Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed
Faculté des Sciences de la Terre et de l'Univers

Département des sciences de la Terre

Mécanique du point matériel
Résumé de cours et travaux dirigés

Par: Dr. CHERIET ARBIA

Année 2019/2020

Préface

Ce cours s'adresse aux étudiants des troncs communs des sciences de la matière (SM), mathématiques et informatique (MI), sciences et techniques (ST), ainsi qu'aux étudiants en sciences de la terre (ST). Ce cours couvre les aspects fondamentaux de la mécanique du point matériel à l'aide de certains outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension de ce cours.

Le premier chapitre est consacré aux principales notions de l'analyse dimensionnelle et du calcul d'erreur.

Le deuxième chapitre est dédié au calcul vectoriel qui est un outil de base. Ce chapitre contient essentiellement des rappels mathématiques des différentes opérations pouvant être effectuées sur les vecteurs.

Le troisième chapitre traite de la cinématique du point matériel. Son but est de décrire les mouvements d'objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent.

Le quatrième chapitre concerne la dynamique du point matériel, qui se base sur les trois lois Newton: la loi de l'inertie, la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions réciproques. La notion de moment cinétique d'une particule par rapport à l'origine ainsi que la notion de moment d'une force y sont également traitées.

Le cinquième chapitre est destiné à une méthode d'analyse du mouvement, qui est celle du travail et de l'énergie. Cette approche élimine la gradeur cinématique, qui est le vecteur accélération, en reliant directement la force, la masse, la vitesse et le déplacement.

Dans le dernier chapitre nous passons à l'étude de la notion de la gravitation, ses caractéristiques et les lois qui la décrivent.

Dr. ARBIA CHERIET

Table des matières

Section II: Calcul vectoriel & systèmes de coordonnées

Section III: Cinématique du point matériel: Exemples de mouvement

Section IV: Dynamique du point matériel

Section V: Travail et énergie

Section VI: La gravitation

Section VII: Solutions des exercices

Introduction

Introduction

Dans la plupart des universités, les notions de mécanique du point sont les premières traitées, Dans le premier cycle d'enseignement de la physique générale.Cela nous a incités à rédigerce manuscrit pour l'usage des étudiants de la première année et pour les différentes filières ou spécialités qui leurs sont utiles. Ce manuscrit regroupe une série de cours et exercices sur la mécanique du point matériel. Il comporte six grandes sections.

La premièresectionse divise en trois parties. Dans lesdeux premières parties, nous traitons l'analyse dimensionnelle et les systèmes d'unités des grandeurs physiques, respectivement. Ces notions permettront, plus loin, la description des lois de base et fondamentales de la mécanique du point. La suite est réservée aux calculsd'erreurs et incertitudes,éléments importantdansl'évaluationet la quantification des grandeurs physiques.

Dans la 2èmesection, nous avons reporté des notions sur le calcul vectoriel et les systèmes de coordonnées.

Nous commençons par décrire les différentes opérations possibles sur les vecteurs, telles que le produit scalaire,le produit vectoriel,le calcul du moment d'un vecteur et les opérateurs vectoriels. Cette partie se termine par les systèmes de coordonnées qui permettent une représentation des vecteurs dans l'espace.

La cinématique du point matériel fait l'objet de la 3emesection du manuscrit. Nous y avons décrit la manière dont lesobjets se déplacent, dans l'espace et en fonction du temps, sans traiter les causes des mouvements.

L'étude de la dynamique des mouvements est présentée dans la quatrième partie.Après avoir énoncé les lois fondamentales de la dynamique, nous avons donnés différents exemples de forces ainsi que le théorème du moment cinétique. Ce dernier étant particulièrement utile pour l'étude des mouvements circulaire et de rotation.

Nous avons présenté les notions de travail et d'énergie, dans le cinquième section du manuscrit.Nous y présentons les différentes lois pour le calcul du travail d'une forcede l'énergie ainsi que la de puissance.

Introduction

La dernière partie de ce travail est consacré à la notion de gravitation, d'un point de vue général. Dans cettepartie nous discuterons la force d'interaction gravitationnelle entre deux corps, le champ gravitationnel, les référentiels utiles pour cette étude ainsi que le mouvement des planètes proprement dit. Nous terminerons par les 3 lois de Kepler.

Pour chacune des six sections, décrites plus haut et pour une meilleure compréhension des différentes notions de la mécanique du point, nous avons proposé un certain nombre d'exercices, intéressants et utiles à notre sens. Les solutions aux exercices proposés sont fournies à la fin du manuscrit.

Avec cette contribution modeste, nous espérons rendre les concepts de la mécanique du point accessibles à nos étudiants,en leur souhaitant beaucoup de réussite.

Nous tenons aussi à rendre hommage ànos enseignants et collègues,qui ont enseigné cette discipline depuis l'ouverture de l'université algérienne. Nous comptons sur vos suggestions pour rendre meilleur le contenu de ce modeste travail.

Section I

Dimensions, systèmes d'unités et incertitudes

Section I: Dimensions, systèmes d'unités et incertitudes

I-1 Introduction

La physique est une science qui décrit les phénomènes de façon qualitative et quantitative. Elle doit les caractériser par des grandeurs mesurables.

Ces grandeurs ont toutes une appellation et son caractérisées par les notions de dimension et unités. Ces notions peuvent être différentes pour une même grandeur physique, selon le système utilisé.

Les dimensions des grandeurs physiques ont fait l'objet de la première partie de la section I.

En mesurant une grandeur physique plusieurs fois, nous pouvons constater que les mesures peuvent donner des résultats distincts. On ne peut donc savoir quelle mesure donne la valeur exacte de la grandeur physique. Cela veut dire que les instruments utilisés ne sont pas d'une précision infinie et que les résultats obtenus par les mesures présentent des incertitudes qu'il faut évaluer.

Pour que la mesure d'une grandeur physique soit correcte, l'expérimentateur doit faire attention à l'environnement dans lequel elle est effectuée. L'environnement doit être le moins perturbé possible afin que l'erreur soit minimale. Dans toutes les mesures il existe donc des erreurs. La notion d'erreur ou incertitude est traitée dans la dernière section de cette partie.

I-2 Dimensions

I-2-a Définition d'une grandeur physique

Une grandeur physique est une caractéristique que l'on attribue à un objet ou à un phénomène ayant lieu dans l'espace et le temps. Parmi l'ensemble des grandeurs physiques, certaines sont considérées indépendantes. Elles sont dites grandeurs de base ou grandeurs fondamentales.

Il existe sept grandeurs fondamentales.Le reste,dites grandeurs dérivées, sont définies au moyen de relation algébriques liant grandeurs fondamentales.Par d'exemple, une grandeur X peut être donnée par une relation liant deux grandeurs A, B et des coefficients fixes C, α et β: $X=C.A^{\alpha}.B^{\beta}$.

I-2-b Les dimensions

La dimension précise la nature d'une grandeur physique. Cette notion est plus générale que la notion d'unité. La dimension est représentée par une ou plusieurs lettres majuscules. Chaque grandeur physique A a une dimension, notée:

$$\dim A = [A]$$

Exemples:

La masse, la vitesse et l'énergie sont des grandeurs différentes et donc de dimensions différentes.

I-2-b-i Les sept dimensions fondamentales

En physique, les sept grandeurs fondamentales ou de base avec symboles et dimensions sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Grandeurs physiques fondamentales.

Grandeurs	**Symbole**	**Dimension**
Longueur	l,x,r	[l]=L
Masse	m	[m]=M
Temps	t	[t]=T
Intensité électrique	i	[i]=I
Température	T	[T]=θ
Quantité de matière	n	[n]= N
Intensité lumineuse	Iv	[Iv]=J

I-2-b-ii Opérations sur les dimensions

Les dimensions des grandeurs physiques obéissent à quelques règles de mathématiques de base :

On ne peut additionner que des grandeurs ayant la même dimension.

$a = b + c \Rightarrow [a] = [b + c] = [b] + [c]$

La dimension d'un produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune.

$a = b.c \Rightarrow [a] = [b.c] = [b].[c]$

Pour une grandeur qui s'écrit b^{α}

$[b^{\alpha}] = [b]^{\alpha}$. α étant un nombre réel.

La dimension d'une constante est égale à 1. Exemple [2]=1.

Les angles sont sans dimension mais ont une unité. [Angle]=1.

Les fonctions sin(x), cos(x), tan(x), Ln(x), log(x) et exp(x) sont sans dimensions.

I-2-b-iii Equations aux dimensions

Les équations aux dimensions consistent à ramener les différents paramètres, qui interviennent dans une équation ou loi physique, aux grandeurs fondamentales du système des unités international (voir paragraphe I-2). Ce sont des équations qui relient la dimension d'une grandeur G à celles des grandeurs de base; dont elle dérive. Dans ce cas la dimension de toute grandeur G peut se mettre sous la forme:

$$[G] = [\ M^{a}.L^{b}.T^{c}.I^{d}.\theta^{e}.N^{f}J^{g}$$

I-2-b-iv Dimension d'une grandeur dérivée

Pour calculer la dimension d'une grandeur physique dérivée (non fondamentale), nous avons besoin d'équation, qui la relie aux grandeurs fondamentales.Cela est également possible en utilisant l'unité de la grandeur.

Exemples :

La vitesse:

A partir de l'équation: $V = (dx/dt)$ $\Rightarrow$ $[V] = L.T^{-1}$.
A partir de l'unité : unité de V : m/s $\Rightarrow$ $[V] = L.T^{-1}$.

L'accélération:

A partir de l'équation: $a = (dV/dt)$ $\Rightarrow$ $[a] = L.T^{-2}$.
A partir de l'unité: unité de a: m/s^2 $\Rightarrow$ $[a] = L.T^{-2}$.

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons quelques exemples de grandeurs dérivées et leurs dimensions.

Dimensions de quelques grandeurs dérivées.

Grandeur	Equation	Dimension
Vitesse angulaire, pulsation: ω	α/t	T^{-1}
Accélération angulaire$\dot{\alpha}$	ω/t	T^{-2}
Fréquence: f	1/T	T^{-1}
Force:F	m.a	$M.L.T^{-2}$
Moment d'inertie: J	$m.l^2$	$M.L^2$
Pression:pr	F/S	$M.L^{-1}.T^{-2}$
Travail:W	F.d	$M.L^2.T^{-2}$
Puissance:P	W/t	$M.L^2.T^{-3}$
Charge:Q	i.t	I.T
Potentiel:V	P/i	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$
Champ électrique: E	V/l	$M.L.T^{-3}.I^{-1}$
Capacité:C	Q/V	$M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$
Résistance:R	V/i	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$
Champmagnétique:B	F/q.V	$M.T^{-2}.I^{-1}$
Inductance:L	V/(di/dt)	$M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$

I-2-b-v Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet:

1- De déterminer la dimension et l'unité d'une grandeur physique dérivée, en fonction des dimensions et des unités des grandeurs fondamentales.

2- D'effectuer des changements d'unités.

3- De vérifier l'homogénéité des formules : $A = B \Rightarrow [A] = [B]$.

L'analyse de l'homogénéité d'une équation est un outil permettant la détection d'erreurs dans une loi. Une équation non homogène est nécessairement fausse.

I-3 Systèmes d'unités

I-3-a Mesure d'une grandeur

Pour mesurer une grandeur physique X, Il suffit de la comparer à une même grandeur physique de valeur différente, prise comme référence. Cette dernière constitue ce qui s'appelle un étalon.

La valeur d'une grandeur physique X est généralement sous la forme du produit de son unité par un nombre réel. Pour certaines grandeurs particulières, Plusieurs unités différentes peuvent être utilisées. Par exemple, dans le cas de la vitesse d'un objet, V peut s'écrire sous la forme:

$$V = 25\ m/s \text{ ou bien } V = 90\ Km/h.$$

I-3-b Système d'unités International

Il est possible de déduire une unité correcte d'une grandeur physique, à partir de sa dimension.

Pour créer un système d'unités, comme le système international d'unité (SI), il est nécessaire, tout d'abord, d'établir un système de grandeurs et une série d'équations définissant les relations entre ces grandeurs. Cela est indispensable parce que les équations reliant les grandeurs entre elles déterminent celles reliant les unités entre elles.

En 1960, la 11^{éme} Conférence générale des poids et mesures a mis en place le système d'unités international (SI), appelé aussi MKSA (Mètre - Kilogramme, seconde, Ampère).La conférence fixa aussi des règles pour les préfixes, les unités dérivées et autres. Le SI se base sur sept unités fondamentales bien définies, considérées du point de vue dimensionnel.

Unités fondamentales du système (SI).

Grandeur	Nom	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	Kilogramme	Kg
Temps	Seconde	s
Intensité du courant électrique	Ampère	A
Température	Kelvin	K
Quantité de matière	Mole	mol
Intensité lumineuse	Candela	Cd

I-3-c Le système C.G.S

En plus du système MKSA, il existe un autre système d'unités, dit CGS. Ce dernier a été créé par la « British association » en 1873. Ce système utilise comme unités fondamentales: le centimètre pour la longueur, le gramme pour la masse et la seconde pour le temps. Les unités de longueur et de masse du système CGS sont des sous multiples décimaux des unités correspondant au système MKSA. Les formules définissant les unités dérivées sont les mêmes pour les deux systèmes.

I-3-d Unités dérivées

Les unités dérivées sont formées à partir des unités de base (fondamentales) et ceci grâce aux relations mathématiques qui les relient.

Exemple:

La densité de courant en(A/m^2), le volume en(m^3) et la masse volumique en (Kg/m^3). Certaines unités ont reçu des noms et des symboles particuliers. Quelques exemples, dans les deux systèmes d'unités, sont fournis dans les tableaux (4) et (5).

Unités dérivées de quelques grandeurs physiques, dans le système MKSA.

Grandeur dérivée	Nom de l'unité	Symbol	Unité dans le système MKSA
Force	Newton	N	$M.Kg.s^{-2}$
Pression	Pascal	Pa	$m^{-1}.Kg.s^{-2}$
Energie	Joule	J	$m^2.Kg.s^{-2}$
Puissance	Watt	W	$M^2.Kg.s^{-3}$
Fréquence	Hertz	Hz	s^{-1}
Charge électrique	Coulomb	C	s.A
Différence de potentiel	Volt	V	$m^2.Kg.s^{-3}.A^{-1}$
Résistance	Ohm	Ω	$m^2.Kg.s^{-3}.A^{-2}$
Induction magnétique	Tesla	T	$Kg.s^{-2}.A^{-1}$
Flux d'inductance magnétique	Weber	Wb	$m^2.Kg.s^{-2}.A^{-1}$

Unités dérivées de quelques grandeurs physiques, dans le système CGS.

Grandeur	Nom de l'unité	Symbol	Equivalent dans le système CGS
force	dyne	dyn	$1dyn=10^{-5}N$
Pression	Baryes	Bary	$1Bary=10^{-1}$ Pa
Energie	erg	erg	$1erg=10^{-7}J$
accélération	gal	Gal	$1Gal=10^{-2}m.s^{-2}$
Champ magnétique	Oersted	Oe	$1Oe = 10^3/4\pi$ $A.m^{-1}$
Induction magnétique	Gauss	G	$1G=10^{-4}T$
Viscosité dynamique	poise	P	1P=0.1Pa.s
Viscosité cinématique	stokes	St	$1\ St=10^{-4}m^2.s^{-1}$

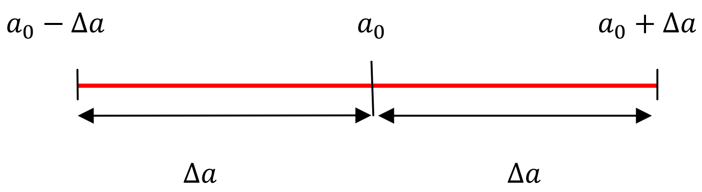
I-4 Les incertitudes

I-4-a Notion d’erreur ou incertitude

L’Erreur ou l’incertitude est l’écart entre la valeur exacte et la valeur obtenue par la mesure. La valeur exacte de la grandeur physique est souvent inaccessible. Pour se rapprocher de cette valeur, il faut bien estimer cette erreur. Nous distinguons deux types d’erreur:

I-4-b L’incertitude absolue

L’incertitude absolue est l’estimation de l’erreur que fait l’expérimentateur. Il s’agit de l’écart possible entre la valeur obtenue par la mesure et la valeur exacte. La mesure et son incertitude constituent un domaine de valeurs possibles à l’intérieur duquel se trouve la valeur exacte. Soit une grandeur physique a, dont la valeur exacte est a_0. L’écriture:
$a = a_0 \pm \Delta a$ veut dire que la valeur de a est comprise dans l’intervalle: $[a_0 - \Delta a , a_0 + \Delta a]$.



L’incertitude absolue est un nombre réel positif, elle s’exprime dans les unités de la grandeur mesurée. Parfois, l’erreur absolue est attribuée à la précision de l’instrument utilisé pendant la mesure.

Exemple:
Les mesures des dimensions d’une salle donnent les valeurs suivantes:
Longueur: L = (10.2 ± 0.1) m. Largeur: l = (7.70 ± 0.08) m. Hauteur : H = (3.17±0.04) m
Calculez et donnez les résultats avec leurs incertitudes absolues:

a- La surface S du sol
b- Le volume V de la salle.

Solution:

a- $S=L.l= 78.54\ m^2$. puisque $\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta S = S.\left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta l}{l}\right)$, $\Delta S = 1.59\ m^2$.

$$S= (78.54 \pm 1.59)\ m^2.$$

b- $V = L.l.h = 248.97\ m^3$. Puisque $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \Delta V = V.\left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta h}{h}\right)$, $\Delta V=8.17\ m^3$.

$$V= (248.97 \pm 8.17)\ m^3$$

I-4-c L'incertitude relative

Pour une grandeur physique a, la qualité ou la précision de la mesure est donnée par l'incertitude relative, qui est définie comme le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur mesurée,$\Delta a/a$. Ce rapport habituellement s'exprime en pourcentage.

Exemple :

Une incertitude de 1 mm sur une mesure de 5 cm correspond à une précision relative de $\Delta x/x = 10^{-3}\ m / 5.10^{-2} = 0.02$ (2%).
Cette même incertitude sur une mesure de 5 m correspondrait à une précision, excellente, de 10^{-3} m / s = 0.0002 (0,02%).

I-4-d Opérations sur les incertitudes

Les incertitudes obéissent aussi à certaines opérations mathématiques de base.
Cas d'une somme ou d'une différence: Si une grandeur physique C est la résultante de deux grandeurs B et C.
Si $C = A + B$, alors $\Delta C = \Delta A+\Delta B$
Si $C = A - B$, alors $\Delta C = \Delta A+\Delta B$
L'incertitude relative sur C est : $\Delta C/C$

Cas d'un produit ou d'un rapport: Si une grandeur physique G est la résultante d'un produit ou d'un rapport de grandeurs, par exemple A, B et C:

$G = A.B.C$: $(\Delta G/G) = (\Delta A/A) + (\Delta B/B) + (\Delta C/C)$

$G = A.B / C$:$(\Delta G/G) = (\Delta A/A) + (\Delta B/B) + (\Delta C/C)$

Le résultat précédent peut être obtenu en utilisant la fonction logarithme. Soit le cas un peu plus général de la grandeur G, qui s'écrit : $G=(K.A^{\alpha}.B^{\beta})/C^{\gamma}$

A,B et C sont des grandeurs physiques que l'on mesure et K une constante, le calcul de l'incertitude, dans ce cas, l'incertitude relative sur le résultat s'obtient selon les étapes suivantes :

1- Appliquons la fonction logarithme aux deux membres l'expression de G:

$\text{Log } G= \log [(K.A^{\alpha}.B^{\beta})/C^{\gamma}] \quad \Rightarrow \quad \text{Log } G = \text{Log } K +\alpha \text{ Log } A +\beta \text{ Log } B- \gamma \text{ Log } C$

2- La différentielle de l'expression obtenue est: $dG/G=\alpha\ (dA/A)+\beta\ (dB/B) - \gamma\ (dC/C)$

3- Les éléments différentiels (dG, dA, dB, dC) sont des quantités infinitésimales ou de très faibles écarts (variations) dans les grandeurs G, A, B et C. Si ces écarts deviennent importants, ces éléments deviennent des incertitudes (ΔG, ΔA, ΔB, ΔC). Ce qui donne:

$$\Delta G/G = \alpha\ (\Delta A/A)+\beta\ (\Delta B/B) +\gamma\ (\Delta C/C)$$

Notons que dans l'équation ci-dessus, le signe (-) a été remplacé par le signe (+). Ce qui s'explique par le fait que les erreurs s'accumulent ou s'ajoutent. Enfin, nous aurons :

$$G_{corrigée} = G_{mesurée} \pm \Delta G.$$

I-5 Exercices

Exercice 1

1- Trouver la dimension et l'unité de la constante de gravitation G, dans le système SI. Cette dernière étant liée à la force F par: $F = (G.m_1.m_2) / r^2$. m_1 et m_2 sont les deux masses en interaction et r est la distance qui les sépare.

