة حول قيمة التابع الاحصائي فإننا نستعمل التوزيع الطبيعي، وهذا عندما تكون العينات كبيرة الحجم.

وبالتالي فإن مجال الثقة أو فترة الثقة لنسبة المجتمع P تكون كما يلي:

$$P\left(\mathrm{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \ \hat{\delta}_{\mathrm{p}} \leq P \leq \mathrm{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \ \hat{\delta}_{\mathrm{p}}\right) = 1 - \alpha = \mathrm{C}$$

$$P \in [\mathrm{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \ \hat{\delta}_{\mathrm{p}} \ ; \ \mathrm{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \ \hat{\delta}_{\mathrm{p}}]$$

$$P \in [\mathrm{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \ \hat{\delta}_{\mathrm{p}}]$$

$$* \ \mathrm{p} = \frac{\text{عدد مفردات العينة التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة}}{\text{حجم العينة}}$$

$$\begin{cases} \hat{\delta}_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}{n}} & \text{si} \quad n < 0.05 * N \ \ \underline{\text{ou}} \ \ N = ? \\ \hat{\delta}_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si} \quad n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

مثال14: أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب من كلية العلوم الاقتصادية للسنة الأولى، فوجد أن 30 منهم متحصلون على شهادة البكالوريا تخصص آداب.

1- قدر نسبة طلبة السنة الأولى الحاصلين على شهادة البكالوريا تخصص آداب ؟

2- أوجد مجال الثقة للنسبة الحقيقية للطلبة الحاصلين على شهادة البكالوريا تخصص آداب عند مستوى الثقة 95% ؟

الحل:

$$n = 100 \quad / \quad \text{C} = 95\%$$

1- تقدير نسبة طلبة السنة الأولى الحاصلين على شهادة البكالوريا تخصص آداب:

p: نسبة النجاح العينة هي أحسن تقدير عند النقطة لنسبة النجاح المجتمع P.

$$\text{p} = \frac{\text{عدد مفردات العينة التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة}}{\text{حجم العينة}} = \frac{30}{100} = 0.3 = 30\%$$

$$\boxed{\boldsymbol{\hat{P} = \text{p} = 0.3 = 30\%}}$$

2- مجال الثقة ل P:

بما أن $n > 30$ فإننا نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

$$P\left(\text{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\ \hat{\delta}_{\text{p}} \leq P \leq \text{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\ \hat{\delta}_{\text{p}}\right) = 95\%$$

$$P \in [\text{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\ \hat{\delta}_{\text{p}}]$$

$$* \text{ C} = 95\% \rightarrow \alpha = 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.96}$$

$$- \quad \hat{\delta}_{\text{p}} = \sqrt{\frac{\text{p}(1-\text{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.3*0.7}{100}} = 0.045$$

$$P \in [0.3 \pm (1.96 * 0.045)]$$

$$P \in [0.3 \pm 0.088]$$

$$\boxed{P \in [\mathbf{0.212}\ ;\ \mathbf{0.388}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C} = \mathbf{95}\%}$$

في حالة حجم العينة مجهولة وطلب منا حسابها، فإنه يمكن تحديد حجم العينة اللازمة للحصول على درجة ثقة معينة عند تقدير النسبة في المجتمع، بإفتراض أن أقصى خطأ في التقدير المسموح به هو e حيث:

$$e = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \sqrt{\frac{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}{n}}$$

$$e^2 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2 . \ \frac{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}{n}$$

$$\boxed{\boldsymbol{n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2 . \ \frac{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}{e^2}}}$$

مثال15: يدعي أحد مراكز استطلاعات الرأي العام أنه عند دراسته لإتجاهات آراء الناخبين لإثنين من المتنافسين على كرسي الرئاسة بأن نتائج دراسته هي من الدقة بحيث لا تتعدى نسبة الخطأ في التقدير 2%.

- ما هو حجم العينة المناسب التي نستطيع من خلالها الحكم على مدى صحة إدعاء المركز بإفتراض أن نسبة المؤيدين للمرشح هي 50% وذلك عند مستوى الثقة 95% ؟

الحل:

$$e = 0.02 \quad / \quad \mathrm{p} = 0.5 \quad / \ \mathrm{C} = 95\%$$

$$* \ \mathrm{C}= 95\% \rightarrow \alpha = 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.96}$$

$$n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2 . \ \frac{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}{e^2} = (1.96)^2 . \ \frac{\mathbf{0.5}(1-\mathbf{0.5})}{(0.02)^2} = \mathbf{2401}$$

أي أن حجم العينة المناسب الذي يعطي مستوى الثقة المطلوب هو 2401 ناخب. بمعنى آخر فإن على هذا المركز أن يستطلع حجم عينة لا تقل عددها عن هذا العدد 2401.

4. التقدير بالمجال للفرق بين نسبتي مجتمعين $(\mathbf{P_1 - P_2})$:

إذا كانت $(x_1 ، x_2 ، x_3 ، .... ، x_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع ذو الحدين$\mathrm{B}(n_1, \mathrm{p}_1)$، وكانت $(x_1 ، x_2 ، x_3 ، .... ، x_n)$ عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع ذو الحدين$\mathrm{B}(n_2, \mathrm{p}_2)$، وكانت حجم العينتين كبيرتين فإننا نستعمل التوزيع الطبيعي، وأن مجال الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين $(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)$ كما يلي:

$$P\left((\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \hat{\delta}_{\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2} \leq \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 \leq (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \hat{\delta}_{\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2}\right) = 1 - \alpha = \mathrm{C}$$

$$\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 \in [(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \hat{\delta}_{\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2} \ ; \ (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \hat{\delta}_{\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2}]$$

$$\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 \in [(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \hat{\delta}_{\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2}]$$

حيث:

- $\hat{\delta}_{p_1-p_2} = \widehat{\delta_D} = \sqrt{p_c(1-p_c)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$
- $p_c = \frac{p_1.n_1+p_2.n_2}{n_1+n_2}$

مثال16: سحبت عينة عشوائية حجمها 5000 ناخب من ولاية وهران فوجد أن 2400 منهم سينتخبون المترشح (A)، وسحبت عينة عشوائية أخرى حجمها 2000 ناخب من ولاية تلمسان فوجد أن 1200 منهم سينتخبون المترشح (A).

- ما هو مجال الثقة للفرق بين نسبتي الذين سينتخبون المترشح (A) عند مستوى الثقة 90% ؟

الحل:

$$n_1 = 5000 \ / \quad p_1 = \frac{2400}{5000} = 0.48 \quad / \ C = 90\%$$

$$n_2 = 2000 \ / \quad p_2 = \frac{1200}{2000} = 0.60$$

$$P\left((p_1-p_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{p_1-p_2} \leq P_1 - P_2 \leq (p_1-p_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{p_1-p_2}\right) = 90\%$$

$$P_1 - P_2 \in [(p_1-p_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\hat{\delta}_{p_1-p_2}]$$

$* \ C= 90\% \rightarrow \alpha = 10\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.64}$

- $\hat{\delta}_{p_1-p_2} = \widehat{\delta_D} = \sqrt{p_c(1-p_c)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$
- $p_c = \frac{p_1.n_1+p_2.n_2}{n_1+n_2} = \frac{0.48*5000+0.60*2000}{5000+2000} = 0.514$
- $\hat{\delta}_{p_1-p_2} = \widehat{\delta_D} = \sqrt{0.514(1-0.514)(\frac{1}{5000}+\frac{1}{2000})} = 0.013$

$$P_1 - P_2 \in [(0.48-0.6) \pm 1.64 * 0.013]$$

$$P_1 - P_2 \in [-0.12 \pm 0.021]$$

$$\boxed{\mathbf{P_1 - P_2 \in [-0.141 \ ; \ -0.099] \ \mathit{avec} \ C= 90\%}}$$

ومنه نستنتج أن نسبة الذين سينتخبون المترشح (A) في ولاية تلمسان أعلى من نسبة الذين سينتخبون المترشح (A) في ولاية وهران.

5. التقدير بالمجال لتباين المجتمع δ^2:

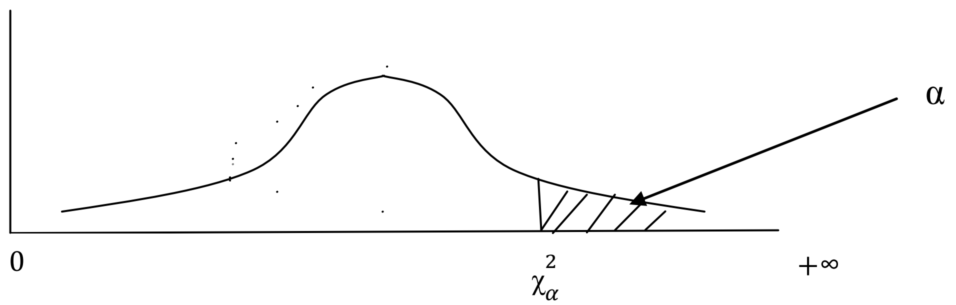
1.5- توزيع كي مربع χ^2:

إن الحديث عن مجال الثقة لتباين المجتمع δ^2 يقودنا إلى الحديث عن توزيع كي مربع χ^2.

إذا كانت مجموعة من المتغيرات العشوائية x_i حيث: $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ موزعة حسب القانون الطبيعي Z بمتوسط (توقع) μ وتباينه δ^2، فإن المتغير العشوائي T الذي يعرّف: $T = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\delta^2}$ يتبع توزيع كي مربع χ^2.

$$T = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\delta^2} \backsim \chi^2$$

توزيع كي مربع χ^2 معرّف بمعلومة واحدة ألا وهي عدد درجات الحرية ($V= n-1$)، وهو يستعمل لإيجاد مجال الثقة لتباين المجتمع δ^2، واختبار الفرضيات لتباين المجتمع δ^2 (عينة واحدة)، ويستعمل كذلك في اختبار حسن المطابقة واختبار الاستقلالية. والشكل الموالي يوضح منحنى توزيع كي مربع χ^2:



ولإيجاد المساحات أو القيم نستعمل جدول كي مربع χ^2 حيث يمثل العمود الأيسر عدد درجات الحرية ($V= n-1$)، والخط الأفقي المساحات إلى يمين قيمة كي مربع، أما قيم كي مربع فهي داخل الجدول، ونستخدم χ^2_α ليعبرعن قيمة كي مربع عند مستوى معنوية α بدرجة حرية V.

ليكن المتغير العشوائي T يتبع توزيع كي مربع χ^2 فإن:

$$P(T> \chi^2_\alpha) = \alpha \qquad / \quad V= n-1$$

مثال17: نفرض أن المتغير العشوائي T يتبع توزيع كي مربع في عينة حجمها 13.

- أوجد: $P(T> 18.55) = ? \quad / \quad P(T\leq 5.23) = ?$

الحل:

$$T \backsim \chi^2 \quad / \quad V = n-1 = 12$$

* $P(T > 18.55) = \alpha = \mathbf{0.1}$

* $P(T \leq 5.23) = 1 - P(T > 5.23) = 1 - 0.95 = \mathbf{0.05}$

2.5- التقدير بالمجال لتباين المجتمع δ^2:

$$T = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\delta^2} \backsim \chi^2$$

لما يكون متوسط المجتمع μ مجهول، نقوم بتقديره بمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$.

ولدينا كذلك تباين العينة s^2 والمعرّف كما يلي:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \rightarrow \sum(x_i - \bar{x})^2 = s^2.(n-1)$$

ويصبح لدينا:

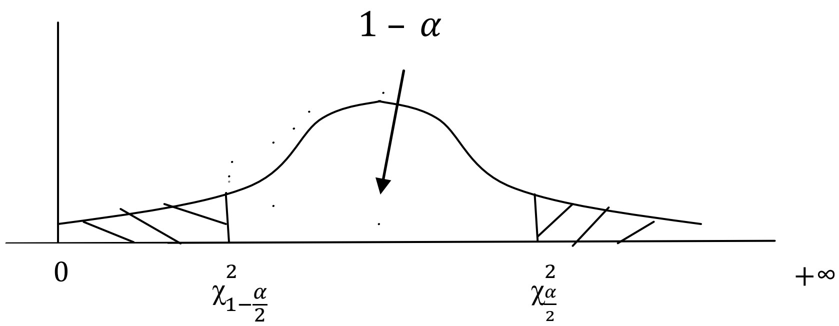
$$T = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\delta^2} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\delta^2} = \frac{s^2.(n-1)}{\delta^2}$$

إذن:

$$T = \frac{s^2.(n-1)}{\delta^2} \backsim \chi^2 \quad / \quad V = n-1 = 12$$

إذا كانت (x_n،.......، x_3، x_2، x_1) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباينه δ^2، فإن مجال الثقة لتباين المجتمع δ^2 يكون محصور بين قيمتين a و b كما يلي:

$$P(a \leq \delta^2 \leq b) = 1 - \alpha = C$$



$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{s^2.(n-1)}{\delta^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\delta^2}{s^2.(n-1)} \leq \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$\boldsymbol{P\left(\frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \delta^2 \leq \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1 - \alpha = C}$$

$$\boldsymbol{\delta^2 \in [\frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}]}$$

<u>مثال18:</u> أخذت عينة عشوائية حجمها 10 فوجد أن متوسطها الحسابي هو 16 وتباينها هو 0.134

- ما هو مجال الثقة لتباين المجتمع δ^2 عند مستوى الثقة 95% ؟

<u>الحل:</u>

$$n = 10 \quad / \quad \bar{x} = 125 \quad / \quad s^2 = 0.134 \quad / \quad C = 95\%$$

لإيجاد مجال الثقة لتباين المجتمع δ^2 نستعمل توزيع كي مربع χ^2.

$$P\left(\frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \delta^2 \leq \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 95\%$$

$$\delta^2 \in [\frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}]$$

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V = n - 1 = 9 \\ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.025} = 19.02 \\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.975} = 2.7 \end{cases}$$

$$\sigma^2 \in [\frac{0.134 * 9}{19.02} ; \frac{0.134 * 9}{2.7}]$$

$$\boxed{\sigma^2 \in [\mathbf{0.07} ; \mathbf{0.5}] \; \boldsymbol{avec} \; C = \mathbf{95\%}}$$

مثال19: لدى القيام بوضع صيغة لإنتاج الفيتامين (C)، تم معايرة عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع له توزيع الطبيعي حجمها 10 مضغوطات، بياناتها كانت كما يلي:

499 – 500 – 508 – 502 – 511 – 501 – 500 – 507 – 495 – 497 كمية الفيتامين (C) ملغ / في المضغوطة.

- ما هو مجال الثقة لتباين المجتمع δ^2 عند مستوى الثقة 90% ؟

الحل:

$$x_i = \{499\text{-}500\text{-}508\text{-}502\text{-}511\text{-}501\text{-}500\text{-}507\text{-}495\text{-}497\}$$

$$n = 10 \quad / \quad C = 90\% \quad / \quad \alpha = 10\%$$

لإيجاد مجال الثقة لتباين المجتمع δ^2 نستعمل توزيع كي مربع χ^2.

$$P\left(\frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \delta^2 \leq \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 90\%$$

$$\delta^2 \in [\frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}]$$

x_i	499	500	508	502	511	501	500	507	495	497	**5020**
$(x_i - \bar{x})^2$	9	4	36	0	81	1	4	25	49	25	**234**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5020}{10} = \mathbf{502}$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2}{n-1} = \frac{234}{9} = \mathbf{26}$$

$$\begin{cases} V = n-1 = 9 \\ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.05} = 16.92 \\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.95} = 3.33 \end{cases}$$

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\sigma^2 \in [\frac{26 * 9}{16.92} ; \frac{26 * 9}{3.33}]$$

$$\boxed{\sigma^2 \in [\mathbf{13.82} \; ; \; \mathbf{70.27}] \; \boldsymbol{avec} \; C = \mathbf{90\%}}$$

6. التقدير بالمجال للنسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{б^2_1}{б^2_2}$:

إذا كانت (x_1 ، x_2 ، x_3 ، ....، x_n) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه (توقعه) μ_1 وتباينه δ^2_1، وكانت (x_1 ، x_2 ، x_3 ، ....، x_n) عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع يتبع كذلك التوزيع الطبيعي متوسطه (توقعه) μ_2 وتباينه δ^2_2،

وكان المجتمعين مستقلين، فإنه لتقدير بالمجال للنسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{б^2_1}{б^2_2}$ نستعمل توزيع فيشر F ويكون المجال كما يلي:

$$P\left(\frac{s^2_1}{s^2_2} * \frac{1}{f_{\alpha/2}} \leq \frac{б^2_1}{б^2_2} \leq \frac{s^2_1}{s^2_2} * \frac{1}{f_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha = C$$

$$\frac{б^2_1}{б^2_2} \in [\frac{s^2_1}{s^2_2} * \frac{1}{f_{\alpha/2}} ; \frac{s^2_1}{s^2_2} * \frac{1}{f_{1-\alpha/2}}]$$

حيث:

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 \\ V_2 = n_2 - 1 \\ f_{\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_1/V_2)} \\ f_{1-\alpha/2} = \frac{1}{F_{(\alpha/2;V_2/V_1)}} \end{cases}$$

مثال20: أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، فكانت قيمة تباينها 18. وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 11 من مجتمع كذلك يتبع التوزيع الطبيعي، فكانت قيمة تباينها 12.

- ما هو مجال الثقة للنسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{б^2_1}{б^2_2}$ عند مستوى الثقة 95% ؟

الحل:

$$n_1 = 9 \;/\; s^2_1 = 18 \;/\; n_2 = 11 \;/\; s^2_2 = 12 \;/\; C = 95\% \;/\; \alpha = 5\%$$

لإيجاد مجال الثقة للنسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{б^2_1}{б^2_2}$ نستعمل توزيع فيشر (F).

$$P\left(\frac{s^2_1}{s^2_2} * \frac{1}{f_{\alpha/2}} \leq \frac{б^2_1}{б^2_2} \leq \frac{s^2_1}{s^2_2} * \frac{1}{f_{1-\alpha/2}}\right) = 95\%$$

$$\frac{б^2_1}{б^2_2} \in [\frac{s^2_1}{s^2_2} * \frac{1}{f_{\alpha/2}} ; \frac{s^2_1}{s^2_2} * \frac{1}{f_{1-\alpha/2}}]$$

مقروأ من جدول توزيع فيشر (F) ←

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = 8 \\ V_2 = n_2 - 1 = 10 \\ f_{\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_1/V_2)} = F_{(2.5\%;8/10)} = \mathbf{3.85} \\ f_{1-\alpha/2} = \frac{1}{F_{(\alpha/2;V_2/V_1)}} = \frac{1}{F_{(2.5\%;10/8)}} = \frac{1}{4.30} = \mathbf{0.23} \end{cases}$$

$$\frac{б^2_1}{б^2_2} \in [\frac{18}{12} * \frac{1}{3.85} ; \frac{18}{12} * \frac{1}{0.23}]$$

$$\boxed{\frac{б^2_{\mathbf{1}}}{б^2_{\mathbf{2}}} \in [\mathbf{0.389} ;\ \mathbf{6.521}]\ \boldsymbol{avec}\ \text{C}= \mathbf{90}\%}$$

تمارين غير محلولة

التمرين (01):

شركة مختصة في نقل المسافرين تريد تقدير المدة المستغرقة من طرف حافلاتها في خط محدد، فقامت بمعاينة عشوائية لإحدى الحافلات وتم تسجيل الفترات التي تقضيها خلال كل رحلة بالدقائق، فكانت كما يلي: 100 – 102 – 98 – 96 – 103 – 104 – 97 – 92

1- قدّرنقطيا معدل الفترة التي تستغلاقها حافلات الشركة خلال الرحلة ؟

2- قدّرنقطيا تباين للفترات المستغرقة خلال الرحلة الواحدة ؟

التمرين (02):

لتقدير نسبة المرضى الراضين عن الخدمات المقدمة لهم من الطاقم الطبي في احدى المستشفيات، تمت مقابلة 100 مريضا فوجد من بينهم 65 مريضا عبّروا عن رضاهم عن نوع تلك الخدمات.

- ما هي نسبة المرضى الراضين في ذلك المستشفى ؟

التمرين (03):

مجتمع طبيعي حجمه 800 وتباينه 625، تم سحب عينة عشوائية منه حجمها 25 فكان متوسطها الحسابي هو 100.

1- قدّر بالمجال لمتوسط المجتمع عند مستويات الثقة التالية: 90%، 95%، 99% ؟

2- ما هو طول المجال في كل حالة مما سبق ؟

3- ما هو تعليقك على النتائج ؟

التمرين (04):

مجتمع طبيعي حجمه 1000 وتباينه 40، تم سحب عينة عشوائية منه حجمها 100 فكان متوسطها الحسابي هو 100.

- ما هو مجال الثقة لمتوسط المجتمع عند مستوى الثقة 90% ؟

التمرين (05):

أخذت عينة عشوائية مكونة من 100 مفردة بمتوسط 100 وبانحراف معياري 40.

- أوجد فترات الثقة الآتية لمتوسط المجتمع: 90%، 95%، 99% ؟

التمرين (06):

كانت الانتاجية اليومية لعينة عشوائية تتكون من ستة عمال لأحد المصانع كالتالي:

13 – 17 – 18 – 15 – 20 – 14

1- أحسب فترة الثقة 95% للإنتاجية اليومية لجميع عمال المصنع ؟

2- ماذا لو كان عدد عمال المصنع 70 ؟

التمرين (07):

أخذت عينة عشوائية حجمها 15 فوجد أن متوسطها الحسابي 10 وانحرافها المعياري هو 40.

- ما هو مجال الثقة لمتوسط المجتمع عند مستوى الثقة 95% ؟

التمرين (08):

يريد صاحب مصنع أن يقدر المتوسط اللازم لتركيب آلة معينة بحيث لا يزيد الخطأ في هذا المتوسط 0.5 وذلك بدرجة ثقة 95%. ويعرف صاحب المصنع أن عملية تركيب آلة معينة يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري هو 35 وذلك من الدراسات السابقة.

- ما هو حجم العينة المناسب لهذه العملية ؟

التمرين (09):

أخذت عينة عشوائية مكونة من 100 بطارية من انتاج الورشة (A) فوجد أن متوسط ساعات العمل لها هو 250 ساعة عمل متواصلة، كما أخذت عينة أخرى عشوائية مستقلة عن الأولى مؤلفة من 80 بطارية خاصة من انتاج الورشة (B) فوجد أن متوسط ساعات العمل هو 200 ساعة عمل متواصلة.

إذا كان ساعات عمل البطارية المنتجة في كلتا الورشتين (A) و (B) يتبع التوزيع الطبيعي بتباينين 20 و 15 على التوالي.

- قدّر بالمجال للفرق بين متوسطي ساعات عمل البطاريات المنتجة في الورشتين (A) و (B) عند مستوى الثقة 99% ؟

التمرين (10):

لمقارنة متوسط أطوال نوع معين من الأنابيب المنتجة من المصنع (A) بأطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (B). سحبنا عينة عشوائية من المصنع (A) تحتوي على 50 أنبوبة فكان المتوسط الحسابي لأطوالها هو 4.2 سم وانحراف معياري لأطوالها هو 0.6 سم، و سحبنا عينة عشوائية ثانية مستقلة عن الأولى من المصنع (B) تحتوي على 40 أنبوبة فكان المتوسط الحسابي لأطوالها هو 3.6 سم وانحراف معياري لأطوالها هو 0.4 سم.

- قدّر بالمجال للفرق بين متوسطي الأطوال في المصنعين عند مستوى الثقة 95% ؟

التمرين (11):

إذا كانت القيم: 40 – 30 – 35 – 32 – 33 هي عينة عشوائية من مجتمع توزيعه طبيعي $N(\mu_1 \ ; \ \delta_1)$، وكانت القيم: 38 – 25 – 34 – 29 – 24 – 30 عينة عشوائية أخرى من مجتمع توزيعه طبيعي أيضا $N(\mu_2 \ ; \ \delta_2)$ مستقل عن الأول.

- أوجد فترة الثقة 90% للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ ؟

التمرين (12):

يعطي الجدول التالي ضغط الدم لمجموعة من الأشخاص قبل استخدام العلاج وبعده.

x_i : قبل أخذ العلاج	18	20	19	18	17	21
y_i: بعد أخذ العلاج	13	14	14	12	13	16

- أوجد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسط ضغط الدم للأشخاص قبل وبعد أخذ العلاج $(\mu_1 - \mu_2)$ ؟

التمرين (13):

لمعرفة نسبة البيوت التي يوجد فيها التدفئة المركزية في بلدية وهران. أخذت عينة عشوائية حجمها 600 بيت فوجد أن 240 منها لديها تدفئة مركزية.

1- قدّر نسبة البيوت ذات التدفئة المركزية في بلدية وهران ؟

2- ما هو مجال الثقة لنسبة البيوت ذات التدفئة المركزية في بلدية وهران عند مستوى الثقة 99% ؟

التمرين (14):

نريد تقدير نسبة الطلبة الذين تم توجيههم إلى السنة الثانية في كلية العلوم الاقتصادية وفقا لرغباتهم.

- ما هو عدد الطلبة الذين يجب اختيارهم لكي نكون واثقين بنسبة 99% أن الخطأ في تقدير 80% من الطلبة لا يزيد عن 3% ؟

التمرين (15):

أخذت عينتان عشوائيتان مستقلتان، الأولى من المنطقة (A) تشمل 300 رجل فوجد أن عدد المدخنين فيها هو 150 مدخنا، والثانية من المنطقة (B) و تشمل 350 رجل فوجد أن عدد المدخنين فيها هو 140 مدخنا.

- ما هو مجال الثقة للفرق بين نسبتي المدخنين في المنطقتين (A) و (B) عند مستوى الثقة 95% ؟

التمرين (16):

ليكن T متغير عشوائي يتبع توزيع كي مربع في عينة حجمها 20.

- أوجد: $P(T \leq 36.19) = ?$ / $P(T > 30.14) = ?$

التمرين (17):

إذا كانت نقاط امتحان مادة معينة تتبع توزيعا طبيعيا، واخترنا عينة عشوائية تشمل 5 طلبة من المشاركين في هذا الامتحان وكانت نقاطهم كالتالي: 10 – 12 – 8 – 7 - 14

- أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع δ^2 عند مستوى الثقة 95% ؟

التمرين (18):

تريد إدارة مصنع الاسمنت التحكم في جودة الانتاج من خلال ضبط أوزان أكياس الاسمنت ودراسة التغيرات التي قد تطرأ على أوزان الأكياس المختلفة. فقامت بأخذ عينة من الأكياس حجمها 100 كيسا، حيث وجدت أن الانحراف المعياري لها هو 0.7 كغ.

- أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع أكياس الاسمنت بالمصنع عند مستوى الثقة 95% ؟

التمرين (19):

أخذنا عينتين عشوائيتين، تشمل العينة الأولى 16 طالبة والثانية تشمل 20 طالبا من طلبة السنة الثانية قسم العلوم التجارية، فوجدنا أن تباين أوزان عينة الطالبات هو 5.82 كغ، وتباين أوزان عينة الطلبة هو 8.64 كغ، وبافتراض أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا.

- أوجد مجال الثقة لنسبة تباين مجتمع أوزان الطالبات إلى تباين مجتمع أوزان الطلبة عند مستوى الثقة 90% ؟

التمرين (20):

يستخدم مخبر معين جهاز قياس بصري مخصص لقياس تركيز محلول الفلورسين. نتائج القياسات تم نمذجتها بواسطة متغير عشوائي متوسطه الحسابي يساوي التركيز الحقيقي للمحلول، والانحراف المعياري مضمون من طرف الشركة المصنعة فهو معلوم ويساوي 0.05. أخذنا 9 قياسات من المحلول فكان المتوسط التجريبي هو 4.38 ملغ.

1- ما هو مجال الثقة لمتوسط التركيز الحقيقي للمحلول عند مستوى الثقة 99% ؟
2- بالنسبة لنفس العينة السابقة، ما هو مستوى الثقة للمجال [4.4173 ؛ 4.4012] ؟
3- في نفس العينة (9 قياسات)، لاحظنا أن الانحراف المعياري التجريبي هو 0.08 ملغ. فماهو مجال الثقة للتباين الحقيقي عند مستوى الثقة 99% ؟

المحور الرابع:

إختبار الفرضيات

تمهيد:

رأينا في المحور السابق المتعلق بموضوع التقدير أن الباحث لا تكون لديه معلومات عن معلمة المجتمع التي يريد تقديرها نقطيا أو ضمن مجال بمستوى ثقة محددة، فيلجأ الى شواهد ومعلومات من العينة لتحديد تلك التقديرات المختصة بالمعالم.

وفي هذا المحور سيتم تناول موضوع اختيار الفرضيات الذي يعتبر أحد فروع الاحصاء التطبيقي (الاستدلالي)، والذي يهدف الى اتخاذ القرار بشأن القيمة المعلنة أو المختبرة لمعلمة المجتمع من خلال فحص فرضيات حولها انطلاقا من الشواهد والأدلة التي تقدم من العينة.

يحتاج الدارس أحيانا في مرحلة ما من بحثه الى اختبارفرضية أو أكثر بخصوص المجتمع المدروس، ومن أمثلة عن ذلك: اختبار فرضية بخصوص معدل الدخل في منطقة ما، اختبار فرضية نسبة الشفاء لدواء معين...الخ، يتم ذلك بصياغة فرضية عن المجتمع المدروس أو المجتمعات المدروسة، ومن تم محاولة الحصول على دليل احصائي ينفي أو يثبت هذه الفرضية وذلك من خلال بيانات ومعطيات العينة العشوائية البسيطة أو أكثر. حيث تخص الفرضية أحد معالم المجتمع كالمتوسط، النسبة أو التباين، ونعتمد في قبولها أو رفضها على خصائص احصائية المعاينة المختارة.

أولا: مفاهيم أساسية:

1. مفهوم الفرضية الاحصائية:

تعتبر الفرضية الاحصائية بمثابة اقتراحات أولية عن معالم المجتمع غيرمعلومة للباحث، مستندا على بيانات ومعطيات العينة المسحوبة من المجتمع. فالفرضية الاحصائية هي إدعاء أو تصريح حول معلمة أو أكثر لمجتمع واحد أو لعدة مجتمعات، وقد يكون هذا الإدعاء صحيح أو خاطئ. وعادة يتم سحب عينة من المجتمع واستخدام المعلومات منها للوصول الى قرار رفض أو قبول الفرضية الاحصائية، وتقبل الفرضية في حالة أن البيانات تساند النظرية، وترفض الفرضية عندما تكون بيانات العينة على خلاف ذلك.

2. عناصر الاختبار الاحصائي:

إن اختبار أي فرضية احصائية يشتمل على مجموعة من العناصرتتمثل فيما يلي:

1.2- فرضية العدم (الصفرية): فرضية العدم هي الفرضية الأساسية المراد اختبارها، ويرمز لها عادة بالرمز H_0، وهي فرضية حول معلمة المجتمع التي نجري اختبار عليها باستخدام معطيات العينة، والتي تشير الى أن الفرق بين معلمة المجتمع واحصائية العينة ناتج عن الصدفة ولا فرق حقيقي بينهما. وهي الفرضية التي ننطلق منها ونرفضها عندما تتوفردلائل على عدم صحتها.

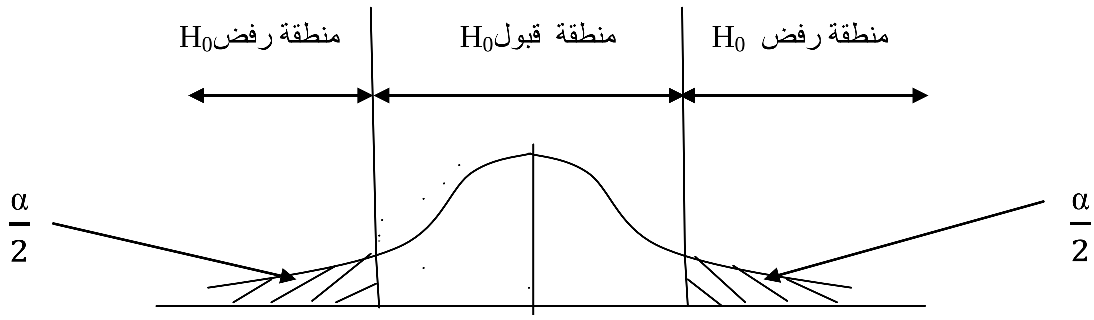
مثال: إذا كانت فرضية العدم المراد اختبارها هي أن متوسط دخل الفرد هو 25.000دج شهريا، فإن هذه الفرضية تكتب كما يلي: $H_0 : \mu = 25.000$

ويقرأ بالشكل التالي: فرضية العدم هي أن متوسط دخل الفرد هو 25.000دج شهريا.

2.2- فرضية البديلة (المقابلة): في اختبار الفرضيات يتحتم وضع فرضية أخرى غير فرضية العدم المراد اختبارها وتسمى بالفرضية البديلة، وهذه الفرضية هي التي ستقبل عندما ترفض فرضية العدم، ويرمز لها بالرمز H_1.

والفرضية البديلة لها أهمية كبيرة وبالذات في قياس الظواهر الاقتصادية والاجتماعية، فهي التي تحدد نوع الاختبار المستخدم لذلك، فهي تأخذ أحد الأشكال الثلاثة التالية:

أ. أن يأخذ شكل لا يساوي "≠": في هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار ذو ذيلين (ذو جانبين). في هذه الحالة الاختبار له ذيلين واحد على اليمين والآخر على اليسار، حيث نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 إذا وقعت قيمة الاحصائية الحسابية في الوسط، ونرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 إذا وقعت قيمة الاحصائية الحسابية على اليمين أو اليسار، كما هو موضح في الشكل التالي:



<u>مثال1:</u> إذا كانت فرضية العدم هو أن متوسط الدخل الشهري لفئة معينة في المجتمع هو 25.000دج.

$$H_0 : \mu = 25.000$$

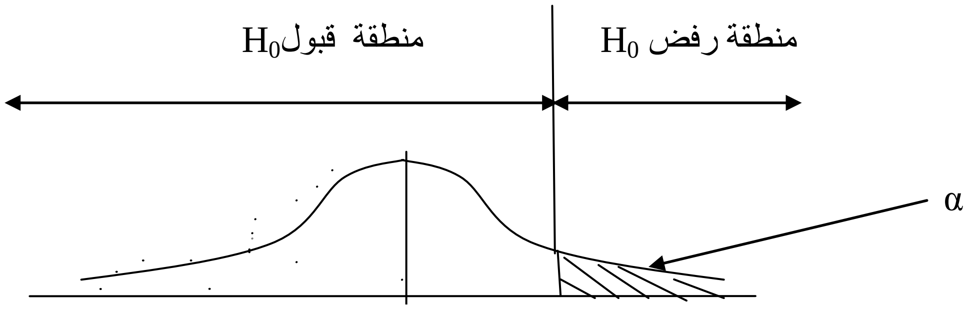
فإن الفرضية البديلة في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي:

$$H_1 : \mu \neq 25.000$$

بمعنى أن متوسط الدخل الشهري لهذه الفئة من المجتمع لا يساوي 25.000دج.

ب. أن يأخذ شكل أكبر ">": في هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار ذو ذيل أيمن (جانب أيمن). في هذه الحالة الاختبار له ذيل واحد على اليمين، حيث نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 إذا وقعت قيمة الاحصائية الحسابية على اليسار، ونرفض فرضية العدم H_0 ونقبل

الفرضية البديلة H_1 إذا وقعت قيمة الاحصائية الحسابية على اليمين، كما هو موضح في الشكل التالي:

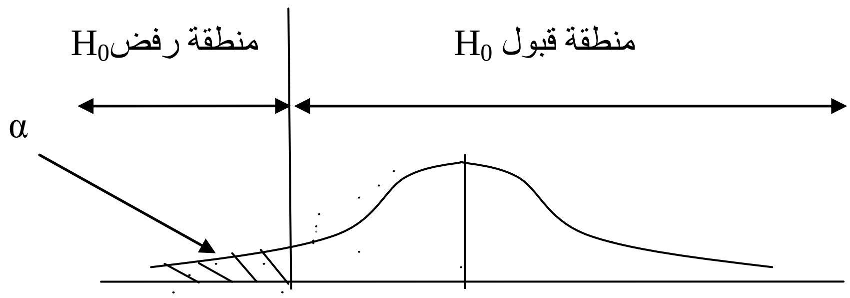


<u>مثال2:</u> قد تكون الفرضية البديلة كالتالي:

$$H_1 : \mu > 25.000$$

أي أن متوسط الدخل الشهري لهذه الفئة أكبر من 25.000دج.

ج. أن يأخذ شكل أصغر "<": في هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار ذو ذيل أيسر (جانب أيسر). في هذه الحالة الاختبار له ذيل واحد على اليسار، حيث نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 إذا وقعت قيمة الاحصائية الحسابية على اليمين، ونرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 إذا وقعت قيمة الاحصائية الحسابية على اليسار، كما هو موضح في الشكل التالي:



<u>مثال3:</u> قد تكون الفرضية البديلة كالتالي:

$$H_1 : \mu < 25.000$$

أي أن متوسط الدخل الشهري لهذه الفئة أقل من 25.000دج.

وخلاصة القول هوأن لابد على الباحث من تحديد الفرضية البديلة التي لا تخرج عن أحد الأشكال الثلاثة السابقة، وهذا التحديد مهم جدا قبل الدخول في تفاصيل الاختبار الاحصائي وذلك لأنه هو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم كما سوف نرى.

3.2- الخطأ في اتخاذ القرار: كل قرار يبنى على نتائج العينة يكون معرضا للخطأ، وفي اختبار الفرضيات هناك حالتان بالنسبة لفرضية العدم هما: إما أن تكون صحيحة، وإما أن تكون خاطئة. كما أنه يوجد نوعان من القرارات المتخذة من طرف الباحث بشأن فرضية العدم هما: رفض فرضية العدم أو عدم رفضها، وهذا ما يجعل اتخاذ القرار ينطوي على نوعين من الأخطاء في اختبار الفرضيات يتمثلان فيما يلي:

أ. الخطأ من النوع الأول α: هو الخطأ الذي يحدث عند رفض فرضية العدم عندما تكون صحيحة، والاحتمال الذي يحدث نتيجة الخطأ الأول يرمز له بالرمز α، فالإسم البديل للخطأ من النوع الأول هو مستوى المعنوية، وتساوي احتمال رفض فرضية العدم H_0 إذا كانت H_0 صحيحة، ويكتب:

α =P(H_0رفض / H_0صحيحة)

ب. الخطأ من النوع الثاني β: هو الخطأ الذي يحدث عند قبول (عدم رفض) فرضية العدم عندما تكون خاطئة، والاحتمال الذي يحدث نتيجة الخطأ الثاني يرمز له بالرمز β، وتساوي احتمال عدم رفض فرضية العدم H_0 إذا علم أن H_1 صحيحة، ويكتب: β =P(H_0قبول / H_1صحيحة)

والجدول التالي يوضح هذين النوعين من الأخطاء:

<u>الجدول رقم 04:</u> الخطأ من النوع الأول و الخطأ من النوع الثاني

واقع الفرضية / القرار	H_0 صحيحة	H_0 خاطئة
قبولH_0	قرار صحيح ($1-\alpha$)	قرار خاطئ β (الخطأ من النوع الثاني)
رفضH_0	قرار خاطئ α (الخطأ من النوع الأول)	قرار صحيح($1-\beta$)

<u>المصدر:</u> من اعداد الباحث

ولكي يكون اختبار الفرضيات جيدا أو تكون قاعدة اتخاذ القرار جيدة يجب أن تصمم بحيث تؤدي إلى التقليل من أخطاء القرار، وذلك بزيادة حجم العينة (لأنه عند تقليل احتمال ارتكاب أحد أنواع الخطأ يصاحبه زيادة في احتمال ارتكاب النوع الآخر من الخطأ)، والذي يؤدي إلى تناقص كلا النوعين من الخطأ.

ويعد الخطأ من النوع الأول الأكثر خطورة في أغلب الأحيان لذلك لابد من تحديد مستوى المعنوية α، حيث في اختبار فرضية معينة فإن أقصى احتمال الذي يمكن أن نتحمل به خطأ من النوع الأول يسمى بمستوى المعنوية.

ومن الناحية العملية فإنه عادة تستخدم مستوى المعنوية 1% أو 5% (هما الأكثر استعمال رغم وجود قيم أخرى قد تستخدم).

4.2- تحديد القيمة الاحصائية الحسابية: وهي احصائية يبنى عليها قرار اختبارالفرضيات، ويتم حساب قيمتها من بيانات ومعطيات العينة، بمعنى آخر هي عبارة عن متغير عشوائي تتغير قيمتها بتغير بيانات العينة الاحصائية التي نأخذها من المجتمع الاحصائية، وبالتالي يجب معرفة طبيعة التوزيع الاحصائي الذي يخضع له الاختبار لإتخاذ القرار بشأن الفرضية الاحصائية [التوزيع الطبيعي (Z_C)، توزيع ستودنت (T_C)، توزيع كي مربع (χ_c^2)، توزيع فيشر (F_C)].

3. <u>خطوات اختبار الفرضيات:</u>

تمر عملية اختبار الفرضيات بالخطوات التالية:

1.3- تحديد نوع الاختبار: في هذه الخطوة يركز الباحث على معرفة نوع الاختبار حسب المعطيات المتوفرة مثل: اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع، اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع، اختبار الفرضيات لتباين المجتمع...الخ.

2.3- تحديد نوع التوزيع: يجب معرفة نوع توزيع المتغير العشوائي، وذلك حسب المعطيات المتوفرة مثل: لإختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ نستعمل التوزيع الطبيعي إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وإذا كان كان مجهول وحجم العينة صغيرة ($n < 30$) نستعمل توزيع ستودنت.

3.3- صياغة فرضية العدم وفرضية البديلة: في هذه الخطوة يركز الباحث على اتجاه الاختبار ليتمكن من صياغة الفرضية البديلة، ففرضية العدم عادة ما تأخذ شكل المساواة ($=$) في حين أن الفرضية البديلة تأخذ أشكال مختلفة ويتحدد اتجاهها من خلال القراءة الجيدة للمشكلة وتحديد الاتجاه عن طريق العبارات التي تتضمنها مثل:

- تختلف، لا تساوي،....
- تزيد، أكبر، أعلى من، تفوق، تتجاوز....
- تنقص، أقل من، أدنى، لا تفوق، لا تتجاوز....

4.3- تحديد مستوى المعنوية (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم): تساعدنا مستوى المعنوية α (وهي الخطأ من النوع الأول) في تحديد النقاط الحرجة (القيم الفاصلة)، وبالتالي تحديد مناطق الرفض لفرضية العدم H_0 من خلال رسم المنحنى، حيث يعبر عن الاحتمال α بيانيا بمنطقة الرفض لفرضية

العدم H_0 في حالة الاختبار ذو جانب واحد، فتضلل مساحة واحدة على اليمين أو اليسار حسب جانب الاختبار، أو تضلل المساحتين $\frac{\alpha}{2}$ على جانبي منطقة قبول فرضية العدم H_0 في حالة اختبار ذو جانبين (ذو ذيلين).

5.3- حساب القيمة الجدولية: تستنتج القيمة الجدولية للإحصائية بالاعتماد على الجداول الاحصائية المتوفرة (جدول التوزيع الطبيعي، جدول توزيع ستودنت، جدول توزيع كي مربع، جدول توزيع فيشر).

6.3- تحديد القيمة الاحصائية الحسابية (قاعدة القرار): وهي القيمة المحسوبة من بيانات ومعطيات العينة والتي يتم على أساسها الاختبار، فبعد معرفة نوع التوزيع تحدد قيمة الاحصائية الحسابية مثل: (التوزيع الطبيعي (Z_C)، توزيع كي مربع (χ_c^2)،....).

7.3- المقارنة واتخاذ القرار: مقارنة القيمتين المحسوبة والجدولية واتخاذ القرارإما برفض فرضية العدم في حالة عدم انتماء القيمة الاحصائية المحسوبة لمجال قبول فرضية العدم H_0 وبالتالي قبول الفرضية البديلة H_1، أو بقبولها في حالة العكس.

ثانيا: اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ:

يتناول هذا الاختبار متوسط المجتمع μ، مثل: متوسط الدخل، متوسط الطول ...الخ، ويؤكد اختبار المتوسط فرضية مساواته لقيمة ما μ_0 (المتوسط المختبر). وللقيام بالاختبار نستخرج عينة عشوائية من المجتمع المدروس نحسب المتوسط الحسابي لها $\bar{x}$، ثم نستخرج التوزيع الاحتمالي ل $\bar{x}$ لقياس قرب أو بعد هذه القيمة من μ_0.

1. اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوما:

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذا توزيعا طبيعيا وتباينه معلوما، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي، فإن القيمة الاحصائية الحسابية (Z_C) تكون على الشكل التالي:

$$\mathbf{Z}_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_{\bar{x}}}$$

$\bar{x}$: المتوسط الحسابي للعينة.

μ_0: متوسط المجتمع المختبر (معطى في التمرين).

$\delta_{\bar{x}}$: الخطأ المعياري لتوزيع المعاينة.

$$\begin{cases} \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n < 0.05 * N \ \ \underline{\text{ou}} \ \ N = ? \\ \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si} \quad n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

وبما أن الاختبار يتوقف على اتجاه الفرضية البديلة (H_1)، إما تكون متجهة لليمين فيكون الاختبار ذو ذيل أيمن (ذو جانب أيمن)، وإما تكون متجهة لليسار فيكون الاختبار ذو ذيل أيسر (ذو جانب أيسر)، وإما أن تكون الفرضية البديلة غير موجهة فيكون الاختبار ذو ذيلين (ذو جانبين)، كما هو موضح كالتالي:

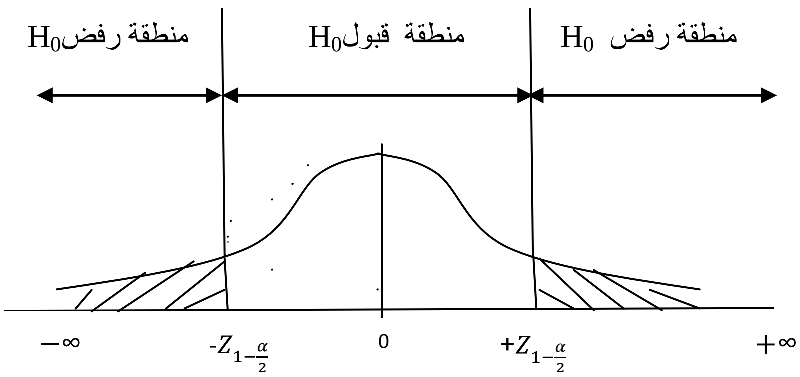
1.1- اختبار ذو ذيلين (ذو جانبين): بعدما قمنا بتحديد نوع الاختبار والذي هو اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ، وتحديد نوع التوزيع والذي هو التوزيع الطبيعي، بقي لنا الخطوات التالية: تحديد الفرضيات؛ تحديد قاعدة القرار؛ حساب القيمة الجدولية؛ حساب القيمة الحسابية؛ المقارنة واتخاذ القرار.

- ❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- ❖ تحديد قاعدة القرار:



- ❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب Z_t والمتمثلة في $\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ والتي تقرأ من الجدول الطبيعي.
- ❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب Z_C والمتمثلة في:

$$\mathbf{Z}_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_{\bar{x}}}$$

- ❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $Z_c \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $Z_c \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

ولتوضيح هذا أكثر نستعين بالمثال التالي:

مثال4: يخضع متوسط عمر المصابيح الكهربائية المنتجة من طرف احدى المؤسسات الى التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 80 ساعة. ترغب المؤسسة في معرفة ما إذا كان متوسط عمر مصابيحها سوف يستمر الى 980 ساعة انارة ولا يتغير، لذلك قامت بسحب عينة عشوائية مكونة من 100 مصباح فوجدت بأن متوسط العمر الانتاجي لهذه العينة هو 1000 ساعة.

- اختبر ما إذا كان متوسط عمر مصابيح سوف يستمر الى 980 ساعة انارة عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$n=100 \quad / \quad \bar{x} = 1000 \quad / \quad \mu_0 = 980 \quad / \quad \delta = 80 \quad / \quad \alpha = 5\%$

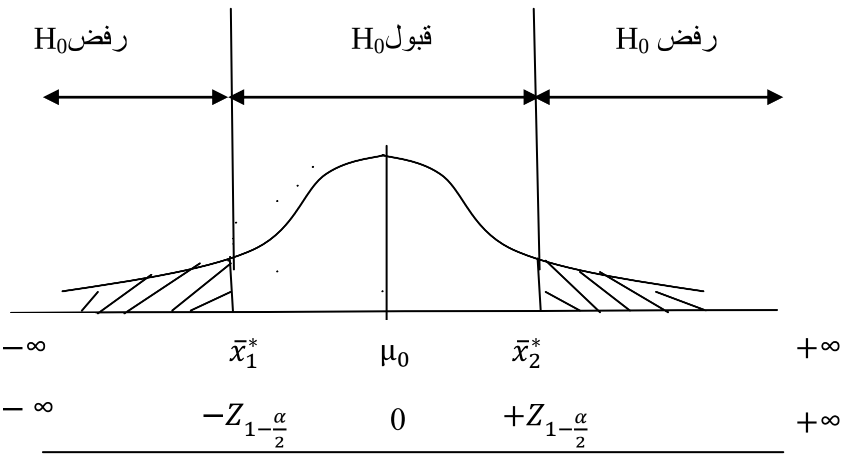
- اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ: (عينة واحدة)

δ معلومة إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu = \mu_0 = 980$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$



الطريقة 01:

حساب القيم الفاصلة:

$$\bar{x}_1^* = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}$$

$$\bar{x}_2^* = \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\bar{x}}$$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{1.96}$$

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{80}{\sqrt{100}} = 8$$

$$\bar{x}_1^* = 980 - (1.96 * 8) = \mathbf{964.32}$$

$\bar{x}_2^* = 980 + (1.96 * 8) = \mathbf{995.68}$

بما أن متوسط العينة $\bar{x}$ لا ينتمي إلى مجال القيم الفاصلة أي:

$$\bar{x} = 1000 \notin [964.32 ; 995.68]$$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند α= 5 % إذن متوسط عمرالمصابيح سوف لا يستمر الى 980 ساعة انارة.

الطريقة 02:

القيم الجدولية (الفاصلة): $(\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mp\mathbf{1.96}$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_{\bar{x}}} = \frac{1000 - 980}{8} = \mathbf{2.5}$$

بما أن: $Z_c = 2.5 \notin [-1.96 ; +1.96]$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند α= 5 % إذن متوسط عمرالمصابيح سوف لا يستمر الى 980 ساعة انارة.

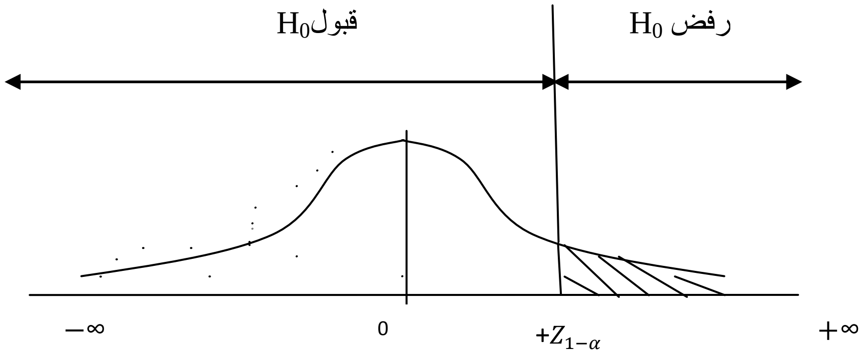
2.1- اختبار ذو ذيل أيمن (جانب أيمن):

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب Z_t والمتمثلة في $+Z_{1-\alpha}$ والتي تقرأ من الجدول الطبيعي.

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب Z_C والمتمثلة في:

$$\mathbf{Z}_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_{\bar{x}}}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $Z_c < +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $Z_c > +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال5:</u> نفس معطيات مثال 4 السابق.

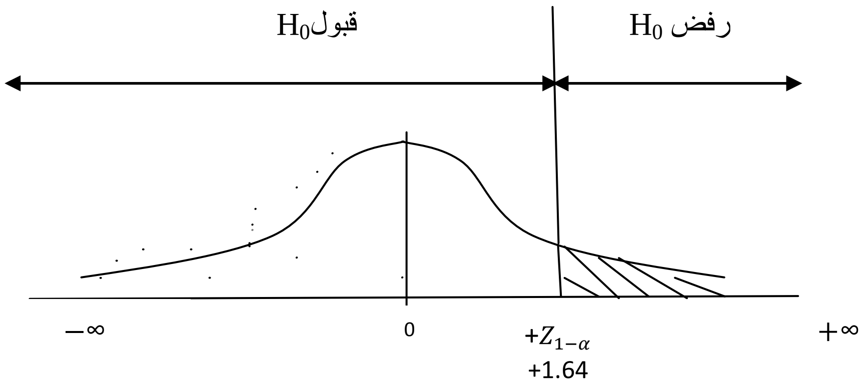
- اختبر ما إذا كان متوسط عمر مصابيح سوف يكون أكبر من 980 ساعة انارة عند مستوى معنوية 5% ؟

<u>الحل:</u>

<u>اختبار ذو ذيل أيمن</u>

$H_0 : \mu = \mu_0 = 980$

$H_1 : \mu > \mu_0$



القيمة الجدولية (الفاصلة): ($+Z_{1-\alpha}$)

$$* \alpha = 5\% \rightarrow +Z_{1-\alpha} = +1.64$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_{\bar{x}}} = \frac{1000 - 980}{8} = \mathbf{2.5}$$

بما أن: $Z_c = 2.5 > +Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند α= 5 % إذن متوسط عمرالمصابيح سوف يكون أكبر من 980 ساعة انارة.

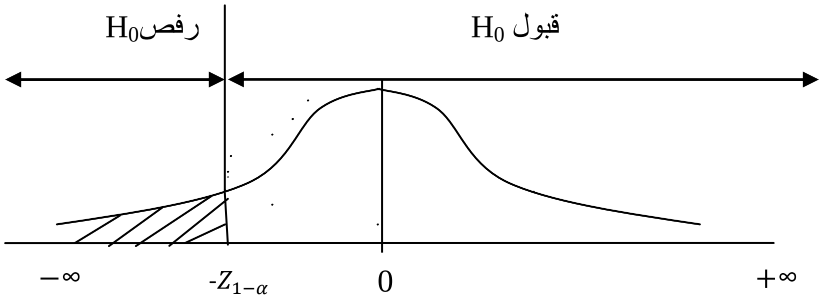
3.1- اختبار ذو ذيل أيسر (جانب أيسر):

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب Z_t والمتمثلة في $-Z_{1-\alpha}$ والتي تقرأ من الجدول الطبيعي.

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب Z_C والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_{\bar{x}}}}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $Z_c > -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $Z_c < -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال6:</u> نفس معطيات مثال 4 السابق.

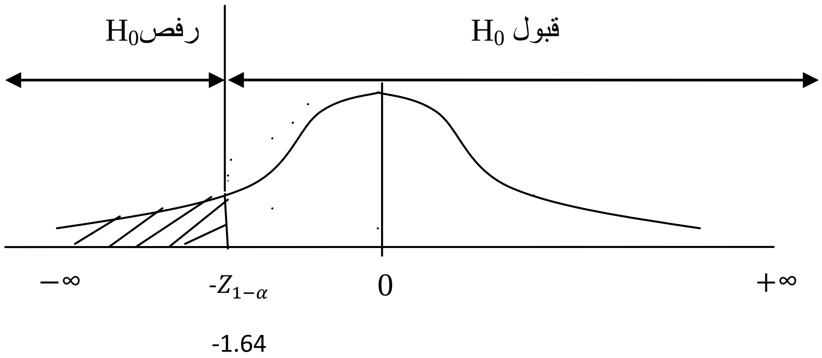
- اختبر ما إذا كان متوسط عمر مصابيح سوف يكون أقل من 980 ساعة انارة عند مستوى معنوية 5% ؟

<u>الحل:</u>

<u>اختبار ذو ذيل أيسر</u>

$H_0 : \mu = \mu_0 = 980$

$H_1 : \mu < \mu_0$



القيمة الجدولية (الفاصلة): $(-Z_{1-\alpha})$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow -Z_{1-\alpha} = -1.64$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

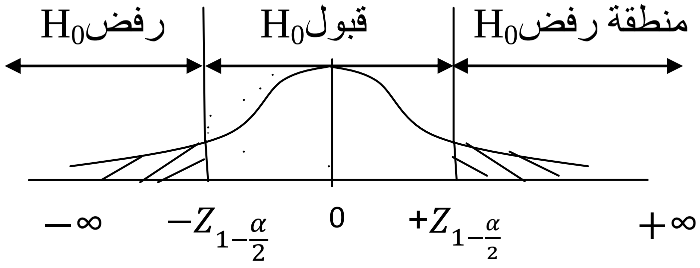
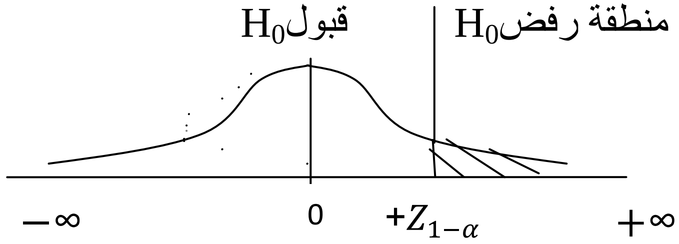
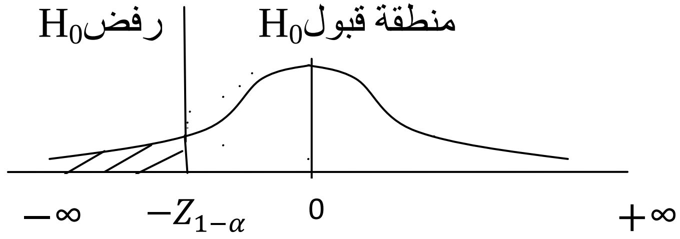
$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_{\bar{x}}} = \frac{1000 - 980}{8} = \mathbf{2.5}$$

بما أن: $Z_c = 2.5 > -Z_{1-\alpha}$

<u>فإن القرار:</u> قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5\%$ إذن متوسط عمرالمصابيح سوف لا يكون أصغر من 980 ساعة انارة.

ويمكن تلخيص اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوما في الجدول التالي:

<u>الجدول رقم 05:</u> اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوما (نستعمل التوزيع الطبيعي Z)

جانب الاختبار	فرضية العدم والفرضية البديلة	تحديد مناطق قبول ورفض $\mathbf{H_0}$ (الرسم) مع تحديد القيمة الفاصلة (القيمة الجدولية)	القيمة الحسابية (Z_c)	القرار
ذو ذيلين	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$		$\mathbf{Z}_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\delta_{\bar{x}}}$	إذا كانت: $Z_c \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$		$\mathbf{Z}_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\delta_{\bar{x}}}$	إذا كانت: $Z_c \leq +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c > +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$		$\mathbf{Z}_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\delta_{\bar{x}}}$	إذا كانت: $Z_c > -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \leq -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

2. اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباينه مجهول وحجم العينة كبيرة ($30 \leq n$):

غالبا ما يكون تباين المجتمع مجهولا وحجم العينة كبيرة ($30 \leq n$)، وبتطبيق نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي. ونقوم بإستعمال الانحراف المعياري للعينة S بدل الانحراف المعياري للمجتمع δ المجهول، وفي هذه الحالة الشكل الوحيد الذي يتغير هو القيمة الاحصائية الحسابية والتي تأخذ الشكل التالي:

$$\mathbf{Z}_{c} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$$

حيث:

$$\begin{cases} \widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n < 0.05 * N \ \underline{\text{ou}} \ N = ? \\ \widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si} \quad n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

مثال7: إذا كان متوسط العلامات في احدى المسابقات الدراسية هو 12 نقطة. أخذت عينة عشوائية حجمها 36 طالبا وكان معدل علاماتهم هو 11.5 وبانحراف معياري 1.

- اختبر هل هناك فروق جوهرية للعلامات عند مستوى معنوية 10% ؟

الحل:

$$n=36 \quad / \quad \bar{x} = 11.5 \quad / \quad \mu_0 = 12 \quad / \quad S = 1 \quad / \quad \alpha = 10\%$$

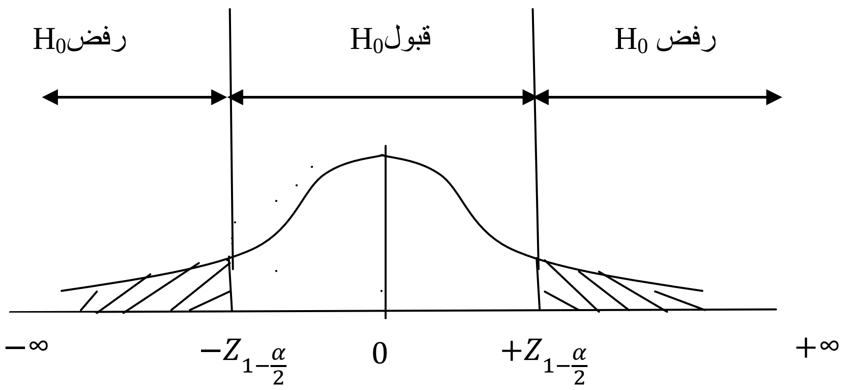
- اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ: (عينة واحدة)

δ مجهولة وحجم العينة كبيرة ($30 \leq n$) إذن بتطبيق نظرية النهاية المركزية نستعمل التوزيع الطبيعي .(Z)

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu = \mu_0 = 12$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$



القيم الجدولية (الفاصلة): ($\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$)

$* \alpha = 10\% \rightarrow \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mp \mathbf{1.64}$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$$

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = 0.166$$

$$Z_c = \frac{11.5 - 12}{0.166} = -3.01$$

بما أن: $Z_c = -3.01 \notin [-1.64 \,; +1.64]$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 10$ % إذن يوجد فروق جوهرية للعلامات.

مثال8: إذا كان متوسط وزن الأبقار باحدى المزارع هو 200 كلغ. أخذت عينة عشوائية من هذه المزرعة حجمها 100 بقرة من ضمن 500 بقرة التي يملكها الفلاح، ووجد أن متوسط وزن هذه العينة هو 204 كلغ وبانحراف معياري قدره 20 كلغ.

- اختبر إن كان متوسط وزن الأبقار يزيد عن 200 كلغ عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$n=100$ / N=500 / $\bar{x} = 204$ / $\mu_0 = 200$ / $S = 20$ / $\alpha = 5\%$

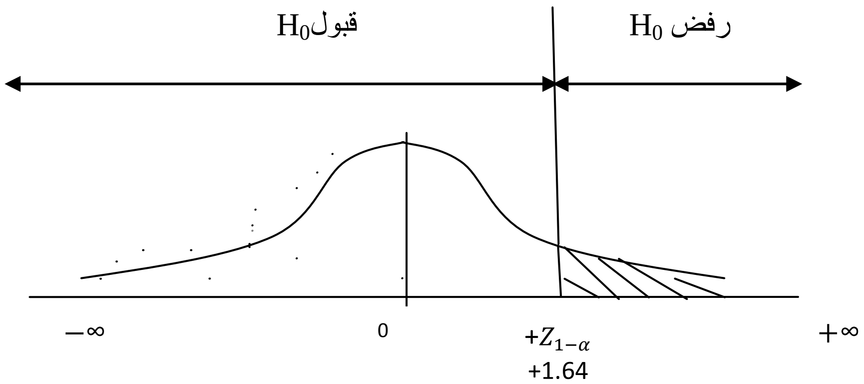
- اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ: (عينة واحدة)

δ مجهولة وحجم العينة كبيرة $(30 \leq n)$ إذن بتطبيق نظرية النهاية المركزية نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \mu = \mu_0 = 200$

$H_1 : \mu > \mu_0$



القيمة الجدولية (الفاصلة): $(+Z_{1-\alpha})$

$* \alpha = 5\% \rightarrow +Z_{1-\alpha} = +1.64$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$$

$* n=100 > 0.05 * 500 = 25$

إذن نستعمل معامل التصحيح

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{20}{\sqrt{100}} * \sqrt{\frac{500-100}{500-1}} = 1.79$$

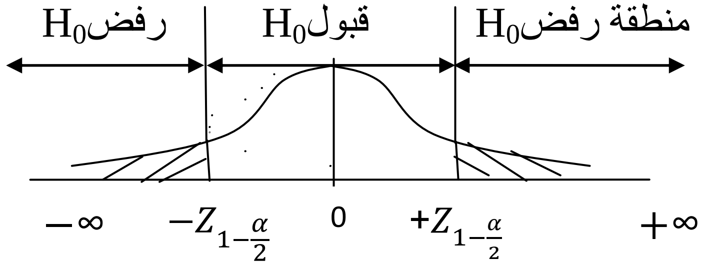
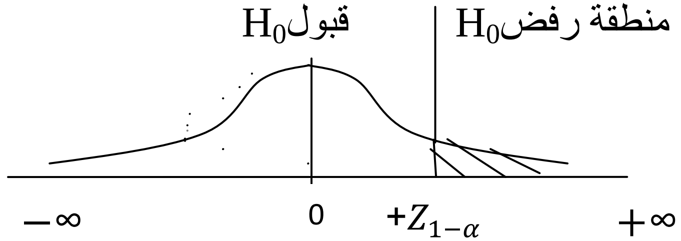
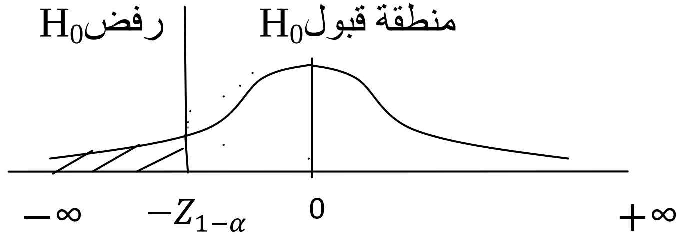
$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}} = \frac{204 - 200}{1.79} = 2.23$$

بما أن: $Z_c = 2.23 > +Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند α= 5 % إذن متوسط وزن الأبقار يزيد عن 200 كلغ.