2- Déterminer la dimension et l'unité de la permittivité ε_0 et de la perméabilité μ_0, du vide, dans le système SI. Ces deux grandeurs apparaissent dans les deux équations suivantes: $F = \mu_0 \frac{I_1.I_2}{2\pi r}$, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$. F étant la force et q est la charge électrique élémentaire de l'électron. L et r sont des distances et I des intensités de courants.

3- Vérifier l'homogénéité de la relation $\mu_0.\varepsilon_0$ = 1. c étant la célérité (vitesse) de la lumière dans le vide.

Exercice 2

1- Déterminer la dimension d'une densité superficielle de charge σ, dans le système international SI. σ étant donnée par: $\sigma = Q / S$.

2– Déduire la dimension de la permittivité du vide ε_0 sachant que pour un conducteur de charge superficielle σ on a $p = \sigma^2 / 2\varepsilon_0$.

Exercice 3

La résistance exercée par l'air sur une sphère, qui se déplace à la vitesse V est donnée par la formule: $R = K.s.V^2$. s étant la surface de grand-cercle.

1- Quelle est la dimension de K.

2- Déterminer la valeur de K dans le système CGS connaissant sa valeur numérique dans le système SI, K = 0.28 SI.

Exercice 4

La loi de poiseuille définit le débit volumique Q_v d'un liquide de coefficient de viscosité η. Pour un cylindre de rayon R et de longueur L, Q_v est donné par: $Q_V = (P.R^4.\Delta P)/(8.\eta.L)$.$\Delta p$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tube. Déterminer la dimension et l'unité du coefficient de viscosité η.

Exercice 5

Soit A une grandeur physique de dimension $M.L^{-2}.T^{2}$. Cette grandeur physique est calculée à partir de l'équation suivante: $A = \alpha.V^{-2}.F^{-2} + \beta.P^{3}.m$.

F est une force, V est une vitesse, P est une pression et g l'accélération de la pesanteur. Etablir les dimensions de α et β.

Exercice 6

L'énergie mécanique E_m d'un disque de masse m, de rayon r et d'un moment d'inertie (I) qui tourne autour de son axe mobile avec une vitesse angulaire ω est donnée par la relation:

$E_m = (m.V^2/2) + (I.\omega^2/2)$ où $I = (m.R^2/2)$ et V la vitesse du centre d'inertie du disque. Vérifier que l'équation est homogène.

Exercice 7

La vitesse limite V d'une sphère de masse volumique ρ pendant sa chute dans un milieu visqueux de masse volumique ρ' est donnée par la formule: $v = \frac{1}{9}\frac{a^2(\rho-\rho')g}{\eta}$. Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Exercice 8

On mesure le diamètre et la masse d'une bille en or : d=10,00 ± 0,01(mm) et m=9,9±0,1(g)

1- Calculer le volume de la bille avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue.
2- Calculer la masse volumique de la bille avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue.

Exercice 9

Pour calculer l'accélération terrestre g avec un pendule, on mesure la longueur du pendule l ainsi que la période d'oscillation T et on utilise la loi suivante : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

avec l = (1.552±0.002) (m) et T= (2.50 ± 0.02) s.

Calculer g avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue.

Exercice 10

Une boite de capacités est constituée de 10 condensateurs de 0,1 µF montés en parallèle et connus avec une précision de 2%.

1- Calculer l'incertitude relative sur la boite de capacités.

2- Calculer l'incertitude relative totale si les condensateurs précédents étaient montés en série.

Exercice 11

La constante de torsion C d'un fil métallique de section circulaire, dont l'unité est le $kg.m^2/s^2$,dans le système SI, s'exprime comme suit : $C = y^a.d^b/l$

Où Y est le module de torsion (ou coefficient de Coulomb) caractérisant la nature du fil. L sa longueur et d son diamètre. Sachant que Y est équivalent à une pression.

1- Calculer les exposants a et b, puis donner l'expression finale de C.

2- Calculer littéralement la précision sur C.

Exercice 12

Le moment d'inertie I d'un tube homogène, par rapport à son axe, est donné par la relation Suivante : $I = (1/12).\rho^{\alpha}.x.y^{\beta}.z.[x^2+y^{\gamma}]$.

x représente la longueur du tube, y sa largeur, z son épaisseur et ρ sa masse volumique. L'unité de I, dans le système international SI, est le $Kg.m^2$.

1- Déterminer les valeurs des exposants α, β, γ et donner l'expression finale du moment d'inertie.

2- Quelle est la précision sur I si$\Delta x/x = \Delta y/y = \Delta z/z =$ 10-3 et $\Delta\rho/\rho = 10^{-2}$.

Exercice 13

L'indice de réfraction d'une substance à été mesuré par la méthode du prisme:

$$n = \frac{\sin\frac{A+Dm}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

Les angles A = 60° et Dm ont été mesuré avec une incertitude absolue $\Delta A = \Delta m = 1$.Le calcul donne n = 1.33625. Déterminer l'incertitude relative $\frac{\Delta n}{n}$ et donner le résultat de la mesure en tenant compte de cette mesure.

Section II

Calcul vectoriel &systèmes de coordonnées

Section II: Calcul vectoriel & systèmes de coordonnées

II-1 Introduction

En mécanique, certaines grandeurs physiques peuvent être complètement déterminées par un simple nombre lie à une unité convenable. Ces grandeurs sont des scalaires. D'autres grandeurs ont besoin d'être orientées selon une direction ou repérées dans un plan à deux dimensions (2D) ou dans l'espace à trois dimensions (3D).Ces grandeurs sont les vecteurs.

Comme exemples de grandeurs scalaires nous avons le temps, la masse, l'énergie, la température…etc. Pour ce qui est des grandeurs nécessitant un repère, nous avons comme exemples la vitesse, l'accélération, la force…etc.

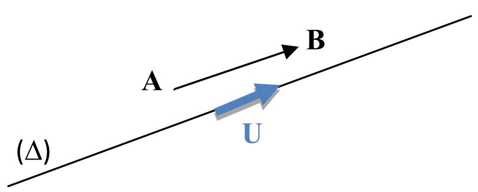
II-2 Les vecteurs

II-2-a Définition

Un vecteur est un segment de droite AB, ayant une origine A et une extrémité B.
Il est caractérisé par:

- Son origine ou point d'application A.
- Sa direction (un support): C'est la droite (Δ)qui le porte.
- Son sens: de A vers B (indiqué par la flèche).
- Son module qui représente la longueur AB, qui est toujours positive et s'écrit$\|\overrightarrow{AB}\|$.

Chaque vecteur peut-être écrit sous la forme:
$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|.\vec{U}$, $\vec{U}$étant un vecteur unité ou unitaire de module égal à 1.



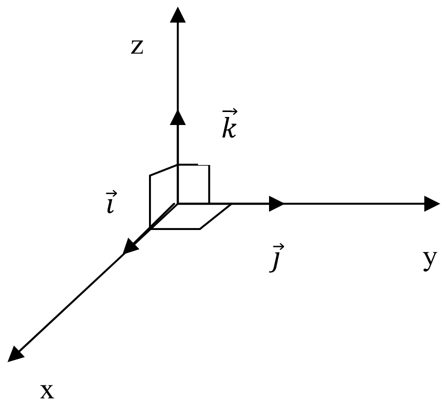
II-2-b Base et propriétés d'un vecteur

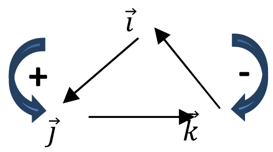
$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dite base orthonormée si,

1- Ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

2- En faisant la rotation de $\vec{\imath}$ vers $\vec{\jmath}$, on progresse selon $\vec{k}$. C'est la règle du tire-bouchon.

On dit que la base est directe.

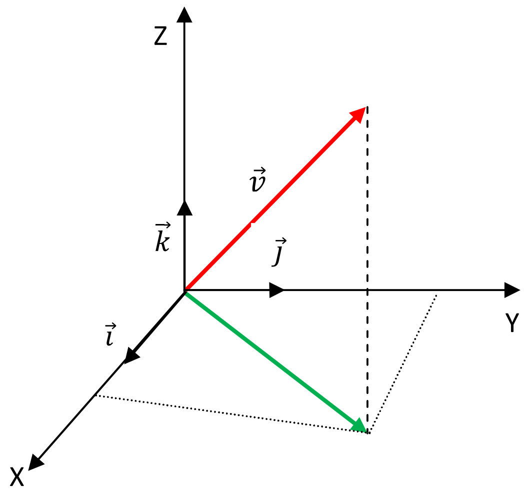




Pour localiser un vecteur dans l'espace à trois dimensions, il faut choisir un repère de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et d'origine O.

Un vecteur a des composantes sur la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ qui sont les projections du vecteur $\vec{v}$ sur les trois axes de coordonnées X,Y et Z.

Dans ce repère orthonormé direct, le vecteur $\vec{v}$ est repéré par ses composantes cartésiennes. $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ ou bien $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Module d'un vecteur: La norme module d'un vecteur $\vec{V}$ est représentée par $\|\vec{V}\|$.Dans le repère (O,X,Y,Z), muni d'un système orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$,la norme du vecteur est donnée par: $\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Dans le cas d'un vecteur résultant d'une somme ou une différence (voir l'exemple ci-dessus), le module du vecteur résultant $\vec{A} \pm \vec{B}$ est donné par :

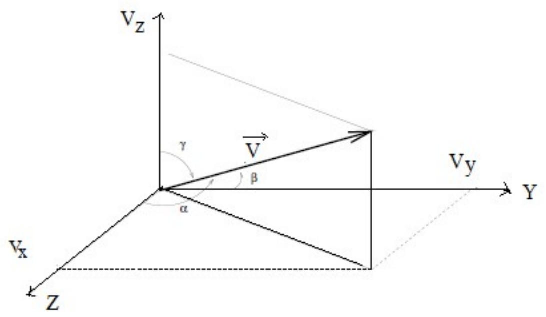
$$\|\vec{A} \pm \vec{B}\| = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 \pm 2\vec{A}\vec{B}} = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 \pm 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos\theta}$$

Cosinus directeurs d'un vecteur: Soient α, β et γ, les angles que fait le vecteur $\vec{V}$ avec les directions positives des axes de cordonnées. Si le vecteur $\vec{V}$ s'exprime de la façon suivante : $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$, alors les cosinus directeurs sont:

$$a = \cos\alpha = \frac{\vec{V}.\vec{\imath}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

$$b = \cos\beta = \frac{\vec{V}.\vec{\jmath}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

$$c = \cos\gamma = \frac{\vec{V}.\vec{k}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$



a, b et c sont les coordonnées cartésiennes du vecteur unitaire $\vec{V}$ qui vérifient la relation suivante: $a^2 + b^2 + c^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$

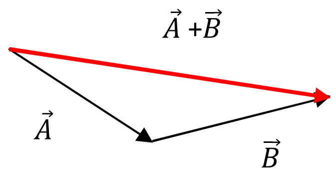
II-2-c Opérations simples sur les vecteurs

II-2-c-i Somme et soustraction de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs peut se calculer graphiquement par deux méthodes:

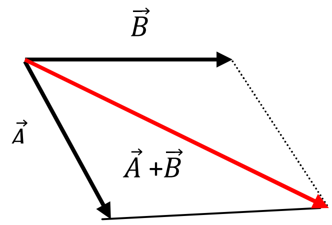
1ère méthode:

Par le triangle. Il suffit de prendre l'extrémité d'un vecteur et le placer à l'origine du deuxième vecteur. Réunir par la suite l'origine du premier vecteur à l'extrémité du deuxième.

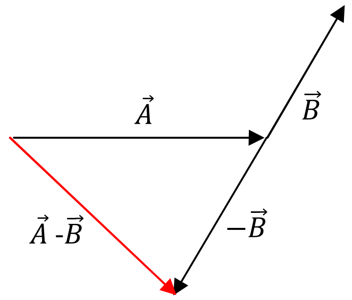


2ème méthode:

Par le parallélogramme. Placer les origines des vecteurs ensemble. Compléter le parallélogramme. Le vecteur somme est représenté par la flèche qui a comme point de départ l'origine des deux vecteurs initiaux et le sommet opposé du parallélogramme.



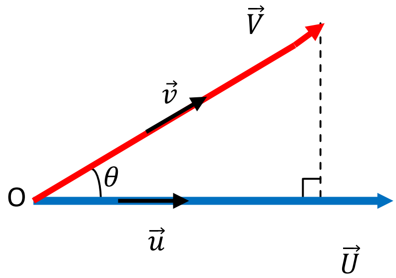
La soustraction de deux vecteurs se fait de la même façon que l'addition en prenant l'opposé du vecteur$\vec{B}$.



II-2-c-ii Produits scalaire de deux vecteurs

Produit scalaire:

Soient $\vec{V}$ et $\vec{U}$ deux vecteurs non nuls ayant la même origine O et faisant un angle θ. $\vec{v}$ et $\vec{u}$étant leurs vecteurs unitaires respectifs. Le produit, dit scalaire, $\vec{V}.\vec{U}$ est un nombre algébrique qui s'écrit:



$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\vec{u}.\|\vec{V}\|.\vec{v} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.cos\theta$$

En considérant les composantes de $\vec{V}$ et $\vec{U} \Rightarrow \vec{V}: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{U}: \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, l'expression analytique du produit scalaire est: $\vec{V}.\vec{U} = x_1.x_2 + y_1 y_2 + z_1.z_2$

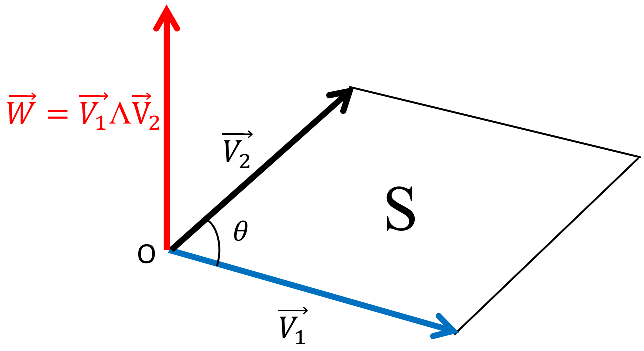
L'angle que font les deux sera donné par : $\cos\theta = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|} = \frac{x_1.x_2+y_1y_2+z_1.z_2}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|}$

Propriétés du produit scalaire:

- $\vec{V}.\vec{V} = \|\vec{V}\|^2$ **:** le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal au carré de sa norme.
- $\vec{V}.\vec{U} = 0$ **:** si l'un des deux vecteurs est nul ou les deux vecteurs sont orthogonaux.
- $\alpha(\overrightarrow{V.U}) = (\alpha.\vec{V}).\vec{U}$
- $\vec{U}.(\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$: Le produit scalaire est distributif.

II-2-c-iii Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit Vectoriel de deux vecteurs, $\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2$, produit un vecteur $\vec{W}$ tel que:



1-La direction de $\vec{W}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V}_2$.

2-Le sens du vecteur résultant est tel que le trièdre $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{W})$ est direct (règle de la main droite-voir plus loin).

3-La norme de $\vec{W}$ est la surface du parallélogramme, notée **S** sur la figure.

$$\vec{W} = \|\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2\| = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\| sin\theta$$

II-2-c-iv Propriétés du produit vectoriel – produit mixte:

- Le produit vectoriel est non commutatif: $\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2 = -\vec{V_2}\Lambda\vec{V}_1$
- Le produit Vectoriel est distributif: $\vec{V_1}\Lambda(\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2 + \vec{V_1}\Lambda\vec{V}_3$
- Si les deux vecteurs sont colinéaire (parallèles) ou l'un des deux nul : $\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2 = \vec{0}$

Le produit vectoriel peut être aussi calculé à partir des coordonnées des vecteurs:

$$\vec{V_1}:\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}, \vec{V}_2:\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} : \vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2 = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}+\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}y_1.z_2 - y_1.z_2\\ x_2.z_1 - x_1.z_2\\ x_1.y_2 - x_2.y_1\end{pmatrix}$$

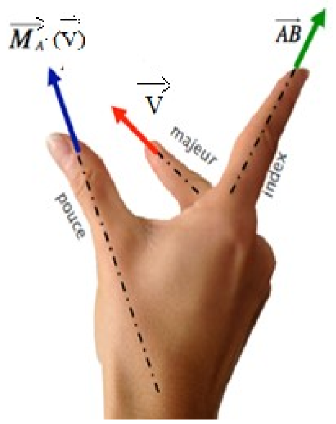
On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1$,$\vec{V}_2$et $\vec{V}_3$, la quantité scalaire C:
$C = \vec{V}_3.(\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2)$, cette quantité est correspond au volume du parallélépipède construit par les trois vecteurs (voir figure ci-haut).

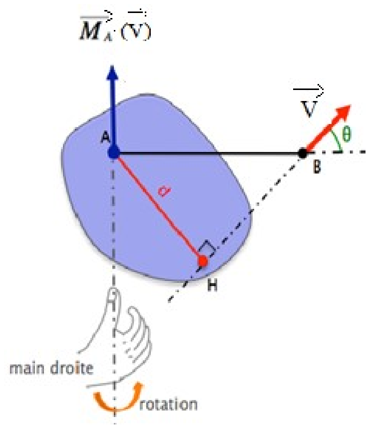
II-2-d Moment d'un vecteur

II-2-d-i Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un point A est le vecteur $\vec{M}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$. B étant un point de la ligne d'action du vecteur $\vec{V}$.Le vecteur moment est perpendiculaire à la fois à $\vec{V}$ et au vecteur $\overrightarrow{AB}$.Son sens est donné par la règle des trois doigts.$\vec{M}_A(\vec{V})$ est donné par l'expression:

$$\|\vec{M}_A(\vec{V})\| = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\vec{V}\|.\sin(\overrightarrow{AB},\vec{V}) = V.AB.\sin\theta = V.d$$

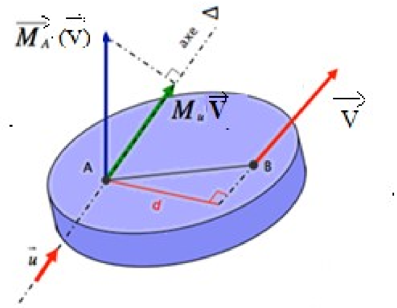




II-2-d-i Moment d'un vecteur par rapport à un point axe

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$ et passant par un point A est égal au produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le moment en A du vecteur $\vec{V}$:

$$M_\Delta(\vec{V}) = \vec{u}.\vec{M}_A(\vec{V}).$$



Le moment du vecteur $\vec{V}$sera nul si l'axe Δlui est parallèle.

II-2-e Dérivée d'un vecteur et règles de dérivation

Soit un vecteur $\overrightarrow{V}\,(t)$ dans l'espace tridimensionnel:

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$$

t étant une variable. La dérivée de $\vec{V}\,(t)$ est donnée par: $\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\,\vec{V}_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\,\vec{V}_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\,\vec{V}_z}{dt}\vec{k}$

Dans les équations qui suivent, $\vec{V}_1(t), \vec{V}_2(t)$ et $\vec{V}_3(t)$ sont trois fonctions vectorielles dépendant de t. λ est un scalaire.

1- $\frac{d\left(\vec{V}_1(t)+\vec{V}_2(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} + \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$

2- $\frac{d\left(\lambda\vec{V}(t)\right)}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{V}(t) + \lambda\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$

3- $\frac{d\left(\vec{V}_1(t).\vec{V}_2(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt}\vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t)\frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$

4- $\frac{d(\vec{V}_1(t)\Lambda\vec{V}_2(t))}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt}\Lambda\vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t)\Lambda\frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$

II-3 Champ et opérateurs vectoriels

Si en tout point de l'espace (x,y,z)correspond une grandeur scalaire Φ (x,y,z),Φ est dite champ scalaire. Si en tout point de l'espace (x,y,z)correspond une grandeur vectoriel E(x,y,z), E est dit champ vectoriel.

Exemple-1: La température T (x,y,z), en tout point de la terre, définit un champ scalaire.

Exemple-2: Une charge électrique crée un champ E (x,y,z), en tout point de l'espace. E est dit champ vectoriel.

L'espace est rapporté à la base orthonormée directe$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Les opérateurs vectoriels sont lié à un opérateur, fonction des dérivées partielles et des trois directions de l'espace. Cet opérateur, dit nabla, s'écrit:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}$$

II-3-a Gradient d'un champ scalaire

Soit un champ ou fonction scalaire F (x,y,z). Le gradient de f s'écrit:

$$\overrightarrow{grad}F=\vec{\nabla}\mathrm{F}=\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}\right)f(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial F}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

II-3-b Divergence d'un champ vectoriel

La divergence notée div, s'applique à un champ de vecteur. Soit le champ vectoriel :

$$\vec{E}=\mathrm{E_x}\vec{\mathrm{i}}+\mathrm{E_y}\vec{\mathrm{j}}+\mathrm{E_z}\vec{\mathrm{k}}.$$

L'opérateur divergence appliqué à E donne:

$$div.\vec{E}=\vec{\nabla}.\vec{\mathrm{E}}=\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}\right).(\mathrm{E_x}\vec{\mathrm{i}}+\mathrm{E_y}\vec{\mathrm{j}}+\mathrm{E_z}\vec{\mathrm{k}}),\text{ d'où } div.\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

II-3-c Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel noté $(\overrightarrow{rot})$ d'un champ vectoriel donne une fonction vectorielle définie, en coordonnées cartésiennes, par:

$$\overrightarrow{rot}.\vec{E}=\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\Lambda}\vec{\boldsymbol{E}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{pmatrix},\qquad \text{d'où}\overrightarrow{rot}\vec{E}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{\imath}-\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

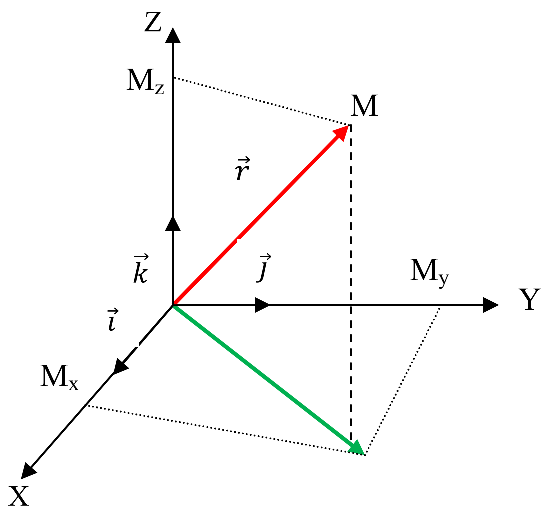
II-4 Systèmes de coordonnées

Le système des coordonnées cartésiennes est très utile dans, par exemple, l'étude des mouvements des objets, particulièrement dans le cas des mouvements rectilignes. Cependant, il existe des situations plus complexe (rotations en mécanique, calcul du champ électrique en électrostatique, magnétostatique, mécanique des fluides, physique atomique...etc) où l'utilisation de ce système s'avère difficile. Il est donc plus intéressant de travailler dans d'autres systèmes de coordonnées pour faciliter l'étude de ces situations.

Dans ce paragraphe, nous reprendrons le système des coordonnées cartésiennes (écrits plus haut) et décrirons deux autres systèmes de coordonnées, à savoir les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

II-4-a Coordonnées cartésiennes

Le repère cartésien est défini par un point origine O et trois axes perpendiculaires (Ox,Oy,Oz). Les vecteurs unitaires portés par les axes sont: $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.



Dans ce système, un point M de l'espace est repéré par les trois composantes du vecteur $\vec{r}$ joignant O à M.

$\vec{r} = \overrightarrow{oM} \Rightarrow \vec{r} = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{k}$

M_X, M_Y et M_Z sont les projections du vecteur sur les trois axes Ox, Oy et Oz, respectivement.

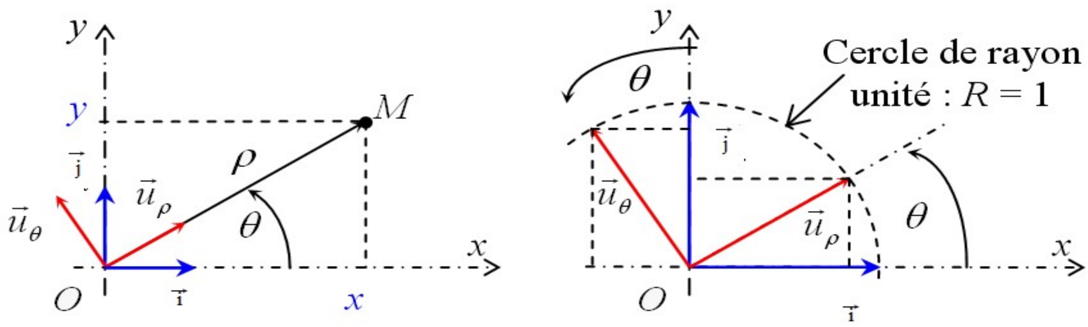
II-4-b Coordonnées polaires

Avant d'entamer le système des coordonnées cylindriques et sphériques, nous allons décrire le système de coordonnées bidimensionnel dit coordonnées polaires. Ce système, qui est la partie bidimensionnelle des coordonnées cylindrique est défini par deux variables ρ et θ. Un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit: $\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\|.\vec{u}_\rho = \rho.\vec{u}_\rho$.

Le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ est suivant la direction et le sens de O vers M. c'est un vecteur radial.

Une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est obtenue en associant à $\vec{u}_\rho$ le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ qui lui est directement perpendiculaire.

La longueur du segment OM=ρ correspond à la coordonnée radiale (notée ρ ou r). L'angle θ est la coordonnée angulaire**.** Cet angle est mesuré par rapport à l'axe des abscisses Ox.



II-4-c Coordonnées cylindriques

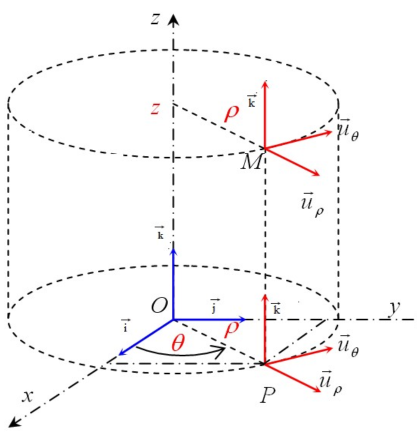
Dans le système des coordonnées cylindriques, un vecteur position s'écrit sous la forme suivante : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k}$ avec $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Le système des coordonnées cylindriques s'obtient à partir du système de coordonnées polaires auquel est associé un troisième axe Oz. Les coordonnées d'un point M, dans ce système, sont (ρ,θ,z).

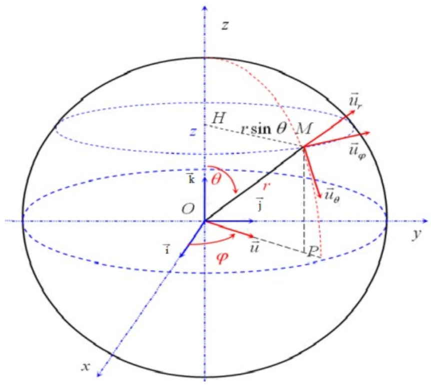
ρ est la longueur de la projection (OP) de M sur le plan (xOy).

θ est l'angle que fait la projection du point M sur le plan (xOy), avec l'axe Ox.

La coordonnée z s'obtient par projection du point M sur l'axe Oz.



II-4-d Coordonnées sphériques



Les coordonnées sphériques permettent de repérer un point sur une sphère de rayon OM = r et centrée sur O.

-La coordonnée radiale r correspond à la distance de l'origine O du repère au point M.

-La coordonnée angulaire θ correspond à l'angle que fait OM avec l'axe Oz. θ est compris entre 0 et π.

$\theta = (\widehat{\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}})$.

La coordonnée angulaire ϕ correspond à l'angle fait entre la direction Ox et la direction $\overrightarrow{OP}$, où P est la projection de M dans le plan xOy. $\phi = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}})$

La projection H du point M sur l'axe Oz donne la coordonnée z = OH = r.cosθ

Si P est la projection de M sur le plan xOy on a : OP = r sinθ

Les coordonnées x et y du point M sont celles du point P c'est à dire :

x = OP cosϕ = r sinθ cosϕ

y = OP sinϕ = r sinθ sinϕ

II-5 Exercices

Exercice 1

Dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, soit $\vec{u}(0, \quad 3, \quad 1)$ et $\vec{v}(0, \quad 1, \quad 2)$

1- Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et l'angle $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

2- Déterminer les cosinus directeurs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3- Calculer les composante de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, puis $\|\vec{w}\|$ par deux méthodes différentes.

Exercice 2

Détermine la valeur du nombre a pour que laquelle les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ soient perpendiculaires.

Exercice 3

Etant donné les deux vecteur $\vec{A} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{B} = -2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$

1- Trouver $\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$

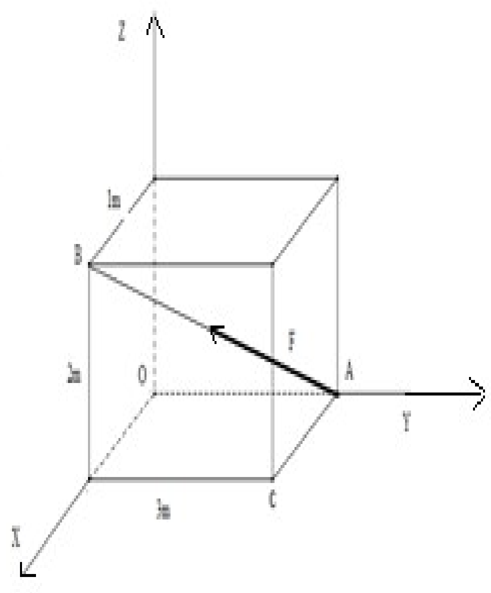
2- Trouver $\|\vec{A} + \vec{B}\|$ avec deux méthodes différentes

3- Trouver $\|\vec{A}\| - \|\vec{B}\|$

4- Trouver $\|\vec{A} - \vec{B}\|$ avec deux méthodes différentes

Exercice 4

L'intensité de la force F est de 5 N



1- Quelles sont les coordonnées des points A, B et C.

2- Calculer les cosinus directeurs de F et en déduire les angles de F avec les trois axes Ox,Oy et Oz.

3- Quelle est la projection de F sur AC

4- Le moment de la force F par rapport à C

5- Le moment de la force F par rapport à une droite Δ parallèle à AB et qui passe par le point C.

Exercice 5

Soient les trois vecteurs suivants :

$\vec{F}_1 = \vec{i}$, $\vec{F}_2 = -2\vec{j} + \vec{k}$,$\vec{F}_3 = -\vec{i} + 0.5\vec{j} - 4\vec{k}$. Déterminer le vecteur résultant$\vec{R}$ de la somme de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$.

On suppose que les forces s'appliquent au point A (4,-3,1).

1- Calculer le moment $\vec{M}_i = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_i$ de chaque vecteur par rapport à O (0,0,0).

2- Calculer la somme $\vec{M}$ des moments

3- Calculer$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}$.

4- Comparer M à M', justifier.

Exercice 6

On considère le vecteur force suivant : $\vec{F} = 2xy\vec{i} - 3yz\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$

1- Calculer $\overrightarrow{Rot}\,\vec{F}$ et $\overrightarrow{div}\,\vec{F}$

2- Calculer le gradient de la fonction scalaire $f(x, y, z) = x^2yz + 2xy^2z + 5yx$

Section III

Cinématique du point matériel: Exemples de mouvements

Section III: Cinématique du point matériel: Exemples de mouvements

III-1 Introduction

La cinématique est l'étude de la manière dont un corps se déplace, indépendamment des causes qui produisent ce déplacement.

Cette étude s'appuie sur les notions d'espace et de temps, dont l'observateur a besoin pour analyser le mouvement des objets.

La cinématique décrit certaines notions relatives aux mouvements des objets, à savoir leurs trajectoires, leurs vitesses et leurs accélérations. Ces trois notions sont définies ou déterminées dans un système de référence.

III-2 Notions importantes de la cinématique

Pour décrire le mouvement d'un objet, Certaines notions ou concepts importants doivent être définis. Il s'agit de:

Point matériel: Le point matériel est défini comme étant un objet sans dimensions spatiales. Cet objet en mouvement peut être considéré comme un point matériel lorsque ses dimensions sont négligeables, devant les distances parcourues par l'objet.

Repère: Pour déterminer la position (localisation) d'un point matériel dans l'espace, il est nécessaire de définir un repère d'espace. Cela consiste à choisir une origine O et une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, qui représente une norme ou une unité selon les trois directions de l'espace (voir section II).

Référentiel: Il s'agit d'un repère spatial, auquel s'associe un repère temporel (repère + horloge).

Trajectoire: La trajectoire d'un point matériel (M), dans un repère donné, est l'ensemble des positions successives du point M, pendant le mouvement et dans le repère.

III-3 Caractéristiques d'un mouvement

L'étude du mouvement s'effectue de deux manières:

Vectorielle: En utilisant les vecteurs: position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$.
Algébrique: En définissant l'équation du mouvement suivant une trajectoire donnée.

Pour caractériser le mouvement, il est nécessaire de bien définir ce qui suit:

III-3-a Les équations horaires

Si un point matériel est en mouvement, ses coordonnées varient en fonction du temps. Les variations des coordonnées spatiales (x,y,z), dans le temps, s'appellent les équations horaires du mouvement. Soit:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

III-3-b La trajectoire

Dans un repère donné, la trajectoire (C) représente le lieu géométrique, constitué par les différentes positions du point matériel (M) et à chaque instant t.

Mathématiquement, une trajectoire est décrite par une relation entre les coordonnées (x,y,z) du point M, dans laquelle le paramètre temps t n'apparait pas.

III-3-c Vecteur position

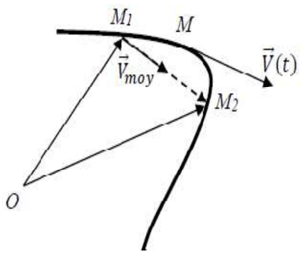
La position d'un point matériel (M)à un temps t est donnée, dans un repère, par un vecteur, dit vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Ce vecteur relie l'origine du repère considéré à la position du point matériel.

III-3-d Vecteur Vitesse

La vitesse, qui est une grandeur vectorielle, est définie par:

III-3-d-i Vitesse moyenne

Lorsqu'un point matériel (M) décrit une trajectoire (C) dans un Référentiel. Le point occupe la position M_1 à l'instant t et la position M_2 à $t'=t+\Delta t$, la vitesse moyenne entre t et t' est alors donnée par: $\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right)=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t'-t}=\frac{\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$



III-3-d-ii Vitesse instantanée

La vitesse instantanée du point (M) dans le référentiel (R) à un instant t est obtenue en prenant la limite $\Delta t\to 0$. $\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{O\quad_1}}{\Delta t}=\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R}$

Les propriétés du vecteur vitesse instantanée sont:

- Son origine qui est la position du point matériel à l'instant t.
- Sa direction qui est tangente à la trajectoire à une position considérée.
- Son sens qui est celui du mouvement à l'instant t.

III-3-e Vecteur Accélération

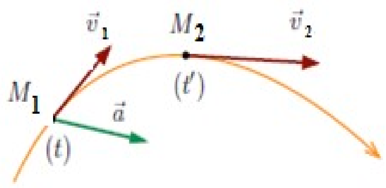
Les variations de la vitesse avec le temps définissent la notion de l'accélération. Cette accélération est définie par:

III-3-e-i Accélération moyenne

Soit un point matériel, qui passe à l'instant t_1 par la position M_1 à une vitesse $\overrightarrow{V_1}(t)$ et à l'instant t_2 par la position M_2 à une vitesse $\overrightarrow{V_2}(t)$, sur la trajectoire *C*. Au cours de l'intervalle $\Delta t=t_2-t_1$, la vitesse varie de $\Delta\vec{V}=\overrightarrow{V_2}-\overrightarrow{V_1}$, et l'accélération moyenne vaut:

$$\vec{a}_{moy}=\frac{\overrightarrow{V_2}-\overrightarrow{V_1}}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

III-3-e-ii Accélération instantanée



Le vecteur accélération instantanée est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse. Ce qui est équivalent à la dérivée seconde du vecteur position: $\vec{a}(M/_R) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V_2}-\vec{V_1}}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{/R}$

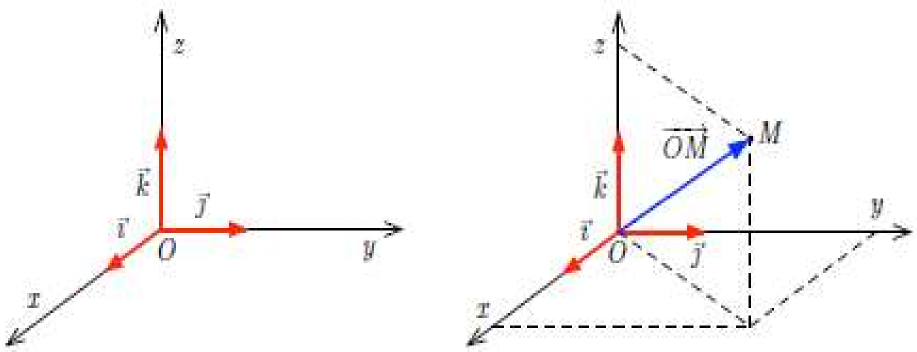
- Le vecteur accélération est toujours orienté vers la partie concave de la trajectoire.
- Le vecteur accélération décrit les variations de la vitesse en grandeur et en direction.

III-3-f Grandeurs cinématique dans un repère cartésien

Dans ce paragraphe, nous allons définir les grandeurs décrites plus haut dans le repères cartésien (O,x,y,z). Pour cela nous devons définir la notion de repère galiléen. Il s'agit d'un référentiel dans lequel un objet libre est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

III-3-f-i Vecteur position

Dans un référentiel galiléen, par exemple le référentiel terrestre, nous pouvons attacher un repère cartésien (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$), dont les vecteurs unitaires de base sont fixes par rapport au référentiel.



(a) base cartésienne (b) vecteur position

Dans la base cartésienne, la position du point (M)est donné par: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

III-3-f-ii Vecteur vitesse

L'expression du vecteur vitesse dans la base cartésienne se déduit de la relation:

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ de sorte qu'on puisse écrire: $\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$

les notations $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$sont souventutilisées. Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

III-3-f-iii Vecteur accélération

Le vecteur accélération est défini par : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dx^2}{d^2t}\vec{\imath} + \frac{dy^2}{d^2t}\vec{\jmath} + \frac{dz^2}{d^2t}\vec{k}$

On peut alors écrire :

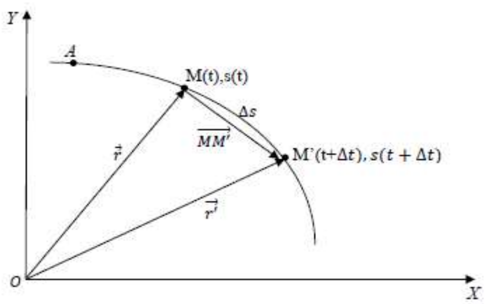
$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} \\ a_{z=} \frac{dV_z}{dt} \end{cases}$$

III-3-g Grandeurs cinématique dans le repère curviligne

III-3-g-i Abscisse curviligne

Soit (M) la position d'un point matériel à l'instant t_1 et la position M ́à l'instant t_2.On appelle abscisse curviligne à l'instant t, notée S(t), la longueur de l'arc de la trajectoire:

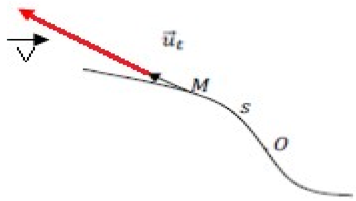
S(t)= S(M) =$\widehat{MM'}(t)$.



III-3-g-ii Vecteur vitesse

L'expression de la vitesse instantanée:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t') - s(t)}{\Delta t}$$



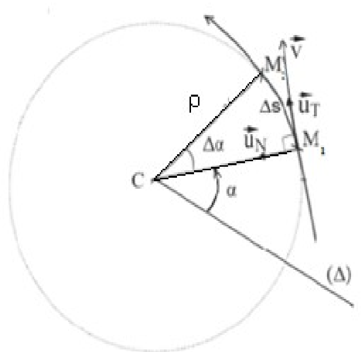
$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Le module s'écrit: $\|\vec{V}\| = \dot{S}(t)$ et le vecteur vitesse s'écrit $\vec{V} = \dot{S}(t)\overrightarrow{U_t}$.

III-3-g-iii Vecteur accélération

Par définition, l'accélération est donnée par l'équation suivante:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$



Avec:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_t}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_t}{d\alpha}$$

$\frac{ds}{dt} = v,$ $\quad ds = \rho d\alpha \quad$ et $\quad \frac{d\vec{U}_t}{d\alpha} = \vec{U}_n$

$\vec{U}_n$ étant le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{U}_t$

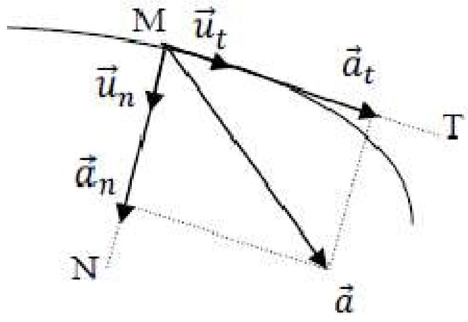
Il en résulte l'expression suivante de l'accélération:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{U}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{U}_n \quad \text{donc} \quad \vec{a}(t) = a_t\vec{U}_t + a_n\vec{U}_n$$

Comme $\vec{U}_t$et $\vec{U}_n$ sont orthogonaux, le module de l'accélération est: $a = \sqrt{a_t{}^2 + a^2{}_n}$

$\vec{a}_t$: Vecteur tangent à la trajectoire appelé accélération tangentielle, elle indique les variations du module de la vitesse au cours du temps.

$\vec{a}_n$: vecteur normale à la trajectoire appelé accélération normale, elle indique les variations de la direction du vecteur vitesse au cours du temps.