ويمكن تلخيص اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباينه مجهول وحجم العينة كبيرة $(n \geq 30)$ في الجدول التالي:

الجدول رقم 06: اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهولا و $n \geq 30$ (نستعمل التوزيع الطبيعي Z)

جانب الاختبار	فرضية العدم والفرضية البديلة	تحديد مناطق قبول ورفض H_0 (الرسم) مع تحديد القيمة الفاصلة (القيمة الجدولية)	القيمة الحسابية (Z_c)	القرار
ذو ذيلين	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$		$\mathbf{Z}_c = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\overline{x}}}}$	إذا كانت: $Z_c \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$		$\mathbf{Z}_c = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\overline{x}}}}$	إذا كانت: $Z_c \leq +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c > +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$		$\mathbf{Z}_c = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\overline{x}}}}$	إذا كانت: $Z_c > -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \leq -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

3. اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباينه مجهول وحجم العينة صغيرة ($n < 30$):

إن اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ في العينات الصغيرة والمأخوذة من مجتمعات طبيعية مجهولة التباين، فإننا نستعمل توزيع ستودنت (T).

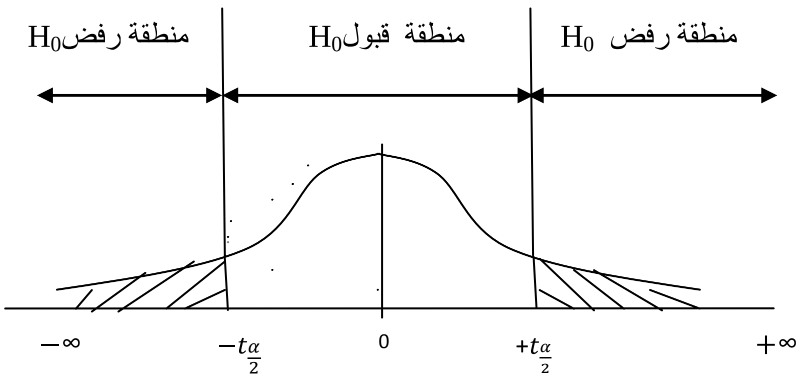
1.3- اختبار ذو ذيلين (ذو جانبين):

- تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- تحديد قاعدة القرار:



- حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب T_t والمتمثلة في $\pm\ t_{\frac{\alpha}{2}}$ والتي تقرأ من جدول ستودنت كما يلي:

$$\begin{cases} V = n - 1 = \\ \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \ = \end{cases}$$

- حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب T_C والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{T_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\overline{x}}}}}$$

- المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $T_c \in \left[-t_{\frac{\alpha}{2}}\ ;\ +t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $T_c \notin \left[-t_{\frac{\alpha}{2}}\ ;\ +t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال9: في دراسة لمعرفة معدل الزمن الذي تحتاجه العاملات في معمل الخياطة لإنجاز عدد من القطع الجاهزة هو 7 ساعات، ولإختبار هذا الاستنتاج تم سحب عينة عشوائية حجمها 23 عاملة فأعطت معدل الزمن هو 7.5 ساعة بانحراف معياري هو 1.4 ساعة.

- اختبار هذا الاستنتاج عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$$n=23 \quad / \quad \bar{x} = 7.5 \quad / \quad \mu_0 = 7 \quad / \quad S = 1.4 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

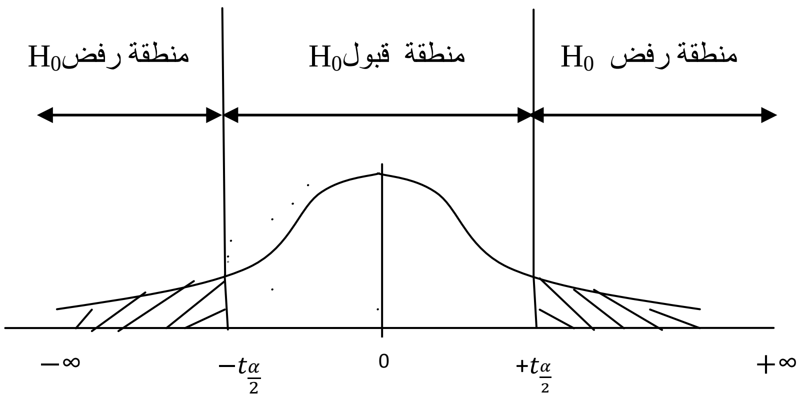
- اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ: (عينة واحدة)

δ مجهولة وحجم العينة صغيرة $(30 > n)$ إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu = \mu_0 = 7$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$



القيمة الجدولية (الفاصلة): $(\pm t_{\frac{\alpha}{2}})$

$$\begin{cases} V = n - 1 = 22 \\ \pm t_{\frac{\alpha}{2}} = \pm t_{0.025} = \pm 2.074 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_C)

$$T_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$$

$$\widehat{\delta_{\bar{x}}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1.4}{\sqrt{23}} = 0.292$$

$$T_c = \frac{7.5 \ -7}{0.292} = 1.712$$

بما أن: $T_c = 1.712 \in [-2.074\ ; +2.074]$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن نقول أن معدل الزمن الذي تحتاجه العاملات في معمل الخياطة هو 7 ساعات.

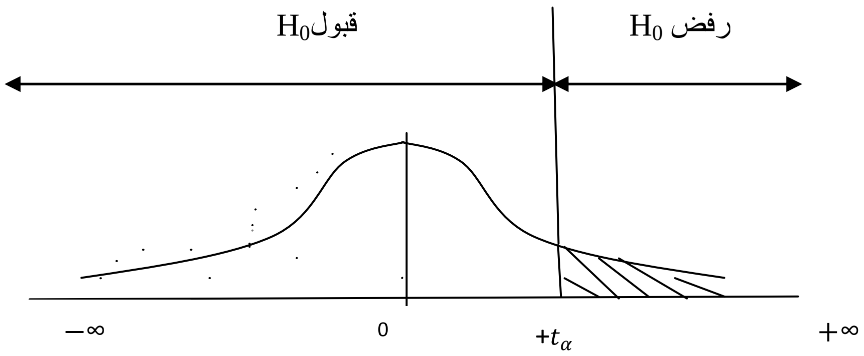
2.3- اختبار ذو ذيل أيمن:

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب T_t والمتمثلة في $+\ t_\alpha$ والتي تقرأ من جدول ستودنت كما يلي:

$$\begin{cases} V = n - 1 = \\ +t_\alpha \ = \end{cases}$$

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب T_C والمتمثلة في:

$$\mathbf{T} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\overline{x}}}}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $T_c < +t_\alpha$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $T_c > +t_\alpha$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال10: نفس معطيات مثال 09 السابق.

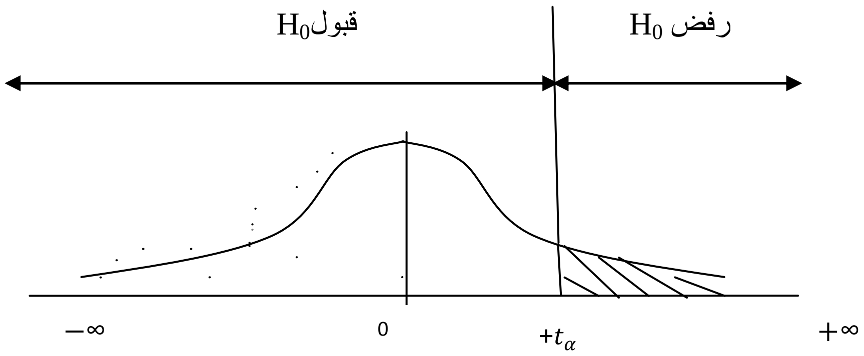
- اختبر إن كان معدل الزمن الذي تحتاجه العاملات في معمل الخياطة يتجاوز 7 ساعات عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \mu = \mu_0 = 7$

$H_1 : \mu > \mu_0$



القيمة الجدولية (الفاصلة): ($+t_\alpha$)

$$\begin{cases} V = n - 1 = 22 \\ +t_\alpha = +t_{0.05} = +1.717 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

$$T_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}} = 1.712$$

بما أن: $T_c = 1.712 < +t_\alpha$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند α = 5 % إذن نقول أن معدل الزمن الذي تحتاجه العاملات في معمل الخياطة لا يتجاوز 7 ساعات.

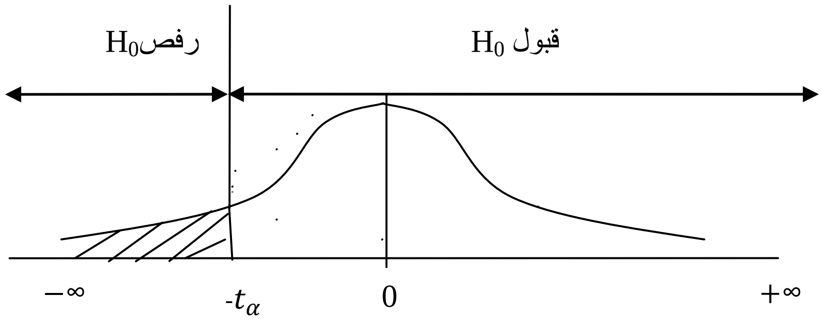
3.3- اختبار ذو ذيل أيسر:

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$

❖ تحديد قاعدة القرار:



- ❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب T_t والمتمثلة في $-t_\alpha$ والتي تقرأ من جدول ستودنت كما يلي:

$$\begin{cases} V = n - 1 = \\ -t_\alpha = \end{cases}$$

- ❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب T_C والمتمثلة في:

$$\mathbf{T}_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\overline{x}}}}$$

- ❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $T_c > -t_\alpha$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $T_c < -t_\alpha$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال11: نفس معطيات مثال 09 السابق.

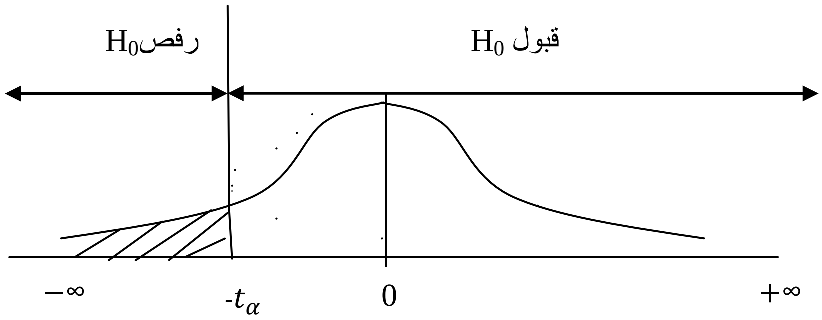
- اختبر إن كان معدل الزمن الذي تحتاجه العاملات في معمل الخياطة يقل عن 7 ساعات عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

اختبار ذو ذيل أيسر

$H_0 : \mu = \mu_0 = 7$

$H_1 : \mu < \mu_0$



القيمة الجدولية (الفاصلة): ($+t_{\alpha}$)

$$\begin{cases} V = n - 1 = 22 \\ -t_{\alpha} = -t_{0.05} = -1.717 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

$$T_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}} = 1.712$$

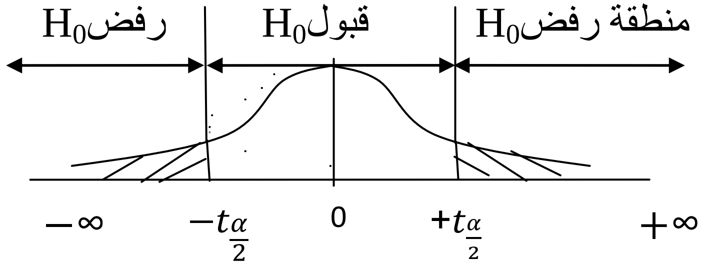
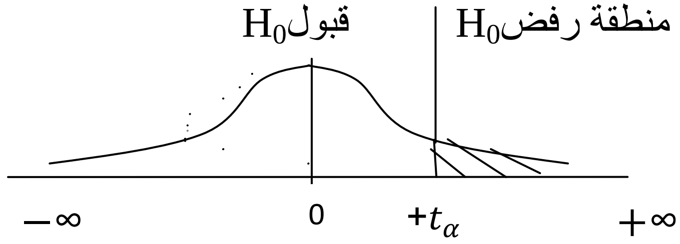
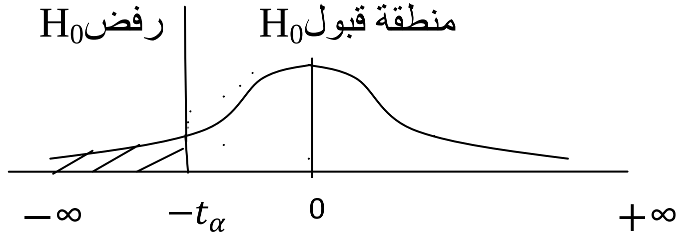
بما أن: $T_c = 1.712 > -t_{\alpha}$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن نقول أن معدل الزمن الذي تحتاجه العاملات في معمل الخياطة لا يقل عن 7 ساعات.

ويمكن تلخيص اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباينه مجهول وحجم العينة كبيرة ($n < 30$) في الجدول التالي:

الجدول رقم 07: اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهولا

و $n < 30$ (نستعمل توزيع ستودنت T)

جانب الاختبار	فرضية العدم والفرضية البديلة	تحديد مناطق قبول ورفض H_0 (الرسم) مع تحديد القيمة الفاصلة (القيمة الجدولية)	القيمة الحسابية (T_c)	القرار
ذو ذيلين	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$		$T_c = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$	إذا كانت: $T_c \in \left[-t_{\frac{\alpha}{2}} ; +t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $T_c \notin \left[-t_{\frac{\alpha}{2}} ; +t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$		$T_c = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$	إذا كانت: $T_c \leq +t_{\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $T_c > +t_{\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$		$T_c = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\delta_{\bar{x}}}}$	إذا كانت: $T_c > -t_{\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $T_c \leq -t_{\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

خلاصة: يتم اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع μ من خلال 5 خطوات متتالية وهي:

- تحديد الفرضيات (فرضية العدم وفرضية البديلة).
- تحديد قاعدة القرار.
- حساب القيمة الجدولية.
- حساب القيمة الحسابية.
- اتخاذ القرار.

حيث تتحدد كل خطوة حسب نوع الاختبار (ذو ذيلين، ذو ذيل أيمن، ذو ذيل أيسر)، وحسب طبيعة المجتمع وتباينه وحجم العينة، وتستخدم في ذلك نظريات توزيع المعاينة.

ثالثا: اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2):

قد يرغب الباحث في اجراء اختبار عما إذا كان مستوى الطلبة لقسم ما هو نفسه في القسم الآخر، أو اجراء اختبارعما إذا كان متوسط الدخل في احدى الشركات الصناعية يساوي متوسط الدخل في الشركة الصناعية الأخرى...الخ. بمعنى آخر قد يرغب الباحث في اجراء اختبارعما إذا كان متوسط المجتمع الأول يساوي متوسط المجتمع الثاني ...الخ، وللوصول الى هذه الغاية نستعمل عينتين عشوائيتين من هذين المجتمعين.

1. اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين:

ليكن $\overline{x_1}$ هو متوسط حسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 معلوم، و $\overline{x_2}$ هو متوسط حسابي لعينة عشوائية ثانية حجمها n_2 مستقلة عن الأولى والمسحوبة من مجتمع آخر له توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 معلوم. فإن لإختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) نستعمل التوزيع الطبيعي، وأن القيمة الاحصائية الحسابية (Z_c) تكون على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D}}$$

حيث:

$\delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \delta_D$: الخطأ المعياري المشترك لعينتين.

$$\delta_D = \delta_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \sqrt{\frac{{\delta_1}^2}{n_1} + \frac{{\delta_2}^2}{n_2}}$$

ويأخذ هذا الاختبار الحالات أو الأشكال الثلاثة التالية:

1.1- اختبار ذو ذيلين (ذو جانبين):

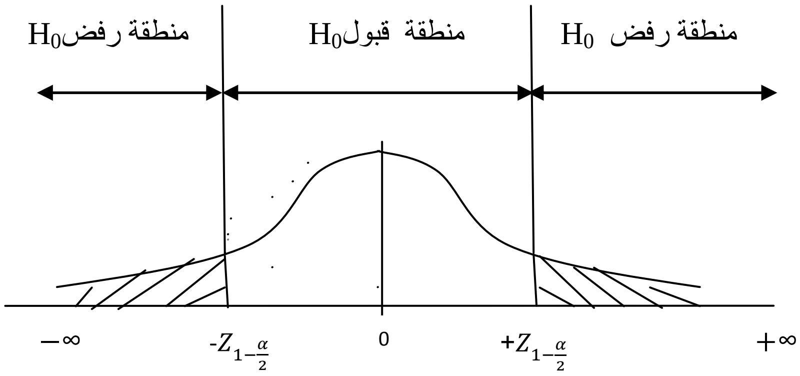
بعدما قمنا بتحديد نوع الاختبار والذي هو اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2)، وتحديد نوع التوزيع والذي هوالتوزيع الطبيعي، بقي لنا الخطوات التالية:

- ❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

- ❖ تحديد قاعدة القرار:



- ❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب Z_t والمتمثلة في $\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ والتي تقرأ من الجدول الطبيعي.
- ❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب Z_C والمتمثلة في:

$$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D}$$

- ❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $Z_C \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $Z_C \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال12:</u> سحبنا عينتان عشوائيتان مستقلتان حجمهما على التوالي 50 و35 من مجتمعين طبيعين تباينهما على التوالي 136 و81، وكان المتوسط الحسابي للعينتين هما 75و70.

- اختبر إن كانت هناك فروق جوهرية بين متوسطي العينتين عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$$\overline{x_1} = 75 \quad / \quad \delta_1^{\,2} = 136 \quad / \quad n_1 = 50 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

$$\overline{x_2} = 70 \quad / \quad \delta_2^{\,2} = 81 \quad / \quad n_2 = 35$$

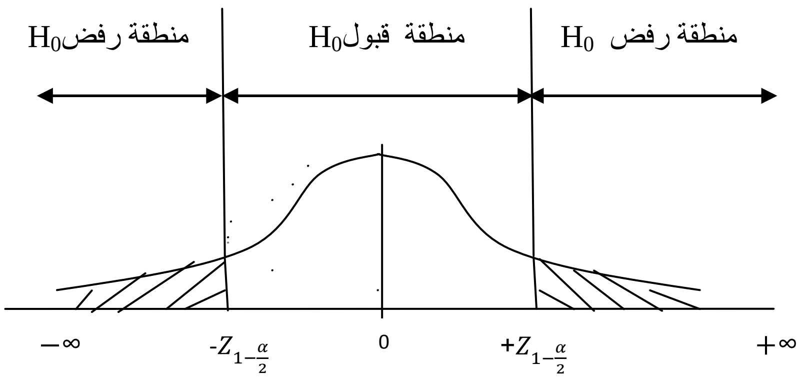
اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2).

δ_1 و δ_2 معلومتان إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



القيم الجدولية (الفاصلة): ($\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$)

$$* \alpha = 5\% \rightarrow \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mp \mathbf{1.96}$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D}$$

$$\delta_D = \delta_{\overline{x_1} - \overline{x_2}} = \sqrt{\frac{\delta_1^{\,2}}{n_1} + \frac{\delta_2^{\,2}}{n_2}} = \sqrt{\frac{136}{50} + \frac{81}{35}} = 2.243$$

$$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D} = \frac{75 - 70}{2.243} = 2.22$$

بما أن: $Z_c = 2.22 \notin [-1.96 \,; +1.96]$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند α= 5 % إذن يوجد فروق جوهرية بين متوسطي العينتين.

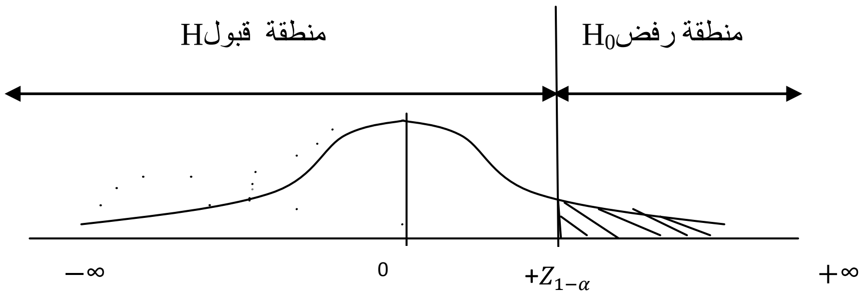
2.1- اختبار ذو ذيل أيمن (ذو جانب أيمن):

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب Z_t والمتمثلة في $+Z_{1-\alpha}$ والتي تقرأ من الجدول الطبيعي.

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب Z_C والمتمثلة في:

$$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $Z_c < +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $Z_c > +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال13: نفس معطيات المثال 12 السابق.

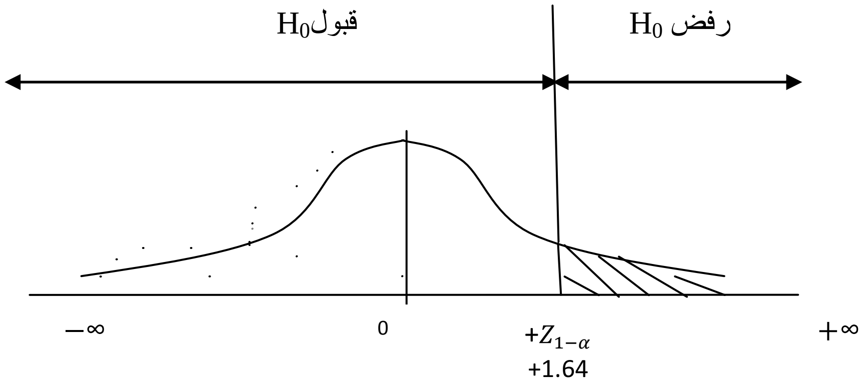
- اختبر ما إذا كان متوسط المجتمع الأول أكبر من الثاني عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

اختبار ذو ذيل أيمن

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$



القيمة الجدولية (الفاصلة): $(+Z_{1-\alpha})$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow +Z_{1-\alpha} = +1.64$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D} = \frac{75-70}{2.243} = 2.22$$

بما أن: $Z_c = 2.22 > +Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني.

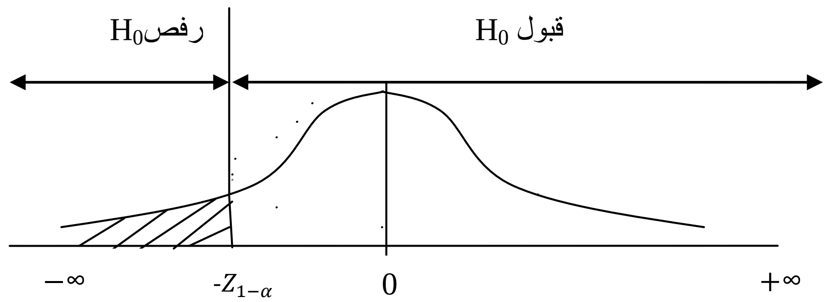
3.1- اختبار ذو ذيل أيسر (جانب أيسر):

- تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

- تحديد قاعدة القرار:



- حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب Z_t والمتمثلة في $-Z_{1-\alpha}$ والتي تقرأ من الجدول الطبيعي.
- حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب Z_C والمتمثلة في:

$$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D}$$

- المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $Z_c > -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $Z_c < -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال14:</u> نفس معطيات المثال 12 السابق.

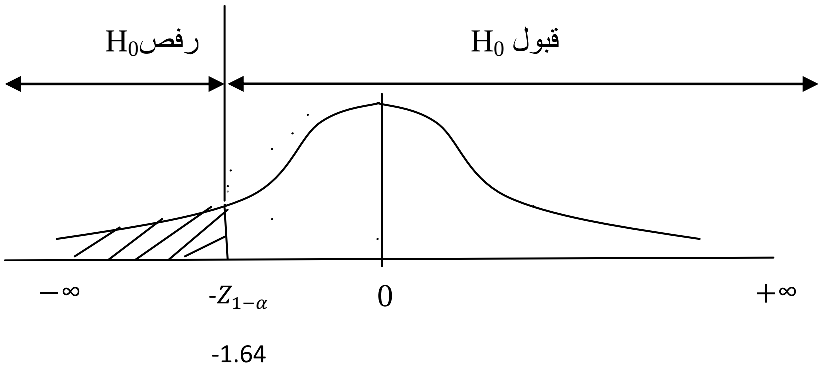
- اختبر ما إذا كان متوسط المجتمع الأول أقل من الثاني عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

اختبار ذو ذيل أيسر

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$



القيمة الجدولية (الفاصلة): $(+Z_{1-\alpha})$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow -Z_{1-\alpha} = -1.64$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

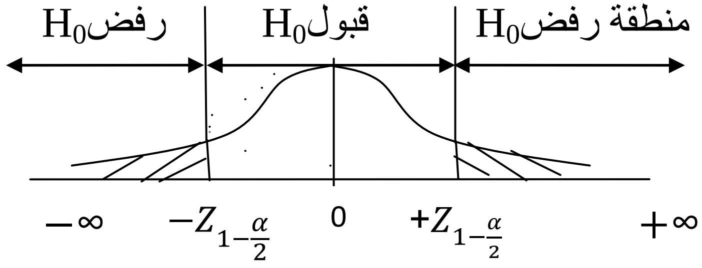
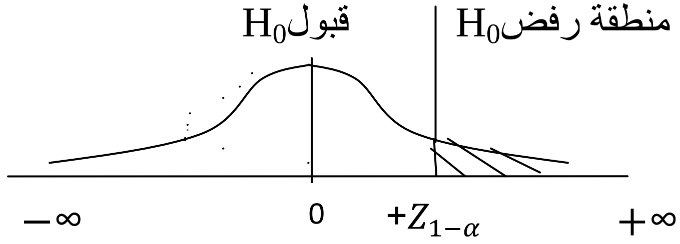
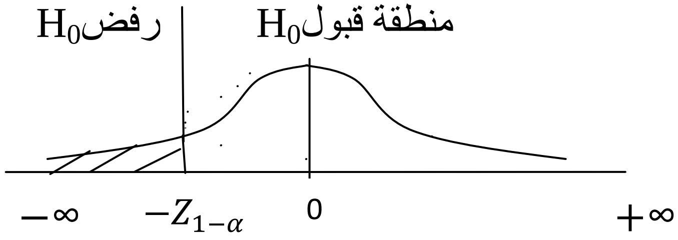
$$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D} = \frac{75-70}{2.243} = 2.22$$

بما أن: $Z_c = 2.22 > -Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني.

ويمكن تلخيص اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين في الجدول التالي:

الجدول رقم 08: اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين: (نستعمل التوزيع الطبيعي Z)

جانب الاختبار	فرضية العدم والفرضية البديلة	تحديد مناطق قبول ورفض H_0 (الرسم) مع تحديد القيمة الفاصلة (القيمة الجدولية)	القيمة الحسابية (Z_c)	القرار
ذو ذيلين	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$		$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D}$	إذا كانت: $Z_c \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$		$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D}$	إذا كانت: $Z_c \leq +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c > +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$		$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\delta_D}$	إذا كانت: $Z_c > -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \leq -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

2. اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبيرتين ($n_1 + n_2 \geq 30$):

ليكن $\overline{x_1}$ هو متوسط حسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 مجهول، و $\overline{x_2}$ هو متوسط حسابي لعينة عشوائية ثانية حجمها n_2 مستقلة عن الأولى والمسحوبة من مجتمع آخر له توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 مجهول، وكان حجم العينتين كبيرتين ($n_1 + n_2 \geq 30$). فإن لإختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) نستعمل التوزيع الطبيعي.

فإن هذه الحالة لديها نفس خطوات وأشكال الحالة السابقة، إلا أنه الشيء الوحيد الذي يتغير وهو القيمة الاحصائية الحسابية، والتي تأخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}}$$

$$\widehat{\delta_D} = \hat{\delta}_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}}$$

معنى ذلك أن تبايني المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 يكونا مجهولين، فنقوم بتعويضهما بتبايني العينتين S_1^2 **و** S_2^2 **.**

<u>مثال15:</u> إدعت شركة لصناعة المواد الكيميائية الزراعية أن استعمال هذه المواد يؤدي إلى رفع في كمية الانتاج. وللتحقق من ادعاء الشركة قام أحد المزارعين باختبار، حيث زرع حقل (A) بهذه المواد والحقل (B) بدونها، ثم أخذ عينة من الحقل (A) حجمها 30 متر مربع، وعينة من الحقل (B) حجمها 35 متر مربع، وكانا متوسط الانتاج على التوالي 125كغ و 110كغ، والانحراف المعياري للمحصولين على التوالي 30كغ و 25 كغ.

- اختبر إدعاء الشركة عند مستوى معنوية 1% ؟

<u>الحل:</u>

$$\overline{x_A} = 125 \quad / \quad S_A = 30 \quad / \quad n_A = 30 \quad / \quad \alpha = 1\%$$

$$\overline{x_B} = 110 \quad / \quad S_B = 25 \quad / \quad n_B = 35$$

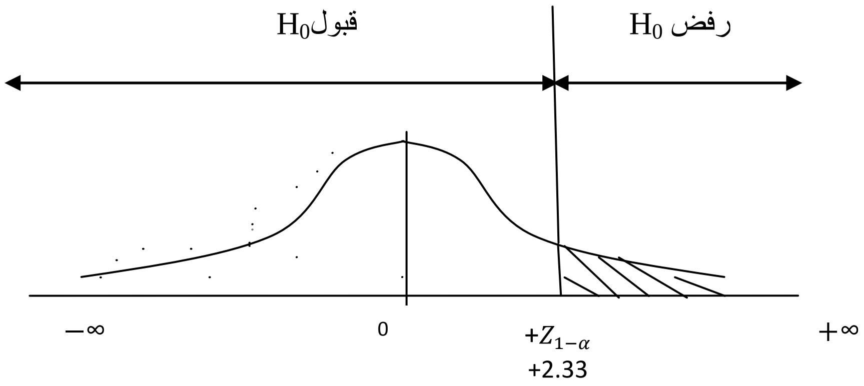
اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2).

δ_1 و δ_2 مجهولتان و حجم العينتين كبيرتين ($n_1 + n_2 \geq 30$) إذن نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

<u>اختبار ذو ذيل أيمن</u>

$H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A > \mu_B$



القيمة الجدولية (الفاصلة): $(+Z_{1-\alpha})$

$$* \alpha = 1\% \rightarrow +Z_{1-\alpha} = +2.33$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{\overline{x_A} - \overline{x_B}}{\widehat{\delta_D}}$$

$$\widehat{\delta_D} = \hat{\delta}_{\overline{x_A} - \overline{x_B}} = \sqrt{\frac{{S_A}^2}{n_A} + \frac{{S_B}^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{30^2}{30} + \frac{25^2}{35}} = 6.91$$

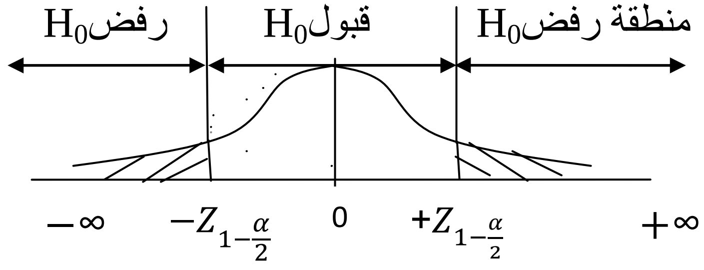
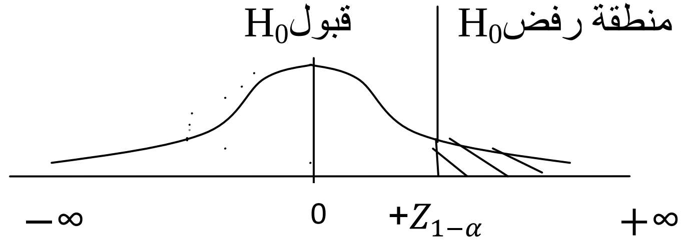
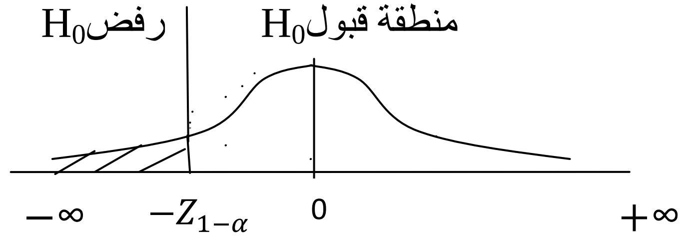
$$Z_c = \frac{\overline{x_A} - \overline{x_B}}{\widehat{\delta_D}} = \frac{125-110}{6.91} = 2.17$$

بما أن: $Z_c = 2.17 < +Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 1$ % إذن إدعاء الشركة خاطئ.