Remarque:

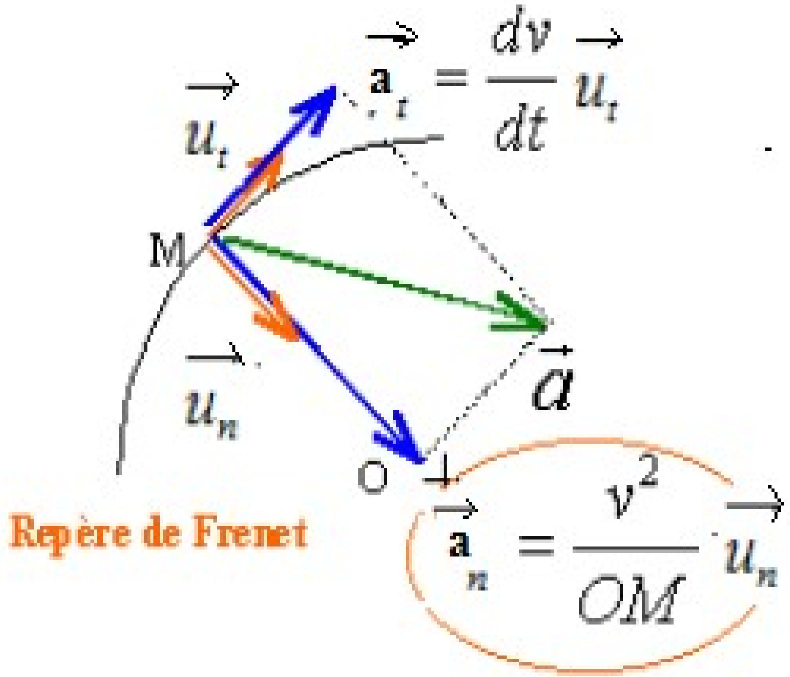
Dans le cas d'un mouvement curviligne uniforme $\|\vec{V}\|$=cst $\Rightarrow a_t = 0$, L'accélération se réduit à un seul terme $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, contrairement au mouvement rectiligne uniforme. ou nous n'avons aucune accélération.

III-4 Base de Frenet

Les vecteurs $\vec{U}_t, \vec{U}_n$, décrits dans le paragraphe précédent, définissent ce que l'on appelle la base de Frenet. Dans cette base, la vitesse et l'accélération s'écrivent comme suit :

$$\vec{V} = \|\vec{V}\|.\vec{U}_t$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}.\vec{U}_t + \frac{V^2}{OM}\vec{U}_n$$



III-5 Grandeurs cinématique dans quelques cas de mouvements

	Nature du mouvement	Vitesse instantanée	Accélération instantanée	Equation horaire
Mouvement rectiligne	Rectiligne uniforme	$\vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} = cst$	a = 0	$\frac{dx}{dt} = v$ $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt$ $x = vt + x_0$
	Rectiligne Uniformément Accéléré	$\frac{dv}{dt} = a$ $v = at + v_0$	$\vec{a} = cst$	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
Mouvement circulaire	Circulaire uniforme	V=R. ω = cst	$a_t = 0$ $a_N = R\omega^2$	$\theta = wt + \theta_0$ $s(t) = R\dot{\theta}$
	Circulaire uniformément accéléré	$\theta = \dot{\theta}t + \dot{\theta}_0$	$a_t = R\ddot{\theta}$ $a_N = R\dot{\theta}^2$	$\theta = \frac{1}{2}\dot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0t + \theta_0$
Mouvement sinusoïdal	Rectiligne sinusoïdal	$\vec{V} = V\vec{\imath}$	$\vec{a} = a\vec{\imath}$	$X(t) = X_0cos(\omega t + \varphi)$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$
	Circulaire sinusoïdal	$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$	$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$	$\theta(t) = \theta_0cos(\omega t + \varphi)$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

III-6 Exercices

Exercice 1

Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les 4 mobiles A, B, C et D qui sont définis par leurs vecteurs positions.

$$\overrightarrow{OA}=\begin{cases}x=t\\ y=\frac{t}{\sqrt{3}}\end{cases},\quad \overrightarrow{OB}=\begin{cases}x=3t-1\\ y=9t^2+1\end{cases},\quad \overrightarrow{OC}=\begin{cases}x=10+10\,cost\\ y=10sint\end{cases},\quad \overrightarrow{OD}=\begin{cases}x=t+1\\ y=2+\sqrt{4-t^2}\end{cases}$$

1- Déterminer l'équation de la trajectoire.

2- Trouver la vitesse et l'accélération du Mobile A, à l'instant t = 1s.

Exercice 2

Le mouvement d'une particule M se déplaçant dans le plan (xoy) est décrit par les équations suivantes: $\overrightarrow{OM}\begin{cases}x(t)=\ t\,cost\\ y(t)=\ t\,sint\end{cases}$

1- Déterminer les composantes du vecteur vitesse et son module.

2- Déterminer les composantes du vecteur accélération et son module.

3- Déterminer les expressions des composantes de l'accélération en fonction du temps t.

4- Déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 3

On considère le point matériel M avec les coordonnées (-2,t-1,1-t^2), dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1- Ecrire son vecteur position.

2- Les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ et son module.

3- Les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$ et son module.

4- L'angle θ entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$, preciser sa valeur à t = 2s.

5- Le vecteur unitaire $\vec{U}_T$, tangent à la trajectoire.

6- La projection de $\vec{a}$ sur l'axe tangent à la trajectoire T, qu'est ce qu'elle représente ?

7- Les composantes de $\overrightarrow{a_T}$.

8- L'accélération normale et le rayon de courbure.

Exercice 4

Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le vecteur vitesse d'un point mobile est: $\vec{V} = 5\vec{\imath} - (3t-5)\vec{\jmath}$

A l'instant $t_0 = 1s$, le mobile passe par le point M_0 de coordonnées $x_o = 2m$ et $y_o = 3m$.

1- a- Donner les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération.

b- Donner les équations horaires x = f(t) et y = f(t) du point mobile.

c- Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire.

2- a- Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse à l'instant t = 1s. On précisera la valeur de l'angle α que fait $\vec{V}$ avec le vecteur unitaire $\vec{\imath}$.

Exercice 5

Les composantes du vecteur accélération d'un point sont $\vec{a}\,(0,-3)$, à l'instant t = 0s, le mobile est en $M_0(1,2,0)$ est son vecteur vitesse initial $\vec{V}_0(1,1,0)$

1- Montrer que le mouvement est plan.

2- Donner les équations horaires du mouvement.

3- En déduire l'équation de la trajectoire.

Exercice 6

Dans un référentiel $\Re$, un point M décrit un cercle de centre O et de rayon r, avec une vitesse $V\,(M/\Re)$ de module $V_{(M/R)} = \frac{V_0}{1+\alpha t}$ où V_0 et α sont deux constantes positives.

1- Calculer l'abscisse curviligne (t) du point M sachant qu'à $t = 0$, s =0.

2- En déduire la durée du premier tour effectué par le point M.

3- Exprimer $a_{(M/R)}$ l'accélération du point M dans la base de Frenet.

Exercice 7

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\Re(O,x,y,z)$ par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) données par: x = R (1 - cos wt), y = R (1 - sin wt), z = 0.

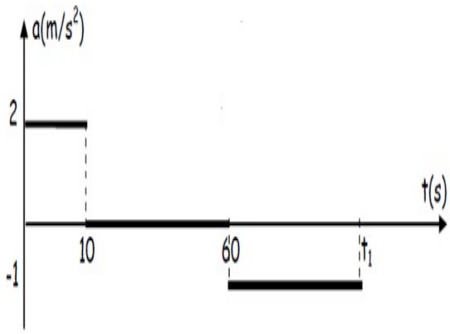
Où R et w sont des constantes positives et t le temps.

1- Donner l'équation de la trajectoire de M. En déduire sa nature.

2- Calculer la vitesse et l'accélération du point M.

Exercice 8

Un véhicule démarre d'une station A à t = 0s et arrive à une station B au bout d'un temps t_1 que l'on déterminera. Le graphe de son accélération en fonction du temps est donné sur la figure 1.



1- Donner l'équation de la vitesse en fonction du temps, ainsi que la nature du mouvement dans chaque phase.
2- Tracer le graphe de v(t).
3- Déduire le temps t_1.
4- A quelle distance de la station A est située la station B.
5- Déterminer les équations horaires x(t) de chaque phase.

Exercice 9

Un point M, animé d'un mouvement circulaire uniforme effectue 10 tours en 5 secondes, dans le sens positif. Le rayon de la trajectoire est R = 0.4 m.

1- Calculer la période, la fréquence, la vitesse linéaire et l'accélération linéaire de M.
2- Etablir la loi horaire du mouvement qu'à t = 0 s, $\theta_0 = \pi/4$.

Exercice 10

Un mobile effectue un mouvement circulaire uniforme, avec une fréquence de 5 Hz.

1- Déterminer la loi horaire de son mouvement sachant qu' à t = 0 s, $\alpha_0 = 0$.
2- Calculer la valeur de sa vitesse linéaire ainsi que le rayon de sa trajectoire, sachant que son accélération est de 50 $m.s^2$.

Exercice 11

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire:

$x = X_m \sin(4\pi t + \varphi)$,

1- Déterminer la pulsation ω la période T et la fréquence N de ce mouvement.
2- Déterminer l'amplitude X_m et la phase initiale φ sachant qu'à t = 0 s le mobile se trouve en un point d'abscisse $x_0 = 0$, avec une vitesse $v_0 = 0,5\ m.s^{-1}$.

Section IV

Dynamique du point matériel

Section IV: Dynamique du point matériel

IV-1 Introduction

Contrairement à la cinématique, traitée dans la partie précédente, la dynamique est la partie de la mécanique qui permet de traiter les mouvements, en tenant compte de leurs causes et qui sont les forces.

Cette partie comporte un certain nombre de lois ou principes importants permettant de relier les forces et les éléments cinématiques, dans un mouvement d'un objet.

Nous décrirons, dans cette section, différents types de forces ainsi que la notion de moment cinétique, cette dernière étant utile pour l'étude des cas particuliers de mouvements circulaire et de rotation.

IV-2 Lois fondamentales de la dynamique

Les lois de Newton sont au nombre de trois.

IV-2-a Première loi de Newton: Principe de l'inertie

Enoncé de la première loi de Newton

« En absence de forces externes, un objet au repos reste au repos et un objet en mouvement continue de se déplacer de manière rectiligne uniforme ».

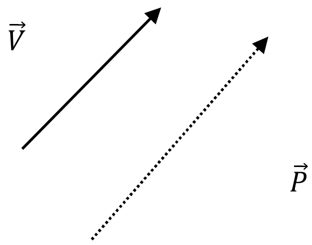
En l'absence de forces externes ou si la somme vectorielle des forces appliquées est nulle, le système ou l'objet est dit isolé.

IV-2-b Deuxième loi de Newton: Principe fondamental de la dynamique

Dans cette loi sont introduites deux notions, la masse (m) du corps et sa quantité de mouvement (P). La masse est la grandeur physique qui mesure l'inertie d'un corps. En d'autres termes, plus la masse d'un objet est importante, plus il sera difficile de lui imposer: une accélération, une décélération (ralentissement) ou un changement de direction.

Nous savons que le mouvement d'un corps est décrit par les vecteurs cinématiques: position, vitesse et accélération. Mais ces informations sont insuffisantes pour décrire l'état du corps. Pour cela, il faut introduire des grandeurs supplémentaires. Parmi ces grandeurs, il y'a la quantité de mouvement. Cette grandeur combine la vitesse du corps à sa masse.

- ✓ La quantité de mouvement $\vec{P}$ d'un objet est définie comme étant le produit de sa masse par son vecteur vitesse: $\vec{P} = m\,\vec{V}$
- ✓ La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle qui a la même direction que la vitesse.



Remarque : Un corps libre se déplace avec une quantité de mouvement constante.

Enoncé de la deuxième loi de Newton

« Dans un Référentiel Galiléen, la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit du vecteur accélération et de sa masse »

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

Cette loi permet de relier la cinématique du point matériel aux causes de son mouvement. Dans le cas général, la résultante des forces qui s'exercent sur un objet est égale à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur quantité de mouvement:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Dans le cas particulier d'une masse constante:

$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt}$ Si m est constante, $\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}$

IV-2-c Troisième loi de Newton: action et réaction

Si un objet (1) exerce une force $\vec{F}_{1\to 2}$ sur un autre objet (2), ce dernier exerce en retour une force $\vec{F}_{2\to 1}$ de même intensité mais de sens opposé : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

Si le système est isolé $\Rightarrow$ $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}$

Ces forces sont portées par la même droite.

IV-3 Exemples de forces

On appelle force toute action de l'extérieur sur un système et qui impliquerait un changement de l'état de repos.

IV-3-a Le poids

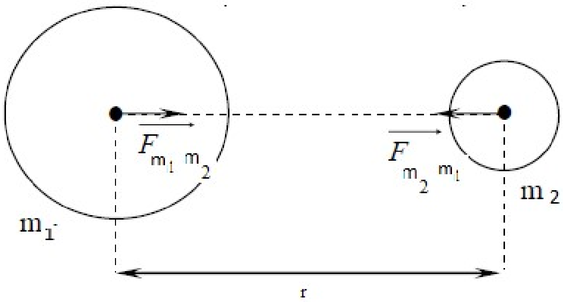
Le poids d'un corps est la force exercée par la terre sur un corps immobile. Cette force est appelée force de pesanteur. $\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g}$, où $\vec{g}$ est le vecteur accélération de la pesanteur. La valeur de g est de 9.8 m/s^2.

IV-3-b La gravitation universelle

Si M_1 et M_2 sont deux objets de masses m_1 et m_2, séparés d'une distance r, ils sont en interaction. La force d'attraction qui apparait entre eux est:

$$\vec{F} = G.\frac{m_1.m_2}{r^2}$$

G étant la constante gravitationnelle égale à 6.673 10^{-11} N.m²/Kg². Un bon exemple est celui de l'interaction lune-terre.



La force exercée par la terre sur un objet s'écrit: $\mathrm{F_g} = \mathrm{m.g(r)} = \mathrm{m.}\left(\frac{\mathrm{GM_T}}{\mathrm{r^2}}\right)$

La force gravitationnelle au voisinage de la terre est le poids : $\mathrm{P} = \mathrm{m.g_0} = \mathrm{m.}\left(\frac{\mathrm{GM_T}}{\mathrm{R_T}^2}\right)$

où $\mathrm{g(r)} = \mathrm{m.}\left(\frac{\mathrm{GM_T}}{\mathrm{r^2}}\right)$

La force gravitationnelle au voisinage de la terre est: $\mathrm{m.}\frac{\mathrm{GM_T}}{\mathrm{R_T}^2} = \mathrm{mg_0}$, $g_0 = \frac{\mathrm{GM_T}}{\mathrm{R_T}^2}$

M_T : est la masse de la terre égale à 5.98 10^{34} Kg.

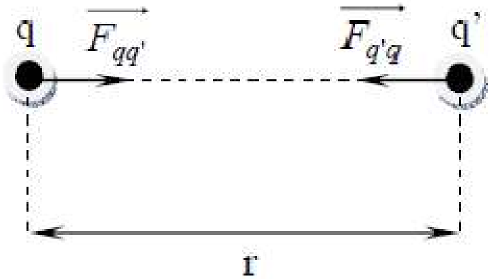
R_T : le rayon de la terre égal à $6.37.10^6$ m.

g_0 : le champ de pesanteur égal à 9.8 m/s^2.

Si le corps se trouve à une hauteur Z de la surface de la terre, alors:

$$F = \frac{m.M}{(R_T+Z)^2} \qquad g = \frac{GM}{(R_T+Z)^2} = \frac{GM}{{R_T}^2}.\frac{R^2}{(R_T+Z)^2} = g_0\frac{R^2}{(R_T+Z)^2}$$

IV-3-c Loi de coulomb en électrostatique



L'interaction coulombienne est l'équivalent de l'interaction gravitationnelle pour les charges électriques. Deux charges q_1 et q_2, de signes opposés, s'attirent. Le module de la force d'attraction est donné par:

$$\vec{F}_{q'q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{r^2} = k\frac{q'q}{r^2}$$

k est une constante qui dépend du milieu dans lequel se trouvent les deux charges. k = $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ USI

IV-3-d Interaction électromagnétique: Force de Lorentz

Le champ électromagnétique exerce une force sur des particules possédant une charge électrique q en mouvement. La force que subit une charge électrique placée dans un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ est appelée force électromagnétique ou force de Lorentz:

$$\vec{F} = q.(\vec{E} + \vec{V}\Lambda\vec{B}).$$

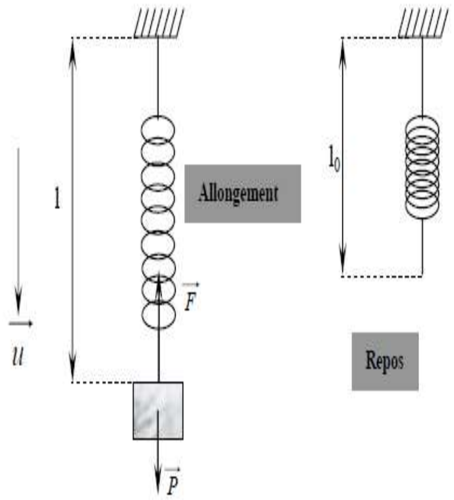
Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont pris au point où se trouve la charge. $\vec{V}$ représente la vitesse de la charge dans le référentiel d'étude.

IV-3-e La force de rappel d'un ressort

Une masse (m) accrochée à un ressort de longueur à vide l_0 subit une force de rappel $\vec{F}$, une fois le ressort allongé, avec une longueur l.

$\vec{F}$ est donnée par :

$$\vec{F} = k.\Delta l.\vec{u}$$

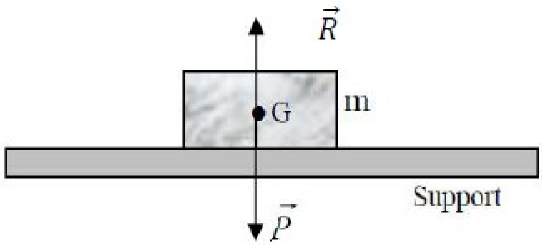


k: est la constante de raideur, caractéristique du ressort, qui s'exprime en $N.m^{-1}$. Δl est la différence $(l - l_0)$.

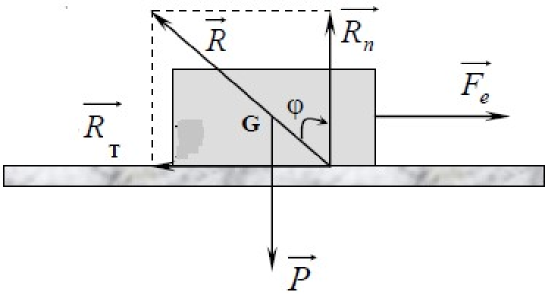
IV-3-f Forces de contact

IV-3-f-i Réaction du support

Un objet de poids (P), posé sur un support horizontal, subit la réaction du support. La direction de cette réaction est orthogonale à la surface du support au niveau du contact.



IV-3-f-ii Forces de frottement



Le frottement est l'action d'une surface rigide sur un solide. Cette action s'oppose au mouvement par rapport à la surface. Par exemple, en poussant un objet sur une table avec une vitesse et après l'avoir lâché, l'objet ralentit et s'arrête.
La perte de quantité de mouvement montre qu'une force $\vec{R}$ s'oppose au mouvement. Cette force est dite force de frottement.

Le rapport des réactions tangentielle $\vec{R}_T$ et normale $\vec{R}_N$ définit ce qui s'appelle le coefficient de frottement μ. $\mu = \frac{R_T}{R_N}$.

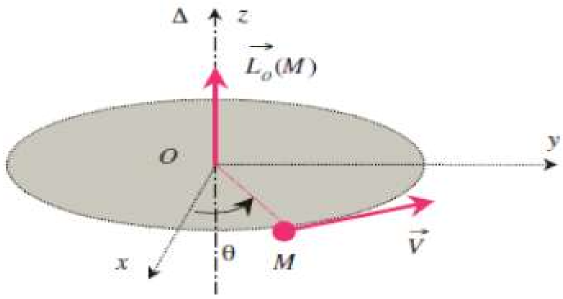
Si le corps est au repos, on définit le coefficient de frottement statique $\mu_s = \frac{R_T}{R_N}$.

Si le corps est en mouvement, on définit le coefficient de frottement cinétique : $\mu_c = \frac{R_T}{R_N}$.

IV-4 Moment cinétique

Dans plusieurs cas, comme par exemple dans le cas des mouvements de rotation, il est plus commode d'utiliser le théorème du moment cinétique au lieu de la deuxième loi de Newton. Nous considérerons, dans ce qui suit, le mouvement d'un point matériel M, de masse m dans un référentiel $\Re$ et par rapport à un point O fixe du référentiel.

IV-4-a Moment cinétique d'un point matériel



Soit un point matériel M de masse m et en mouvement avec une vitesse V, par rapport à un centre O et dans un référentiel $\Re$. Le moment cinétique de M, par rapport à O est défini par:

$$\vec{L}_0(M)_R = \overrightarrow{OM} \Lambda m\vec{V}$$

On définit également le moment cinétique du point matériel M par rapport à un axe (Δ) comme suit:

$$\vec{L}_\Delta(M)_R = (\overrightarrow{OM} \Lambda m\vec{V}) .\vec{u}$$ $\vec{u}$ étant le vecteur unitaire porté par l'axe (Δ).

IV-4-b Théorème du moment cinétique

Soit un objet de masse (m) se déplaçant à une vitesse $\vec{V}$, dans un référentiel galiléen $\Re$.

IV-4-b-i Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe O

« Dans un référentiel Galiléen $\mathcal{R}$, le moment dynamique $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{L}}_{/\mathrm{O}}$ d'un point matériel M, par rapport à un point fixe O du référentiel, est égal au moment de la résultante des forces extérieures exercées sur M »

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM}\wedge m\,\vec{a} = \overrightarrow{OM}\wedge\sum\vec{F} = \mathcal{M}_O(\vec{\mathrm{F}})$$

En effet, si $\vec{a}$ est l'accélération du mouvement:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \frac{d(\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{V})}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge m\vec{V} + \overrightarrow{OM}\wedge m\frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \vec{V}\wedge m\vec{V} + \overrightarrow{OM}\wedge m\frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{a}$$

Sachant que $\vec{V}\wedge m\vec{V} = \vec{0}$ et en utilisant la deuxième loi de Newton, on obtient:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{a} = \overrightarrow{OM}\wedge\sum\vec{F}$$

IV-4-b-ii Théorème du moment cinétique par rapport à un axe (Δ)

Par rapport à un axe (Δ), le moment dynamique $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{L}}_{/(\Delta)}$ est donné par:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{/\Delta} = \overrightarrow{OM}\wedge m\,\vec{a} = \overrightarrow{OM}\wedge\sum\vec{F} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathrm{F}})$$

« $\frac{d}{dt}\vec{L}_{/(\Delta)}$ est le moment, par rapport à l'axe (Δ), de la résultante des forces extérieures appliquées au corps en mouvement »

IV-5 Exercices

Exercice 1

Une boite en acier pesant 300 N repose sur un plan horizontal. Les coefficients de frottement statique et cinétique sont μ_S = 0.8 et μ_C = 0.4. On pousse cette boite avec une force horizontale.

1- Trouver la force F_{min} qui laisse la boite immobile.

2- Si F = 260 N, trouver l'accélération de la boite.

Exercice 2

Un corps de masse m = 5 Kg, est en mouvement sur un plan incliné d'un angle α = 30°. On néglige les forces de frottement.

1- Calculer l'accélération de m, on donne g = 10 m/s^2.

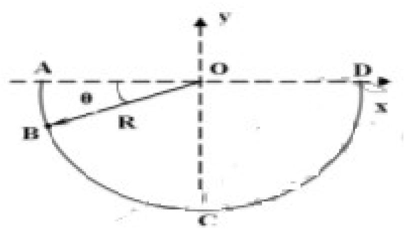
2- On applique maintenant sur m une force $\vec{F}$ parallèle au plan, on donne: Le coefficient de frottement statique μ_s = 0.2 et le coefficient de frottement cinétique μ_c = 0.2.

a- Quelle est la valeur de $\vec{F}$ pour que le corps reste immobile.

b- Si on applique une force $\|\vec{F}\| = 50$ N pour que la masse se déplace vers le haut, quelle est l'accélération atteinte ?

Exercice 3

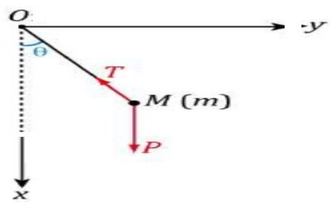
On considère le mouvement d'une particule de masse m = 100 g, sur une piste de rayon R = 1m. Le contact particule/piste présente la caractéristique suivante:
μ_s = 0,5777.



1- Quelle est la valeur minimale θ_m de l'angle θ pour laquelle la particule, posée sur la piste, reste en équilibre ?

2- En un point N de la piste, repéré par l'angle θ_N = 60°, la particule a une accélération *a* égale à 2,8 m/s² et une vitesse V de 1 m/s .Déduire le coefficient de frottement dynamique μ_C.

Exercice 4



Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L. A l'instant t, on note θ l'inclinaison du fil par rapport à la verticale (Ox). A t = 0 s: $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.

1- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point M. En déduire une relation entre L, g, θ, $\ddot{\theta}$ et t.

2- On s'intéresse aux petites oscillations du pendule, établir l'équation différentielle pour les variations de θ.

On recherche une solution particulière sinusoïdale de type $\theta(t)$ = C.sin (ωt).

Exercice 5

Soit le vecteur position d'un corps de masse 6 Kg : $\overrightarrow{OM} = 3t^2\vec{\imath}(-6t^2 + 6\,t)\vec{\jmath} + (3t + 6)\vec{k}\ (m)$

Trouver:

1- La force F agissant sur le corps.

2- Le moment de F par rapport à l'origine.

3- La quantité de mouvement P du corps et son moment cinétique par rapport à l'origine

4- Vérifier que $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ et $\overrightarrow{M(\vec{F})} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

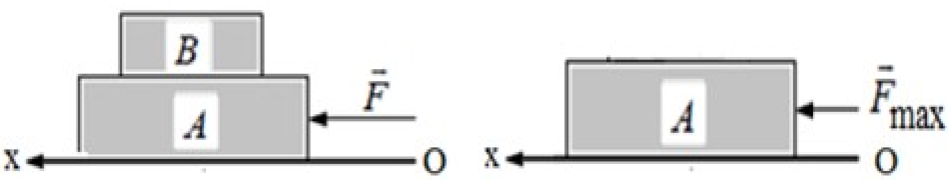
Exercice 6

Un corps B de masse 4 Kg est placé sur un autre corps A de masse 6 Kg. On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre A et la surface sur laquelle il repose. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre les deux corps sont 0.2 et 0.1, respectivement.

1- Quelle force maximale peut-on appliquer à chaque corps pour faire glisser le système en maintenant ensemble les deux corps ?

2- Quelle est l'accélération quand cette force maximale est appliquée ?

3- Quelle est l'accélération quand on enlève le corps B et on applique la force maximale ?



Exercice 7

Un point matériel M, de masse m et repéré par sa coordonnée x, se déplace sur l'axe Ox dans un référentiel galiléen R (O,x,y,z). Il est soumis à la force $\vec{\mathbf{F}} = -\boldsymbol{\alpha m}\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\boldsymbol{i}}$.

α étant une constante positive. A l'instant t = 0, M se trouve en O et est animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{\imath}$. Déterminer l'équation horaire x(t) du mouvement.

Section V

Travail et énergie

Section V: Travail et énergie

V-1 Introduction

Un système échange de l'énergie avec l'environnement avec lequel il est en interaction. Il peut fournir ou recevoir de l'énergie, mais cette dernière ne peut disparaitre. L'énergie est une grandeur fondamentale d'un mouvement. Grace à cette grandeur, il est possible de résoudre certains problèmes de la mécanique du point. Pour cela, Il faut d'abord définir les notions de puissance et de travail de forces.

La notion de conservation de l'énergie était considérée comme conséquence des lois de la mécanique, mais les progrès de la physique ont montré que l'énergie peut aussi donner de l'information exacte sur les différentes notions ou grandeurs mécaniques.

V-2 Puissance et travail

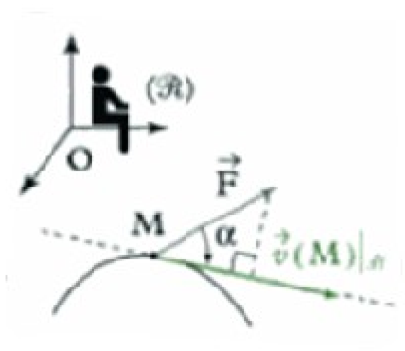
Dans ce paragraphe nous donnons les définitions ainsi que les propriétés du travail et de la puissance d'une force.

V-2-a Puissance

La puissance $\mathcal{P}(\vec{F})_R$ d'une force $\vec{F}$, appliquée à un point matériel (M) animé d'une vitesse $\vec{V}$ dans un référentiel R, est le produit de la force par la vitesse du point:

Seule la composante de $\vec{F}$, parallèle à $\vec{V}$ (projection de $\vec{F}$ sur $\vec{V}$), intervient dans la puissance.

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}} = \vec{F}.\vec{V} = \|\vec{F}\|.\|\vec{V}\|.cos\alpha$$



Dans le système d'unités MKSA, l'unité de la puissance est le Watt. 1W est égal à $1N.m.s^{-1}$ ou bien $1Kg.m^2.s^{-3}$.

Si $\mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}}$ est positive, on dit que $\vec{F}$ est une force motrice.

Si $\mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}}$ est négative, on dit que $\vec{F}$ est une force resistante.

Si $\mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}}$ est nulle, on dit que $\vec{F}$ ne travaille pas.

V-2-b Travail élémentaire d'une force

Soit un point matériel M qui décrit, pendant son mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}$,une trajectoire C. M passe en un point A de la trajectoire, à l'instant t_1.Puis passe en B à l'instant t_2.Pendant le mouvement, M subi tune force $\vec{F}$.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, le travail de la force $\vec{F}$le long du trajet allant du point A au point B et entre t_1 et t_2 est donné par:

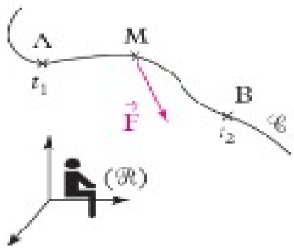
$$W(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})\ dt = \int_{A}^{B} \vec{F}\,.d\overrightarrow{OM}$$

$W(\vec{F})$ est le travail de $\vec{F}$en Joules (J).

$\mathcal{P}(\vec{F})$ est la puissance en Watts (W).

$\vec{F}$ est la force en Newton (N).

$d\overrightarrow{OM}$est le déplacement en mètres (m)



V-2-c propriétés du travail d'une force

- L'intégral$\int_A^B \vec{F}\,.d\overrightarrow{OM}$ correspond à la somme des travaux élémentaires de la force $\vec{F}$ correspondant à des déplacements élémentaire entre les points A et B.

- Un travail élémentaire est donné par : $\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$

- Si la force F est perpendiculaire à la trajectoire alors $\vec{F}.d\overrightarrow{OM} = 0$ en chaque point. Le travail total $W(F) = \int_A^B \vec{F}\,.d\overrightarrow{OM}$ = 0.

- Si F est constante, alors on peut écrire :$W(F) = \vec{F}.\int_A^B d\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$ Dans ce cas, le travail ne dépend pas du chemin suivi pour aller du point A vers B.

V-3 Energie cinétique

V-3-a Définition

Lorsqu'un objet de masse m est animé d'un mouvement avec une vitesse V, il possède de l'énergie cinétique dont l'expression est:

$$E_c = \frac{1}{2}.m.V^2$$

E_c est l'énergie cinétique en joules (J).
m est lamasse en kilogramme (Kg).
V est la vitesse en $m.s^{-1}$.

V-3-b Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique est une formulation de la deuxième loi de Newton. Nous l'établirons par les étapes suivantes:

$$\vec{v}.\left[m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i\right] = m\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i.\vec{v}$$

Dans cette expression : $\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{v}^2}{2}\right]$ et $\vec{F}_i.\vec{v} = \boldsymbol{\mathcal{P}_i}$

En injectant ces deux égalités dans l'expression précédente, nous aurons:

$\frac{d}{dt}\left[\frac{m.\vec{v}^2}{2}\right] = \sum_i \mathcal{P}_i$ et $\vec{v}^2 = v^2 \frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i$

En intégrant le long de la trajectoire entre le point A et le point B, nous obtenons la relation.

$$dE_c = \sum_i \mathcal{P}_i.dt = \sum_i \vec{F}_i.d\vec{l}$$

$$\Delta E_c = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i\,d\vec{l} = \sum_i W_i \quad \text{, avec } W_i = \int_A^B \vec{F}_i.d\vec{l}$$

Cette dernière relation constitue le théorème de l'énergie cinétique, dont l'énoncé est :

« La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre les positions A et B est égal à la somme des travaux des forces exercées sur le point matériel »

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{A\to B}(F_i)$$

$E_C(B)$ - $E_C(A)$ est la variation de l'énergie cinétique en Joules (J).

$W_{A\to B}(F_i)$ est le travail de la force appliquée au point matériel en Joules (J).

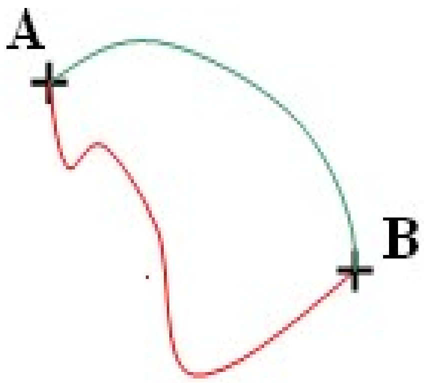
V-4 Forces conservatives, non conservatives et énergie potentielle

V-4-a Force conservatives et non conservatives

Une force $\vec{F}$ appliquée en un point M est conservative si son travail, dans un référentiel $\mathcal{R}$, entre deux positions quelconques M_1 et M_2 ne dépend que de ces deux positions et pas du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2. Ces forces dérivent d'une énergie potentielle et son expression est donnée par :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

L'énergie mécanique d'un système soumis uniquement à l'action de forces conservatives est conservée.



Le travail d'une force conservative, le long d'une trajectoire fermée, est nul:

$$W = \oint \vec{F}.\vec{dl} = 0$$

Si la force est conservative:

$$\overrightarrow{Rot}F = \vec{\nabla}\Lambda\vec{F} = \vec{0}$$

Les forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle, sont des forces non conservatives. Comme exemples nous avons le cas des forces de frottement qui sont des forces dissipatives.

V-4-b Energie potentiel

Si une force $\vec{F}$ est conservative, alors il existe une fonction E_p du point M, appelée énergie potentielle, dont la variation est l'opposé du travail de la force $\vec{F}$, entre M_1 et M_2:

$$E_p = E_p(M_2 - M_1) = -W(\vec{F})$$

E_p est l'énergie potentielle en Joule (J).

$W(\vec{F})$ est le travail en Joules (J).

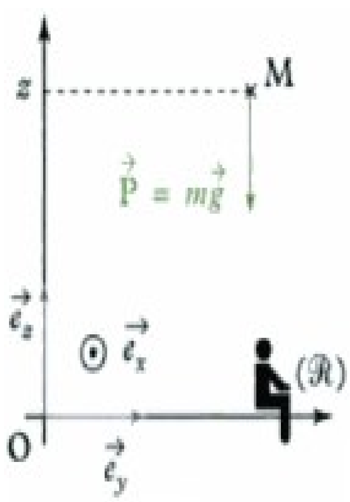
E_p n'est fonction que de la position du point M. D'après les relations précédentes, on peut déduire que :

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dr}$$

Par convention, l'énergie potentielle est déterminée à une constante près.

V-4-c Exemples de forces

V-4-c-i Poids dans un champ de pesanteur uniforme



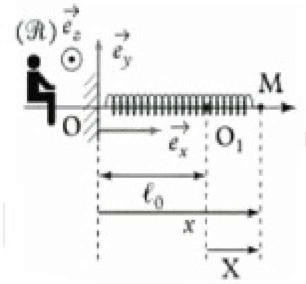
Le poids est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle ou potentiel de pesanteur:

$$mg = -\frac{dE_p}{dz} \Rightarrow E_p = mgz + cst$$

m est la masse en Kilogrammes (Kg).
g est l'intensité de pesanteur en (m/s^2).
z est l'altitude ou position en hauteur du point en mètres (m).

V-4-c-ii Force de rappel élastique d'un ressort

La force de rappel d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle élastique:



$$-k(x-l_0) \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + cst$$

Dans l'expression de E_p apparait une constante définie arbitrairement en choisissant une position de référence où $E_p = 0$.

V-5 Energie mécanique: Théorème

L'énergie mécanique d'un point matériel $E_m(M)$, dans un référentiel et à chaque instant, est la somme algébrique de l'énergie cinétique $E_c(M)$ et de l'énergie potentielle $E_p(M)$:

$$E_m|_{\mathcal{R}} = E_c|_{\mathcal{R}} + E_p|_{\mathcal{R}}$$

Dans un référentiel, la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel (M), entre deux instants, est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au point M.

$$\Delta E_m = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W(\vec{F}_{nC})$$

E_m est l'énergie mécanique en Joules (J).
$W(\vec{F}_{nC})$ est le travail des forces non conservatives en Joules (J).

Si le point Matériel (M) n'est soumis qu'a des forces conservatives, alors la variation de l'énergie mécanique est nulle. Cela implique que l'énergie mécanique totale est conservée:

$$E_m = Cst$$

Dans ce cas, on dit que le système étudié est un système conservatif.

V-6 Exercices

Exercice 1

Pour faire démarrer un train de masse M=200tonnes, une locomotive exerce sur lui une traction constante F égal à $F= 60 .10^3 N$.

1- Quelle sera la distance l parcouru lorsque la vitesse aura atteint 57.6Km/h.

2- Combien de temps se sera écoulé depuis le départ.

Exercice 2

Soit le champ de forces dans le système cartésien: $X = y^2 - x^2$, $Y = 4 x y$.

1- Ce champ dérive-t-il d'une fonction potentielle?

2- Calculer le travail de la force entre le point O (0,0) et le point A (1,1):

- Suivant la droite OA.
- Suivant Ox (de 0 à 1) puis suivant Oy (de 0 à 1)
- Suivant Oy (de 0 à 1) puis suivant Ox (de 0 à 1)

Exercice 3

On considère un champ de forces F, avec les composantes: X = 2xz, Y = yz, Z = Z (x,y). Déterminer Z(x,y) pour que F dérive d'une énergie potentielle U, que l'on calculera sachant que la force est nulle en O.

On prendra le plan Oxy comme origine des énergies potentielles.

Exercice 4

Une particule est soumise à une force définie par ses composantes:

$$\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\vec{\imath} + (\beta x - 3y - z)\vec{\jmath} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k}$$

Où $\alpha, \beta et \gamma$ sont des constantes

1- Trouver les valeurs de $\alpha, \beta et \gamma$ pour que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

2- Trouver l'expression de l'énergie potentiel $E_p(x,y,z)$ dont dérive la force, sachant que $E_p(0,0,0) = 2$.

Exercice 5

Une particule se déplace depuis l'origine O jusqu'au point A, défini par le vecteur position: $\vec{r} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$, sous l'action de la force $\vec{F} = -7\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$

Calculer :

1- Le travail effectué.

2- La puissance si le temps écoulé est de 0.6 s.

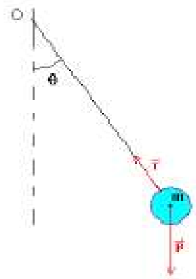
3- La variation de l'énergie cinétique sachant que la masse du point matériel est 6Kg.

4- La vitesse finale si l'on considère que la vitesse initiale est nulle.

5- La différence d'énergie potentielle entre les deux points.

Exercice 6

Donnez l'expression de l'énergie mécanique d'un pendule de longueur l et de masse m, à un angle θ quelconque.



1- En utilisant la conservation de Em, retrouvez la relation entre θ et ses dérivées.

2- Déterminez la période T dans le cas des petits angles.

Exercice 7

Un skieur de masse m=90,0 kg descend une piste inclinée d'un angle de 14° par rapport à l'horizontale. Sa vitesse est constante et est égale à 70,0 km/h. Les forces de frottement de la piste sur les skis ainsi que celles de l'air ont une résultante F parallèle à la pente.

1- Etablir l'inventaire des forces agissant sur le skieur.

2- Est-ce que le principe de l'inertie permet de calculer la valeur de F. Pourquoi ? Calculer F.

3- Quel est le travail de cette force lorsque le skieur parcourt une distance de 100 m dans ces conditions ?

4- Calculer la puissance de F.

5- Quel est le travail du poids du skieur pour ce même parcours ?

Section VI

La gravitation

Section VI: La gravitation

VI-1 Introduction

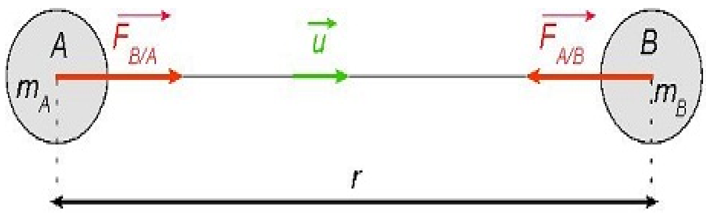
La gravitation est l'une des interactions les plus importantes qui régissent les mouvements dans notre univers.

C'est le phénomène physique qui cause l'attraction des corps ou des objets. A titre d'exemple, l'attraction terrestre qui nous entoure et nous maintient au sol. Cette interaction est aussi responsable de plusieurs phénomènes tels que les orbites des planètes autour du soleil, le mouvement des satellites …etc.