ويمكن تلخيص اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبيرتين $(n_1 + n_2 \geq 30)$ في الجدول التالي:

الجدول رقم 09: اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبيرتين $(n_1 + n_2 \geq 30)$: (نستعمل التوزيع الطبيعي Z)

جانب الاختبار	فرضية العدم والفرضية البديلة	تحديد مناطق قبول ورفض H_0 (الرسم) مع تحديد القيمة الفاصلة (القيمة الجدولية)	القيمة الحسابية (Z_c)	القرار
ذو ذيلين	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$		$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}$	إذا كانت: $Z_c \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$		$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}$	إذا كانت: $Z_c \leq +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c > +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$		$Z_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}$	إذا كانت: $Z_c > -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \leq -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

3. اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين صغيرتين ($30 > n_2 + n_1$):

ليكن $\overline{x_1}$ هو متوسط حسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 مجهول، و $\overline{x_2}$ هو متوسط حسابي لعينة عشوائية ثانية حجمها n_2 مستقلة عن الأولى والمسحوبة من مجتمع آخر له توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 مجهول، وكان حجم العينتين صغيرتين ($30 > n_2 + n_1$). فإن لإختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) نستعمل توزيع ستودنت (T).

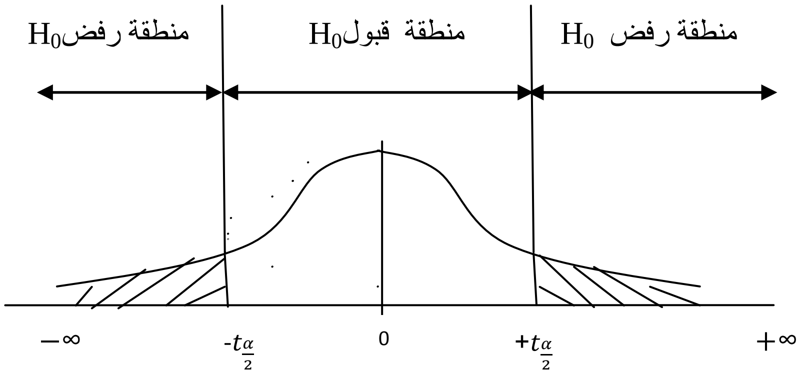
1.3- اختبار ذو ذيلين (ذو جانبين):

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب T_t والمتمثلة في $\pm t_{\frac{\alpha}{2}}$ والتي تقرأ من جدول ستودنت كما يلي:

$$\begin{cases} V = n_1 + n_2 - 2 = \\ \pm t_{\frac{\alpha}{2}} = \end{cases}$$

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب T_C والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{T_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}}$$

حيث:

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{s_1^2.(n_1-1)+s_2^2.(n_2-1)}{n_1+n_2-2}.\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $T_c \in \left[-t_{\frac{\alpha}{2}} ; +t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $T_c \notin \left[-t_{\frac{\alpha}{2}} ; +t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال16: من سجلات احدى المستشفيات سحبت عينة عشوائية متكونة من 15 طفلا ذكرا حديثي الولادة، فكان معدل أوزانهم 3.1 كغ بانحراف معياري 1.7 كغ. وسحبت عينة أخرى مكونة من 12 طفلة من الاناث حديثي الولادة، فكان معدل أوزانهم 2.8 كغ بانحراف معياري 1.9 كغ.

- اختبر إن كانت هناك فروق جوهرية بين أوزان الذكور وأوزان الاناث عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$$\overline{x_1} = 3.1 \quad / \quad S_1 = 1.7 \quad / \quad n_1 = 15 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

$$\overline{x_2} = 2.8 \quad / \quad S_2 = 1.9 \quad / \quad n_2 = 12$$

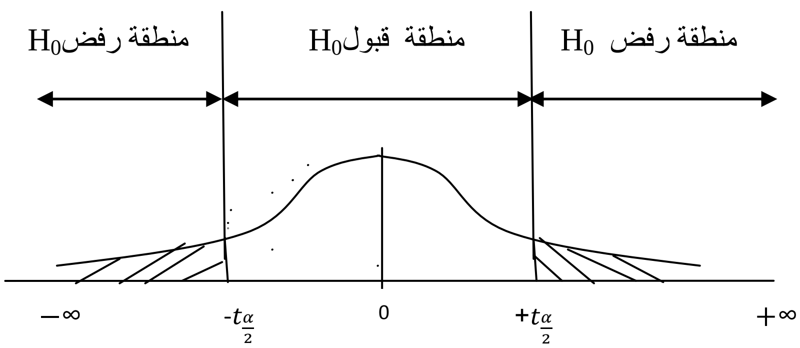
اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2).

δ_1 و δ_2 مجهولتان و حجم العينتين صغيرتين $(n_1 + n_2 < 30)$ وبافتراض أن $\delta_1 = \delta_2$ فإننا نستعمل توزيع ستودنت (T).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



القيم الجدولية (الفاصلة): $(\mp t_{\frac{\alpha}{2}})$

$$\begin{cases} V= n_1 + n_2 - 2 = 25 \\ \pm t_{\frac{\alpha}{2}} = \pm t_{0.025} = \pm 2.060 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

$$T_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}$$

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{s_1^2.(n_1-1)+s_2^2.(n_2-1)}{n_1+n_2-2}.(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{\frac{(1.7)^2.(15-1)+(1.9)^2.(12-1)}{15+12-2}.(\frac{1}{15}+\frac{1}{12})} = 0.693$$

$$T_c = \frac{3.1-2.8}{0.693} = 0.432$$

بما أن: $T_c = 0.432 \in [-2.060 ; +2.060]$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha=$ 5 % إذن لا توجد فروق جوهرية بين أوزان الذكور وأوزان الاناث.

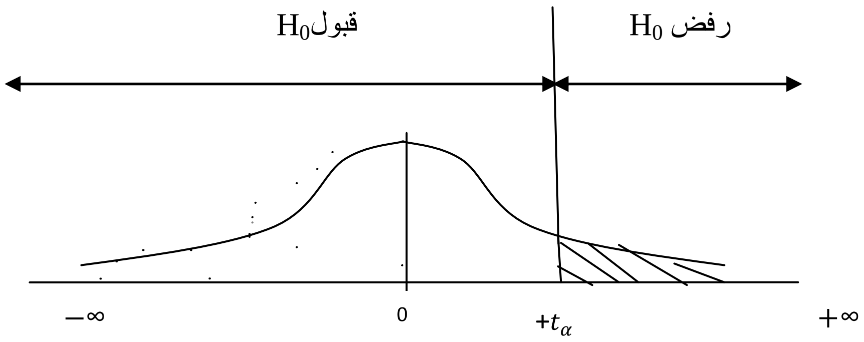
2.3- اختبار ذو ذيل أيمن (ذو جانب أيمن):

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب T_t والمتمثلة في $+ t_\alpha$ والتي تقرأ من جدول ستودنت كما يلي:

$$\begin{cases} V = n_1 + n_2 - 2 = \\ +t_\alpha = \end{cases}$$

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب T_C والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{T_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $T_c < +t_\alpha$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $T_c > +t_\alpha$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال17: نفس معطيات المثال 16 السابق.

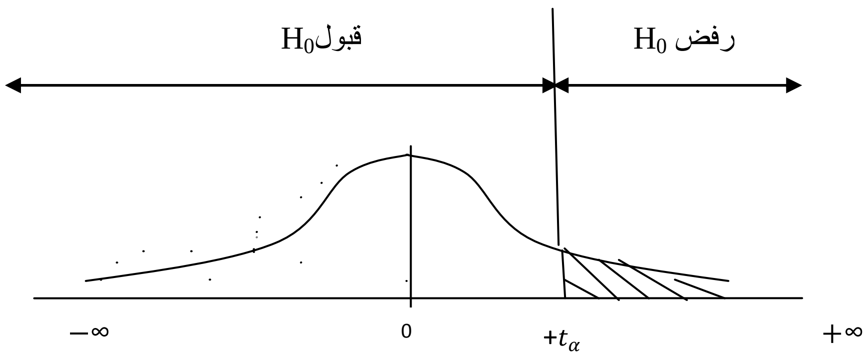
- اختبر إن كانت أوزان الذكور أكبر من أوزان الاناث عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$



القيمة الجدولية (الفاصلة): $(+t_\alpha)$

$$\begin{cases} V = n_1 + n_2 - 2 = 25 \\ +t_\alpha = +t_{0.05} = +1.708 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

$$T_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}} = \frac{3.1 - 2.8}{0.693} = 0.432$$

بما أن: $T_c = 0.432 < +1.708$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن أوزان الذكور أقل أو يساوي أوزان الاناث.

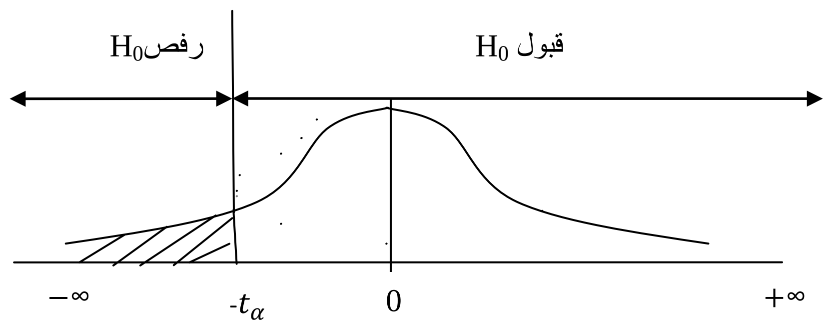
3.3- اختبار ذو ذيل أيسر (ذو جانب أيسر):

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب T_t والمتمثلة في $-t_\alpha$ والتي تقرأ من جدول ستودنت كما يلي:

$$\begin{cases} V = n_1 + n_2 - 2 = \\ -t_\alpha = \end{cases}$$

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها ب T_C والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{T_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $T_c > -t_\alpha$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $T_c < -t_\alpha$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال18:</u> نفس معطيات المثال 16 السابق.

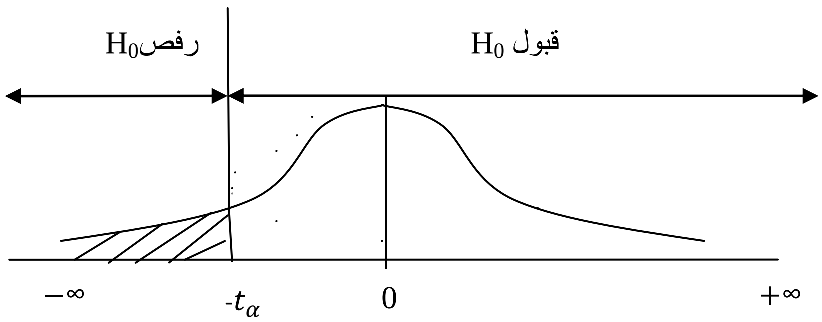
- اختبر إن كانت أوزان الذكور أقل من أوزان الاناث عند مستوى معنوية 5% ؟

<u>الحل:</u>

<u>اختبار ذو ذيل أيسر</u>

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$



القيمة الجدولية (الفاصلة): $(-t_\alpha)$

$$\begin{cases} V= n_1+n_2-2=25 \\ -t_\alpha=-t_{0.05}=-1.708 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

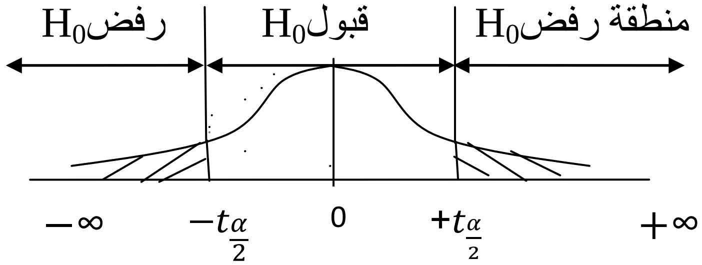
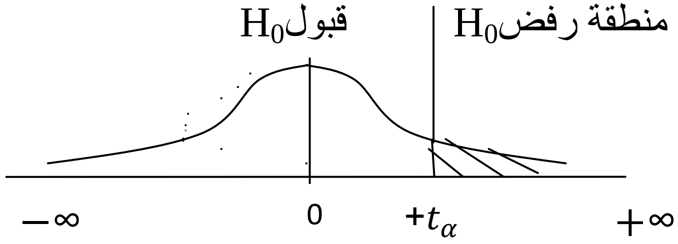
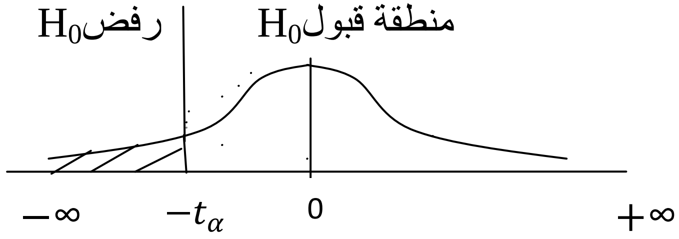
$$T_c=\frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}=\frac{3.1-2.8}{0.693}=0.432$$

بما أن: $T_c=0.432>-1.708$

__فإن القرار:__ قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha=5\ \%$ إذن أوزان الذكور أكبر أو يساوي أوزان الاناث.

ويمكن تلخيص اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 وσ_2^2 مجهولين وحجم العينتين صغيرتين $(n_1+n_2<30)$ في الجدول التالي:

__الجدول رقم 10:__ اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) عندما يكون تبايني مجتمعين σ_1^2 وσ_2^2 مجهولين وحجم العينتين صغيرتين $(n_1+n_2<30)$: (نستعمل توزيع ستودنت T)

جانب الاختبار	فرضية العدم والفرضية البديلة	تحديد مناطق قبول ورفض H_0 (الرسم) مع تحديد القيمة الفاصلة (القيمة الجدولية)	القيمة الحسابية (T_c)	القرار
ذو ذيلين	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$		$T_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}$	إذا كانت: $T_c \in \left[-t_{\frac{\alpha}{2}} ; +t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $T_c \notin \left[-t_{\frac{\alpha}{2}} ; +t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$		$T_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}$	إذا كانت: $T_c \leq +t_{\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $T_c > +t_{\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$		$T_c = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\widehat{\delta_D}}$	إذا كانت: $T_c > -t_{\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $T_c \leq -t_{\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

4. اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) باستعمال عينتين مزدوجتين (غير مستقلتين):

إذا سحبت عينة عشوائية من الفروق (d_1، d_2، ... ،d_n) من مجتمع الفروق متوسطه μ_d وتباينه δ_d^2 مجهول، فإن لإختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2) نستعمل توزيع ستودنت (T).

إن هذه الحالة لديها نفس خطوات وأشكال الحالة السابقة إلا أنه الشيء الوحيد الذي يتغير وهو القيمة الاحصائية الحسابية والتي تأخذ الشكل التالي:

$$T_c = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}}$$

حيث: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$

d_i: يمثل الفرق بين المشاهدة الأولى والثانية (x_i ؛ y_i) أي الفرق بين n_1 و n_2 من أزواج المشاهدات القبلية والبعدية ($n_1 = n_2 = n$).

V: عدد درجات الحرية (V = n - 1).

S_d: الانحراف المعياري لعينة الفروق حيث: $S_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$

مثال19: نرغب في اختبارمدى التآكل في اطارت السيارات التي تنتجها شركتان A و B. ولنفترض أننا وضعنا إطارا من كل نوع من كل واحدة من خمسة سيارات، وبعد فترة قسنا مقدار التآكل فكانت النتائج كما هي في الجدول التالي:

نوع إطار السيارة	1	2	3	4	5
A	10.6	9.8	12.3	9.7	8.8
B	10.2	9.4	11.8	9.1	8.3

- هل هناك فرقا في معدل تآكل نوعي من الإطارات عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$$n_1 = n_2 = n = 5 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

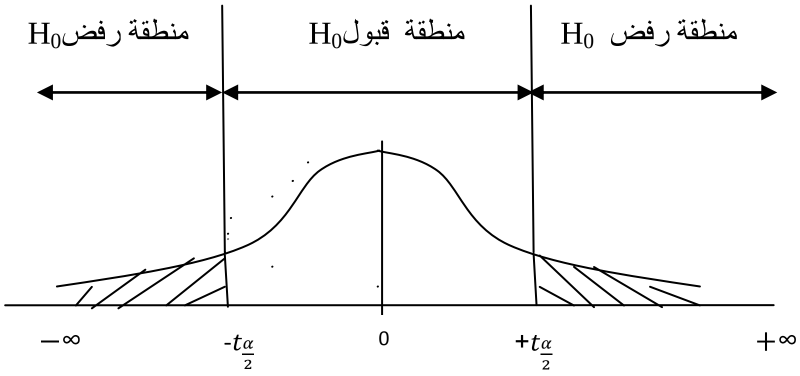
اختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2).

δ_1 و δ_2 مجهولتين وبافتراض أنهما متساويتين والعينتين مزدوجتين (غير مستقلتين) وصغيرتين ($n_1 + n_2 < 30$) إذن نستعمل توزيع ستودنت (T).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$



القيم الجدولية (الفاصلة): $(\mp t_{\frac{\alpha}{2}})$

$$\begin{cases} V = n - 1 = 4 \\ \pm t_{\frac{\alpha}{2}} = \pm t_{0.025} = \pm 2.776 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (T_c)

$$T_c = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}}$$

x_i	y_i	$d_i = x_i - y_i$	$(d_i - \bar{d})^2$
10.6	10.2	0.4	0.0064
9.6	9.4	0.4	0.0064
12.3	11.8	0.5	0.0004
9.7	9.1	0.6	0.0144
8.8	8.3	0.5	0.0004
/	/	**2.4**	**0.028**

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{2.4}{5} = 0.48$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.028}{4}} = 0.083$$

$$T_c = \frac{0.48}{0.083/\sqrt{5}} = \mathbf{12.9}$$

بما أن: $T_c = 12.9 \notin [-2.776 ; +2.776]$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند α= 5 % إذن هناك فرق في معدل تآكل نوعي الاطارات.

رابعا: اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع P:

x متغير عشوائي يتبع توزيع ذو الحدين، وأن الفرضية الاحصائية هنا متعلقة بالنسبة P لمجتمع ذي خاصية معينة، فإن هذا الاختبار يشبه الاختبار المتعلق بمتوسط المجتمع μ، والفرضية هنا هي مقارنة نسبة المجتمع P من توزيع ذو الحدين بقيمة معينة هي P_0 أي:

$$H_0 : P = P_0$$

حيث أن P هي معلمة توزيع ذو الحدين والتي تمثل احتمال النجاح، وأن P_0 هي قيمة معينة معلومة.

فإذا كان المتغير العشوائي x يتبع توزيع ذو الحدين وكانت حجم العينة كبيرة، فإن توزيع x يقترب من التوزيع الطبيعي،وبالتالي فإن لإختبار الفرضيات لنسبة المجتمع P نستعمل التوزيع الطبيعي (Z). وتكون القيمة الاحصائية الحسابية (Z_c) كما يلي:

$$\mathbf{Z}_c = \frac{\mathrm{p} - \mathbf{P_0}}{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P_0}}}$$

حيث:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P_0}} = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} & \text{si } n < 0.05 * N \quad \underline{\text{ou}} \quad N = ? \\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P_0}} = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{si } n \geq 0.05 * N \end{cases}$$

ويمكننا تلخيص اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع P في الجدول التالي:

الجدول رقم 11: اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع P

نوع الاختبار (جانب الاختبار)	فرضية العدم والفرضية البديلة	القرار
ذو ذيلين	$H_0 : P = P_0$ $H_1 : P \neq P_0$	إذا كانت: $Z_c \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0 : P = P_0$ $H_1 : P > P_0$	إذا كانت: $Z_c \leq +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c > +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0 : P = P_0$ $H_1 : P < P_0$	إذا كانت: $Z_c > -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \leq -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

المصدر: من إعداد الباحث

مثال20: إذا كانت نسبة مستخدمي النظارات الطبية في الجامعة تساوي 30%. سحبت عينة عشوائية حجمها 100 طالب فوجد أن 25 منهم يستخدموا النظارات الطبية.

- اختبر هذه الفرضية عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$$n=100 \quad / \quad P_0 = 0.3 \quad / \quad p = \frac{25}{100} = 0.25 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

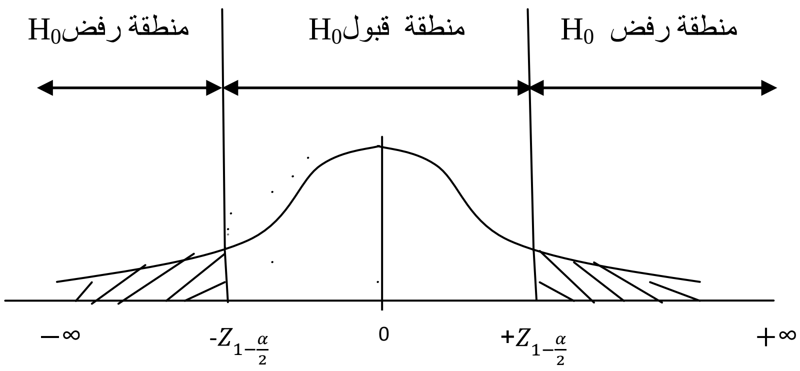
اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع P.

نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : P = P_0 = 0.3$

$H_1 : P \neq P_0$



القيم الجدولية (الفاصلة): $(\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

$$* \alpha = 5\% \rightarrow \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mp \mathbf{1.96}$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{p - P_0}{\delta_{P_0}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{P_0}} = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{100}} = 0.045$$

$$Z_c = \frac{0.25-0.3}{0.045} = -1.11$$

بما أن: $Z_c = -1.11 \in [-1.96 \,; +1.96]$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن نسبة مستخدمي النظارات الطبية في الجامعة تساوي 0.3.

مثال21: إذا كانت نسبة مستعملي الحزام الأمان في السيارت قبل صدور تشريع الزام الاستعمال هي 0.8. وبعد صدور تشريع الزام استعمال حزام الأمان أخذنا عينة عشوائية حجمها 200 سائق فوجدنا أن 170 منهم يستعملون حزام الأمان.

- اختبر ما إذا كان التشريع قد زاد من نسبة مستعملي حزام الأمان عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$$n=200 \quad / \quad \mathrm{P}_0 = 0.8 \quad / \quad \mathrm{p} = \frac{170}{200} = 0.85 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

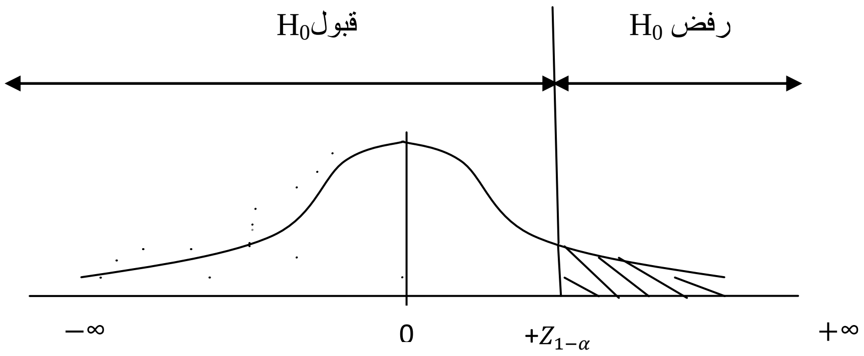
اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع P.

نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : P = P_0 = 0.8$

$H_1 : P > P_0$



القيمة الجدولية (الفاصلة): ($+Z_{1-\alpha}$)

$$* \, \alpha = 5\% \rightarrow +Z_{1-\alpha} = +1.64$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$\mathrm{Z}_c = \frac{\mathrm{p} - \mathrm{P}_0}{\delta_{\mathrm{P}_0}}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{P_0}} = \sqrt{\frac{\mathrm{P}_0(1-\mathrm{P}_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{200}} = 0.028$$

$$\mathrm{Z}_c = \frac{0.85-0.8}{0.028} = 1.8$$

بما أن: $Z_c = 1.8 > +Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5\,\%$ إذن صدور تشريع الإلزام قد زاد من نسبة مستعملي حزام الأمان.

<u>مثال22:</u> تقدر الدوائر الرسمية نسبة المتخرجين الجامعيين الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم ب 60%. وجدت دراسة أجريت على عينة حجمها 100 طالب من مجتمع حجمه 1000 طالب أن نسبة الحصول على عمل هي 55%.

- كيف يمكن اختبار ما إذا كانت النسبة الرسمية صحيحة أم مبالغ فيها عند مستوى معنوية 5% ؟

<u>الحل:</u>

$$n=100 \quad / \quad N = 1000 \quad / \quad P_0 = 0.6 \quad / \quad p = 0.55 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

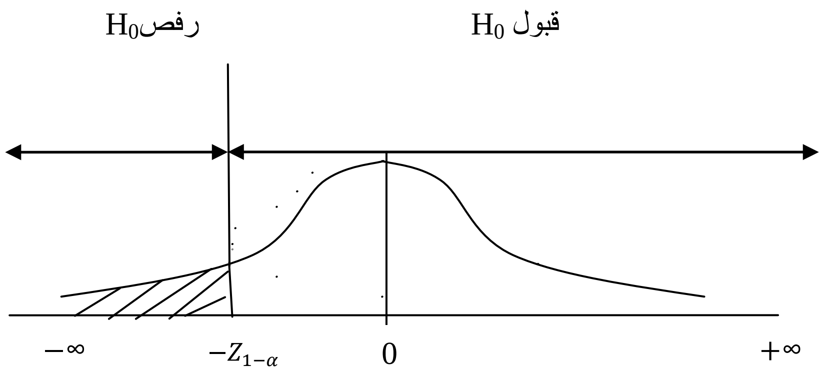
اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع P.

نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

<u>اختبار ذو ذيل أيسر</u>

$H_0 : P = P_0 = 0.6$

$H_1 : P < P_0$



القيمة الجدولية (الفاصلة): ($-Z_{1-\alpha}$)

$$* \alpha = 5\% \rightarrow -Z_{1-\alpha} = -1.64$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{p - P_0}{\delta_{P_0}}$$

$$* n=100 > 0.05 * 500 = 25$$

إذن نستعمل معامل التصحيح

$$\boldsymbol{\delta_{P_0}} = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{100}} * \sqrt{\frac{1000-100}{1000-1}} = 0.045$$

$$Z_c = \frac{0.55-0.6}{0.045} = -1.11$$

بما أن: $Z_c = -1.11 > -Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha= 5\ \%$ إذن النسبة الرسمية صحيحة.

خامسا: اختبار الفرضيات لنسبتي مجتمعين $(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)$:

إذا كانت (x_1، x_2، x_3، ....، x_n) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع ذو الحدين$B(n_1, p_1)$، وكانت (x_1، x_2، x_3، ....، x_n) عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع ذو الحدين$B(n_2, p_2)$، وكانت حجم العينتين كبيرتين فإن توزيع المتغيرين يقترب من التوزيع الطبيعي، وبالتالي فإن لإختبار الفرضيات لنسبتي مجتمعين $(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)$ نستعمل التوزيع الطبيعي.

إن هذا الاختبار يشبه الحالة الأولى لإختبار الفرضيات لمتوسطي مجتمعين (μ_1، μ_2)، وتكون القيمة الاحصائية الحسابية (Z_c) كما يلي:

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\widehat{\delta_D}}}$$

حيث:

- $\widehat{\delta_D} = \sqrt{p_c(1 - p_c)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$
- $p_c = \frac{p_1 . n_1 + p_2 . n_2}{n_1 + n_2}$

ويمكننا تلخيص اختبار الفرضيات الفرضيات لنسبتي مجتمعين $(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)$ في الجدول التالي:

الجدول رقم 12: اختبار الفرضيات لنسبتي مجتمعين $(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)$

القرار	فرضية العدم والفرضية البديلة	نوع الاختبار (جانب الاختبار)
إذا كانت: $Z_c \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.	$H_0 : P_1 = P_2$ $H_1 : P_1 \neq P_2$	**ذو ذيلين**
إذا كانت: $Z_c \leq +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c > +Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.	$H_0 : P_1 = P_2$ $H_1 : P_1 > P_2$	**ذو ذيل أيمن**

ذو ذيل أيسر	$H_0 : P_1 = P_2$ $H_1 : P_1 < P_2$	إذا كانت: $Z_c > -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $Z_c \leq -Z_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

المصدر: من إعداد الباحث

مثال23: لإختبارما إذاكانت نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين في المدينة الأولى يساوي نسبة المؤيدين لهذا البرنامج في المدينة الثانية، تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين من المدينتين حيث: حجم العينة الأولى يساوي حجم العينة الثانية ويساوي 100، ووجدنا عدد المؤيدين للبرنامج في العينة الأولى هو 7 شخص، وفي العينة الثانية 50شخص.

- اختبر إذا كانت النسبة في المدينتين متساويتين عند مستوى معنوية 1% ؟

الحل:

$$n_1=100 \;\; / \;\; n_2=100 \;\; / \;\; p_1 = \frac{70}{100} = 0.7 \;\; / \;\; p_2 = \frac{50}{100} = 0.5 \;\; / \;\; \alpha = 1\%$$

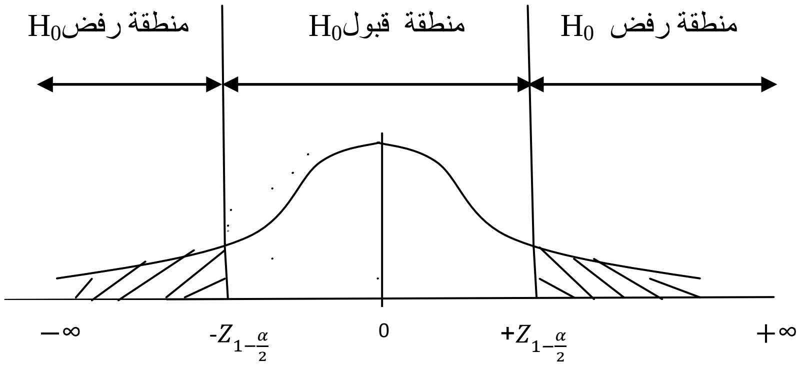
اختبار الفرضيات لنسبتي مجتمعين $(P_1 - P_2)$.

نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : P_1 = P_2$

$H_1 : P_1 \neq P_2$



القيم الجدولية (الفاصلة): $(\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

$$* \; \alpha = 1\% \rightarrow \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mp \mathbf{2.57}$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\widehat{\delta_D}}$$

$$\hat{\delta}_{p_1-p_2} = \widehat{\delta_D} = \sqrt{p_c(1-p_c)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

$$p_c = \frac{p_1.n_1+p_2.n_2}{n_1+n_2} = \frac{0.7*100+0.5*100}{100+100} = 0.6$$

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{0.6(1-0.6)(\frac{1}{100}+\frac{1}{100})} = 0.069$$

$$Z_c = \frac{0.7-0.5}{0.069} = 2.89$$

بما أن: $Z_c = 2.89 \notin [-2.57 ; +2.57]$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 1$ % إذن نسبة المؤيدين للبرنامج الاقتصادي في المدينة الأولى لا يساوي نسبة المؤيدين له في المدينة الثانية.

مثال24: عند مقابلة عينة من 200 شخص تبين أن 60 شخصا منهم يستمع الى نشرة الأخبار باللغة العربية، وعند مقابلة 400 شخص آخرين تبين أن 80 منهم يستمع الى نشرة الأخبار باللغة الفرنسية.

- هل نستطيع أن نستنتج من أن نسبة المستمعين الى نشرة الأخبار باللغة العربية أعلى من نسبة المستمعين لها باللغة الفرنسية عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$$n_1=200 \ / \ n_2=400 \ / \ p_1 = \frac{60}{200} = 0.3 \ / \ p_2 = \frac{80}{400} = 0.2 \ / \ \alpha = 5\%$$

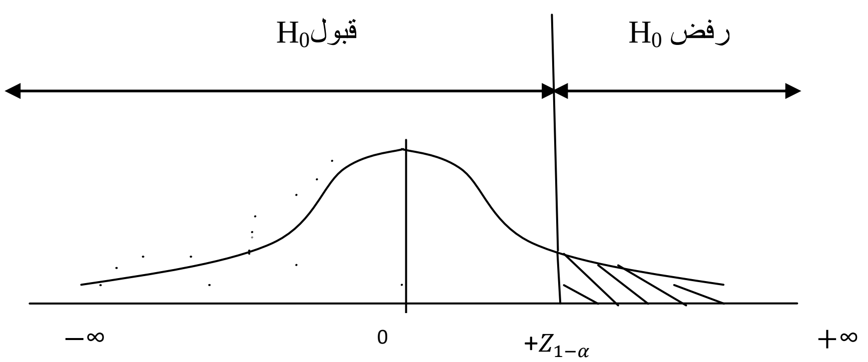
اختبار الفرضيات لنسبتي مجتمعين $(P_1 - P_2)$.

نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : P_1 = P_2$

$H_1 : P_1 > P_2$



القيم الجدولية (الفاصلة): ($+Z_{1-\alpha}$)

$* \alpha = 5\% \rightarrow +Z_{1-\alpha} = +1.64$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\widehat{\delta_D}}$$

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{p_c(1 - p_c)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$$

$$p_c = \frac{p_1.n_1 + p_2.n_2}{n_1 + n_2} = \frac{0.3*200 + 0.2*400}{200+400} = 0.23$$

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{0.23(1 - 0.23)(\frac{1}{200} + \frac{1}{400})} = 0.036$$

$$Z_c = \frac{0.3 - 0.2}{0.036} = 2.77$$

بما أن: $Z_c = 2.77 > +Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن نسبة المستمعين الى نشرة الأخبار باللغة العربية أعلى من نسبة المستمعين لها باللغة الفرنسية

مثال25: سحب باحث عينة عشوائية من المدينة الأولى مؤلفة من 500 شخص ووجد أن 240 شخصا منهم يقرأ ويكتب. وسحب عينة عشوائية أخرى من المدينة الثانية مؤلفة من 200 شخص ووجد أن 120 شخص منهم يقرأويكتب. وكان الباحث يعتقد أن نسبة الذين يقرأون في المدينة الأولى أقل من نسبة الذين يقرأون في المدينة الثانية.

- اختبر اعتقاد الباحث عند مستوى معنوية 10% ؟

الحل:

$$n_1=500 \;\; / \;\; n_2=200 \;\; / \;\; p_1 = \frac{240}{500} = 0.48 \;\; / \;\; p_2 = \frac{120}{200} = 0.6 \;\; / \;\; \alpha = 10\%$$

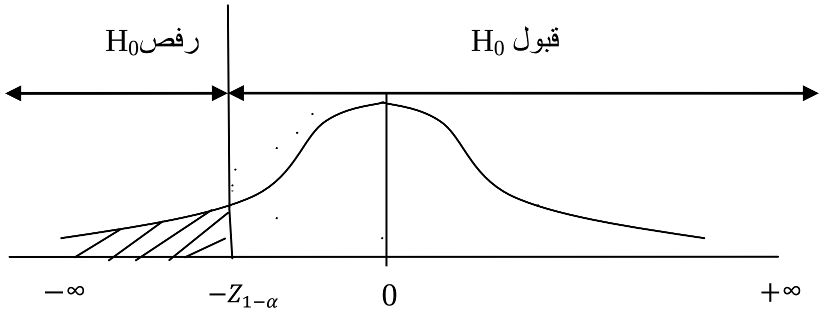
اختبار الفرضيات لنسبتي مجتمعين $(P_1 - P_2)$.

نستعمل التوزيع الطبيعي (Z).

اختبار ذو ذيل أيسر

$H_0 : P_1 = P_2$

$H_1 : P_1 < P_2$



القيم الجدولية (الفاصلة): $(-Z_{1-\alpha})$

$$*\ \alpha = 10\% \rightarrow -Z_{1-\alpha} = -1.28$$

القيمة الحسابية: (Z_c)

$$Z_c = \frac{p_1 - p_2}{\widehat{\delta_D}}$$

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{p_c(1-p_c)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

$$p_c = \frac{p_1.n_1+p_2.n_2}{n_1+n_2} = \frac{0.48*500+0.6*200}{500+200} = 0.51$$

$$\widehat{\delta_D} = \sqrt{0.51(1-0.49)(\frac{1}{500}+\frac{1}{200})} = 0.041$$

$$Z_c = \frac{0.48-0.6}{0.041} = -2.92$$

بما أن: $Z_c = -2.92 < -Z_{1-\alpha}$

فإن القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 10\ \%$ إعتقاد الباحث صحيح

سادسا: اختبار الفرضيات لتباين المجتمع δ^2:

لإختبار الفرضيات حول التباين نسلك نفس الخطوات المتبعة في اختبار الفرضيات السابقة الذكر، غير أننا في هذا الاختبار نستعمل توزيع كي مربع (χ^2) بعدد درجات الحرية $(V= n-1)$. وأن القيمة الاحصائية الحسابية تأخذ الشكل التالي:

$$\chi_c^2 = \frac{s^2.(n-1)}{\delta_0^2}$$

n: حجم العينة.

s^2: تباين العينة. $s^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

δ_0^2: تباين المجتمع المختبر (معطى في التمرين).

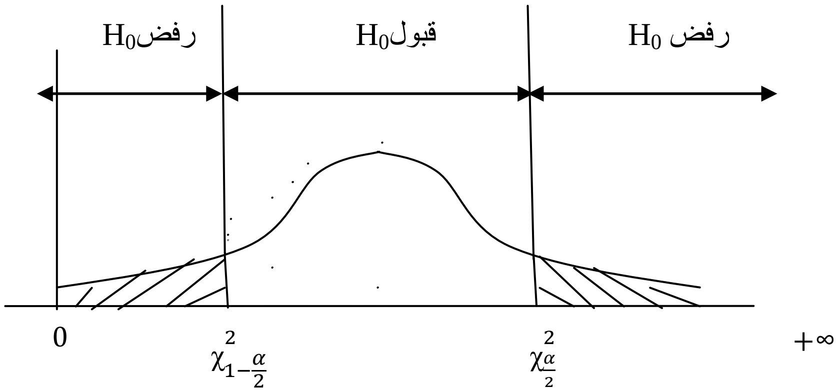
1.اختبار ذو ذيلين (ذو جانبين):

نتبع فيه الخطوات التالية:

- تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \delta^2 = \delta_0^2$$
$$H_1 : \delta^2 \neq \delta_0^2$$

- تحديد قاعدة القرار:



- حساب القيم الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب χ_t^2 والمتمثلة في $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ و $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ والتي تقرأ من جدول توزيع كي مربع وفق عدد درجات الحرية ($V= n-1$).
- حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب χ_c^2 والمتمثلة في:

$$\chi_c^2 = \frac{s^2.(n-1)}{\delta_0^2}$$

- المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $\chi_c^2 \in \left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $\chi_c^2 \notin \left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال26: أرادت شركة أدوية شراء كمية من دواء معين خافض للحرارة خاص بالأطفال، وقد نص قانون الأدوية على أن تحتوي المضغوطة الواحدة لمتوسط 91% من المادة الفعالة من وزنها بتباين قدره 0.01. لذا تم سحب عينة عشوائية حجمها 10 فتبين أن قيمة التباين لها 0.011.

- اختبر إن كانت مواصفات العينة تطابق قانون الأدوية عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

$$n=10 \quad / \ S^2 = 0.011 \quad / \quad \sigma_0^2 = 0.01 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

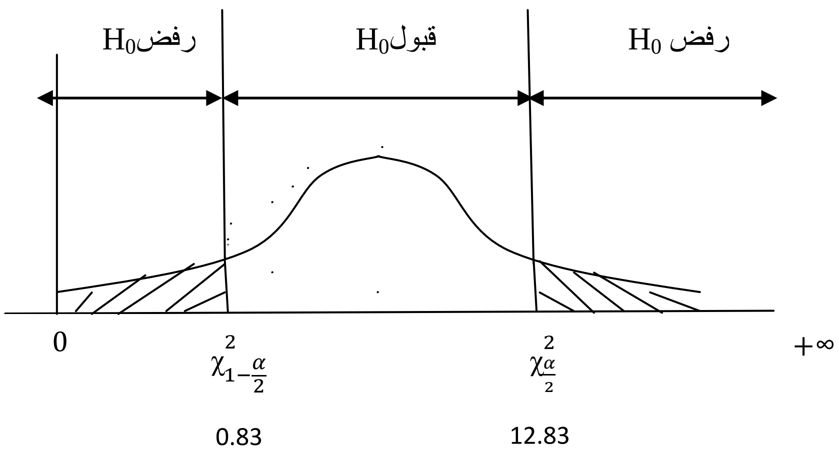
اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم σ^2: (عينة واحدة)

نستعمل توزيع كي مربع (χ^2).

اختبار ذو ذيلين

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.01$

$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$



القيم الجدولية (الفاصلة):($\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$)

$$\begin{cases} V = n-1 = 9 \\ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.025} = 19.02 \\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.975} = 2.70 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (χ_c^2)

$$\chi_c^2 = \frac{s^2.(n-1)}{\sigma_0^2}$$

$\chi_c^2 = \frac{0.011*9}{0.01} = \mathbf{9.9}$

بما أن: $\chi_c^2 = 9.9 \in [2.70\ ; 19.02]$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن مواصفات العينة تطابق قانون الأدوية.

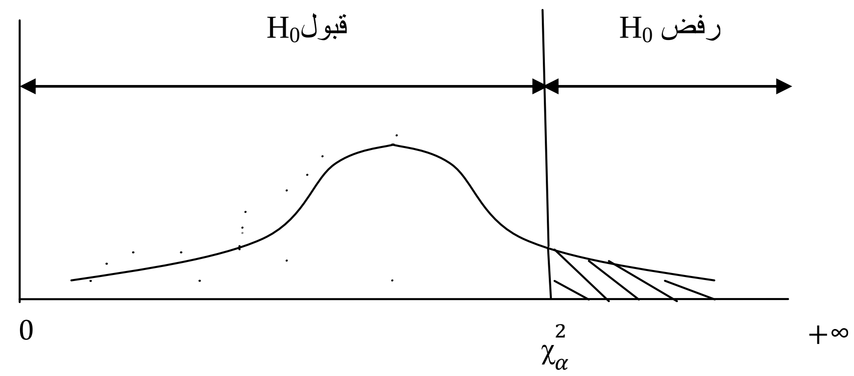
2.اختبار ذو ذيل أيمن (ذو جانب أيمن):

- ❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \delta^2 = \delta_0^2$$

$$H_1 : \delta^2 > \delta_0^2$$

- ❖ تحديد قاعدة القرار:



- ❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب $\boldsymbol{\chi_t^2}$ والمتمثلة في χ_α^2 والتي تقرأ من جدول توزيع كي مربع وفق عدد درجات الحرية $(V= n-1)$.
- ❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب χ_c^2 والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{\chi_c^2 = \frac{s^2.(n-1)}{\delta_0^2}}$$

- ❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $\chi_c^2 \le \chi_\alpha^2$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $\chi_c^2 > \chi_\alpha^2$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال27: أخذت عينة عشوائية حجمها 10 فوجد أن تباينها هو0.3.

- اختبر إذا كان تباين المجتمع أقل أو يساوي 0.2 عند مستوى معنوية 10% ؟

الحل:

$$n=10 \quad / S^2 = 0.3 \quad / \quad б_0^2 = 0.2 \quad / \quad \alpha = 10\%$$

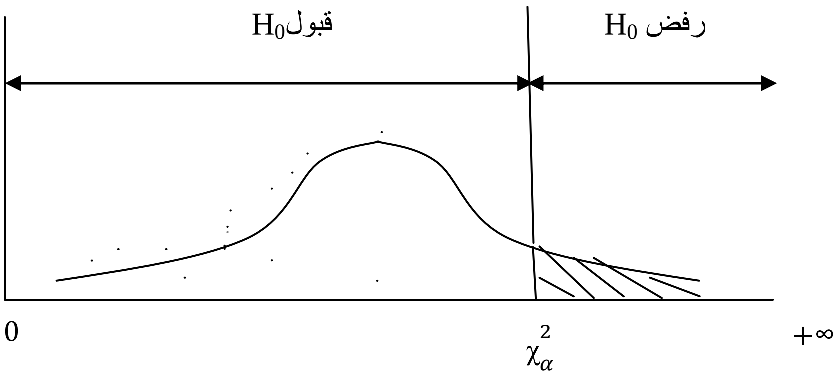
اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم $б^2$: (عينة واحدة)

نستعمل توزيع كي مربع (χ^2).

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : б^2 = б_0^2 = 0.2$

$H_1 : б^2 > б_0^2$



القيمة الجدولية (الفاصلة):(χ^2_α)

$$\begin{cases} V = n-1 = 9 \\ \chi^2_\alpha = \chi^2_{0.05} = 16.92 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \frac{s^2.(n-1)}{б_0^2}$$

$$\chi^2_c = \frac{0.3*9}{0.2} = \mathbf{13.5}$$

بما أن: $\chi^2_c = 13.5 < \chi^2_\alpha$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 10$ % إذن تباين المجتمع أقل أو يساوي 0.2.

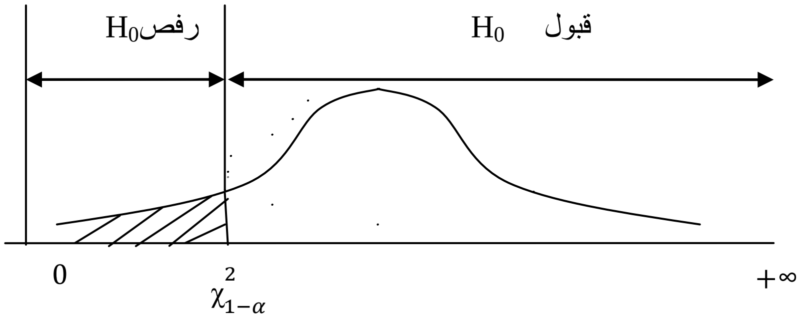
3.اختبار ذو ذيل أيسر (ذو جانب أيسر):

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$H_0 : \delta^2 = \delta_0^2$

$H_1 : \delta^2 < \delta_0^2$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب χ^2_t والمتمثلة في $\chi^2_{1-\alpha}$ والتي تقرأ من جدول توزيع كي مربع وفق عدد درجات الحرية ($V= n-1$).

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب χ^2_c والمتمثلة في:

$$\chi^2_c = \frac{s^2.(n-1)}{\delta_0^2}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $\chi^2_c > \chi^2_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $\chi^2_c \leq \chi^2_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال28:</u> تدعي احدى نقابات العمال أن تباين مداخيل العمال يساوي أو يفوق 3.000دج. أخذت عينة من 20 عامل فوجدنا أن تباين هذه العينة يساوي 4.000دج.

- اختبر إدعاء نقابة العمال عند مستوى معنوية 1% ؟

<u>الحل:</u>

$$n=20 \quad / \ S^2 = 4000 \quad / \quad \sigma_0^2 = 3000 \quad / \quad \alpha = 1\%$$

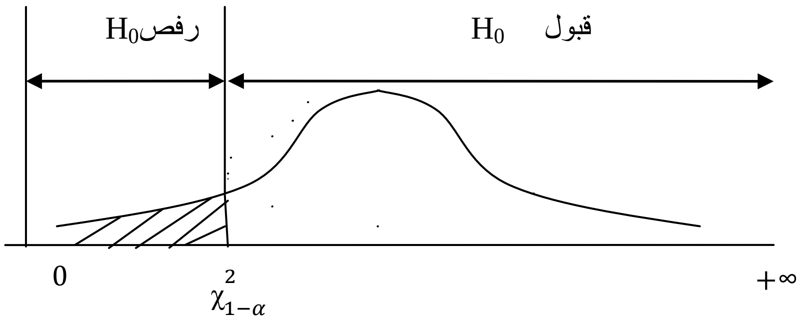
اختبار الفرضيات لتباين المجموعة الأم σ^2: (عينة واحدة)

نستعمل توزيع كي مربع (χ^2).

<u>اختبار ذو ذيل أسر</u>

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 3000$

$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$



القيمة الجدولية (الفاصلة): ($\chi^2_{1-\alpha}$)

$$\begin{cases} V = n-1 = 19 \\ \chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0.99} = 7.63 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \frac{s^2.(n-1)}{\sigma^2_0}$$

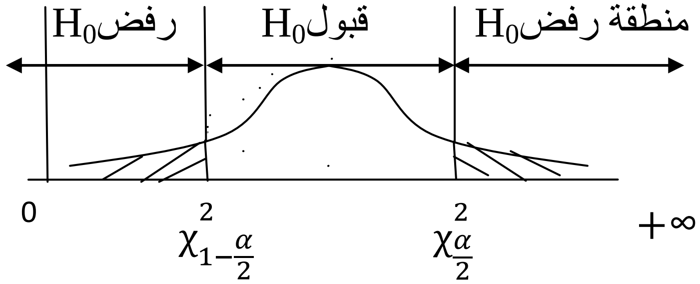
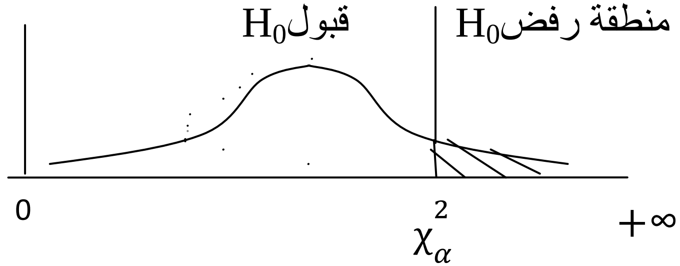
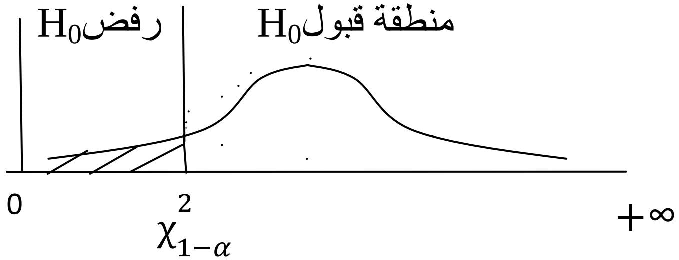
$$\chi^2_c = \frac{4000*19}{3000} = \mathbf{25.33}$$

بما أن: $\chi^2_c = 25.33 > \chi^2_{1-\alpha}$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 1$ % إذن إدعاء النقابة خاطئ.

ويمكننا تلخيص اختبار الفرضيات الفرضيات لتباين المجتمع δ^2 في الجدول التالي:

الجدول رقم 13: اختبار الفرضيات لتباين المجتمع δ^2 (نستعمل توزيع كي مربع χ^2)

جانب الاختبار	فرضية العدم والفرضية البديلة	تحديد مناطق قبول ورفض H_0 (الرسم) مع تحديد القيمة الفاصلة (القيمة الجدولية)	القيمة الحسابية (χ_c^2)	القرار
ذو ذيلين	$H_0: \delta^2 = \delta_0^2$ $H_1: \delta^2 \neq \delta_0^2$		$\chi_c^2 = \frac{s^2.(n-1)}{\delta_0^2}$	إذا كانت: $\chi_c^2 \in \left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $\chi_c^2 \notin \left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0: \delta^2 = \delta_0^2$ $H_1: \delta^2 > \delta_0^2$		$\chi_c^2 = \frac{s^2.(n-1)}{\delta_0^2}$	إذا كانت: $\chi_c^2 \leq \chi^2_{\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $\chi_c^2 > \chi^2_{\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0: \delta^2 = \delta_0^2$ $H_1: \delta^2 < \delta_0^2$		$\chi_c^2 = \frac{s^2.(n-1)}{\delta_0^2}$	إذا كانت: $\chi_c^2 > \chi^2_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $\chi_c^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

سابعا: اختبار الفرضيات لتبايني مجتمعين (σ_1^2 ، σ_2^2):

إذا سحبت عينة عشوائية حجمها n_1 وتباينها S_1^2 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي تباينه σ_1^2 ، وتم سحب عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى حجمها n_2 وتباينها S_2^2 مسحوب من مجتمع يتبع كذلك التوزيع الطبيعي تباينه σ_2^2 ، وأردنا اختبار الفرضيات حول مقارنة σ_1^2 مع σ_2^2 فإننا نستعمل توزيع فيشر F بعدد درجات الحرية ($V_1 = n_1 - 1$) و ($V_2 = n_2 - 1$)، وأن القيمة الاحصائية الحسابية تأخذ الشكل التالي:

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

1.اختبار ذو ذيلين (ذو جانبين):

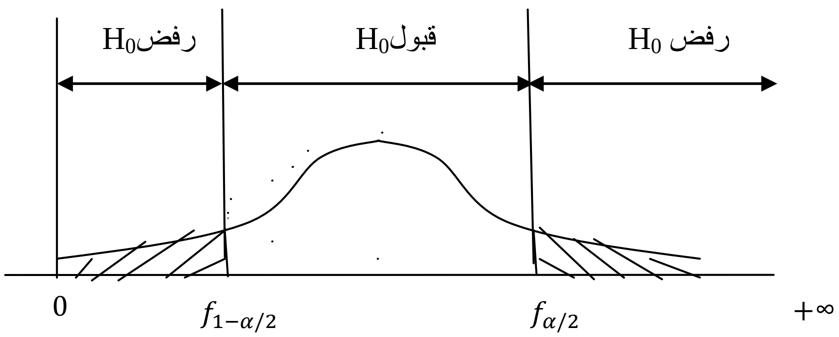
نتبع فيه الخطوات التالية:

- تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

- تحديد قاعدة القرار:



- حساب القيم الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب $\mathbf{F_t}$ والمتمثلة في $f_{\alpha/2}$ و $f_{1-\alpha/2}$ والتي تقرأ من جدول توزيع كي مربع وفق عدد درجات الحرية ($V_1 = n_1 - 1$) و ($V_2 = n_2 - 1$) كما يلي:

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = \\ V_2 = n_2 - 1 = \\ f_{\alpha/2} = F_{(\alpha/2; V_1/V_2)} = \\ f_{1-\alpha/2} = \dfrac{1}{F_{(\alpha/2; V_2/V_1)}} = \end{cases}$$

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب $\mathbf{F_c}$ والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{F_c} = \frac{\mathbf{S_1^2}}{\mathbf{S_2^2}}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $F_c \in \left[f_{1-\alpha/2}\,;f_{\alpha/2}\right]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $F_c \notin \left[f_{1-\alpha/2}\,;f_{\alpha/2}\right]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال29:</u> أخذت عينة عشوائية حجمها 21 فكان تباينها 62 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 16 فكان تباينها 32 من مجتمع يتبع كذلك التوزيع الطبيعي.

- اختبر إن كان هناك فرق بين تبايني المجتمعين عند مستوى معنوية 5% ؟

<u>الحل:</u>

$$n_1=21 \quad / \quad S_1^2 = 62 \quad / \quad n_2=16 \quad / \quad S_2^2 = 32 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

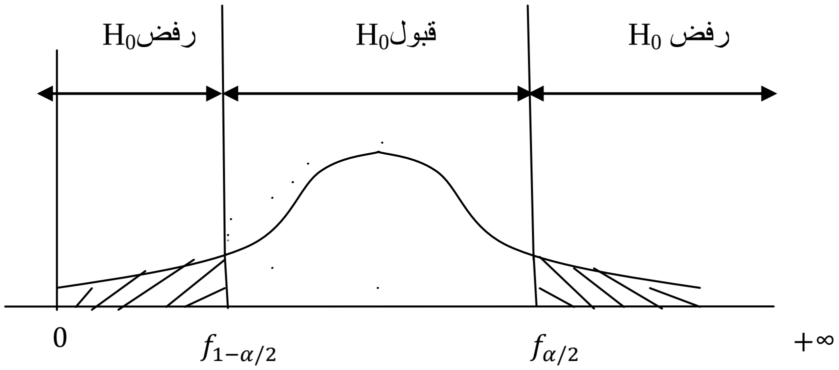
اختبار الفرضيات لتبايني مجتمعين (σ_1^2 ، σ_2^2).

نستعمل توزيع فيشر (F).

<u>اختبار ذو ذيلين</u>

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$



القيم الجدولية (الفاصلة):($f_{1-\alpha/2}$ و $f_{\alpha/2}$)

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = 20 \\ V_2 = n_2 - 1 = 15 \\ f_{\alpha/2} = F_{(\alpha/2;V_1/V_2)} = F_{(2.5\%;20/15)} = 2.76 \\ f_{1-\alpha/2} = \dfrac{1}{F_{(\alpha/2;V_2/V_1)}} = \dfrac{1}{F_{(2.5\%;15/20)}} = \dfrac{1}{2.57} = 0.39 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{62}{32} = \mathbf{1.93}$$

بما أن: $F_c = 1.93 \in [0.39\ ;\ 2.76]$

<u>القرار:</u> قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5\ \%$ إذن تبايني المجتمعين متساويين.

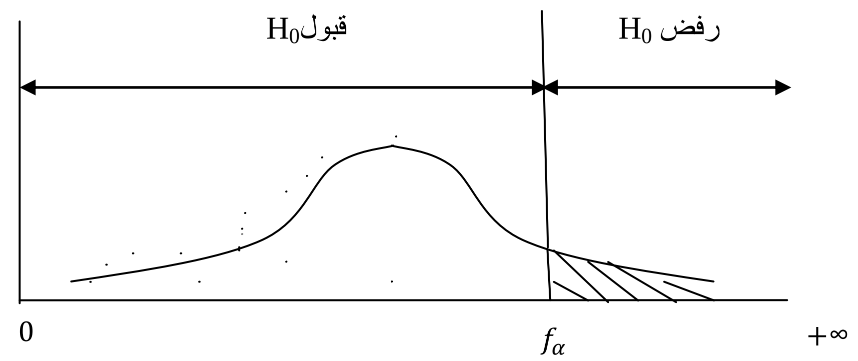
2.<u>اختبار ذو ذيل أيمن (ذو جانب أيمن):</u>

❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب $\mathbf{F_t}$ والمتمثلة في f_α والتي تقرأ من جدول توزيع فيشر وفق عدد درجات الحرية ($V_1 = n_1 - 1$) و ($V_2 = n_2 - 1$) كما يلي:

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = \\ V_2 = n_2 - 1 = \\ f_\alpha = F_{(\alpha; V_1/V_2)} = \end{cases}$$

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب $\mathbf{F_c}$ والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{F_c} = \frac{\mathbf{S_1^2}}{\mathbf{S_2^2}}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $F_c \leq f_\alpha$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $F_c > f_\alpha$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال30:</u> سحبت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي 10 و 25 من مجتمعين، وكان الانحراف المعياري للعينتين هو 15 و 20 على الترتيب.

- اختبر الفرضية التالية عند مستوى معنوية 1%:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

<u>الحل:</u>

$$n_1=10 \quad / \quad S_1 = 15 \quad / \quad n_2=25 \quad / \quad S_2 = 20 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

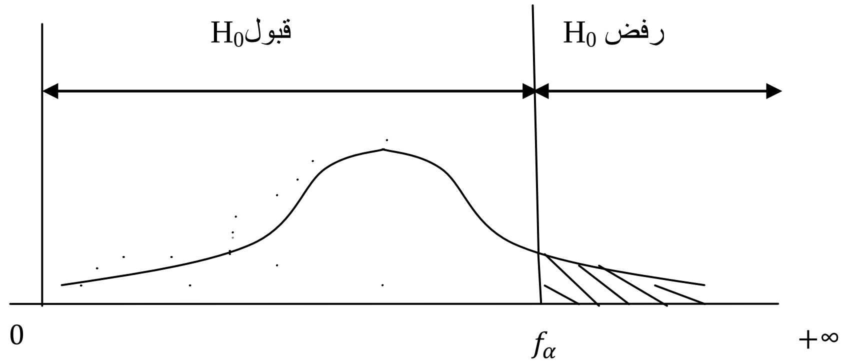
اختبار الفرضيات لتبايني مجتمعين (σ_1^2 ، σ_2^2).

نستعمل توزيع فيشر (F).

اختبار ذو ذيل أيمن

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$



القيمة الجدولية (الفاصلة):(f_α)

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = 9 \\ V_2 = n_2 - 1 = 24 \\ f_\alpha = F_{(\alpha;V_1/V_2)} = F_{(1\%;9/24)} = 3.26 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{15^2}{20^2} = \mathbf{0.56}$$

بما أن: $F_c = 0.56 < f_\alpha$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 1\ \%$ إذن تبايني المجتمعين متساويين.

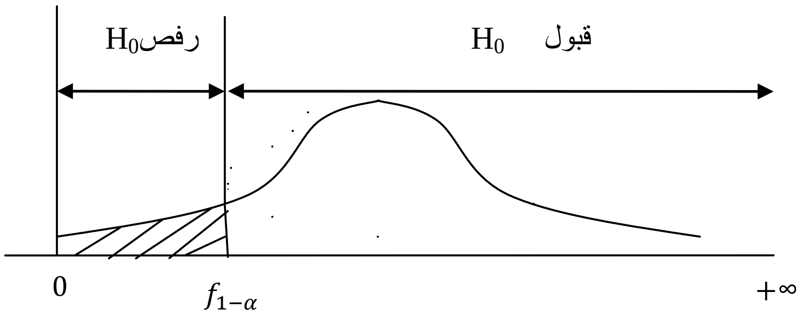
3.اختبار ذو ذيل أيسر (ذو جانب أيسر):

- ❖ تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

- ❖ تحديد قاعدة القرار:



❖ حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب $\mathbf{F_t}$ والمتمثلة في $f_{1-\alpha}$ والتي تقرأ من جدول توزيع فيشر وفق عدد درجات الحرية ($V_1 = n_1 - 1$) و ($V_2 = n_2 - 1$) كما يلي:

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = \\ V_2 = n_2 - 1 = \\ f_{1-\alpha} = \dfrac{1}{F_{(\alpha;V_2/V_1)}} = \end{cases}$$

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب $\mathbf{F_c}$ والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{F_c} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $F_c > f_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $F_c \leq f_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال31:</u> اليك المعطيات التالية:

$$n_1 = 7 \quad / \quad S_1^2 = 220 \quad / \quad n_2 = 6 \quad / \quad S_2^2 = 180$$

- اختبر الفرضية التالية عند مستوى معنوية 5%:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

<u>الحل:</u>

$$n_1 = 7 \quad / \quad S_1^2 = 220 \quad / \quad n_2 = 6 \quad / \quad S_2^2 = 180 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

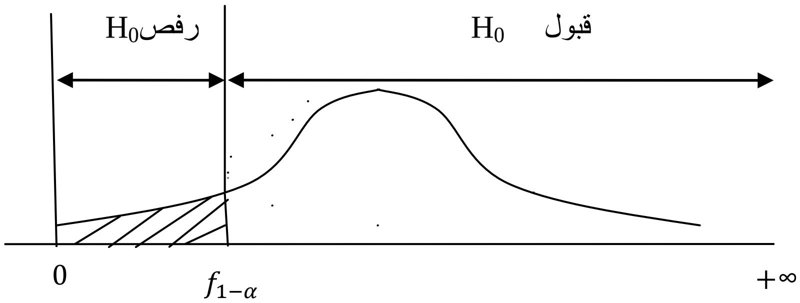
اختبار الفرضيات لتبايني مجتمعين (σ_1^2 ، σ_2^2).

نستعمل توزيع فيشر (F).

<u>اختبار ذو ذيل أيسر</u>

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$



القيمة الجدولية (الفاصلة):($f_{1-\alpha}$)

$$\begin{cases} V_1 = n_1 - 1 = 6 \\ V_2 = n_2 - 1 = 5 \\ f_{1-\alpha} = \dfrac{1}{F_{(\alpha;V_2/V_1)}} = \dfrac{1}{F_{(5\%;5/6)}} = \dfrac{1}{4.39} = 0.22 \end{cases}$$

القيمة الحسابية: (F_c)

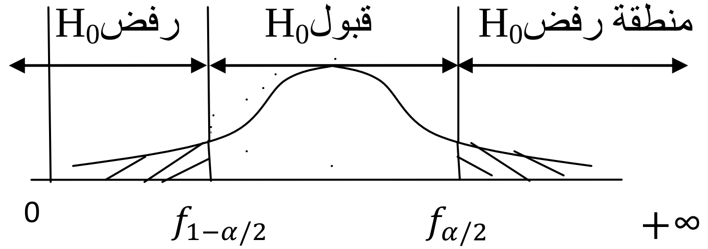
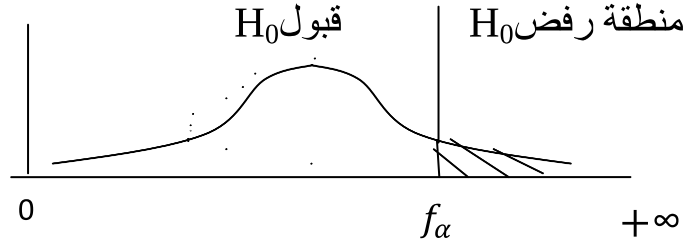
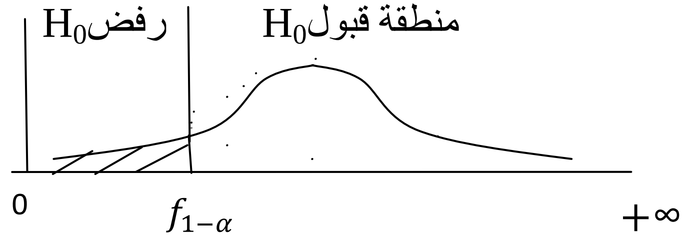
$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{220}{180} = \mathbf{1.22}$$

بما أن: $F_c = 1.22 > f_{1-\alpha}$

<u>القرار:</u> قبول H_0 ورفض H_1 عند α = 5 % إذن تبايني المجتمعين متساويين.