Beaucoup de théories ont tenté d'expliquer la gravitation, nous comptons les trois lois de Kepler ainsi que la loi universelle, établie par Isaac Newton.

VI-2 Loi de la gravitation de Newton

La loi de la gravitation universelle a été énoncée par Issac Newton, en 1667.Celle-ci explique que deux corps A et B, de masses respectives m_A et m_B, séparés d'une distance r, interagissent par le biais de deux forces, F_A et F_B:



$$\vec{F}_{A/B} = G\frac{m_A . m_B}{r^2} . \vec{u} = -\vec{F}_{B/A}$$

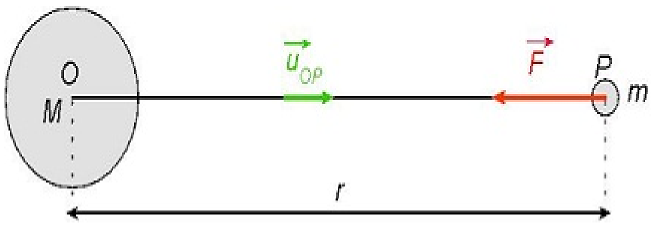
G étant la constante de gravitation, égale à **6.674 10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$**.

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire qui donne la direction et le sens des forces. Ce vecteur est orienté de la masse produisant le champ vers un point en lequel nous souhaitons évaluer le champ.

VI-3 Loi de la gravitation de Newton: Champ gravitationnel

VI-3-a Loi de la gravitation

Le champ gravitationnel découle de la force gravitationnelle. Lorsqu'un corps de masse M est placé en un point O et considérée comme immobile, il crée dans son environnement un **champ de gravitation**, noté $\vec{G}$. Une masse m, plongée dans ce champ en un point P, subit une force d'attraction gravitationnelle$\vec{F}$, comme indiqué par le schéma ci-dessous. La force $\vec{F}$est définie par la relation suivante:$\vec{F} = m.\vec{G}$



A partir de la loi de Newton, donnée plus haut, nous avons:

$\vec{F}_{A/B} = G\frac{m_A.m_B}{r^2}.\vec{u}$ Ainsi le champ $\vec{G}$ s'écrit: $\vec{G} = G\frac{M}{r^2}\vec{u}_{OP}$

VI-3-b Propriétés du champ gravitationnel

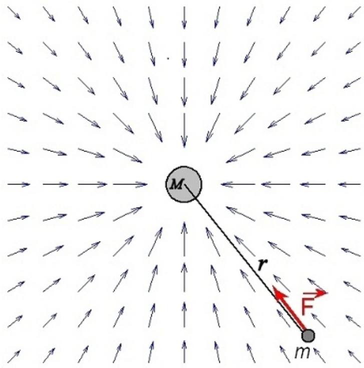
Le champ gravitationnel est caractérisé par:

- Une origine: centre de gravité du corps P
- Une direction: celle de la droite OP
- Un sens: vers le centre de O
- Une intensité: $G = G\frac{M}{r^2}$

Le champ de gravitation ne dépend pas de la masse m qui subit ce champ, mais de la masse M qui le crée. On peut voir qu'une unité équivalente de $\vec{G}$ est le $m.s^{-2}$.

Graphiquement, $\vec{G}$ est radial et centripète.

Son intensité décroît avec le carré de la distance r par rapport au corps de masse M créant ce champ.

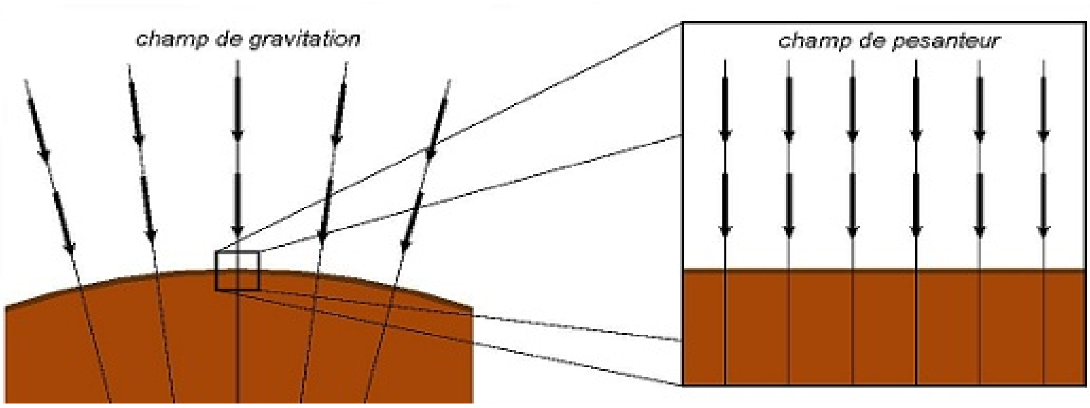


VI-3-c Champ de pesanteur: Lien avec le champ gravitationnel

Au voisinage de la Terre, la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un corps est considérée pratiquement égale au poids de ce corps. La Terre modifie les propriétés de l'espace dans son voisinage et crée un champ vectoriel, appelé champ de pesanteur et noté $\vec{g}$. La relation entre le poids et le champ de pesanteur est simple. Elle s'écrit:

$$\vec{P} = m\,\vec{g}.$$

Les lignes de champ associées au champ de gravitation terrestre $\vec{G}$ sont radiales et se rejoignent vers le centre de la Terre. Mais, au niveau de la surface de la terre, elles semblent parallèles sur des échelles de quelques kilomètres. La norme des vecteurs du champ semble quasiment constante. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est une approximation locale du champ de gravitation $\vec{G}$, au niveau de la surface de la terre.



VI-3-d Le champ de pesanteur en fonction de l'altitude

Pour une altitude nulle, au niveau de la surface terrestre, l'intensité du champ de gravitation notée g_0, est donnée par: $g_0 = G.\frac{M_T}{{R_T}^2}$. g_0 est égale à 9,81 N/Kg.

A une altitude h, la valeur de g, notée g_h, change. En identifiant le poids P d'un corps à la force d'attraction gravitationnelle F, nous aurons:

$$P = F \Rightarrow m \,.\, g_h = G.\frac{m.M_T}{(R_T+h)^2} \qquad \text{d'où} \qquad g_h = G.\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$$

$$\text{le rapport} \quad \frac{g_h}{g_0} = \frac{G.\frac{M_T}{(R_T+h)^2}}{G.\frac{M_T}{{R_T}^2}} \quad , \qquad \text{donne } g_h = g_0\,\frac{{R_T}^2}{(R_{T+h})^2}$$

Exemple: pour h =100 km, $g_h = g_0\,\frac{(6400.10^3)^2}{(6400.10^3+100.10^3)^2} = 0.97\,g_0$

D'après ce résultat, à 100 km d'altitude, l'intensité de la pesanteur ne diminue que de 3%. Pour des altitudes de quelques kilomètres, les variations de g sont négligeables.

VI-4 Energie potentielle de gravitation

L'interaction gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2, se traduit par une force exercée par chaque masse sur l'autre (paragraphe VI-3-a). Cette force a donc intervenu dans le rapprochement de m_1 et m_2. La notion d'énergie potentielle de gravitation peut donc être introduite à partir du travail de la force de gravitation.

Puisque cette force ne dépend que de la distance r entre deux masses, l'énergie potentielle Ep correspondante ne sera aussi qu'une fonction de r. L'énergie potentille E_p de chacune des deux masses, plongées dans le champ de gravitation l'une de l'autre est:

$$E_{p1} = E_{p2} = -G\frac{m_1.m_2}{r} + cst$$

VI-5 Les référentiels

Par exemple, l'étude du mouvement des planètes nécessite la définition de référentiels spéciaux. Le référentiel dépend du cas qu'on considère:

VI-5-a Référentiel héliocentrique

Pour étudier le mouvement des planètes autour du soleil, le meilleur référentiel est celui dont le centre est le centre du soleil et dont les trois axes pointeraient vers trois étoiles lointaines de l'univers, considérées donc fixes. Ce référentiel galiléen, dans lequel le principe d'inertie est vérifié, est dit héliocentrique. Il est appelé aussi référentiel de Copernic.

VI-5-b Référentiel géocentrique

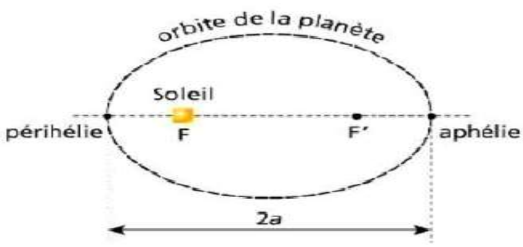
Pour étudier le mouvement de la lune ou des satellites artificiels de la terre, on imagine un repère dont le centre est le centre de la terre et dont les trois axes pointent dans le même sens et la même direction que ceux du référentiel héliocentrique. Ce référentiel, aussi galiléen, est dit géocentrique. Pour les mouvements circulaires, c'est le repère de Frenet qui est utilisé (voir troisième partie).

VI-6 Les lois de Kepler

Les lois de Kepler sont au nombre de trois. Elles s'appliquent dans le référentiel héliocentrique.

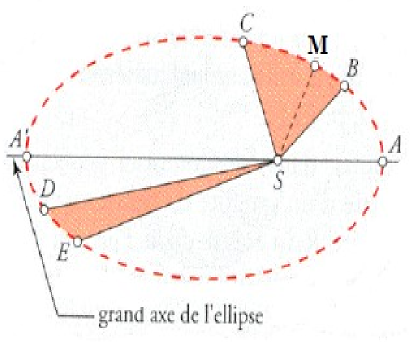
VI-6-a Première loi: Loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.



VI-6-b Deuxième loi: Loi des aires

Si **S** est le Soleil et M une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment [SM], entre deux points B et C, est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux points D et E, si la durée qui sépare B et C est égale à celle qui sépare D et E.



En d’autres termes, les arcs BC et DE sont de longueurs différentes. Si ces distances sont parcourues par M, en des temps égaux, M doit avoir une vitesse plus importante sur l’arc ayant la plus grande longueur; et inversement. Exemple: Notre planète accélère au niveau des points A et A’. Sa vitesse est minimale en Fet F’.

VI-6-c Troisième loi: Loi des périodes

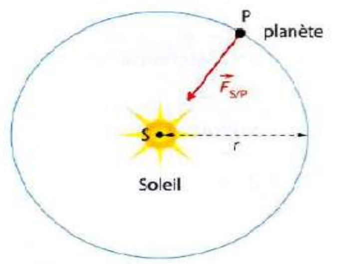
Si T est la période de révolution d'une planète (temps entre deux passages successifs devant une étoile lointaine), le carré de T est directement proportionnel au cube du demi-grand axe de la trajectoire elliptique de la planète. Autrement dit, le rapport entre T^2 et le cube du demi-grand axe (a = AA’/2) est constant: $\frac{T^2}{a^3} = cst$

VI-7 Cas de mouvements

Dans ce paragraphe nous discuterons deux cas de mouvement, celui des planètes et le cas des mouvements de satellites.

VI-7-a Mouvement d’une planète autour du soleil

En considérant un référentiel héliocentrique galiléen, avec comme système une planète P de masse m, la force de gravitation exercée par le soleil S sur la planète est:



$$F_{S/P} = G\frac{mP.mS}{r^2}$$

En appliquant la deuxième loi de Newton, dans la base de Frenet ($P, \vec{u}_T, \vec{u}_n$):

$\sum \overrightarrow{Fext} = m_p.\vec{a}$ $\qquad \sum \overrightarrow{Fext} = m_p.(a_T.\vec{u}_T + a_n.\vec{u}_n)$

$F_{S/p}.\vec{u}_n = m_p.(a_T.\vec{u}_T + a_n.\vec{u}_n)$

Avec $G\frac{m_p.m_s}{r^2}\vec{u}_n = m_p.(a_T.\vec{u}_T + a_n.\vec{u}_n)$

$$\vec{a} : \begin{cases} a_n = G\,\dfrac{m_s}{r^2} \\ a_T = 0 \end{cases}$$

L'accélération de la planète dans son mouvement est uniquement radiale et centripète. Ce qui donne:

$$\vec{a} : \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \\ a_n = \dfrac{V^2}{r} = G\,\dfrac{m_s}{r^2} \end{cases}$$

A partir de ce résultat, il est possible de retrouver la 3ème loi de Kepler.

$$\frac{V^2}{r} = G\,\frac{m_s}{r^2} \Rightarrow V = \sqrt{G.\frac{m_s}{r}}\,,$$

L'expression de la période du mouvement circulaire uniforme étant: $T = \frac{2\pi\,r}{v}$

$$\frac{2\pi r}{T} = v = \sqrt{G.\frac{m_s}{r}} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2} = G\frac{m_s}{r^2} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_s} = cst$$

Cette expression traduit la 3ème loi de Kepler, pour une planète tournant autour du soleil selon une orbite circulaire.

VI-7-b Mouvement des satellites de la terre

En appliquant la deuxième loi de Newton, dans le référentiel géocentrique galiléen, avec comme système un satellite de masse m et situé à une altitude h, la force appliquée est celle de l'attraction gravitationnelle exercée par la terre sur le satellite:

$$F_{S/P} = G\,\frac{m.M_s}{(R_T + h)^2}$$

En appliquant la deuxième loi de Newton, nous obtenons: $a_n = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$

L'accélération est centrale. Le mouvement circulaire uniforme est une solution possible pour le mouvement d'un satellite autour de la terre. La vitesse du satellite et la période de son mouvement seront données, respectivement, par:

- Vitesse du satellite : $V = \sqrt{G.\frac{M_T}{R_T+h}}$
- Période du satellite : $T = \frac{2\pi\,(R_T+h)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{G.M_T}}$

Ces deux grandeurs caractéristiques du mouvement du satellite ne dépendent que de l'altitude de celui-ci, elles ne dépendent pas de la masse du satellite.

VI-8 Exercices

Exercice 1

1- Quelle est la valeur du poids P d'une boule de masse m=800g, posée sur le sol ? Quelle est la valeur de la force gravitationnelle F exercée par la Terre sur la même boule?

2- Comparer ces deux forces et conclure.

3- En déduire l'expression de l'intensité de la pesanteur g en fonction de G, M_T et R_T.

Données: g = 9.8m/s^2, rayon de la terre R_T= 6380 Km, masse de la terre M_T = 5.98 10^{24} Kg.

Exercice 2

Le poids d'une personne est P_0 = 500 N, à l'équateur où l'intensité de la pesanteur est de 9.81 m/s^2. On suppose que la terre a une symétrie sphérique et que l'intensité de la force de gravitation universelle F est égale au poids du corps.

1- Définir le poids d'un corps.

2- Calculer la masse de cette personne.

3- Donner l'expression de l'intensité de la pesanteur g_h a l'altitude h en fonction de R_T, g_0 et h.

4- Calculer l'intensité de la pesanteur g_h au sommet du Toubkal qui se trouve à une altitude h=4165 m, on donne R_T =6400Km. Déduire le poids de cette personne au sommet du Toubkal.

5- On considère un solide S de masse m sur la surface de la terre, déterminer la valeur de l'altitude h à laquelle on transporte le corps S pour que son poids soit $P_h = \frac{P_0}{9}$.

Exercice 3

La pesanteur à la surface d'un astre de masse M et de rayon R est donnée par:

g = 6,67 10^{-11} M / R².

1- Quelle est la valeur de la pesanteur à la surface de Io, l'un des satellites de Jupiter. La masse de Io est de 8,933 10^{22} Kg. Son rayon est de 1,8 10^3 Km.

2- Quel est le poids d'un corps de masse 500 g à la surface de Io ? Le comparer au poid à la surface de la Terre.

Exercice 4

On considère une navette spatiale, de masse 1800 Kg, se trouvant entre la terre et la Lune. On appelle d la distance du centre de la terre à la navette et D la distance entre le centre de la terre et celui de la Lune. Les masses de la Terre et de la Lune sont: M_{terre} = 6 10^{21} tonnes, M_{lune} = 1 / 83 M_{terre}. D = 380 000 km.

1- Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre sur la navette.

2- Exprimer la force de gravitation exercée par la Lune sur la navette.

3- A quelle distance d_0 de la Lune ces deux forces auront-elles la même valeur ?

Exercice 5

Dans un referentiel géocentrique, un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon r = R+h autour du centre de la terre (h étant son altitude par rapport à la surface terrestre). Ce mouvement peut être étudié simplement à l'aide du PFD.

1- Montrer que la vitesse v est constante. Donner sa valeur en fonction de G,M,R et h.

2- En déduire la période T du mouvement et montrer que la constante $\frac{T^2}{r^3}$ a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?

3- Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite. Quelle est la relation entre les deux ? Commenter le signe de l'énergie mécanique.

4- Un satellite est dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au réferentiel terrestre. En déduire son altitude h.

Exercice 6

En confondant la force gravitationnelle que subit un objet et son poids , exprimer le module de l'intensité de la pesanteur g à la surface terestre, en déduire la masse M_T de la terre. Calculer la masse M_S du soleil. Données: G = $6.67259.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$. Module de la l'intensité de la pesanteur à la surface g = 9.8 m/s^2. Le demi-grand axe de l'orbite terrestre a = 1.50 10^{11} m. La période de révoltion de la terre T_S = 365.25 jours.

Exercice 7

Le mouvement d'un point A est circuliare uniforme de rayon r_0 , de vitesse v_0.

1- A partir de la relation fondamentale de la dynamique établir la relation entre a et v_0.

2- Soit T la période de révolution, établir la relation $\frac{T^2}{a^2} = cst$.

3- Exprimer les énergies cinétique E_c, potentielle E_p et mécanique E_m. Etablir les relations entre ces énergies, en déduire que: $E_m = \frac{-G}{2a}$.

Section VII

Solutions des exercices

Solution des exercices: Section I

Exercice 1

1- $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow G = \frac{F.r^2}{m_1.m_2} \Rightarrow [G] = \frac{[F.r^2]}{[m_1.m_2]} = \frac{[F].[r^2]}{[m_1].[m_2]} = \frac{[F].[r]^2}{[m_1].[m_2]}$

F: est une force $[F] = MLT^{-2}$.R une distance: $[R] = L$.m_1 et m_2 sont des masses: $[m_1] = [m_2] = M$

$[G] = \frac{MLT^{-2}.L^2}{M^2}$ donc $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$. L'unité de G est $Kg^{-1}m^3s^{-2}$

$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi F}\frac{q_1q_2}{r^2} \Rightarrow [\varepsilon_0] = \frac{[q_1q_2]}{[4\pi F.r^2]} = \frac{[q_1][q_2]}{[4\pi][F].[r^2]}$

q_1 et q_2 sont des charges électriques: $[q_1] = [q_2] = I.T$. 4π est une constante $[4\pi] = 1$

Donc $[\varepsilon_0] = \frac{T^2.I^2}{MLT^{-2}.L^2} = M^{-1}L^{-3}T^4I^2$. L'unité de ε_0 est $kg^{-1}m^{-3}s^4m^2$.

$F = \mu_0\frac{LI_1.I_2}{2\pi r} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{I_1.I_2}\frac{2\pi Fr}{l} \Rightarrow [\mu_0] = \frac{[2\pi F]}{[I_1.I_2.L]} = \frac{[2\pi][F].[r]}{[I_1][I_2].[l]}$

I_1 et I_2 sont des intensités de courants: $[I_1] = [I_2] = I$, donc $[\mu_0] = \frac{MLT^{-2}.L}{I^2.L} = MLT^{-2}I^{-2}$.

L'unité de μ_0 est $kgms^{-2}A^{-2}$.

2- $[\varepsilon_o\mu_o c^2] = [\varepsilon_o][\mu_o][c^2] = M^{-1}L^{-3}T^4I^2.\ MLT^{-2}I^{-2}.\ L^2T^{-2}$,donc $[\varepsilon_o\mu_o c^2] = 1$

Exercice 2

1- $\sigma = \frac{Q}{S}$, Q est la charge et S est la surface. $\Rightarrow [\sigma] = \left[\frac{Q}{S}\right] \Rightarrow [\sigma] = \frac{[Q]}{[S]} = \frac{I.T}{L^2} = ITL^{-2}$

2- $p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ ε_0 est la permittivité du vide $[\varepsilon_0] = M^{-1}L^{-3}T^4I^2$

$$[\varepsilon_0] = \left[\frac{\sigma^2}{2P}\right] = \frac{[\sigma^2]}{ML^{-1}T^{-2}} = \frac{(I.T.L^{-2})^2}{ML^{-1}T^{-2}} = M^{-1}L^{-3}T^{-4}I^2$$

Exercice 3

1- $R = K.s.V^2 \Rightarrow K = \frac{R}{sV^2}$ la dimension de la résistance est: $[R] = L^2MT^{-3}I^{-2}$. La dimension de la vitesse V est $[V] = LT^{-1}$.$[K] = \left[\frac{R}{sV^2}\right] = \frac{[R]}{[s][V]^2} = \frac{L^2.M.T^{-3}.I^{-2}}{L^2.L^2T^{-2}} = M.L^{-2}T^{-1}I^{-2}$

2- Dans le système SI, $K = 0.28\ Kg.m^{-2}.s^{-1}.A^{-2} = 0.28\ .10^3.10^{-4}\ g.cm^{-2}.s^{-1}.A^{-2} = 0\ ,028\ g.cm^{-2}.s^{-1}.A^{-2}$.