ويمكننا تلخيص اختبار الفرضيات لتبايني مجتمعين (σ_1^2 ، σ_2^2) في الجدول التالي:

<u>الجدول رقم 14:</u> اختبار الفرضيات لتبايني مجتمعين (σ_1^2 ، σ_2^2) : (نستعمل توزيع فيشر F)

جانب الاختبار	فرضية العدم والفرضية البديلة	تحديد مناطق قبول ورفض H_0 (الرسم) مع تحديد القيمة الفاصلة (القيمة الجدولية)	القيمة الحسابية (F_c)	القرار
ذو ذيلين	$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1:\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$		$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	إذا كانت: $F_c \in [f_{1-\alpha/2}\ ;f_{\alpha/2}]$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $F_c \notin [f_{1-\alpha/2}\ ;f_{\alpha/2}]$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيمن	$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1:\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	إذا كانت: $F_c \leq f_\alpha$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $F_c > f_\alpha$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.
ذو ذيل أيسر	$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1:\ \sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	إذا كانت: $F_c > f_{1-\alpha}$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1. إذا كانت: $F_c \leq f_{1-\alpha}$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

ثامنا: اختبار الفرضيات لعدة متوسطات المجتمعات:

نفرض أن R تعبر عن العينات من المجتمعات التي تكون مستقلة عن بعضها البعض، وتخضع للتوزيعات الطبيعية ذات المتوسطات (μ_1، μ_2، ... ، μ_R)، ونفرض أن تباين المجتمعات متساوية. ونرغب في ايجاد طرق مناسبة لإختبار الفرضية التالية والتي تسمى فرضية العدم والتي تنص على عدم وجود فروقات بين المتوسطات أو تساوي متوسطات المجتمعات كما يلي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_R$$

مقابل الفرضية البديلة والتي تقول يوجد على الأقل أحد المتوسطات مختلف كما يلي:

H_1: يوجد على الأقل أحد المتوسطات مختلف

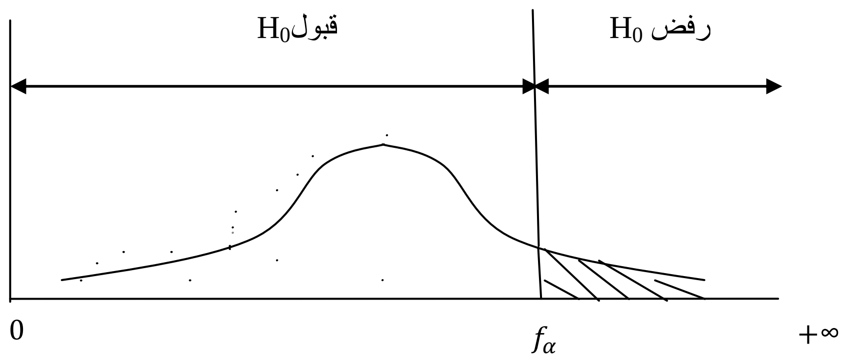
ولإختبار هذا النوع من الاختبارات نستعمل توزيع فيشر F، ولحل هذا النوع من الاختبارات يجب علينا المرور بالخطوات التالية:

- تحديد الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة):

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_R$$

H_1: يوجد على الأقل أحد المتوسطات مختلف

- تحديد قاعدة القرار:



- حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب $\mathbf{F_t}$ والمتمثلة في f_α والتي تقرأ من جدول توزيع فيشر وفق عدد درجات الحرية ($V_1 = R - 1$) و ($V_2 = n - R$) كما يلي:

$$\begin{cases} V_1 = R - 1 = \\ V_2 = n - R = \\ f_\alpha = F_{(\alpha;V_1/V_2)} = \end{cases}$$

R: عدد العينات (عدد الأعمدة).

n: عدد الملاحظات الكلية للعينات.

❖ حساب القيمة الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب $\mathbf{F_c}$ والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{F_c} = \frac{\boldsymbol{MSB}}{\boldsymbol{MSW}} = \frac{\boldsymbol{SSB/V1}}{\mathbf{SSW/V2}}$$

SSW: Sun of Squares Within the Groupes جمع تربيع داخل الأفواج

الأساس **SSW** يعبر عن التغيير الغير المفسر من طرف الأفواج، ويحسب كما يلي:

$$\mathbf{SSW} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{K}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{R}} \left(\mathbf{x_{ij}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{j}}\right)^{\mathbf{2}}$$

i: مؤشر الملاحظة.

j: مؤشر العمود.

SSB: Sun of Squares Between the Groupes جمع تربيع ما بين الأفواج

الأساس **SSB** يعبر عن التغيير المفسر بين الأفواج، ويحسب كما يلي:

$$\mathbf{SSB} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{R}} n_j \left(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{j}} - \bar{\bar{\mathbf{x}}}\right)^{\mathbf{2}}$$

حيث:
$$\bar{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\sum \mathbf{x_{ij}}}{n}$$

❖ المقارنة واتخاذ القرار:

إذا كانت: $F_c \le f_\alpha$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $F_c > f_\alpha$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

مثال32: استخدمت أربع طرق مختلفة في أربعة شعب بإحدى مدارس التعليم الابتدائي لتعليم الطلبة جداول الضرب، ثم قمنا بأخذ عينة من الطلبة عن كل طريقة، وكانت النتائج كما هي موضحة في الجدول التالي:

العينة 4	العينة 3	العينة 2	العينة 1
8	7	8	7
6	8	9	6
5	10	10	8
4	5	7	5
9	6	8	9
4	3	6	7

- اختبر فيما لو كانت هناك فروق في الطرق المختلفة عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

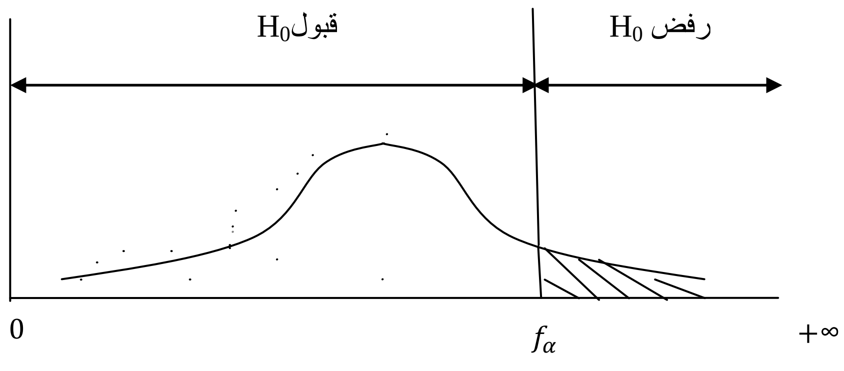
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 6 \ / \quad R = 4 \quad / \quad n = 24 \quad / \ \alpha = 5\%$$

نفرض أن العينات العشوائية مستقلة عن بعضها البعض، وأنها أخذت من أربعة مجتمعات مستقلة عن بعضها البعض، وأنها تتوزع توزيعا طبيعيا ذي المتوسطات التالية: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ على التوالي، وتباين المجتمعات متساوية. إذن نقوم باختبار الفرضيات لأربع متوسطات المجتمع.

نستعمل توزيع فيشر F.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_R$

H_1: يوجد على الأقل أحد المتوسطات مختلف



القيمة الجدولية (الفاصلة): (f_α)

$$\begin{cases} V_1 = R - 1 = 4 - 1 = 3 \\ V_2 = n - R = 24 - 4 = 20 \\ f_\alpha = F_{(\alpha;V_1/V_2)} = F_{(5\%;3/20)} = \mathbf{3.10} \end{cases}$$

R: عدد العينات (عدد الأعمدة).

n: عدد الملاحظات الكلية للعينات.

القيمة الحسابية: (F_c)

$$F_c = \frac{MSB}{MSW} = \frac{SSB/V1}{SSW/V2}$$

$$\mathbf{SSW} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{R}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2$$

i: مؤشر الملاحظة.

j: مؤشر العمود.

x_{i1}	$(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$	x_{i2}	$(x_{i2} - \bar{x}_2)^2$	x_{i3}	$(x_{i3} - \bar{x}_3)^2$	x_{i4}	$(x_{i4} - \bar{x}_4)^2$
7	0	8	0.25	7	0.25	8	4
6	1	9	0.25	8	2.25	6	0
8	1	10	2.25	10	12.25	5	1
5	4	7	2.25	5	2.25	4	4
9	4	8	0.25	6	0.25	9	9
7	0	9	0.25	3	12.25	4	4
42	**10**	**51**	**5.5**	**39**	**29.5**	**36**	**22**

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{i1}}{n_1} = \frac{42}{6} = \mathbf{7}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_{i2}}{n_2} = \frac{51}{6} = \mathbf{8.5}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum x_{i3}}{n_3} = \frac{39}{6} = \mathbf{6.5}$$

$$\bar{x}_4 = \frac{\sum x_{i4}}{n_4} = \frac{36}{6} = \mathbf{6}$$

$$\mathbf{SSW} = 10 + 5.5 + 29.5 + 22 = \underline{\mathbf{67}}$$

$$\mathbf{SSB} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{R}} n_j\left(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{j}} - \bar{\bar{\mathbf{x}}}\right)^{\mathbf{2}}$$

$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum x_{ij}}{n} = \frac{42+51+39+39}{24} = \frac{168}{24} = \mathbf{7}$

$SSB = n_1(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}})^2 + n_3(\bar{x}_3 - \bar{\bar{x}})^2 + n_4(\bar{x}_4 - \bar{\bar{x}})^2$

$SSB = 6(7 - 7)^2 + 6(8.5 - 7)^2 + 6(6.5 - 7)^2 + 6(6 - 7)^2$

$SSB = 0 + 13.5 + 1.5 + 6$ = <u>**21**</u>

$$F_c = \frac{MSB}{MSW} = \frac{SSB/V1}{SSW/V2} = \frac{21/3}{67/20} = \frac{7}{3.35} = \underline{\mathbf{2.08}}$$

بما أن: $F_c = 2.08 < f_\alpha$

<u>**القرار:**</u> رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن لا توجد فروق جوهرية في الطرق المختلفة للتدريس.

تمارين غير محلولة:

التمرين (01):

يعرف نادي للرياضة من الخبرة السابقة أن وزن الرياضي يتبع التوزيع الطبيعي بوسط قدره 80 كغ وانحراف معياري 10 كغ، ويرغب هذا النادي أن يختبر عند مستوى معنوية 1% ما إذا كان متوسط وزن الرياضي هذا العام أكبر من 80 كغ . ولعمل هذا الاختبار، أخذت عينة عشوائية من 25 رياضي حيث وجد أن متوسط الوزن في العينة 85 كغ.

- ما هي نتيجة الاختبار؟

التمرين (02):

مؤسسة مصغرة فيصناعة الأثاث المنزلي، يرد صاحبها بتزود بأعمدة خشبية سمكها 4 سم، حيث تبين له من خلال خبرته السابقة أن الأقل سمكا غير ملائمة والأكثر سمكا جد مكلفة. فقام بأخذ عينة عشوائية من 50 عمودا من مورد فوجد أن متوسط سمكها 3.8 سم وانحرافها المعياري 0.2 سم.

- بما تنصح صاحب المؤسسة إذا كان يرغب شراء هذه الأعمدة على هذا المورد عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (03):

تتلقى وكالة حكومية شكاوى كثيرة من المستهلكين فحواها أن صناديق مسحوق الصابون التي تبيعها إحدى الشركات تحتوي على كمية أقل من 20 علبة من المسحوق المعلن عنه.

للتحقق من شكاوى المستهلكين اشترت الوكالة 10 صناديق من المسحوق فوجدت أن متوسطها 18 وانحرافها 3.

- كيف يمكن للوكالة إجراء الاختبار عند مستوى معنوية 10% ؟

التمرين (04):

لمقارنة متوسط أطوال نوع معين من الأنابيب المنتجة من المصنع (أ) بأطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (ب)، سحبنا عينة عشوائية من المصنع (أ) تحتوي على 30 أنبوبة، فكان المتوسط الحسابي لأطوالها هو 3.8 سم، وسحبنا عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى من المصنع (ب) تحتوي على 35 أنبوبة، فكان المتوسط الحسابي لأطوالها هو 3.2 سم، كما أننا نعلم أن أطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (أ) تتبع التوزيع الطبيعي بتباين 0.81 ، وأطوال الأنابيب المنتجة في المصنع (ب) تتبع التوزيع الطبيعي بتباين 0.64 .

- اختبر ما إذا كان متوسط أطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (أ) هي نفسها المنتجة من المصنع (ب) عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (05):

إذا علمت أن مجتمع أطوال الطالبات والطلبة في جامعة وهران 2 يتبع التوزيع الطبيعي. سحبنا من الطالبات عينة عشوائية تشمل 25 طالبة فوجدنا متوسط أطوالهم 162 سم بانحراف معياري قدره 8 سم، وسحبنا من الطلبة عينة تشمل 21 طالبا فوجدنا متوسط أطوالهم 175 سم بانحراف معياري قدره 6 سم.

- اختبر ما إذا كان متوسط أطوال الطلبة أكبر من أطوال الطالبات عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (06):

أخذنا عينة من طلبة جامعة وهران 2 و طلبة جامعة مستغانم فتحصلنا على الاحصائيات التالية :

	طلبة جامعة وهران	طلبة جامعة مستغانم
حجم العينة n	10	15
المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ (متوسط النقاط)	12	10
الانحراف المعياري للعينة S	10	5

- اختبر اذا كان متوسط نقاط مقياس الاحصاء لجامعة وهران 2 مساويا لمتوسط نقاط نفس المقياس لجامعة مستغانم عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (07):

إدعى مقاول أن كلفة بناء المتر المربع للدور في المدينة (أ) هي أعلى منها أو تساوي في المدينة (ب)، فسحبت عينتين من الدور من كلا المدينتين و تم حساب كلفة المترالمربع لكل منها فوجد ما يلي:

العينة للمدينة (أ): 372؛ 380؛ 340؛ 400؛ 305؛ 310؛ 300؛ 316.

العينة للمدينة (ب): 391؛ 306؛ 405؛ 310؛ 315؛ 350؛ 360؛ 370؛ 325؛ 335.

- اختبر إدعاء المقاول عند مستوى معنوية 1% ؟

التمرين (08):

سحبت عينةعشوائية من 10 رياضيين ألعاب القوى، وسجل عدد ضربات القلب قبل السباق وبعد السباق، وكانت النتائج كما يلي:

قبل السباق x_i	10	12	8	11	12	14	10	13	12	8
بعد السباق y_i	15	14	11	15	16	19	14	17	16	13

- هل هناك فرق في ضربات القلب قبل وبعد الركض عند مستوى معنوية 1% ؟

التمرين (09):

يدعي متحدث حكومي لمكافحة التلوث أن أكثر من 70 % من المصانع في المنطقة تستوفي معايير مكافحة التلوث. ولكن واحدة من أنصار مكافحة التلوث لا تصدق ادعاء الحكومة، فقامت بأخذ عينة عشوائية من البيانات المنشورة عن مكافحة التلوث في 65 مصنعا في النطقة، فوجدت أن منها 54 مصنعا تستوفي معايير الدكافحة.

- هل تؤيد بيانات العينة ادعاء الحكومة عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (10):

تدعي شركة لصنع الزرابي بأن أكثر من 85 % من إنتاجها من النوعية النادرة في السوق، وللتأكد من صحة ذلك أخذت عينة حجمها 50 وحدة، وبعد تفحصها وجدت أن 90 % منها نادرة.

- هل النتيجة تتطابق وادعاءالشركة عند مستوى معنوية 1% ؟

التمرين (11):

ترغب شركة صناعة الروائح معرفة ان كان معدل استهلاك الفرد من الروائح في المدينة (أ)هو أقل من معدل استهلاك الفرد في المدينة (ب). فتم سحب عينة من المدينة (أ) حجمها 80 و من المدينة (ب) حجمها 85 و كان المتوسط الشهري على التوالي : 68 و 72، والانحراف المعياري لكل من العينتين على التوالي 3.5 و 3.8.

- اختبر هذا الإدعاء عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (12):

تم أخذ خمسة قراءات بجهاز معين، فكانت قيمها كما يلي: 60 – 64 – 62 – 59 – 61

- اختبر ما إذا كان تباين المجتمع يساوي 0.8 عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (13):

تعاقدت شركة لصناعة السيارات لشراء مدخرات كهربائية من أحد المصانع يدعى أن تباين منتجاته 0.6 عام، وعند ورود الشحنة سحبت عينة عشوائية من 5 مدخرات فكان تباينها 0.8

- هل تقبل ادعاء الشركة عند مستوى معنوية 1% ؟

التمرين (14):

سحبت عينتين عشوائيتين حجمها على 10 و 25 من مجتمعين، وكان الانحراف المعياري للعينتين 5 و 8 على الترتيب.

- اختبر الفرضية التالية عند مستوى معنوية 5% :

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

التمرين (15):

أخذنا عينة من طلبة جامعة وهران 2 و طلبة جامعة مستغانم فتحصلنا على الاحصائيات التالية :

	طلبة جامعة وهران	طلبة جامعة مستغانم
حجم العينة n	10	15
المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ (متوسط النقاط)	12	10
الانحراف المعياري للعينة S	10	5

- اختبر اذا كان تشتت (التباين) نقاط مقياس الاحصاء لجامعة وهران 2 مساويا لتشتت نقاط نفس المقياس لجامعة مستغانم عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين (16):

اليك العينات الثلاثة الموضحة في الجدول التالي: (مستوى معنوية 5%)

العينة1	العينة2	العينة3
85	88	79
78	86	83
82	90	86
76	70	/
/	77	/

- اختبر الفرضية التالية عند مستوى معنوية 5% :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

المحور الخامس:

إختبار حسن المطابقة والإستقلالية

أولا: اختبار حسن المطابقة:

1. تمهيد:

يختلف هذا الاختبار عن الاختبارات التي سبق ذكرها في أنه لا يبحث في الاختبارات الخاصة بالمؤشرات مثل: المتوسط أو التباين، بل أن هذا الاختبار يختص بإختبار التوزيع. ويستخدم اختبار حسن المطابقة لتحديد ما إذا المجتمع له أويتبع توزيع نظري معين، ويعتمد هذا الاختبار على توزيع كي مربع (χ^2) والذي سبق ذكره.

2. خطوات إختبار حسن المطابقة:

وكما تم عمله وصياغته في الاختبارات السابقة، فإن هذا الاختبار يتبع الخطوات التالية:

1.2- صياغة فرضية العدم والفرضية البديلة: وتكون كالآتي:

H_0 : لا يوجد فرق بين المتغير الأول والمتغير الثاني

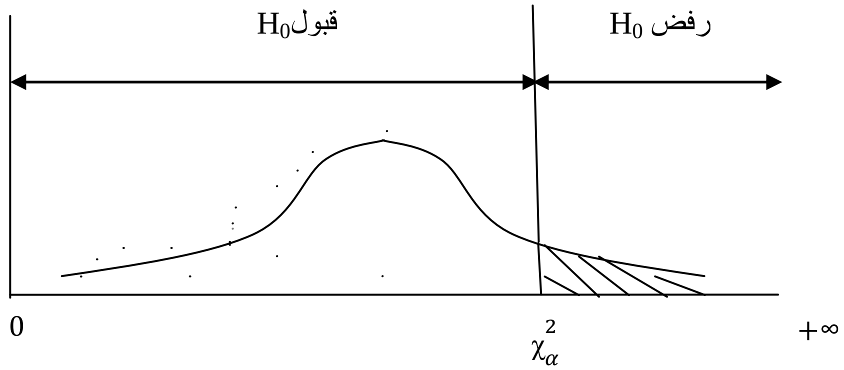
H_1 : يوجد فرق بين المتغير الأول والمتغير الثاني

وتكون أيضا:

H_0 : المتغير تحث الدراسة له توزيع محدد

H_1 : المتغير تحث الدراسة ليس له توزيع محدد

2.2- تحديد مستوى المعنوية (مناطق قبول والرفض لفرضية العدم): وتكون وفقا للشكل التالي:



3.2- حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب $\boldsymbol{\chi^2_t}$ والمتمثلة في χ^2_α والتي تقرأ من جدول توزيع كي مربع.

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) $\leftarrow$

$$\begin{cases} V = k - m - 1 = \\ \chi^2_\alpha = \end{cases}$$

k: عدد الأسطر بعد الدمج، أي نقرأ عدد الأسطر من العمود الأخيرل ($\boldsymbol{(\theta_i - e_i)^2/e_i}$).

m: عدد المعالم المقدرة.

4.2- حساب القيمة الاحصائية الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب χ_c^2 والمتمثلة في:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right)$$

θ_i**:** التكرارات الملحوظة (معطاة في التمرين).

e_i**:** التكرارات المتوقعة (نقوم بحسابها وفي بعض الأحيان تعطى في التمرين).

$$e_i = (\sum \theta_i) * P_i$$

P_i**:** الاحتمالات تحسب حسب التمرين.

5.2- المقارنة واتخاذ القرار: مقارنة القيمتين المحسوبة والجدولية واتخاذ القرار كما يلي:

إذا كانت: $\chi_c^2 \leq \chi_\alpha^2$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $\chi_c^2 > \chi_\alpha^2$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

<u>مثال1:</u> وجد محل تجاري من خبرته الماضية أنه من بين 100 جهاز تلفاز مباع 30% كانت من الحجم الصغير، 40% من الحجم المتوسط و 30% من الحجم الكبير. لتحديد حجم المخزون الواجب الاحتفاظ به من كل نوع، أخذ المدير عينة عشوائية من 100 من المبيعات الحديثة للتلفاز، فوجد أن منها 20% مباعة من الحجم الصغير، 40% من الحجم المتوسط و 40% من الحجم الكبير، كما هو موحظ في الجدول التالي:

حجم الشاشة / نمط المبيعات	صغير	متوسط	كبير	اجمالي
النمط المشاهد	20	40	40	**100**
النمط في الماضي	30	40	30	**100**

- اختبر ما إذا كان نمط المبيعات في الماضي مازال سائدا عند مستوى معنوية 5% ؟

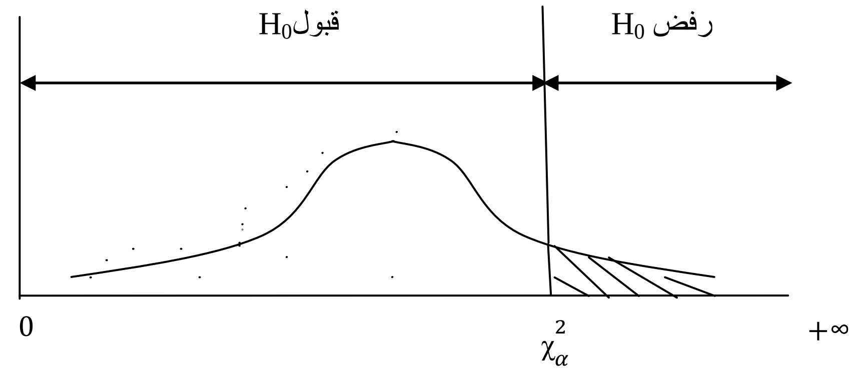
<u>الحل:</u>

$$n = 100 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

$H_0 : \chi^2 = 0$ لا يوجد فرق بين نمط المبيعات الحالي والنمط في الماضي

$H_1 : \chi^2 > 0$ يوجد فرق بين نمط المبيعات الحالي والنمط في الماضي



القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i-e_i)^2}{e_i}\right)$$

θ_i**:** التكرارات الملحوظة (معطاة في التمرين) على أساس المبيعات الحالية.

e_i**:** التكرارات المتوقعة (معطاة في التمرين) على أساس المبيعات في الماضي.

حجم الشاشة	θ_i	e_i	$(\theta_i - e_i)^2$	$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
صغير	20	30	100	3.33
متوسط	40	40	0	0
كبير	40	30	100	3.33
TOT	**100**	**100**	/	**6.66**

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i-e_i)^2}{e_i}\right) = 6.66$$

القيمة الفاصلة: (χ^2_α)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←
$$\begin{cases} V = k - m - 1 = 3 - 0 - 1 = 2 \\ \chi^2_\alpha = \chi^2_{0.05} = \mathbf{5.99} \end{cases}$$

k: عدد أسطر العمود الأخيرمن الجدول.

m: عدد المعالم المقدرة.

بما أن**:** $\chi^2_c = 6.66 > 5.99$

القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن نمط المبيعات في الماضي لم يعد سائدا.

مثال2: يريد مسير الشركة (R) معرفة ما إن كان توزيع الغيابات للعمال منسجم طوال أيام الأسبوع. من أجل هذا وجد أرشيف عدد غيابات العمال طوال أيام الأسبوع للسنة الماضية كما هو موضح في الجدول التالي:

عدد الغيابات	أيام الأسبوع
22	الأحد
19	الاثنين
16	الثلاثاء
18	الأربعاء
25	الخميس
100	**المجموع**

- اختبر ما إذا كان توزيع الغيابات منسجم طوال الأسبوع عند مستوى معنوية 1% ؟

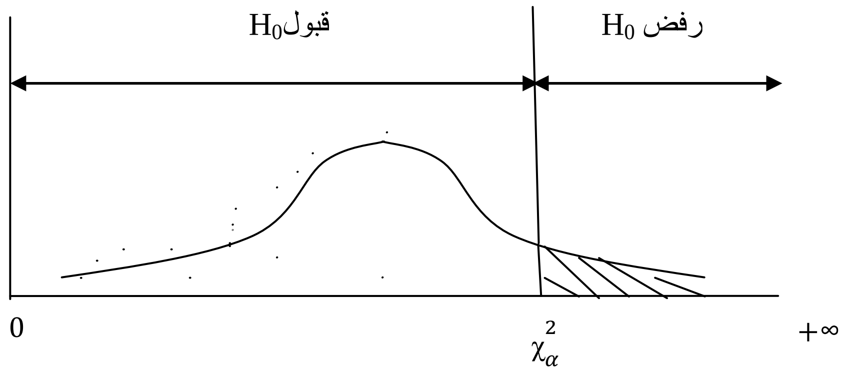
الحل:

$$n = 100 \quad / \quad \alpha = 1\%$$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

$H_0 : \chi^2 = 0$ توزيع الغيابات منسجم

$H_1 : \chi^2 > 0$ توزيع الغيابات غير منسجم



القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\boldsymbol{\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right)}$$

$\boldsymbol{\theta_i}$**:** التكرارات الملحوظة (معطاة في التمرين).

$\boldsymbol{e_i}$**:** التكرارات المتوقعة (نقوم بحسابها).

$$e_i = (\sum \theta_i)*P_i = 100 * \frac{1}{5} = \mathbf{20}$$

بما أن الاحتمالات متساوية فإن التكرارت المتوقعة (e_i) تكون متساوية.

أيام الأسبوع	θ_i	P_i	e_i	$(\theta_i - e_i)^2$	$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
الأحد	22		20	4	0.2
الاثنين	19		20	1	0.05
الثلاثاء	16		20	16	0.8
الأربعاء	18		20	4	0.2
الخميس	25		20	25	1.25
TOT	**100**	**1**	**100**	/	**4.3**

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i-e_i)^2}{e_i}\right) = 4.3$$

القيمة الفاصلة: (χ_α^2)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V = k - m - 1 = 5 - 0 - 1 = 4 \\ \chi_\alpha^2 = \chi_{0.01}^2 = \mathbf{13.28} \end{cases}$$

بما أن: $\chi_c^2 = 4.3 < \chi_\alpha^2$

القرار: قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن توزيع غيابات العمال طوال عدد أيام الأسبوع منسجم.

مثال3: يدعي صانع الطلاء أن مدة تجفيف هذا المنتوج تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 17 ساعة وتباين 9 ساعات. أخذت عينة ل 200 قارورة تحتوي كل منها على 1 لتر من هذا الطلاء لطلي مربعات مساحة كل مربع 1 م^2. أعطى وقت تجفيف كل مربع النتائج التالية:

وقت التجفيف (ساعات)	عدد المربعات
<12	25
14 - 12	58
16 - 14	30
18 - 16	12
20 - 18	11
22 - 20	28
>22	36
المجموع	**200**

- اختبر صحة إدعاء صانع الطلاء عند مستوى معنوية 1% ؟

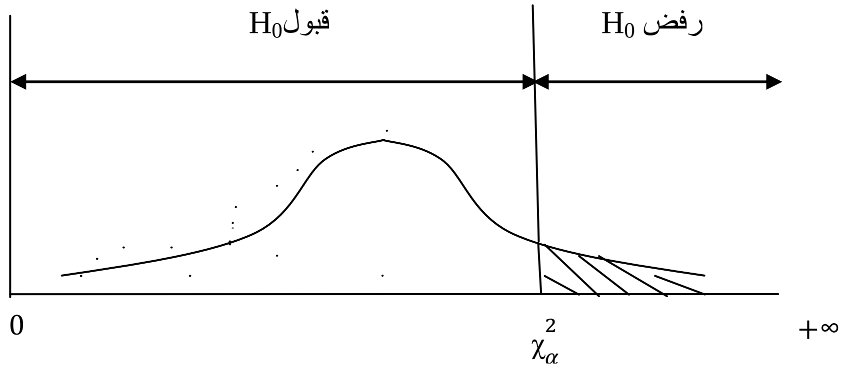
<u>الحل:</u>

$$n = 200 \quad / \quad \alpha = 1\%$$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

مدة التجفيف يتبع التوزيع الطبيعي $H_0 : x_i \sim N(\mu = 17; \delta = 3)$

مدة التجفيف يتبع لا التوزيع الطبيعي $H_1 : x_i \nsim N(\mu = 17; \delta = 3)$



x_i :متغير عشوائي يعبر عن مدة التجفيف.

$$x_i \sim N(\mu = 17; \delta = 3)$$
$$Z_i = \frac{x_i - 17}{3} \sim N(0; 1)$$

القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\boldsymbol{\chi^2_c} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\boldsymbol{\theta_i - e_i})^2}{\boldsymbol{e_i}}\right)$$

$e_i = (\sum \theta_i)*P_i$

$\boldsymbol{P_i}$**:** الاحتمالات تحسب بالتوزيع الطبيعي.

- $P(x_i < 12) = P\left(Z < \frac{12-17}{3}\right) = P(Z < -1.67) = 1 - \emptyset(1.67) = \mathbf{0.0475}$
- $P(12 \le x_i \le 14) = P(-1.67 \le Z \le -1) = \emptyset(1.67) - \emptyset(1) = \mathbf{0.1120}$
- $P(14 \le x_i \le 16) = P(-1 \le Z \le -0.33) = \emptyset(1) - \emptyset(0.33) = \mathbf{0.2120}$
- $P(16 \le x_i \le 18) = P(-0.33 \le Z \le 0.33) = 2 * \emptyset(0.33) - 1 = \mathbf{0.2598}$
- $P(18 \le x_i \le 20) = P(0.33 \le Z \le 1) = \emptyset(1) - \emptyset(0.33) = \mathbf{0.2120}$
- $P(20 \le x_i \le 22) = P(1 \le Z \le 1.67) = \emptyset(1.67) - \emptyset(1) = \mathbf{0.1112}$
- $P(x_i > 22) = 1 - \sum P_{i-1} = \mathbf{0.0455}$

x_i	θ_i	P_i	e_i	$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
<12	25	0.0475	9.5	25.28
12 - 14	58	0.1120	22.4	56.57
14 - 16	30	0.2120	42.4	3.62
16 - 18	12	0.2598	51.96	30.73
18 - 20	11	0.2120	42.4	23.25
20 - 22	28	0.1112	22.24	1.19
>22	36	0.0455	9.1	79.51
TOT	**100**	**1**	**100**	**220.45**

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right) = \mathbf{220.45}$$

القيمة الفاصلة: (χ_α^2)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V = k - m - 1 = 7 - 0 - 1 = 6 \\ \chi_\alpha^2 = \chi_{0.01}^2 = \mathbf{16.81} \end{cases}$$

بما أن: $\chi_c^2 = 220.45 > \chi_\alpha^2$

القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 1$ % إذن مدة التجفيف يتبع لا التوزيع الطبيعي وبالتالي إدعاء صانع الطلاء خاطئ.

مثال4: يبين الجدول التالي عدد المصابين بحوادث العمل بالآلاف في عينة مكونة من 50 مؤسسة التي تنشط في نفس القطاع.

التكرارات θ_i	الفئات x_i
3	1.7 – 1.5
12	1.9 – 1.7
14	2.1 – 1.9
9	2.3 – 2.1
7	2.5 – 2.3
5	2.7 – 2.5
50	**المجموع**

- اختبر إن كان عددالمصابين بحوادث العمل يتبع التوزيع الطبيعي عند مستوى معنوية 5% ؟

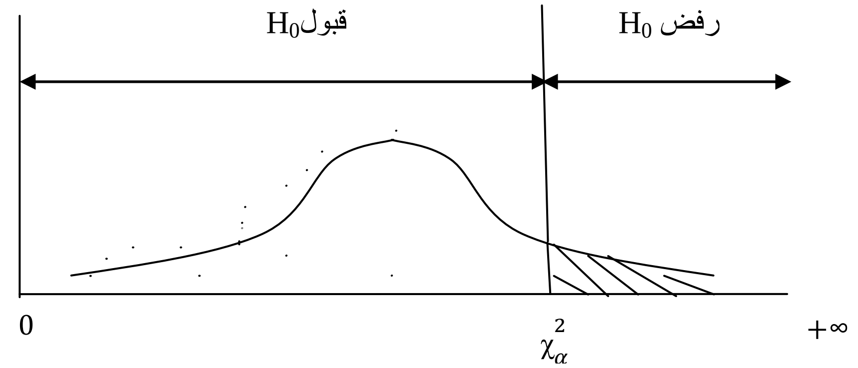
الحل:

$$n = 50 \quad / \quad \alpha = 5\%$$

اختبار حسن المطابقة ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

عدد المصابين بحوادث العمل يتبع التوزيع الطبيعي $\quad H_0 : x_i \backsim N(\mu = ?\,; \delta = ?)$

عدد المصابين بحوادث العمل لا يتبع التوزيع الطبيعي $\quad H_1 : x_i \not\backsim N(\mu = ?\,; \delta = ?)$



x_i: متغير عشوائي يعبر عن مدة تشغيل المصابيح.

$$x_i \backsim N(\mu = ?\,; \delta = ?)$$

$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0; 1)$$

معالم المجموعة الأم μ و δ مجهولة، إذن نقوم بتقديرهما باحصائيات العينة $\bar{x}$ و s، وذلك من أجل حساب الاحتمالات لإيجاد التكرارات المتوقعة (e_i).