Exercice 4

D'après l'équation nous avons: $\eta = \frac{\pi R^4\Delta P}{8Q_vL} \Rightarrow [\eta] = \left[\frac{\pi R^4\Delta P}{8Q_vL}\right] = \frac{[\pi][R]^4[\Delta P]}{[8][Q_v][L]}$.$[\Delta P] = [P_2 - P_1] = ML^{-1}T^2$.

$[Q_v] = L^3T^{-1}$. $[R] = L$.$[\pi] = 1$.$[\eta] = \frac{L^4ML^{-1}T^{-2}}{L^3.T^{-1}L} = ML^{-1}T^{-1}$. L'unité de η est $Kg\ m^{-1}\ s^{-1}$.

Solution des exercices

Exercice 5

D'après l'équation $A = \alpha V^{-2}F^{-2}+\beta P^{3}m$,

l'équation aux dimensions donne: $[A] = [\alpha V^{-2}F^{-2}] = [\beta P^{3}m]$. Nous commençons par la dimension de α

en utilisant $[A] = [\alpha V^{-2}F^{-2}] = [\alpha][V^{-2}][F^{-2}]$, ce qui donne $[\alpha] = \frac{[A]}{[V]^{-2}[F]^{-2}} = [A].[V]^2[F]^2$,

en remplaçant les dimensions A, V et F dans l'équation aux dimensions, nous aurons: $[\alpha] = M^3L^2T^{-4}$

En faisant la même chose pour la deuxième équation: $[A] = [\beta P^3 m]$

$[\beta] = \frac{[A]}{[m][P^3]}$ en remplacant les dimensions des grandeurs qui figurent dans l'équation aux dimensions,

nous aurons $[\beta] = M^{-3}L\,T^8$

Exercice 6

$[E_m] = ML^2T^{-2}$ $[mV^2/2] = ML^2T^{-2}$ car $[V] = L^{-1}T^{-1}$

$[IW^2/2] = ML^2T^{-2}$ car $[I] = ML^2$ et $[W] = T^{-1}$

L'équation $E_m = (mV^2/2) + IW^2/2$ est homogène.

Exercice 7

D'après les données de l'exercice nous avons:

$[v] = LT^{-1}$,$[1/9] =1$, $[\rho -\rho'] = [\rho] =[\rho'] =ML^3$, $[g] =LT^{-2}$,$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$,$[a] = L$.

En remplaçant les dimensions des grandeurs dans l'équation aux dimensions, nous trouvons:

$\left[\frac{1}{9}\frac{a^2(\rho-\rho')g}{\eta}\right] = \frac{L^2ML^{-3}LT^{-2}}{ML^{-1}T^{-1}} = LT^{-1} = [v]$, donc l'équation $v = \frac{1}{9}\frac{a^2(\rho-\rho')g}{\eta}$ est homogène.

Exercice 8

1- $V= (4/3)\pi r^3 = (4/3)\pi(5mm)^3 = 523{,}3mm^3$.
$\Delta V/V = 3(\Delta r/r) = 3(\Delta d/d) = 3(0{,}01/10) = 0{,}003 = 0{,}3\%$.
$\Delta V = (\Delta V/V)\, V= 0{,}003 \times 523{,}3 = 1{,}57\ mm^3$, $V = (523{,}300 \pm 0{,}003)\ mm^3$.

2- $\rho = m/V = 9{,}9g/0{,}5233(cm^3) = 18{,}91g/cm^3$.
$\Delta\rho/\rho = (\Delta m/m) + (\Delta V/V) = (0{,}1/9{,}9) + 0{,}003 = 0{,}01+0{,}003 = 0{,}013 = 1{,}3\%$.
$\Delta\rho = (\Delta\rho/\rho)\,\rho =0{,}013 \times 18.91 = 0{,}246\ g/cm^3$. $\rho = (18{,}910 \pm 0{,}013)\ g/cm^3$.

Exercice 9

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = (4\pi^2\, l) / T^2 = (4\pi^2 x1.552) / (2{,}5)^2 = 9{,}8\ m/s^2$.

$\Delta g/g = (\Delta l/l) + 2(\Delta T/T) = 1{,}7\ \%$, $\Delta g = (\Delta g/g)g =0{,}017 \times 9{,}8 = 0{,}17$, donc $g = (9{,}8 \pm 0{,}17)\ (m/s^2)$.

Exercice 10

1- $C_{Tot} = 10C_1 = 10 \times 0{,}1 = 1\mu F.\Delta C_{Tot} / C = (\Delta C_1/C_1) = (0{,}02/0{,}1) = 0{,}2 = 20\ \%$.

2- $1/C_{Tot} = 10(1/C_1) \Rightarrow C_{Tot} = (C_1/10)\Delta C_{Tot}/C = (\Delta C_1/ C_1) =0{,}2 = 20\%$.

Solution des exercices

Exercice 11

1- D'après l'unité de C, $[C] = ML^2T^{-2}$

La grandeur Y est homogène à une pression$[Y] = ML^{-1}T^{-2}$. d et l sont des longueurs $[d] = [l] = L$.

Equation aux dimensions$[C] = [Y]^a \frac{[d]^b}{[l]} \Rightarrow ML^2T^{-2} = (ML^{-1}T^{-2})^a \frac{L^b}{L}$. $ML^2T^{-2} = M^aL^{-a}T^{-2a}L^{b-1}$.

$ML^2T^{-2} = M^aL^{-a+b-1}T^{-2a}$

Par identification,nous aurons: $\begin{cases} a = 1 \\ -a + b + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

2- $LnC = \ln\left(Y\frac{d^2}{l}\right) = \ln Y + \ln d^2 - \ln l = \ln Y + \ln d - \ln l - \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}$

Exercice 12

$I = \frac{1}{12}\rho^\alpha\, x\, y^\beta\, z\, [x^2 + y^\gamma]$, d'après l'unité de I ($[I] = ML^2$) et la nature des grandeurs exprimée dans les données de l'exercice. $[\rho] = ML^{-3}$,$[x] = [y] = [z] = L$,$\left[\frac{1}{12}\right] = 1$,$[x^2 + y^\gamma] = [x^2] = [y]^\gamma \Rightarrow \gamma = 2$

$$[I] = \left[\frac{1}{12}\rho^\alpha\, x\, y^\beta\, z\, (x^2 + y^\gamma)\right] = \left[\frac{1}{12}\right][\rho]^\alpha[x][y]^\beta\,[z][x^2 + y^\gamma]$$

$$ML^2 = (ML^{-3})^\alpha . L . L^\beta . L . L^2 = M^\alpha L^{-3\alpha+\beta+4} \begin{cases} \alpha = 1 \\ -3\alpha + \beta + 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{12}\rho xyz[x^2 + y^2]$$

$$\ln I = \ln\left(\frac{1}{12}\rho . x . y . z . [x^2 + y^2]\right) = \ln\left(\frac{1}{12}\right) + \ln\rho + \ln x + \ln y + \ln z + \ln(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{d(x^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d(y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{2xdx}{x^2 + y^2} + \frac{2ydy}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{x2xdx}{x(x^2 + y^2)} + \frac{y2ydy}{y(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{2x^2dx}{x(x^2 + y^2)} + \frac{2y^2dy}{y(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} + \frac{2x^2\Delta x}{x(x^2 + y^2)} + \frac{2y^2\Delta y}{y(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\Delta I}{I}=\frac{\Delta \rho}{\rho}+\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z}+\frac{\Delta x}{x}\frac{2x^2}{(x^2+y^2)}+\frac{\Delta y}{y}\frac{2y^2}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta z}{z}=10^{-3}\text{et}\frac{\Delta \rho}{\rho}=10^{-2}$$

$$\frac{\Delta I}{I}=\frac{\Delta \rho}{\rho}+3\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta x}{x}\left(\frac{2x^2}{(x^2+y^2)}+\frac{2y^2}{(x^2+y^2)}\right)$$

$$\frac{\Delta I}{I}=\frac{\Delta \rho}{\rho}+3\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta x}{x}\left(\frac{2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)}\right)=\frac{\Delta I}{I}=\frac{\Delta \rho}{\rho}+3\frac{\Delta x}{x}+\frac{2\Delta x}{x}\underbrace{\left(\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)}\right)}_{=1}$$

$$\frac{\Delta I}{I}=\frac{\Delta \rho}{\rho}+3\frac{\Delta x}{x}+\frac{2\Delta x}{x}=\frac{\Delta I}{I}=\frac{\Delta \rho}{\rho}+5\frac{\Delta x}{x}$$

$(\Delta I/I) = 10^{-2} + 5\ 10^{-3} = (1 + 0.5)\ 10^{-2} = 0{,}015$

Exercice 13

$$n=\frac{\sin\frac{A+D_n}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\Rightarrow \ln n=\ln\left(\frac{\sin\frac{A+D_n}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right)=\ln\sin\frac{A+D_n}{2}-\ln\sin\frac{A}{2}$$

$$\frac{dn}{n}=\frac{\mathbf{d(A+D_m)}}{\mathbf{2}}\frac{\cos\left(\frac{A+D_n}{2}\right)}{\sin\frac{A+D_n}{2}}-\frac{dA}{2}\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\mathbf{d(A+D_m)}}{\mathbf{2}}\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)-\frac{dA}{2}\text{cotg}\frac{A}{2}$$

$$\frac{dn}{n}=\frac{1}{2}\left(\left(\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)-\text{cotg}\frac{A}{2}\right)dA+\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)dD_m\right)$$

En passantaux incertitudes:

$$\frac{\Delta n}{n}=\frac{1}{2}\left(\left|\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)-\text{cotg}\frac{A}{2}\right|\Delta A+\left|\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)\right|\Delta D_{\mathbf{m}}\right)$$

$$\left|\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)-\text{cotg}\frac{A}{2}\right|=\text{cotg}\frac{A}{2}-\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)$$

Car la fonction cotangente est une fonction décroissante de l'angle.

$$\Delta A=\Delta D_m=1'=3.10^{-4}\ \text{rad}$$

$$\frac{\Delta n}{n}=\frac{1}{2}\left(\text{cotg}\frac{A}{2}-\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)\Delta A+\text{cotg}\left(\frac{A+D_n}{2}\right)\Delta D_{\mathbf{m}}\right)$$

$$\frac{\Delta n}{n}=\frac{1}{2}\text{cotg}\left(\frac{A}{2}\right)\Delta A$$

$$A=60°\Rightarrow \text{cotg}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{3}$$

$\frac{\Delta n}{n}=\frac{3\sqrt{3}}{2}10^{-4}=2.6\ 10^{-4}\Rightarrow\ \Delta n=3.5\ 10^{-4}$, enfin n = (1,33625 ± 0,00035).

Solutions des exercices: Section II

Exercice 1

1- $\vec{u}.\vec{v} = 0 + 3 + 2 = 5.\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$,

$\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45°$

2- Cosinus directeur de $\vec{u}$: Soit $\vec{b}$ le vecteur unitaire porté par $\vec{u}$, $\vec{b} = \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{k}$

Les cosinus directeur de $\vec{u}$ sont : $\begin{cases} cos\theta_x = 0 \\ cos\theta_y = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ cos\theta_z = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$

Cosinus directeur du vecteur $\vec{v}$: Soit $\vec{c}$ le vecteur unitaire porté par $\vec{v}$, $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$

Les cosinus directeur de $\vec{v}$ sont: $\begin{cases} cos\theta_x = 0 \\ cos\theta_y = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ cos\theta_z = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

a=$\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 5\vec{i}$

$\|\vec{w}\|$=5, $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\, sin\theta = \sqrt{10}.\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 5$

Exercice 2

Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient perpendiculairesil faut que $\vec{u}.\vec{v} = 0$. $\vec{u}.\vec{v} = 8 - 2a - 2 = 6 - 2a = 0 \Rightarrow a = 3$.

Exercice 3

$\|\vec{A}\| = \sqrt{29}$, $\|\vec{B}\| = \sqrt{13}$ $\quad$ $\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\| = \sqrt{29} + \sqrt{13}$ $\quad$ $\vec{A} + \vec{B} = 3\vec{i} - \vec{j}$

1ère Méthode : $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{10}$ $\quad$ $\vec{A}.\vec{B} = -16$

2ème Méthode : $\|\vec{A} + \vec{B}\|^2 = (\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} + \vec{B}) = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2.\vec{A}.\vec{B} = 13 + 29 - 32 = 42 - 32 = 10$

$\|\vec{A} + \vec{B}\|^2 = 10 \Rightarrow \|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{10}$

Pour $\|\vec{A}\| - \|\vec{B}\|$ et $\|\vec{A} - \vec{B}\|$, même calcul que précédemment. Il suffit de remplacer le signe (+) par le signe (-).

Exercice 4

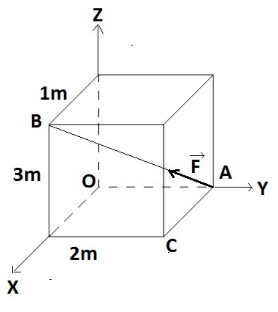
1- A (0,3,0), B (1,0,2) et C (1,3,0) : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.$\vec{F} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{u}_{\vec{F}} = \vec{F} =$

$\vec{u}_{\overrightarrow{AB}}\|\vec{F}\|.\vec{u}_{\vec{F}}$

$\vec{u}_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{14}} \Rightarrow \vec{u}_{\vec{F}} = \frac{\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{14}}$, les cosinus directeurs de

$\vec{F}$ sont : $\cos\theta_x = 1/\sqrt{14}$, $\cos\theta_y = 3/\sqrt{14}$, $\cos\theta_z = 2/\sqrt{14}$

$\theta_x = 74.5°$, $\theta_y = 143°$, $\theta_z = 57°$



$$\vec{F} = \|\vec{F}\|.\vec{u}_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{14} \\ -15/\sqrt{14} \\ 10/\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

2- $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_{\overrightarrow{AC}} = \vec{\imath}$ $\quad Proj\,(\vec{F})_{/\overrightarrow{AC}} = \vec{F}.\vec{u}_{\overrightarrow{AC}} = 5/\sqrt{14}$

3- $M(\vec{F}) = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 5/\sqrt{14} & -15/\sqrt{14} & 10/\sqrt{14} \end{vmatrix} = \frac{10}{\sqrt{14}}\vec{\jmath} + \frac{15}{\sqrt{14}}\vec{k}$

4- $(\Delta) \parallel \overrightarrow{\mathrm{AB}} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{u}_{\overrightarrow{AB}}$.

5- $M(\vec{F})_\Delta = M(\vec{F})_C.\vec{u}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 10/\sqrt{14} \\ 15/\sqrt{14} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -3/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \end{pmatrix} = 0$.

Exercice 5

1- $\vec{R} = \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2 + \vec{\mathrm{F}}_3 = -1.5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

$$\vec{M}_1 = \overrightarrow{OA}\Lambda\vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

$$\vec{M}_2 = \overrightarrow{OA}\Lambda\vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 8$$

$$\vec{k}\vec{M}_3 = \overrightarrow{OA}\Lambda\vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 0.5 & -4 \end{vmatrix} = 11.5\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} - \vec{k}$$

2- $\vec{R} = \vec{\mathrm{M}}_1 + \vec{\mathrm{M}}_2 + \vec{\mathrm{M}}_3 = 10.5\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} - 6\vec{k}$

3- $\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{OA}\Lambda\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1.5 & -3 \end{vmatrix} = 10.5\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} - 6\vec{k}$

4- D'après les résultats, M=M'

Exercice 6

1- $div\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{\mathrm{F}} = 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy & -3yz & 9xy^3 \end{vmatrix} = (27xy^2 + 3y)\vec{\imath} - 9y^3\vec{\jmath} - 2x\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}f = 6xyz + 2y^2(z + x) + x^2(z + y) + 5(x + y)$$

Solution des exercices: Section III

Exercice 1

1- Mobile A: $x = t \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ La trajectoire est une droite passant par l'origine avec comme coefficient directeur $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mobile B: $x = 3t - 1 \Rightarrow$ t = (x+1)/3, $y = 9\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1 \Rightarrow$ y = x^2 + 2x +2 $\Rightarrow$ La trajectoire est une parabole.

Mobile C: $(x-10)^2 = 100\,cost^2$, $y^2 = 100\,sint^2 \Rightarrow (x-10)^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow$ La trajectoire est un cercle de rayon R=10 et d'origine w(10,0).

Mobile $\vec{D}$: $x = t + 1 \Rightarrow$ t = x-1, $y = 2 + \sqrt{4 - (x-1)^2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

La trajectoire est un cercle de rayon R = 2 et d'origine w(1,2).

2- $\overrightarrow{OA} = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{cases}$ à t=1s $\Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{4}{3}}$, $\|\vec{a}\| = 0$

Exercice 2

1- $\overrightarrow{OM}: \begin{cases} x(t) = tcost \\ y(t) = tsint \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \begin{cases} v_x(t) = cost - tsint \\ v_y(t) = sint + tcost \end{cases}, \ \|\vec{v}\| = \sqrt{1+t^2}$

2- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}: \begin{cases} a_x(t) = -2sint - tcost \\ a_y(t) = 2cost - tsint \end{cases}, \ \|\vec{a}\| = \sqrt{4+t^2}$

3- $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$, où $\vec{a_t}$ est l'accélération tangentielle et $\vec{a_n}$ l'accélération normale.

$a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \Rightarrow \vec{a}^2 = \vec{a_t}^2 + \vec{a_n}^2 \Rightarrow \vec{a_n}^2 = \vec{a}^2 - \vec{a_t}^2 = 4 + t^2 - \frac{t^2}{1+t^2}$

4- $\|\vec{a_n}\| = \frac{2+t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ puisque $\|\vec{a_n}\| = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\|\vec{a_n}\|} = \frac{1+t^2}{\frac{2+t^2}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{1+t^2\sqrt{1+t^2}}{2+t^2} = \frac{(1+t^2)^{3/2}}{2+t^2}$.

Exercice 3

1- Vecteur position: $\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = -2 \\ y = t - 1 \\ z = 1 - t^2 \end{cases}$

2- Composantesdu vecteur position : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 1 \\ v_z = -2t \end{cases}, \|\vec{v}\| = \sqrt{1+4t^2}$

3- Composantes du vecteuraccélération: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} a = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -2 \end{cases}$, $\|\vec{a}\|$ = 2m/s^2

4- $\vec{a}.\vec{v} = \|\vec{a}\|.\|\vec{v}\|.cos\theta \Rightarrow$ cosθ = $\frac{\vec{a}.\vec{v}}{\|\vec{a}\|.\|\vec{v}\|}$ = 4t $\Rightarrow$ cosθ = $\frac{4t}{2\sqrt{1+4t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}$

à t = 2s: cos θ = 0,97 $\Rightarrow$ θ = 14°.

5- Vecteur unitaire tangent à la trajectoire $\vec{u}_T$: $\vec{v} = \|\vec{v}\|.\vec{u}_T \Rightarrow \vec{u}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{j} - 2t\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

6- proj $(\vec{a})/_T = \vec{a}.\vec{u}_T = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$. La projection de $\vec{a}$ sur l'axe tangent à la trajectoire (T) représente la norme du vecteur accélération tangentielle.

7- Composantes de $\overrightarrow{a_T}$: $\overrightarrow{a_T} = \|\overrightarrow{a_T}\|.\vec{u}_T = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}.\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \\ \frac{-2t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4t}{1+4t^2} \\ \frac{-8t^2}{1+4t^2} \end{pmatrix}$

8- Accélération normale: $\overrightarrow{a_n} = \vec{a} - \overrightarrow{a_t} \Rightarrow \overrightarrow{a_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4t}{1+4t^2} \\ \frac{-8t^2}{1+4t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-4t}{1+4t^2} \\ \frac{-2}{1+4t^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{a_N}\| = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$

Rayon de courbure: $\|\overrightarrow{a_n}\| = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\|\overrightarrow{a_n}\|} = \frac{1+4t^2}{\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}} = \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$.

Exercice 4

1- a- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} a = 0 \\ a_y = -3 \\ a_z = 0 \end{cases}$

b- $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 5 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 5 - 3t \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 5dt \\ dy = (3t-5)dt \\ dz = 0.dt \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}: \begin{cases} x(t) = 5t + C_1 \\ y(t) = \left(-\frac{3}{2}t^2 + 5t\right) + C_2 \\ z(t) = C_3. \end{cases}$

c- A t= 1 s: $\overrightarrow{OM}: \begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = \left(-\frac{3}{2}t^2 + 5t\right) + 3 \\ z = 0 \end{cases}$

L'équation de la trajectoire : $t = \frac{x-2}{5}$, $y = -\frac{3}{2}\left(\frac{x-2}{5}\right)^2 + 5\left(\frac{x-2}{5}\right) + 3$

2- Les caractéristiques du vecteur vitesse à t = 1s: $\vec{v}(5,2,0)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{29}$ m/s.