الفئات	مركز الفئة x_i	θ_i	$\theta_i . x_i$	$\theta_i . (x_i - \bar{x})^2$
1.5 - 1.7	1.6	3	4.8	0.6912
1.7 - 1.9	1.8	12	21.6	0.9408
1.9 - 2.1	2.0	14	28	0.0896
2.1 - 2.3	2.2	9	19.8	0.1296
2.3 - 2.5	2.4	7	16.8	0.7168
2.5 - 2.7	2.6	5	13	1.352
TOT	/	**50**	**104**	**3.92**

$$\bar{x} = \frac{\sum(\theta_i . x_i)}{\sum \theta_i} = \frac{104}{50} = \mathbf{2.08}$$

$s^2 = \frac{\sum(\boldsymbol{\theta_i}.(\boldsymbol{x_i}-\overline{\boldsymbol{x}})^2)}{\sum \boldsymbol{\theta_i}-1} = \frac{3.92}{49} = \mathbf{0.08}$

$s=\sqrt{s^2}= 0.282$

$$x_i \sim N(\hat{\mu} = \bar{x} = 2.08 \,;\, \hat{\delta} = s = 0.282)$$

$$Z_i = \frac{x_i-2.08}{0.282} \sim N(0;1)$$

القيمة الحسابية: (χ_c^2)

$$\boldsymbol{\chi_c^2} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\boldsymbol{\theta_i}-\boldsymbol{e_i})^2}{\boldsymbol{e_i}}\right)$$

$e_i = (\sum \theta_i)*P_i$

$\boldsymbol{P_i}$**:** الاحتمالات تحسب بالتوزيع الطبيعي.

- $P(x_i < 1.5) = P\left(Z < \frac{1.5-2.08}{0.282}\right) = P(Z < -2.05) = 1 - \emptyset(2.05) = \mathbf{0.0202}$
- $P(1.5 \leq x_i \leq 1.7) = P(-2.05 \leq Z \leq -1.34) = \emptyset(2.05) - \emptyset(1.34) = \mathbf{0.0699}$
- $P(1.7 \leq x_i \leq 1.9) = P(-1.34 \leq Z \leq -0.63) = \emptyset(1.34) - \emptyset(0.63) = \mathbf{0.1742}$
- $P(1.9 \leq x_i \leq 2.1) = P(-0.63 \leq Z \leq 0.07) = \emptyset(0.07) - [1 - \emptyset(0.63)] = \mathbf{0.2636}$
- $P(2.1 \leq x_i \leq 2.3) = P(0.07 \leq Z \leq 0.78) = \emptyset(0.78) - \emptyset(0.07) = \mathbf{0.2544}$
- $P(2.3 \leq x_i \leq 2.5) = P(0.78 \leq Z \leq 1.48) = \emptyset(1.48) - \emptyset(0.78) = \mathbf{0.1483}$
- $P(2.5 \leq x_i \leq 2.7) = P(1.48 \leq Z \leq 2.19) = \emptyset(2.19) - \emptyset(1.48) = \mathbf{0.0551}$
- $P(x_i > 2.7) = 1 - \sum P_{i-1} = \mathbf{0.0143}$

ملاحظة هامة: بما أن H_0 يتبع التوزيع الطبيعي فإننا نضيف في الجدول سطرين، سطر في الأول بإشارة أقل، وسطر في الأخير بإشارة أكبر، لأن التوزيع الطبيعي متناظر حول الوسط أي يأخذ القيم من $(-\infty)$ إلى $(+\infty)$.

x_i	θ_i	P_i	e_i	$(\theta_i - e_i)^2/e_i$
<1.5	0	0.0202	1.01	
1.5 - 1.7	3 } ***15***	0.0699	3.50 } ***13.22***	} ***0.024***
1.7 - 1.9	12	0.1742	8.71	
1.9 - 2.1	14	0.2636	13.18	0.051
2.1 - 2.3	9	0.2544	12.72	1.087
2.3 – 2.5	7	0.1483	7.41	
2.5 - 2.7	5 } ***12***	0.0551	2.76 } ***10.88***	} ***0.114***
>2.7	0	0.0143	0.71	
TOT	**50**	**1**	**500**	**1.27**

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}\right) = \mathbf{1.27}$$

ملاحظة هامة: نقوم بدمج الأسطر ل e_i التي تحتوي على تكرارات أقل من 5 حتى تفوق 5 بالسطر الذي يليها أو يسبقها، وفي نفس الوقت نقوم بدمج نفس الأسطر ل θ_i.

القيمة الفاصلة: (χ_α^2)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V = k - m - 1 = 4 - 2 - 1 = 1 \\ \chi_\alpha^2 = \chi_{0.05}^2 = \mathbf{3.84} \end{cases}$$

k: عدد الأسطر بعد الدمج، أي نقرأ عدد الأسطر من العمود الأخيرل ($(\boldsymbol{\theta_i} - \boldsymbol{e_i})^2/\boldsymbol{e_i}$).

m: عدد المعالم المقدرة (2) .

بما أن: $\chi_c^2 = 1.27 < \chi_\alpha^2$

<u>القرار:</u> قبول H_0 ورفض H_1 عند $\alpha = 5$ % إذن عدد المصابين بحوادث العمل يتبع التوزيع الطبيعي.

<u>قواعد وملاحظات:</u>

- مجموع التكرارت الملحوظة (المشاهدة) θ_i يجب أن تساوي مجموع الملاحظات المتوقعة e_i.
- عندما تكون فرضية العدم H_0 تتبع التوزيع الطبيعي فإننا نضيف سطرين، سطر في أول الجدول بإشارة أقل وقيمة التكرارات المشاهدة تساوي الصفر، وسطر في آخر الجدول بإشارة أكبر وقيمة التكرارات المشاهدة تساوي الصفر، لأن التوزيع الطبيعي هو توزيع متناظر حول الوسط أي يأخذ القيم من $(-\infty)$ إلى $(+\infty)$.

- عندما تكون التكرارات المتوقعة e_i في أي فئة أو سطر من الجدول أقل من 5 فإنه يجب ضمها أي دمجها بالفئة أو السطر الذي يليها أو يسبقها حتى تفوق 5، وفي نفس الوقت نقوم بدمج نفس فئات أو أسطر التكرارات المشاهدة θ_i.
- لما يكون V= 1 و n <50 فإنه يجب استخدام معامل التصحيح لحساب χ_c^2، حيث تصبح القيمة الحسابية كالتالي:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(|\boldsymbol{\theta_i}-\boldsymbol{e_i}|-0.5)^2}{e_i}\right)$$

ثانيا: اختبار الإستقلالية:

1. تمهيد:

اختبار الاستقلالية بين ظاهرتين أو بين متغيرين x و y. وهو اختبار يعتمد على أن تكون البيانات ثنائية بشكل ما يسمى بجدوال التوافق. ويعتبر هذا الاختبار من الاختبارات المهمة لدراسة العلاقة بين متغرين، وعن طريقه يمكن التعرف على نوعية العلاقة ووجودها المعنوي. ويعتمد هذا الاختبار أيضا على توزيع كي مربع (χ^2).

2. خطوات إختبار حسن المطابقة:

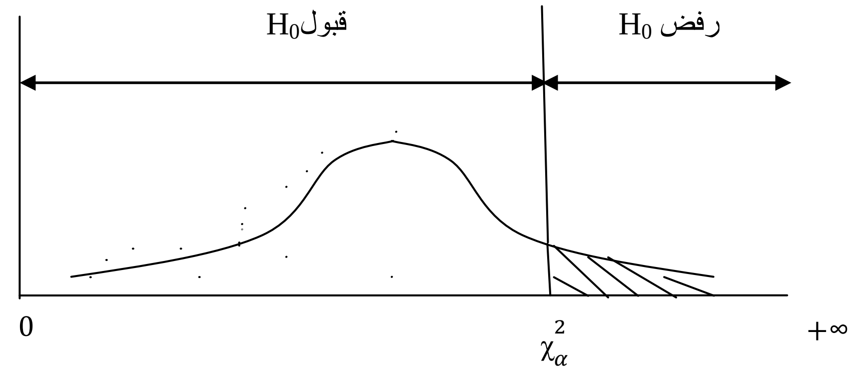
يتبع اختبار الاستقلالية الخطوات التالية:

1.2- صياغة فرضية العدم والفرضية البديلة: وتكون كالآتي:

H_0 : المتغيران تحث الدراسة مستقلان

H_1 : المتغيران تحث الدراسة غير مستقلان

2.2- تحديد مستوى المعنوية (مناطق قبول والرفض لفرضية العدم): وتكون وفقا للشكل التالي:



3.2- حساب القيمة الجدولية (الفاصلة): ويرمز لها ب $\boldsymbol{\chi_t^2}$ والمتمثلة في χ_α^2 والتي تقرأ من جدول توزيع كي مربع.

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ← $\begin{cases} V=(k-1)*(R-1)= \\ \chi^2_\alpha = \end{cases}$

k: : عدد أسطر الجدول.

R: عدد أعمدة الجدول.

4.2- حساب القيمة الاحصائية الحسابية: ويرمز لها كما سبق الذكرب χ^2_c والمتمثلة في:

$$\boldsymbol{\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{R}\left(\frac{(\theta_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right)}$$

$\boldsymbol{\theta_{ij}}$: التكرارات الملحوظة (معطاة في التمرين).

$\boldsymbol{e_{ij}}$: التكرارات المتوقعة (نقوم بحسابها) كما يلي:

$$\boldsymbol{e_{ij}} = \frac{\text{ملاحظات العمود}\sum \boldsymbol{j} \ast \text{ملاحظات السطر}\sum \boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}}$$

5.2- المقارنة واتخاذ القرار: مقارنة القيمتين المحسوبة والجدولية واتخاذ القرار كما يلي:

إذا كانت: $\chi^2_\alpha \leq \chi^2_c$ فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

أما إذا كانت: $\chi^2_\alpha < \chi^2_c$ فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1.

__مثال5:__ يبين الجدول الموالي عدد السيارات الأجنبية والمحلية التي يشتريها عملاء أعمارهم أقل سن 30 سنة، والتي يشتريها عملاء أعمارهم أكثر 30 سنة.

نوع السيارة / سن المشتري	**محلية**	**أجنبية**	**اجمالي**
أقل من 30	30	40	**70**
أكثر من 30	20	80	**100**
اجمالي	**50**	**120**	**__170__**

- اختبر ما إذا كان نوع السيارة المشتراة (محلية أو أجنبية) مستقلة عن سن المشتري عند مستوى معنوية α=1 % ؟

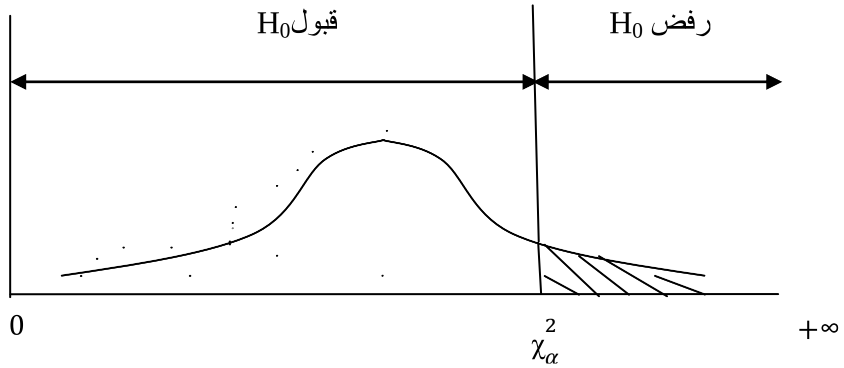
__الحل:__

$$n = 170 \quad / \quad \alpha = 1\%$$

اختبار فرض الإستقلالية ← نستعمل توزيع كي مربع (χ^2)

$H_0 : \chi^2 = 0$ نوع السيارة المشتراة (محلية أو أجنبية) مستقلة عن سن المشتري

$H_1 : \chi^2 > 0$ نوع السيارة المشتراة (محلية أو أجنبية) غير مستقلة عن سن المشتري



القيمة الحسابية: (χ^2_c)

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{R}\left(\frac{(\theta_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right)$$

k**:** عدد أسطر الجدول.

R**:** عدد أعمدة الجدول.

θ_{ij}**:** التكرارات الملحوظة (معطاة في التمرين).

e_{ij}: التكرارات المتوقعة (نقوم بحسابها) كما يلي:

$$e_{ij} = \frac{\text{ملاحظات العمود} \sum j \; * \; \text{ملاحظات السطر} \sum i}{n}$$

نوع السيارة	**محلية**		**أجنبية**		
سن المشتري	θ_{ij}	e_{ij}	θ_{ij}	e_{ij}	**المجموع**
أقل من 30	30	21	40	49	**70**
أكثر من 30	20	29	80	71	**100**
المجموع	**50**	**50**	**120**	**120**	***170***

$e_{11} = \frac{70*50}{170} = 21$	$e_{12} = \frac{70*120}{170} = 49$
$e_{21} = \frac{100*50}{170} = 29$	$e_{22} = \frac{100*120}{170} = 71$

ملاحظة: لإيجاد التكرارات المتوقعة e_{ij} ، يمكن إيجاد قيمة واحدة وفقا للعلاقة أعلاه، أما البقية فيمكن الحصول عليها بالطرح من مجموع الأسطر والأعمدة على اعتبار أن مجموع التكرارات المتوقعة يجب أن يساوي مجموع التكرارات المشاهدة θ_{ij}.

$\boldsymbol{\theta_{ij}}$	$\boldsymbol{e_{ij}}$	$\boldsymbol{(\theta_{ij}-e_{ij})^2}$	$\boldsymbol{(\theta_{ij}-e_{ij})^2/e_{ij}}$
30	21	81	3.85
40	49	81	1.65
20	29	81	2.79
80	71	81	1.14
170	***170***	/	***9.43***

$$\boldsymbol{\chi_c^2} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{R}\left(\frac{(\theta_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right) = \mathbf{9.43}$$

القيمة الفاصلة: (χ_α^2)

مقروأ من جدول توزيع كي مربع (χ^2) ←

$$\begin{cases} V=(2-1)*(2-1) \\ V=(2-1)*(2-1)=1 \\ \chi_\alpha^2 = \chi_{0.01}^2 = \mathbf{6.63} \end{cases}$$

بما أن: $\chi_c^2 = 9.43 > \chi_\alpha^2$

القرار: رفض H_0 وقبول H_1 عند $\alpha = 1$ % إذن نوع السيارة المشتراة (محلية أو أجنبية) غير مستقلة عن سن المشتري.

تمارين غير محلولة

التمرين (01):

يشير أرشيف الشرك (w) أن مبيعات السنة 2018 كان كما يلي:

30% من المبيعات كانت في غرب البلاد، 25%من المبيعات في الشمال، 20% من المبيعات في الشرق و 10% من المبيعات في الجنوب و 10% في الجنوب الغربي.

في سنة 2019 كانت مبيعات الرباعي الأول كما يلي:

في الغرب: 330 وحدة، في الشمال: 220 وحدة، في الشرق: 170 وحدة، في الجنوب: 120 وحدة، في الجنوب الغربي: 160 وحدة.

- اختبر ما إذا كان قانون توزيع المبيعات لسنة 2019 هو نفسه قانون التوزيع لسنة 2018 عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين (02):

قام أحد المسؤولين بميناء وهران البحث عن أسباب انتظار السفن أثناء عملية التفريغ، فتم مشاهدة 200 سفينة و سجلت النتائج التالية:

ساعات الانتظار	0	1	2	3	4	5	6
عدد السفن	13	24	108	43	6	3	3

- هل هذه النتائج تنتمي إلى قانون بواسون عند عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين (03):

اليك البيانات التالية:

	B1	B2	B3	B4
A1	22	38	29	51
A2	42	27	68	53
A3	26	85	102	68

- اختبر إن كان التصنيف A مستقل عن التصنيف B عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين (04):

يبين الجدول الموالي عدد حوادث المرور حسب نوع الحادث التي يرتكبها السائقون الذين أعمارهم أقل من 25 سنة، و التي يرتكبها السائقون الذين أعمارهم أكثر من 25 سنة.

نوع الحادث / عمر السائق	A	B	C
أقل من 25	9	17	5
أكثر من 25	61	13	12

- اختبر ما إذا كان نوع الحادث مستقل عن عمر السائق عند مستوى معنوية $\alpha=1$ % ؟

المحور السادس:

معامل الارتباط و الإنحدار الخطي

تمهيد:

غالبا ما يكون من المهم درراسة العلاقة بين ظاهرتين أو أكثر وتحديد نوع وقوة تلك العلاقة، كالعلاقة بين ظاهرتي الانفاق والدخل أوالعلاقة بين ظاهرتي زيادة الانتاج والقوى العاملة أو العلاقة بين ظاهرتي الطول و الوزن وغيرها.

نظرية التقدير عادة تظهر شدة أو قوة العلاقة بين الظاهرتين أو بين المتغيرين x_i و y_i. أما دراسة هذه العلاقة من خلال التمثيل البياني بأفضل علاقة اقتران ممكنة بالشكل $y_i = f (x_i)$ والتي تسمى بدراسة الانحدار ويسمى المستقيم أو المنحنى الذي يمثل هذه الدالة بمستقيم أو منحنى الانحدار.

يعتبر الانحدار من أهم الأساليب الاحصائية المهمة والتي تستخدم بشكل واسع جدا ومنذ فترات طويلة لتحديد التأثيرات بين المتغيرات المستقلة X_S والمتغير التابع Y_i، ويمكن أن توضع هذه المتغيرات على شكل معادلات خطية بحيث يمكن استخدامها للتنبؤ عن قيمة المتغير التابع Y_i بدلالة المتغيرات المستقلة X_S. فإذا كان المتغير Y_i يعتمد على متغير مستقل واحد X_i فنسمي الانحدار عندئذ الانحدار الخطي البسيط Régression linéaire simple، أما إذا كان المتغير Y_i يعتمد على عدد من المتغيرات المستقلة فيسمى هذا بالانحدار المتعدد Régression multiple.

أولا: معامل الارتباط الخطي:

يستخدم الارتباط الخطي لقياس العلاقة بين متغيرين، ويمكن أن يكون كلا المتغيرين مستقلين أو يكون أحدهما متغير مستقل ويرمز له ب X_i والمتغير التابع الذي يرمز له ب Y_i.

1. معامل الارتباط الخطي لبيرسون Person:

يقيس معامل الارتباط الخطي والذي يسمى معامل الارتباط لبيرسون Person، ويرمز له ب R وتتراوح قيمته ما بين (1-) و (1+) أي $-1 \leq R \leq 1$ قوة العلاقة الخطية بين متغيرين مثل: العلاقة بين وزن الشخص وطوله، أو بين دخل الفرد وادخاره أو بين دخل الفرد وانفاقه، فهذه الأمثلة تبين أن هناك علاقة سببية فالمتغير المستقل X_i يتبعه تغير في المتغير التابع Y_i، وكلما كان التغير متقارب في الكمية وفي نفس الاتجاه يعني ذلك أن العلاقة طردية وقوية، أما إذا التغير في المتغير المستقل X_i يتبعه تغير عكسي في المتغير التابع Y_i فيعني ذلك أن العلاقة عكسية قوية.

- ✓ إذا كان R يقترب من 1 فهذا يدل على وجود علاقة طردية قوية بين المتغيرين قيد الدراسة.
- ✓ أما إذا كان R يقترب من -1 فهذا يدل على وجود علاقة عكسية قوية بين المتغيرين قيد الدراسة.
- ✓ أما إذا كان R يقترب من 0 فهذا يدل على وجود علاقة ضعيفة بين المتغيرين قيد الدراسة.

ويمكن تلخيص هذا في الجدول التالي:

الجدول رقم 15: شكل الارتباط

قيمة معامل الارتباط	المعنى
+ 1	ارتباط طردي تام
من 0.70 الى 0.99	ارتباط طردي قوي
من 0.50 الى 0.69	ارتباط طردي متوسط
من 0.01 الى 0.49	ارتباط طردي ضعيف
0	لا يوجد ارتباط
من – 0.01 الى – 0.49	ارتباط عكسي ضعيف
من – 0.50 الى – 0.69	ارتباط عكسي متوسط
من – 0.70 الى – 0.9	ارتباط عكسي قوي
– 1	ارتباط عكسي تام

المصدر: من اعداد الباحث

ويمكن القول أنه كلما تقترب النقاط من خط الانحدار أو تقع على خط الانحدار فإن قيمة R تقترب من الواحد، وكلما ابتعدت النقاط عن خط الانحدار فإن فإن قيمة R تقترب من الصفر.

و يحسب معامل الارتباط R بالصيغة التالية:

$$R = \frac{\sum x_i . y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\left[\sqrt{\sum x_i{}^2 - n.\bar{x}^2}\right].\left[\sqrt{\sum y_i{}^2 - n.\bar{y}^2}\right]}$$

مثال1: تمثل البيانات التالية الدخل الشهري والادخار لمجموعة من العائلات:(الوحد: و.ن)

الدخل x_i	10	12	11	7	6	8	9	5	4	3
الادخار y_i	4	5	5	3	2	3	3	1	1	0

- أوجد معامل الارتباط R ؟

الحل:

$$R = \frac{\sum x_i . y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\left[\sqrt{\sum x_i{}^2 - n.\bar{x}^2}\right].\left[\sqrt{\sum y_i{}^2 - n.\bar{y}^2}\right]}$$

x_i	y_i	$x_i.y_i$	x_i^2	y_i^2
10	4	40	100	16
12	5	60	144	25
11	5	55	121	25
7	3	21	49	9
6	2	12	36	4
8	3	24	64	9
9	3	27	81	9
5	1	5	25	1
4	1	4	16	1
3	0	0	9	0
75	***27***	***248***	***645***	***99***

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{75}{10} = \mathbf{7.5}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{27}{10} = \mathbf{2.7}$$

$$R = \frac{248 - (10 * 7.5 * 2.7)}{\left[\sqrt{645 - 10 * (7.5)^2}\right].\left[\sqrt{99 - 10 * (2.7)^2}\right]} = \mathbf{0.98}$$

معامل الارتباط يساوي 98%، وهذا يدل على وجودعلاقة طردية قوية بين الدخل الشهري وادخار العائلات، أي كلما زاد الدخل زاد الادخار.

<u>مثال 2:</u> سجلت ست قراءات تقريبية لحجم الإنتاج وحجم صادرات النفط الخام لإحد الدول المنتجة للنفط خلال عدة سنوات كما يلي:

حجم الانتاج x_i	3	4	2	2	2	2
حجم الصادرات y_i	2	2	2	1	1	1

- ادرس وجود علاقة ارتباط خطية بين حجم الإنتاج وحجم صادرات النفط الخام ؟

الحل:

$$R = \frac{\sum x_i . y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\left[\sqrt{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2}\right].\left[\sqrt{\sum y_i^2 - n.\bar{y}^2}\right]}$$

x_i	y_i	$x_i . y_i$	x_i^2	y_i^2
3	2	6	9	4
4	2	8	16	4
2	2	4	4	4
2	1	2	4	1
2	1	2	4	1
2	1	2	4	1
15	***9***	***24***	***41***	***15***

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{6} = \mathbf{2.5}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{9}{6} = \mathbf{1.5}$$

$$R = \frac{24 - (6 * 2.5 * 1.5)}{\left[\sqrt{41 - 6 * (2.5)^2}\right].\left[\sqrt{15 - 6 * (1.5)^2}\right]} = \mathbf{0.65}$$

معامل الارتباط يساوي 65%، وهذا يدل على وجودعلاقة طردية متوسطة بين حجم الانتاج وحجم صادرات النفط الخام.

2. معامل الارتباط للرتب لسبيرمان Sperman:

هناك عدة حالات لا يمكن فيها قياس المتغيرات رقميا ولهذا توضع على شكل رتب، فمثلا يمكن تمييز عدة أنواع من الجبن حسب مذاق الملوحة فيه فلا يمكن اعطاء قيم عديدة محددة بالضبط، ولهذا اقتربت من أعلى الملوحة إلى الأقل على شكل رتب. لهذا يعد قانون الرتب لسبيرمان من أحد المقاييس الاحصائية المهمة التي تستخدم بشكل واسع لقياس قوة العلاقة ما بين متغيريين، ويرمز له ب R_S.

إذا فرضنا أن المتغير X_i له الرتب R_{x_i} والمتغير Y_i له الرتب R_{y_i}، وبفرض أن d_i ترمز للفرق بين الرتبتين، بمعنى $d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$، فإن معامل الارتباط للرتب لسبيرمان يكون على الصيغة التالية:

$$\mathbf{R_S = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n\,(n^2-1)}}$$

حيث: n: عدد أزواج المشاهدات.

مثال 3: في دراسة لمعرفة العلاقة بين عدد الحقول المكتشفة وطول الأنابيب (بالكيلومتر) الناقلة للنفط الخام لإحدى الدول خلال عدة سنوات، سجلت سبع قراءات على النحو التالي:

عدد الحقول x_i	67	63	62	61	56	54	55
طول الأنابيب y_i	23120	23125	23020	23008	23006	23027	21960

- هل توجد علاقة ارتباط بين عددالحقول المكتشفة وطول الأنابيب ؟

الحل: لوجود أرقام كبيرة للمتغير y_i سنستعمل معامل الارتباط للرتب لسبيرمان.

d_i^2	$d_i = x_i - y_i$	رتب y_i	رتب x_i	y_i	x_i
1	1	6	7	23120	67
1	-1	7	6	23125	63
0	0	5	5	23020	62
0	0	4	4	23008	61
0	0	3	3	23006	56
1	-1	2	1	23027	54
1	1	1	2	21960	55
4	**0**	/	/	/	**Σ**

$$\mathbf{R_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n\,(n^2-1)}} = 1 - \frac{6*4}{7\,(7^2-1)} = 1 - 0.07 = \mathbf{0.93}$$

معامل الارتباط يساوي 93%، وهذا يدل على وجودعلاقة طردية قوية بين عددالحقول المكتشفة وطول الأنابيب.

مثال 4: في دراسة لمعرفة العلاقة بين مستوى الطلبة عند حصولهم على البكالوريا و عند تخرجهم من الجامعة، أخذنا عينة من 5 طلاب فتحصلنا على ما يلي:

مستوى الطلبة عند حصولهم على البكالوريا x_i	مقبول	جيد جدا	ممتاز	حسن	جيد
مستوى الطلبة عند تخرجهم من الجامعة y_i	10.52	14.66	17.25	12.22	12.11

- هل يوجد ارتباط بين مستوى الطلبة عند حصولهم على البكالوريا و عند تخرجهم من الجامعة ؟

الحل:

x_i	y_i	رتب x_i	رتب y_i	$d_i = x_i - y_i$	${d_i}^2$
مقبول	10.52	5	5	0	0
جيد جدا	14.66	2	2	0	0
ممتاز	17.25	1	1	0	0
حسن	12.22	4	3	1	1
جيد	12.11	3	4	-1	1
Σ	/	/	/	**0**	**2**

$$\mathbf{R_s = 1 - \frac{6\sum {d_i}^2}{n\,(n^2-1)}} = 1 - \frac{6*2}{5\,(5^2-1)} = 1 - 0.1 = \mathbf{0.90}$$

معامل الارتباط يساوي 90%، وهذا يدل على وجود اتباط طردي قوي بين مستوى الطلبة عند حصولهم على البكالوريا و عند تخرجهم من الجامعة.

ثانيا: الانحدار الخطي البسيط:

1. مفهوم الانحدار الخطي البسيط:

الانحدار الخطي البسيط هو أداة إحصائية تستعمل لبيان العلاقة بين متغيرين كميين بحيث يمكن توقع قيمة المتغير التابع y_i غير المسيطر عليه من المتغير المستقل x_i المسيطر عليه. على سبيل المثال، إذا كان الباحث يعرف العلاقة بين النسبة المئوية لتراكم المادة الجافة والانتاجية فانه يمكنه التنبؤ بالإنتاجية عن طريق الإنحدار الخطي البسيط بمجرد تحديد مستوى تراكم المادة الجافة، بصورة عامة يستعمل الإنحدار للأغراض الآتية:

- ✓ تعد هذه الطريقة تقنية لنمذجة وتحليل البيانات العددية.
- ✓ إستغلال العلاقة بين متغيرين للتنبوء بقيم أحد المتغيرات من خلال قيم المتغير الأخر.
- ✓ التنبؤ وتقدير وإختبار فرضية ونمذجة العلاقات السببية.

هناك العديد من نماذج الانحدار قد يصل عددها الى ما يقرب من مئات النماذج ولكن النموذج الأكثر أهمية والأكثر شيوعاً في الاستعمال هو نموذج الانحدار الخطي بسيط، في هذا النموذج يوجد لدينا المتغير التابع y المعروف أيضاً باسم متغير الإستجابة والمتغير المستقل x المعروف أيضاً باسم المتغير المتنبئ، ويمكن ذكر النموذج على النحو التالي:

$$y = a + bx + e$$

حيث أن:

y : المتغير التابع.

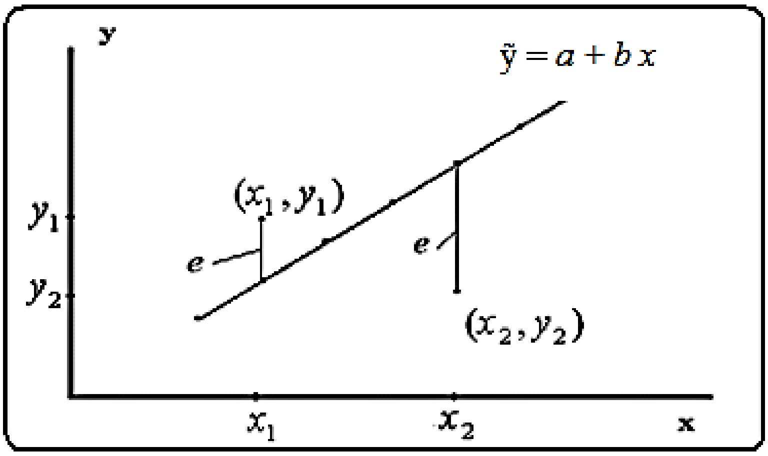
x : المتغير المستقل.

a : ثابت الإنحدار وهو الجزء المقطوع من المحور العمودي y الذي يعكس قيمة المتغير التابع y في حالة عدم وجود قيمة للمتغير المستقل x ، بمعنى أخر $(x = 0)$.

b : معامل الإنحدار (الميل) وهو مقدار التغيير في y إذا تغيرت x وحدة واحدة، ويساوي منحدر الخط المستقيم $(a + b\,x)$.

e : الخطأ العشوائي الذي يشير إلى الفرق بين القيمة الفعلية للمتغير التابع y والقيمة المقدرة التي يرمز لها $\hat{y} = a + b\,x$ ، وهذا يعني أن الخطأ العشوائي يساوي $e = y - (a + b\,x)$ ، ويمكن توضيح هذا الخطأ في الشكل البياني أدناه:

الشكل رقم 01: شكل الخطأ العشوائي e



المصدر: من إعداد الباحث

2. الفرق بين نموذجي الإنحدار الخطي البسيط النظري والفعلي:

✓ **النموذج النظري (المفترض):** نموذج يفترض أن العلاقة بين المتغيرين (x و y) تحكمها المعادلة الآتية:

$$\boldsymbol{y = a + bx + e}$$

✓ **النموذج الفعلي (المقدر):** نموذج عملي يقدره الباحث بجمع البيانات عن المتغيرين (x و y)، ومن تم حساب معاملات الانحدار (a و b) (الثابت والميل) ويعبر عن هذا النموذج بالمعادلة الآتية:

$$\boldsymbol{\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x + e}$$

بعد تقدير النموذج يمكن حساب الخطأ العشوائي لكل عينة كمايلي:

$$\boldsymbol{\hat{e} = y - \hat{y} = y - (\hat{a} + \hat{b}x)}$$

3. تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط:

هنالك عدة طرق لتقدير أو حساب نموذج الانحدار الخطي البسيط وكل الطرق تعتمد على حساب قيم معاملات الانحدار (a و b)، وتعد طريقة المربعات الصغرى من أفضل الطرق لأنها تجعل مجموع مربعات الأخطاء العشوائية أقل ما يمكن، ولحساب القيمة المقدرة لمعامل الإنحدار البسيط للمتغير التابع y بدلالة المتغير المستقل x تطبق المعادلة الآتية:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x + e$$

ولحساب قيمة $\hat{b}$ كما يلي:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i . y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum {x_i}^2 - n.\bar{x}^2}$$

وتحسب قيمة $\hat{a}$ كمايلي:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x}$$

مثال 5:

فيما يلي بيانات إضافة الأسمدة المركبة لنباتات البطاطا (x)، ومقدار الزيادة في تركيز النشاء في درنات النبات (y)، عند قياس عينة من 10 نباتات تحصلنا على ما يلي:

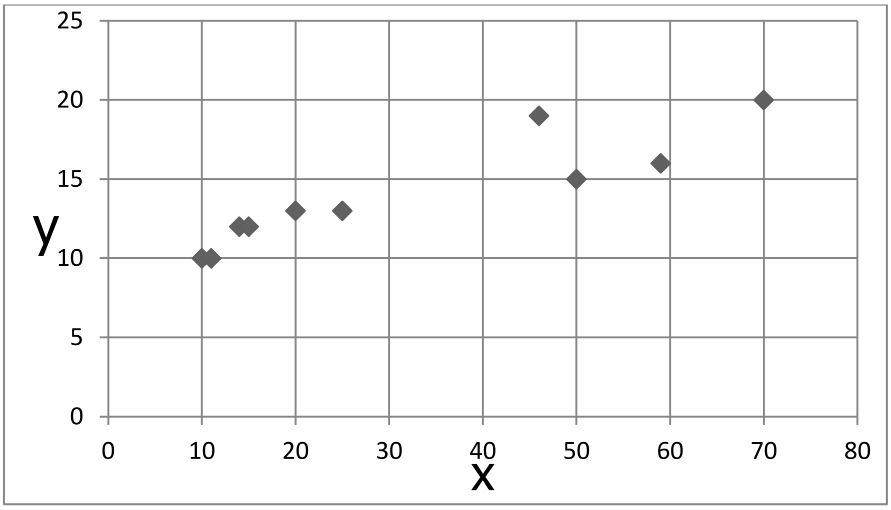
الأسمدة المضافة x	10	11	14	15	20	25	46	50	59	70
تركيز النشاء y	10	10	12	12	13	13	19	15	16	20

المطلوب:

- ارسم نقاط الانتشار؟
- قدر معادلة انحدار تركيز النشاء في الدرنات (y) على كمية الأسمدة المضافة (x)؟
- فسر معادلة الانحدار؟
- ما هو مقدار الزيادة في تركيز النشاء عند التسميد بمقدار 50 (x = 50)؟
- ما هو مقدار الخطأ العشوائي؟
- ارسم معادلة الانحدار على نقط الانتشار، وما هي توقعاتك لشكل العلاقة؟

الحل:

- رسم نقاط الانتشار:



- حساب نموذج الإنحدار المقدر بتطبيق المعادلة $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x + e$:

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
10	10	100	100	100
11	10	110	121	100
14	12	168	196	144
15	12	180	225	144
20	13	260	400	169
25	13	325	625	169
46	19	874	2116	361
50	15	750	2500	225
59	16	944	3481	256
70	20	1400	4900	400
320	***140***	***5111***	***14664***	***2068***

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{320}{10} = \mathbf{32}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{140}{10} = \mathbf{14}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i.y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum x_i^2 - n.\bar{x}^2} = \frac{5111-(10*32*14)}{14664-10*(32)^2} = \mathbf{0.1426}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{x}} = 14 - (0.1426)(32) = \mathbf{9.4368}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{9.4368} + \mathbf{0.1426}\,\boldsymbol{x}$$

- تفسير معادلة الإنحدار:

✓ معامل الإنحدار الثابت $\hat{a} = 9.4368$ يدل على أنه في حالة عدم إستعمال الأسمدة (x = 0) فان تركيز النشاء يزداد بمقدار 9.4368 .

✓ معامل الإنحدار (الميل) $\hat{b} = 0.143$ يدل على أنه كلما زادت كمية الأسمدة بوحدة واحدة فإن هنالك زيادة تحدث في تركيز النشاء بمقدار 0.14368 .

- مقدار الزيادة في تركيز النشاء عند التسميد بمقدار 50 (x = 50):

$$\hat{y} = 9.4368 + 0.1426\,x$$

$$\hat{y} = 9.4368 + 0.1426\,(50) = \mathbf{16.59}$$

- حساب قيمة الخطأ العشوائي عند (x = 50): تستخرج قيمة تقاطع $y_{x=50}$ من المخطط البياني أعلاه والتي تساوي 15 ثم تطبق المعادلة كمايلي:

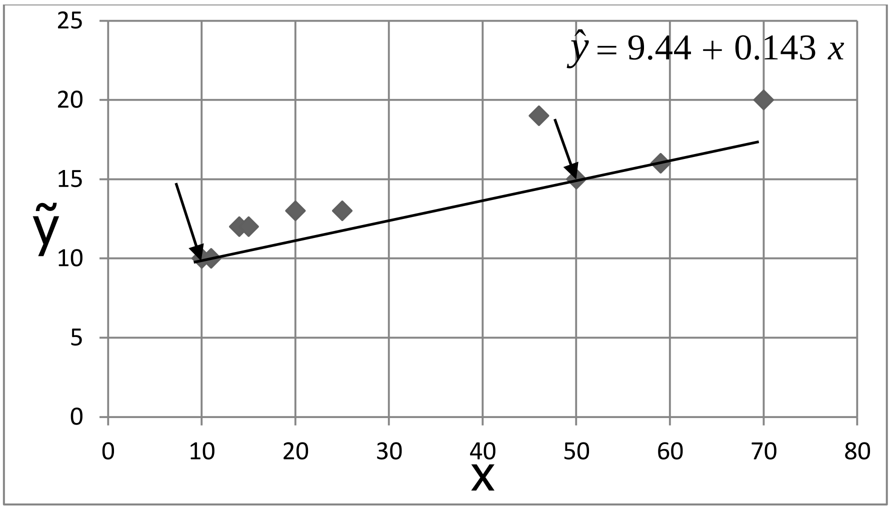
$$\hat{e}_{x=50} = y_{x=50} - \hat{y}_{x=50} = 15 - 16.59 = -1.59$$

- رسم معادلة الانحدار على نقاط الانتشار:

ملاحظة: من البديهي يمكن رسم خط مستقيم إذا علم أي نقطتين على ذلك الخط، فاذا كانت:

x	50	10
$\hat{y}$	16.59	10.87

لذا يمكن رسم الخط المستقيم كما يلي:



يستنتج من ذلك وجود علاقة الخط المستقيم بين المتغيرين.

مثال 6:

لدراسة علاقة الاستهلاك المحلي (y) بالإنتاج (x) لمادة الحديد بمليون طن خلال عدة سنوات، أخذنا عشر قراءات تقريبية كما هو موضح في الجدول التالي:

الاستهلاك المحلي y	6	8	9	8	7	6	5	6	5	5
الإنتاج x	10	13	15	14	9	7	6	6	5	5

المطلوب:

- أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط ؟
- توقع قيمة الاستهلاك المحلي حين يصل الانتاج الى 16 مليون طن ؟

الحل:

- ايجاد معادلة الانحدار الخطي البسيط:

y_i	x_i	x_iy_i	y_i^2	x_i^2
6	10	60	36	100
8	13	104	64	169
9	15	135	81	225
8	14	112	64	196
7	9	63	49	81
6	7	42	36	49
5	6	30	25	36
6	6	36	36	36
5	5	25	25	25
5	5	25	25	25
65	***90***	***632***	***441***	***942***

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{90}{10} = \mathbf{9}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{65}{10} = \mathbf{6.5}$$

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = \frac{\sum x_i.y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum {x_i}^2 - n.\bar{x}^2} = \frac{632-(10*9*6.5)}{942-10*(9)^2} = \mathbf{0.3560}$$

$$\widehat{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{x}} = 6.5 - (0.3560)(9) = \mathbf{3.296}$$

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \widehat{\boldsymbol{a}} - \widehat{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{3.296} + \mathbf{0.3560}\,\boldsymbol{x}$$

- توقع قيمة الاستهلاك المحلي حين يصل الانتاج الى 16 مليون طن ($x = 16$):

$$\hat{y} = \hat{a} - \hat{b}\,x = 3.296 + 0.3560\,x$$

$$\hat{y} = 3.296 + 0.3560\,(16) = \mathbf{8.992}$$

أي أن الاستهلاك المحلي قد يصل الى 9 مليون طن.

مثال 7:

يبين الجدول التالي الدخل السنوي ل 8 عائلات ومقدار ما تنفقه من هذا الدخل(بعشرة آلاف دينار):

الدخل x	64	52	84	64	76	56	68	64
الانفاق y	52	40	60	52	60	42	50	52

المطلوب:

- ايجاد معامل الارتباط بطريقة بيرسون ؟
- معامل الارتباط بطريقة الرتب ؟
- قدر معادلة الانحدار الخطي البسيط ؟
- قدر انفاق الاسرة التي يبلغ دخل 70 وحدة ؟

الحل:

- ايجاد معامل الارتباط بطريقة بيرسون (R):

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum x_i.y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\left[\sqrt{\sum {x_i}^2 - n.\bar{x}^2}\right].\left[\sqrt{\sum {y_i}^2 - n.\bar{y}^2}\right]}$$

x_i	y_i	$x_i.y_i$	${x_i}^2$	${y_i}^2$
64	52	3328	4096	2080
52	40	2080	2704	1600

84	60	5040	7056	3600
64	52	3328	4096	2020
76	60	4560	5776	3600
56	42	2352	3136	1764
68	50	3400	4624	2500
64	52	3328	4096	2020
528	**408**	**27416**	**35584**	**21176**

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{528}{8} = \mathbf{66}$$

$$\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{408}{8} = \mathbf{51}$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{27416 - (8 * 66 * 51)}{\left[\sqrt{35584 - 8 * (66)^2}\right].\left[\sqrt{21176 - 8 * (51)^2}\right]} = \mathbf{0.93}$$

معامل الارتباط يساوي 93%، وهذا يدل على وجودعلاقة طردية قوية بين الدخل السنوي والانفاق، أي كلما زاد الدخل زاد الانفاق.

- معامل الارتباط بطريقة الرتب (R_s):

لايجاد معامل الارتباط بطريقة الرتب نتبع الخطوات التالية:

1- نرتب البيانات تصاعديا او تنازليا.

2- نرصد رتب (x) ونرصد رتب (y) مثلا نعطي اصغر قيمة رقم (1) والقيمة التي تليها (2) لكل من x و y .

3- نحصل على الفرق (d) بين رتب (x) ورتب (y) أي ($d_i = x_i - y_i$).

4- نربع الفرق أي (d^2) ثم نطبق القانون التالي:

$$\mathbf{R_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n\,(n^2-1)}}$$

ملاحظة: اذا تكررت القيم نأخذ الوسط الحسابي للرتب.

x_i	y_i	رتب x_i	رتب y_i	$d_i = x_i - y_i$	${d_i}^2$
64	52	3.5	5	-1.5	2.25
52	40	1	1	0	0
84	60	8	7.5	0.5	0.25
64	52	3.5	5	-1.5	2.25
76	60	7	7.5	-0.5	0.25
56	42	2	2	0	0
68	50	6	3	3	9
64	52	3.5	5	-1.5	2.25
Σ	/	/	/	**0**	**16.25**

$$\mathbf{R_s = 1 - \frac{6\sum {d_i}^2}{n\,(n^2-1)}} = 1 - \frac{6*16.25}{8\,(8^2-1)} = 1 - 0.19 = \mathbf{0.81}$$

معامل الارتباط يساوي 81%، وهذا يدل على وجودعلاقة طردية قوية بين الدخل السنوي والانفاق، أي كلما زاد الدخل زاد الانفاق.

- قدر معادلة الانحدار الخطي البسيط:

$$\hat{y} = \hat{a} - \hat{b}\,x$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{528}{8} = \mathbf{66}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{408}{8} = \mathbf{51}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i.y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum {x_i}^2 - n.\bar{x}^2} = \frac{27416-(8*66*51)}{35584-8*(66)^2} = \mathbf{0.652}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x} = 51 - (0.652)(66) = \mathbf{7.968}$$

$$\hat{y} = \hat{a} - \hat{b}\,x = \mathbf{7.968 + 0.652\,x}$$

إذن تصبح معادلة الانحدار الخطي البسيط كما يلي:

$$y = a + bx = \mathbf{7.968 + 0.652\,x}$$

- قدر انفاق الاسرة التي يبلغ دخل 70 وحدة:

نعوض في المعادلة:

$$\hat{y} = 7.968 + 0.652\,x = 7.968 + 0.652\,(70) = \mathbf{53.6}$$

إذن عندما يكون الدخل السنوي للعائلة 700.000 دينار فإن الانفاق يكون 536.000 دينار.

مثال 8:

البيانات التالية توضح الإيرادات المحققة لإحدى المؤسسات الاقتصادية بالملايين (y) وحجم الإنتاج بالآلاف (x) خلال الفترة 2011 –2018:

السنوات	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
حجم الانتاج x	80	90	130	120	90	110	120	130
حجم الايرادات y	110	130	160	150	100	120	130	140

المطلوب:

- تحديد انحدار y على x على افتراض أن العلاقة بين الإيرادات وحجم الإنتاج خطية؟
- حساب معامل الارتباط وماذا تستنتج؟
- تقدير مستوى الإيرادات لسنة 2019 إذ برمجت الشركة إنتاج 160 ألف وحدة؟

الحل:

- تحديد انحدار y على x على افتراض أن العلاقة بين الإيرادات وحجم الإنتاج خطية:

$$\hat{y} = \hat{a} - \hat{b}\,x$$

x_i	y_i	$x_i.y_i$	${x_i}^2$	${y_i}^2$
80	110	880	6400	12100
90	130	11700	8100	16900
130	160	20800	16900	25600
120	150	18000	14400	22500
90	100	9000	8100	10000
110	120	13200	12100	14400
120	130	15600	14400	16900
130	140	18200	16900	19600
870	***1040***	***115300***	***97300***	***138000***

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{870}{8} = \mathbf{108.8}$$

$$\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1040}{8} = \mathbf{130}$$

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i}.\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{n}.\overline{\boldsymbol{x}}.\overline{\boldsymbol{y}}}{\sum \boldsymbol{x_i}^2 - \boldsymbol{n}.\overline{\boldsymbol{x}}^2} = \frac{115300-(8*108.8*130)}{97300-8*(108.8)^2} = \mathbf{0.82}$$

$$\widehat{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{b}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = 130 - (0.82)(108.8) = \mathbf{40.8}$$

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \widehat{\boldsymbol{a}} - \widehat{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{40.8 + 0.82}\,\boldsymbol{x}$$

<u>إذن تصبح معادلة الانحدار الخطي البسيط كما يلي:</u>

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bx} = \mathbf{40.8 + 0.82}\,\boldsymbol{x}$$

- <u>حساب معامل الارتباط:</u>

باستخدام معامل الارتباط بطريقة بيرسون نجد:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i}.\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{n}.\overline{\boldsymbol{x}}.\overline{\boldsymbol{y}}}{\left[\sqrt{\sum \boldsymbol{x_i}^2 - \boldsymbol{n}.\overline{\boldsymbol{x}}^2}\right].\left[\sqrt{\sum \boldsymbol{y_i}^2 - \boldsymbol{n}.\overline{\boldsymbol{y}}^2}\right]}$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{115300 - (8 * 108.8 * 130)}{\left[\sqrt{97300 - 8 * (108.8)^2}\right].\left[\sqrt{138000 - 8 * (130)^2}\right]} = \mathbf{0.80}$$

<u>الاستنتاج:</u>

معامل الارتباط يساوي 80%، وهذا يدل على وجودعلاقة طردية قوية بين وحجم الانتاج والايرادت، أي كلما زاد حجم الانتاج زادت الايرادات.

- <u>تقدير مستوى الإيرادات لسنة 2019 إذ برمجت الشركة إنتاج 160 ألف وحدة:</u>

لتقدير مستوى الإيرادات نعوض في المعدلة المقدرة كما يلي:

$$\hat{y} = \hat{a} - \hat{b}\,x = 40.8 + 0.82\,x = 40.8 + 0.82\,(160) = \mathbf{172}$$

إذن مستوى الايردات في سنة 2019 هو 172 مليون.

تمارين غير محلولة

التمرين (01):

تمثل البيانات التالية الادخار وحجم الأسرة لمجموعة من العائلات ذات الدخل المحدود أو المتساوي:

حجم الأسرة x	9	25	36	16	49	36	16	0	1	4
الادخار y	49	16	4	36	1	9	25	100	81	64

- ايجاد معامل الارتباط بطريقة بيرسون؟

التمرين (02):

يبين الجدول التالي درجات الطلبة عند حصولهم على البكالوريا ومستوى الطلبة عند تخرجهم من الجامعة:

درجة البكالوريا x	جيد جدا	ممتاز	جيد	حسن	مقبول	مقبول	حسن	حسن جدا	جيد
مستوى الجامعي y	80	90	82	70	66	56	60	70	85

- ايجاد معامل الارتباط بطريقة الرتب لسبيرمان؟

التمرين (03):

تمثل البيانات التالية حجم الأسرة وعدد قطع الخبز المستهلكة يوميا:

حجم الأسرة x	2	9	5	8	11	12	14	4	6	7
الخبز المستهلك y	2	16	5	10	13	15	18	5	7	9

- ارسم نقاط الانتشار؟
- ايجاد معامل الارتباط بطريقة بيرسون؟
- قدر معادلة الانحدار الخطي البسيط ؟
- قدر عدد قطع الخبز المستهلكة إذا كان حجم الأسرة 20 ؟

التمرين (04):

تمثل البيانات التالية كمية الأمطار المتساقطة في احدى المناطق الزراعية (ملم) وكمية الانتاجى الزراعي من محصول الشعير (آلاف الأطنان) خلال فترة 8 سنوات:

كمية الأمطار x	100	140	80	180	200	160	150	190
كمية الانتاج y	36	45	25	84	100	70	60	92

- ارسم نقاط الانتشار؟

- ايجاد معامل الارتباط بطريقة بيرسون ؟
- معامل الارتباط بطريقة الرتب لسبيرمان ؟
- قدر معادلة الانحدار الخطي البسيط ؟
- قدر كمية الانتاج من محصول الشعير إذا كمية الأمطار المتساقطة 120 ملم ؟

<u>التمرين (05):</u>

أراد أحد الباحثين التنبؤ بالزيادة الحاصلة في تركيز المادة القلويدية الفعالة (y) في كالس نبات الداتورة عند إضافة تراكيز من Ascorbic acid (x) الى الوسط الغذائي للكالس، وعند تقدير 10 عينات من الكالس حصل الباحث على البيانات الآتية:

Ascorbic acid (x)	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	3.0	3.25	3.5
Alkaloids (y)	10	8	12	12	14	12	16	18	20	21

- ارسم نقاط الانتشار؟
- قدر معادلة انحدار تركيز المادة القلويدية الفعالة (y) بدلالة تراكيز من Ascorbic acid (x)؟
- فسر معادلة الانحدار؟
- ما هو مقدار الزيادة في تركيز المادة القلويدية الفعالة عند إضافة تركيز 3.0 من Ascorbic acid (x = 3.0)؟
- ما هي مقدار الخطأ العشوائي؟
- ارسم معادلة الانحدار على نقط الانتشار، وما هي توقعاتك لشكل العلاقة؟

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

1. أنيس اسماعيل كنجو: "الإحصاء والإحتمال"، مكتبة العبيكان، الرياض، 2000.
2. جورج كانافوس: "الإحصاء للتجاريين"، دار المريخ للنشر، الرياض، 2004.
3. د. ليونارد وج. كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى: "الإحصاء التجاري"، الدار الدولية للإستثمارات الدولية، مصر، 2004.
4. دلال القاضي وآخرون: "الإحصاء للإداريين والإقتصاديين"، دار حامد، عمان، 2005.
5. سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة: "مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي"، دار المسيرة، عمان، 2007.
6. سعد بن سعيد القحطاني: "الإحصاء التطبيقي"، مركز البحوث، معهد الإدارة العامة، الرياض، 2015.
7. سليمان محمد طشطوش: "أساسيات الإحصاء الرياضي"، دار اليازوري، عمان، 2012.
8. صلاح الدين حسين الهيتي: "الأساليب الإحصائية في العلوم الإدارية"، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2006.
9. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي: "الأساليب الاحصائية التطبيقية"، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، 2004.
10. عدنان عوض: "الإحصاء التطبيقي"، الشركة العربية المتحدة مع التعاون مع جامعة القدس المفتوحة، مصر، 2009.
11. عدنان كريم نجم الدين: "الإحصاء للإقتصاد والإدارة"، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2000.
12. لحسن عبد الله باشيوة: "الإحصاء وتطبيقاته على الحزمة الإحصائية"، دار الوراق للنشر والتوزيع، عمان، 2013.
13. محمد حسن محمد رشيد ومنى عطاء الله الشويلات: "مبادئ الإحصاء والإحتمالات ومعالجتها بإستخدام برنامج SPSS، دار الصفاء، عمان، 2012.
14. محمد خير سليم أبو زيد: "التحليل الاحصائي للبيانات بإستخدام برمجية SPSS، دار جرير، عمان، 2010.
15. محمد عبد العالي النعيمي: "الإحصاء التطبيقي"، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، 2008.
16. محمد عبد الفتاح الصيرفي: "الدليل التطبيقي للباحثين"، دار وائل، عمان، 2002.
17. محمد علي: "مقدمة في طرق الإحصاء وتقييم التجاريين"، دار المطبوعات الجديدة، مصر، 2006.

18.محمود البياتي وآخرون: "الإحصاء للإداريين والإقتصاديين"، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2005.

19.موراي سنجيل: "الإحصاء - ملخصات شوم-"، الدار الدولية للإستثمارات، 2003.

المراجع باللغة الأجنبية

20. Weiss Neil. N : "Elementary Statistics", 4th Ed Addision Wesley Longman, New York, 1999.

21. GLEN COWN , **Statistcal Data Analysis** , Clarendon , OXFORD , 1998.

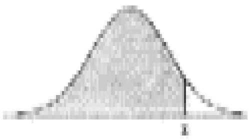
22. N V Nagendram, **Probability and Statistical Applications –Distributions,** https://www.researchgate.net/publication/268870344_Probability_and_Statistical_Applications_-_Distributions?enrichId=rgreq-36c95422c5fb776a6216f014d071617b-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzI2ODg3MDM0NDtBUzoxNjg4MTg3Njg4ODM3MTJAMTQxNzI2MDkzOTcwMQ%3D%3D&el=1_x_3.

فهرس المحتويات

قائمة الملاحق

جدول توزيع الطبيعي (Z)

Tables of the Normal Distribution



Probability Content from -oo to Z

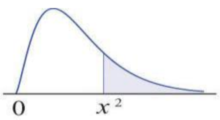
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

جدول توزيع ستودنت Student (T)

نقاط درصد توزیعهای t

r	.25	.10	.05	.025	.01	.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

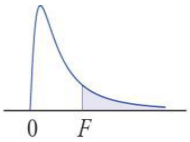
جدول توزيع كي مربع (كي دو) (χ^2)



Critical Values of Chi-Square Distributions

df	x^2 Right-Tail Area 0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.96	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

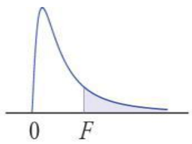
جدول توزيع فيشر Fisher (F)



Lower Critical Values of F-Distributions

F tail area	df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
0.90	1	0.03	0.12	0.18	0.22	0.25	0.26	0.28	0.29	0.30	0.30	0.33	0.34	0.35	0.36
0.95	1	0.01	0.05	0.10	0.13	0.15	0.17	0.18	0.19	0.20	0.20	0.22	0.23	0.24	0.25
0.975	1	0.00	0.03	0.06	0.08	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.14	0.16	0.17	0.18	0.19
0.99	1	0.00	0.01	0.03	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.09	0.10	0.12	0.12	0.13	0.14
0.995	1	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12
0.90	2	0.02	0.11	0.18	0.23	0.26	0.29	0.31	0.32	0.33	0.34	0.37	0.39	0.40	0.42
0.95	2	0.01	0.05	0.10	0.14	0.17	0.19	0.21	0.22	0.23	0.24	0.27	0.29	0.30	0.32
0.975	2	0.00	0.03	0.06	0.09	0.12	0.14	0.15	0.17	0.17	0.18	0.21	0.22	0.24	0.25
0.99	2	0.00	0.01	0.03	0.06	0.08	0.09	0.10	0.12	0.12	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20
0.995	2	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.13	0.14	0.16	0.17
0.90	3	0.02	0.11	0.19	0.24	0.28	0.30	0.33	0.34	0.36	0.37	0.40	0.42	0.44	0.46
0.95	3	0.00	0.05	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.26	0.27	0.30	0.32	0.34	0.36
0.975	3	0.00	0.03	0.06	0.10	0.13	0.15	0.17	0.18	0.20	0.21	0.24	0.26	0.28	0.30
0.99	3	0.00	0.01	0.03	0.06	0.08	0.10	0.12	0.13	0.14	0.15	0.18	0.20	0.22	0.24
0.995	3	0.00	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.15	0.17	0.19	0.21
0.90	4	0.02	0.11	0.19	0.24	0.28	0.31	0.34	0.36	0.37	0.38	0.42	0.44	0.47	0.49
0.95	4	0.00	0.05	0.11	0.16	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.29	0.33	0.35	0.37	0.40
0.975	4	0.00	0.03	0.07	0.10	0.14	0.16	0.18	0.20	0.21	0.22	0.26	0.28	0.31	0.33
0.99	4	0.00	0.01	0.03	0.06	0.09	0.11	0.13	0.14	0.16	0.17	0.20	0.23	0.25	0.27
0.995	4	0.00	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.11	0.13	0.14	0.17	0.19	0.22	0.24
0.90	5	0.02	0.11	0.19	0.25	0.29	0.32	0.35	0.37	0.38	0.40	0.44	0.46	0.49	0.51
0.95	5	0.00	0.05	0.11	0.16	0.20	0.23	0.25	0.27	0.29	0.30	0.34	0.37	0.39	0.42
0.975	5	0.00	0.03	0.07	0.11	0.14	0.17	0.19	0.21	0.22	0.24	0.28	0.30	0.33	0.36
0.99	5	0.00	0.01	0.04	0.06	0.09	0.11	0.13	0.15	0.17	0.18	0.22	0.24	0.27	0.30
0.995	5	0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.09	0.11	0.12	0.13	0.15	0.19	0.21	0.24	0.27
0.90	6	0.02	0.11	0.19	0.25	0.29	0.33	0.35	0.37	0.39	0.41	0.45	0.48	0.50	0.53
0.95	6	0.00	0.05	0.11	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.30	0.31	0.36	0.38	0.41	0.44
0.975	6	0.00	0.03	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.21	0.23	0.25	0.29	0.32	0.35	0.38
0.99	6	0.00	0.01	0.04	0.07	0.09	0.12	0.14	0.16	0.17	0.19	0.23	0.26	0.29	0.32
0.995	6	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.09	0.11	0.13	0.14	0.15	0.2	00.22	0.25	0.29
0.90	7	0.02	0.11	0.19	0.25	0.30	0.33	0.36	0.38	0.40	0.41	0.46	0.49	0.52	0.55
0.95	7	0.00	0.05	0.11	0.16	0.21	0.24	0.26	0.29	0.30	0.32	0.37	0.40	0.43	0.46
0.975	7	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.20	0.22	0.24	0.25	0.30	0.33	0.36	0.40
0.99	7	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.19	0.24	0.27	0.30	0.34
0.995	7	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.09	0.11	0.13	0.15	0.16	0.21	0.23	0.27	0.3

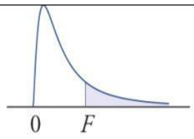
جدول توزيع فيشر Fisher (F) (تابع)



Lower Critical Values of F-Distributions

F tail area	df_1 / df_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
0.90	8	0.02	0.11	0.19	0.25	0.30	0.34	0.36	0.39	0.40	0.42	0.47	0.50	0.53	0.56
0.95	8	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.24	0.27	0.29	0.31	0.33	0.38	0.41	0.44	0.48
0.975	8	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.20	0.23	0.24	0.26	0.31	0.34	0.38	0.41
0.99	8	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.12	0.15	0.17	0.18	0.20	0.25	0.28	0.32	0.35
0.995	8	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.09	0.12	0.13	0.15	0.16	0.21	0.24	0.28	0.32
0.90	9	0.02	0.11	0.19	0.25	0.30	0.34	0.37	0.39	0.41	0.43	0.48	0.51	0.54	0.58
0.95	9	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.24	0.27	0.30	0.31	0.33	0.39	0.42	0.45	0.49
0.975	9	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.26	0.32	0.35	0.39	0.43
0.99	9	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.17	0.19	0.20	0.26	0.29	0.33	0.37
0.995	9	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14	0.15	0.17	0.22	0.25	0.29	0.33
0.90	10	0.02	0.11	0.19	0.26	0.30	0.34	0.37	0.39	0.41	0.43	0.49	0.52	0.55	0.59
0.95	10	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.27	0.30	0.32	0.34	0.39	0.43	0.46	0.50
0.975	10	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.27	0.33	0.36	0.40	0.44
0.99	10	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.17	0.19	0.21	0.26	0.30	0.34	0.38
0.995	10	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14	0.16	0.17	0.23	0.26	0.30	0.34
0.90	11	0.02	0.11	0.19	0.26	0.30	0.34	0.37	0.40	0.42	0.43	0.49	0.52	0.56	0.60
0.95	11	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.30	0.32	0.34	0.40	0.43	0.47	0.51
0.975	11	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.24	0.26	0.27	0.33	0.37	0.41	0.45
0.99	11	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.17	0.19	0.21	0.27	0.30	0.34	0.39
0.995	11	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14	0.16	0.17	0.23	0.27	0.31	0.36
0.90	12	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.34	0.37	0.40	0.42	0.44	0.50	0.53	0.56	0.60
0.95	12	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.30	0.33	0.34	0.40	0.44	0.48	0.52
0.975	12	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.19	0.21	0.24	0.26	0.28	0.34	0.37	0.41	0.46
0.99	12	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.18	0.20	0.21	0.27	0.31	0.35	0.40
0.995	12	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.24	0.27	0.31	0.36
0.90	13	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.35	0.38	0.40	0.42	0.44	0.50	0.53	0.57	0.61
0.95	13	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.41	0.44	0.48	0.53
0.975	13	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.34	0.38	0.42	0.47
0.99	13	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.16	0.18	0.20	0.22	0.28	0.31	0.36	0.41
0.995	13	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.24	0.28	0.32	0.37
0.90	14	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.35	0.38	0.40	0.43	0.44	0.50	0.54	0.58	0.62
0.95	14	0.00	0.05	0.11	0.17	0.22	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.41	0.45	0.49	0.54
0.975	14	0.00	0.03	0.07	0.12	0.15	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.35	0.38	0.43	0.48
0.99	14	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.16	0.18	0.20	0.22	0.28	0.32	0.36	0.42
0.995	14	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.10	0.12	0.15	0.16	0.18	0.24	0.28	0.33	0.38

جدول توزيع فيشر Fisher (F) (تابع)



Lower Critical Values of *F*-Distributions

F tail area	df_1 / df_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
0.90	15	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.35	0.38	0.41	0.43	0.45	0.51	0.54	0.58	0.62
0.95	15	0.00	0.05	0.11	0.17	0.22	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.42	0.45	0.50	0.54
0.975	15	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.24	0.27	0.28	0.35	0.39	0.43	0.49
0.99	15	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.16	0.18	0.20	0.22	0.28	0.32	0.37	0.43
0.995	15	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.10	0.13	0.15	0.17	0.18	0.25	0.29	0.33	0.39
0.90	20	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.35	0.39	0.41	0.44	0.45	0.52	0.56	0.60	0.65
0.95	20	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.36	0.43	0.47	0.52	0.57
0.975	20	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.29	0.36	0.41	0.46	0.51
0.99	20	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.14	0.16	0.19	0.21	0.23	0.30	0.34	0.39	0.45
0.995	20	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.1	00.13	0.15	0.17	0.19	0.26	0.30	0.35	0.42
0.90	30	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.39	0.42	0.44	0.46	0.53	0.58	0.62	0.68
0.95	30	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.30	0.32	0.35	0.37	0.45	0.49	0.54	0.61
0.975	30	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.30	0.38	0.43	0.48	0.55
0.99	30	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.19	0.22	0.24	0.31	0.36	0.42	0.49
0.995	30	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.13	0.16	0.18	0.20	0.27	0.32	0.38	0.46
0.90	40	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.39	0.42	0.45	0.47	0.54	0.59	0.64	0.70
0.95	40	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.30	0.33	0.35	0.38	0.45	0.50	0.56	0.63
0.975	40	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.29	0.31	0.39	0.44	0.50	0.57
0.99	40	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.22	0.24	0.32	0.37	0.43	0.52
0.995	40	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.13	0.16	0.18	0.20	0.28	0.33	0.40	0.48
0.90	50	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.40	0.43	0.45	0.47	0.55	0.59	0.64	0.71
0.95	50	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.30	0.33	0.36	0.38	0.46	0.51	0.57	0.64
0.975	50	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.29	0.31	0.39	0.44	0.51	0.59
0.99	50	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.22	0.24	0.32	0.38	0.45	0.53
0.995	50	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.14	0.16	0.18	0.20	0.28	0.34	0.41	0.50
0.90	60	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.40	0.43	0.45	0.47	0.55	0.60	0.65	0.72
0.95	60	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.30	0.33	0.36	0.38	0.46	0.51	0.57	0.65
0.975	60	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.24	0.26	0.29	0.31	0.40	0.45	0.52	0.60
0.99	60	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.22	0.24	0.33	0.38	0.45	0.54
0.995	60	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.14	0.16	0.18	0.21	0.29	0.34	0.41	0.51
0.90	100	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.40	0.43	0.46	0.48	0.56	0.61	0.66	0.74
0.95	100	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.31	0.34	0.36	0.39	0.47	0.52	0.59	0.68
0.975	100	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.24	0.27	0.29	0.32	0.40	0.46	0.53	0.63
0.99	100	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.23	0.25	0.34	0.39	0.47	0.57
0.995	100	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.14	0.16	0.19	0.21	0.29	0.35	0.43	0.54