$\vec{\imath}.\vec{v} = \|\vec{\imath}\|.\|\vec{v}\|.cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{\vec{\imath}.\vec{v}}{\|\vec{\imath}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \theta = 21.80\,°$

Exercice 5

1- les composantes des vecteurs selon z sont nulles⇒Le mouvement se fait dans le plan xOy

2- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} a = 0 \\ a_y = -3 \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -3 \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dv_x = 0dt \\ dv_y = -3dt \\ dv_z = 0.dt \end{cases} \Rightarrow \vec{v}: \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -3t + C_2 \\ v_z = C_3. \end{cases}$

A t=0s, $\vec{v}: \begin{cases} x = 1 \\ y = -3t + 1 \\ z = 0 \end{cases}$, $\overrightarrow{OM}: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -\frac{3}{2}t^2 + 2 \\ z = 0. \end{cases}$

3- Equation de la trajectoire: t = x-1 $\Rightarrow y = -\frac{3}{2}(x-1)^2 + 2$

Solutions des exercices

Exercice 6

1- $s(t) = \int ds(t) = \int \|\vec{v}\| . dt = \int \frac{V_0}{1+\alpha t} . dt = \frac{v_o ln(1+\alpha t)}{\alpha} + C$

à t = 0, s (0) =0 $\Rightarrow$ C = 0 $\Rightarrow$ $s(t) = \frac{v_o ln(1+\alpha t)}{\alpha}$

2- La durée du premier tour effectué par M: $s\ (t_1) = \frac{v_o ln(1+\alpha t)}{\alpha} = 2\pi \Rightarrow t_1 = \frac{1-e^{\frac{2\pi\alpha}{v_0}}}{\alpha}$

3- L'accéleration du point dans la base de Frenet: $\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{v_0}{1+\alpha t}\right)\vec{u_t}\right] = \frac{-\alpha v_0}{1+\alpha t}\vec{u_t} + \left(\frac{v_0}{1+\alpha t}\right)\dot{\theta}\vec{u_n}$

Exercice 7

x = R (1 - cos wt), y = R (1 - sin wt), z = 0 $\Rightarrow$ x² = R² (1 – cos² wt), y² = R² (1 – sin² wt), z² = 0.

1- $x^2+y^2=R^2$.La trajectoire est un cercle de rayon R et de rayon w(0,0)

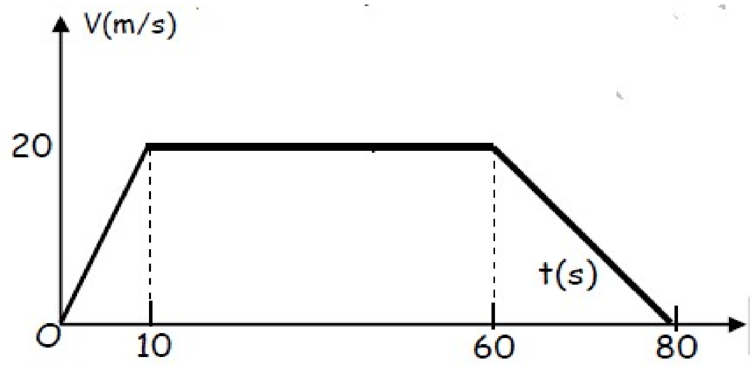
2- Vitesse et accélération: $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} : \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = Rw \sin wt \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -Rw \cos\ wt, \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} : \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = Rw^2 \cos wt \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = Rw^2 \sin wt \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$

Exercice 8

1-

Phase	a ($m.s^{-2}$)	V (m/s)	Nature du mouvement
[00s - 10s]	2	2t	$\vec{a}.\vec{v}$>0M.Uniformément accéléré.
[10s - 60s]	0	20	Uniforme.
[60s - t_1]	-1	-t + 80	$\vec{a}.\vec{v}$ < 0M. Uniformément retardé.

2- Graphe de v(t)



3- pour t = t_1, v (t1) = 0 $\Rightarrow$ t_1= 80 s.

4- Distance AB = 1300m

5- Equations horaires:

Phase	x (t)
[00s-10s]	t^2
[10s- 60s]	20t - 100
[60s - ts]	$-t^2/2+20t–900$

Solutions des exercices

Exercice 9

1- T = (10/5) = 2s , N = (1/2) = 0,5Hz , $\omega = (2\pi/2) = \pi \mathrm{rd/s}$, $v = \omega.R = \pi.0{,}4 = 1.256\ \mathrm{m/s}$,

$A = \omega^2.\ R = 3{,}94\ \mathrm{m/s^2}$.

2- $\theta = \omega.t + \theta_0 \Rightarrow \theta = \pi.t + \pi/4$

Exercice 10

1- f = 5 Hz, T = 1/f = 0.2 s, $\omega = 2\pi/T = 10\ \pi$ rd/s, $\alpha(t) = \omega t = 2\pi t$.

2- a = 50 ms^{-2}. $a = \omega^2.R \Rightarrow R = (a/\ \omega^2) = 0{,}05$ m , $v = \omega.R = 1.57$m/s.

Exercice 11

$X = X_m \sin(4\pi t + \varphi)$.

1- $\omega = 4\pi$, $T = 2\pi/\omega = 0.5$ s , N = 1/T 2 Hz

2- t = 0 s $\Rightarrow$ $\sin(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi = 0$

$V = 4\pi X_m \cos(4\pi t + \varphi)$. A t = 0s, V = 0,5 ms^{-1}. $X_m = (0{,}5/4\ \pi) = 0{,}3925$ m.

Solutions des exercices: Section IV

Exercice 1

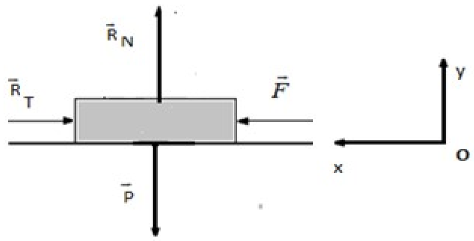
1- $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} + \vec{F}_{min} = \vec{0}$.

Par projection sur Ox: $F_{min} - R_T = 0 \Rightarrow F_{min} - R_T$ (1)

Par projection sur Oy: $-P + R_N = 0 \Rightarrow P = - R_N$ (2)

Sachant que $\mu_s = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = \mu_s . R_N \Rightarrow R_T = \mu_s . P$ (3)

D'après (1) et (3): $F_{min} = \mu_s . P$, $F_{min} = 240$ N



2- En mouvement: $\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} + \vec{F}_{min} = m.\vec{a}$ où $\vec{a}$ est l'accélération**.**

Par projection sur Ox: $F - R_T = m.a$ (1'). Par projection sur l'axe Oy: $-P + R_N = 0 \Rightarrow P = R_N$ (2')

Sachant que $\mu_c = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = \mu_s . R_N \Rightarrow R_T = \mu_s . P$ (3'), d'après (1'), $a = \frac{F - R_T}{m}$

Selon la valeur du poids, m = 30Kg, $a = \frac{260 - 0.4.300}{30} = 4.67\ m/s^2$

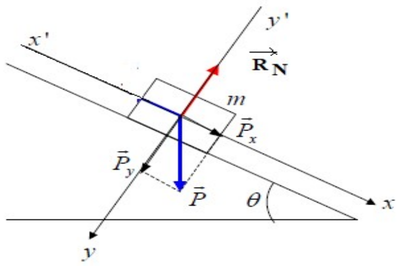
Exercice 2

1- $\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_N} = m.\vec{a}$

Par projection sur Ox: $P_x = m.a$ (1)

Par projection sur Oy: $P_y - R_N = 0 \Rightarrow P_y = R_N$ (2)

D'après (1): $a = \frac{Px}{m} = \frac{P \sin\theta}{m} a = \frac{50 \sin 30}{5} = 5 m/s^2$



2- Application d'une force F.

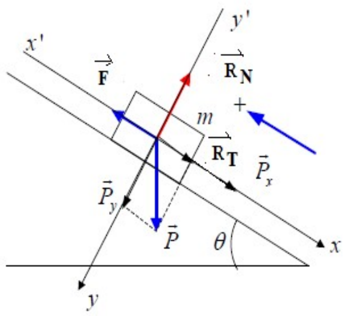
$a - \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} + \vec{F} = \vec{0}$

Par projection sur Ox: $F - Px - R_T = 0 \Rightarrow F = R_T + Px$ (1')

Par projection sur Oy: $P_y - R_N = 0 \Rightarrow P_y = R_N$ (2')

Sachant que $\mu_s = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = \mu_s . R_N$.

$R_T = \mu_s . P_y = 0.2.50 \cos(30) = 8.66$N, $P_x = 25$N, F = 33.66 N.



$b - \sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} + \vec{F} = m.\vec{a}$

Par projection sur l'axe Ox: $F' - Px - R'_T = m.a \Rightarrow$ (1'')

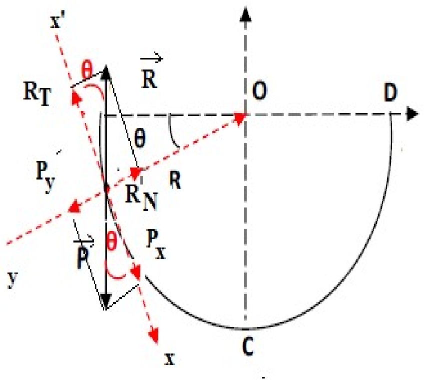
Par projection sur Oy: $P_y - R_N = 0 \Rightarrow P_y = R_N$ (2'')

Sachant que $\mu_c = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = \mu_s . P_y = 0.1 \times 50 \times \cos(30) = 4.33$ N

D'après (1''), $a = F' - Px - \frac{R'_T}{m} \Rightarrow$ a = 4.13 m/s^2.

Exercice 3

1- à l'équilibre $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$



Par projection sur xx': $P_x - R_T = 0$ (1)

Par projection Oy: $P_y - R_N = 0 \Rightarrow P_y = R_N$ (2)

Sachant que $\mu_{s} = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = \mu_S . R_N$

L'équation (1) $\Rightarrow mg\cos\theta_m = \mu_s mg\sin\theta_m$ d'où:

$\tan\theta_m = 1/\mu s = 1{,}731 \Rightarrow \theta_m = 59.98°$

2- La particule a été lâchée d'un angle $\theta > \theta m$, car elle est en mouvement.

Elle arrive à $\theta_N = \pi/3$.

$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$ Par projection sur x'x: $R_T = P_x - m.a_T$.

Par projection sur Oy: $-P_y + R_N = m.a_n$ (2')

$R_N = P_y + m.a_n = mg\sin\theta_N + m.\frac{v^2}{R}$ =0.96 N (1')

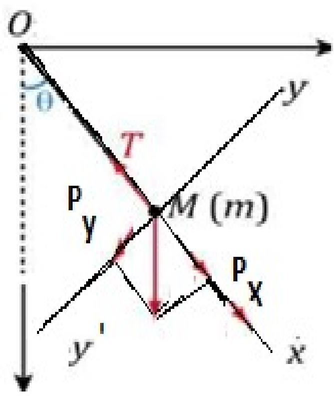
$$R_T = m.g.con\theta_N - m\sqrt{.(a^2 - a_n{}^2)}\ R_T = 0.24\text{ N}$$

Sachant que $\mu_c = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow \mu_c = 0.25$

Exercice 4

1- Le PFD dans ce référentiel galiléen est le suivant

$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = m.\vec{a}$



Par projection sur Ox: $-T + P_x = -m.a_n$, $-T + P.\cos\theta = -m.a_n$

Par projection sur yy': $P_y = -m.a_T \Rightarrow$ m g sin (θ)

m g sin (θ) = -mdV/dt avec $m.\frac{dv}{dt} = -m.\frac{d(l\dot{\theta})}{dt}$ d'où $mg\sin\theta = -ml\ddot{\theta}$

2- $g.\sin\theta = -l\ddot{\theta} \Rightarrow \frac{g}{l}\sin\theta + \ddot{\theta} = 0$

petites oscillations $\Rightarrow \theta$ est petit $\Rightarrow \sin\theta = \theta$

$\frac{g}{l}\theta + \ddot{\theta} = 0$: Equation différentielle du mouvement

la solution est de la forme: $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

A t = 0 s, t = 0, sin (ϕ) = 0, $\phi = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$

Exercice 5

1- $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt} = 6\vec{\imath} + (-12)\vec{\jmath}\left(\frac{m}{s^2}\right) \|\vec{a}\| = \frac{13.41m}{m^2}\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = 36\vec{\imath} - 72\vec{\jmath}\,,\quad M(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\Lambda\,\vec{\mathrm{F}}$

$$\overrightarrow{OM}\Lambda\,\vec{\mathrm{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3t^2 & -6t^2+6t & 3t+6 \\ 36 & -72 & 0 \end{vmatrix} = -72(3t+6)\vec{\imath} + 36(3t+6)\vec{\jmath} - 216t\vec{k}$$

2- $\vec{v} = 6t\vec{\imath} + (-12t+6)\vec{\jmath} + 3\vec{k}\vec{P} = m.\vec{v} = 36t\vec{\imath} + (-72t+36)\vec{\jmath} + 18\vec{k}$

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM}\Lambda\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3t^2 & -6t^2+6t & 3t+6 \\ 36t & (-72t+36) & 18 \end{vmatrix}$$

$$= \left(18\,(-6t^2+6t) - (3t+6)(-72t+36)\right)\vec{\imath} - \left(54t^2 - 36t(3t+6)\right)\vec{\jmath}$$

$$+\left(3t^2(-72t+36) - 36t(-6t^2+6t)\right)\vec{k}$$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = 36\vec{\imath} - 72\vec{\jmath} = \vec{F}.\ \frac{d\vec{L}}{dt} = -72(3t+6)\vec{\imath} + 36(3t+6)\vec{\jmath} - 216\mathrm{t}\,\vec{\mathrm{k}} = \overrightarrow{M(\vec{F})}$

Exercice 6

1- Appliquons la relation fondamentale de la dynamique pour calculer l'accélération des deux corps:

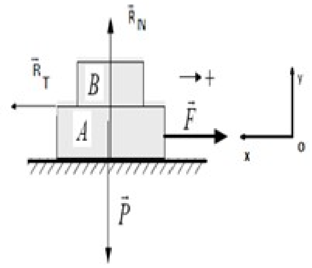
Pour le corps A: $\sum\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\,\vec{\mathrm{a}}$ (1)

$\vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{P}} + \vec{\mathrm{R}} = \mathrm{m}.\vec{\mathrm{a}}$ (2)

Projection sur Oy: P = R_{Ns} (3)

Projection sur Ox: F = m.a $\Rightarrow$ F = (m_a+m_b) a

a= F/ (m_a+m_b) (4)



Pour le corps B: $\vec{\mathrm{R}}_\mathrm{T} + \mathrm{P}_b + \mathrm{R}_{\mathrm{Na/b}} = \mathrm{m_b}.\vec{\mathrm{a}}$ (1')

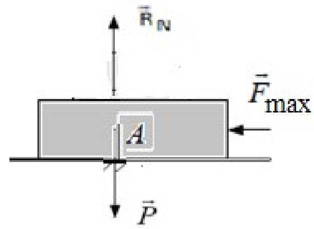
Par projection Ox: - R_T = m_b.a (2')

$\mu_s = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = \mu_s.R_N = \mu_s.P = \mu_s.m_b.g$ (3')

(2') et (3') $\Rightarrow \mu_s.m_b.g = m_b.a \Rightarrow -\mu_s.g = a$ (4')

D'après (4) et (4'): F= $-\mu_s$ g (m_a + m_b).

Le signe (-) montre que le corps est attiré dans le sens contraire au mouvement. F = m_S g (m_a + m_b) = 20 N.



2- D'après (4), a= F/ (m_a+m_b) = 2 m/s^2

3- Pour le corps A : $\sum\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\,\vec{\mathrm{a}}$ (1")

Projection sur Oy: P = R_{Ns} (3")

Projection sur Ox: F = m_a.a $\Rightarrow$ F = m_a.a

a = F/ m_a (4") $\Rightarrow$ a = 3.33 m/s^2

Exercice 7

$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\,\vec{a} \Rightarrow -\alpha m \frac{dx}{dt} = -\alpha m v = m \frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{v} = -\alpha d\,t \Rightarrow$ ln (v) = -α t+c $\Rightarrow$ à t = 0 ,$v = v_0$

C = ln (v_0) $\Rightarrow v = e^{(-\alpha t + ln v_0)} = v_0 e^{-\alpha t}$

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$ dx = v.dt $\Rightarrow x = \int v.dt$

$x = \frac{v_0}{-\alpha} e^{-\alpha t} + C_1$ à t = 0, $x_0 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{v_0}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{v_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$

Exercice 3

Pour montrer que la force dérive d'une énergie potentiel, il suffit de montrer que le rotationnel de F est nul $\vec{\nabla}\Lambda\vec{F} = \vec{0}$.

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & yz & Z(x,y) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - y\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - 2x\right)\vec{\jmath} = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - y\right) = 0 \text{ et } \frac{\partial Z}{\partial x} - 2x = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = y \Rightarrow \partial Z = y.\partial y \Rightarrow Z = \frac{y^2}{2} + C(x, c1)\ \ ,\frac{\partial Z}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x} = 2x \Rightarrow \partial C = 2x.\partial x \Rightarrow C = x^2 + C_1$$

$$Z = \frac{y^2}{2} + x^2 + C_1$$

$\vec{F}(x,y,z) = 2xz\,\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + \left(\frac{y^2}{2} + x^2 + C_1\right)\vec{k}$, F est nulle à l'origine $\Rightarrow C_1=0$

$$\vec{F}(x,y,z) = 2xz\,\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + \left(\frac{y^2}{2} + x^2\right)\vec{k}$$

Calcul de l'énergie potentielle:

$F_x = 2xz = -\frac{\partial E_p}{\partial x}(1), F_y = yz = -\frac{\partial E_p}{\partial y}(2), F_z = \frac{y^2}{2} + x^2 = -\frac{\partial E_p}{\partial z}(3)$

$(1) \Rightarrow E_p = -x^2 z + f(y,z)$

$(2) \Rightarrow yz = -\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} \Rightarrow f = -\frac{zy^2}{2} + g(z)$

$(3) \Rightarrow \frac{y^2}{2} + x^2 = \frac{y^2}{2} + x^2 - \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Rightarrow -\frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow g(z) = c$

$E_p = -\frac{y^2 z}{2} - x^2 z + C$, d'après la donnée E_p (0,0) =0, C=0, d'où $E_p = -\frac{y^2 z}{2} - x^2 z$

Exercice 4

1- Une force dérive d'une énergie potentiel

si $\vec{\nabla}\Lambda\vec{F} = \vec{0}$. $\vec{\nabla}\Lambda\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + \alpha z & \beta x - 3y - z & 4x + \gamma y + 2z \end{vmatrix} (\gamma + 1)\vec{\imath} - (4 - \alpha)\vec{\jmath} + (\beta - 2)\vec{\jmath} = \vec{0}$

$\gamma = -1, \alpha = 4, \beta = 2 \Rightarrow \vec{F}(x,y,z) = (x + 2y + 4z)\vec{\imath} + (2x - 3y - z)\vec{\jmath} + (4x - y + 2z)\vec{k}$.

2- pour calculer E_P, on écrit

$F_x = x + 2y + 4z = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$ (1) $\quad F_y = 2x - 3y - z = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$ (2)

$F_z = 4x - y + 2z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$ (3)

$(1) \Rightarrow E_p = -\frac{x^2}{2} - 2yx - 4zx + f(y,z), (2) \Rightarrow 2x - 3y - z = 2x - \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} \Rightarrow f = -3\frac{y^2}{2} + zy + g(z)$

$(3) \Rightarrow 4x - y + 2z = 4x - y - \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 2z \Rightarrow g(z) = z^2$

$E_p = -\frac{x^2}{2} + 3\frac{y^2}{2} + z^2 - 2yx - 4zx + zy + C$, E_p (0,0,0)=2 $\Rightarrow$C=2

$$E_p = -\frac{x^2}{2} + 3\frac{y^2}{2} + z^2 - 2yx - 4zx + zy + 2$$

Solutions des exercices: Section V

Exercice 1

1- V =57,6 Km/h ⇒ v= 16 m/s,En utilisant le théorème de l'énergie cinétique:

$\Delta E_c = \frac{1}{2}.m.v^2 = F.l \Rightarrow l = \frac{Mv^2}{2F} = 426{,}7\ m$

2- Calculons d'abord l'accélération a, à partir de l'équation: F= m.a ⇒ a= F/m.

a =0.3 m/s^2, a= cst ⇒ v = a.t ⇒$t = v/a \Rightarrow t = \frac{16}{0.3} = 53\ s$.

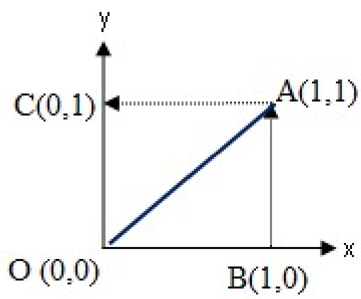
Exercice 2

1- La force F ne dérive pas d'une énergie potentielle carson rotationneln'estpas nul.

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{F} = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - x^2 & 4xy & 0 \end{vmatrix} = -2y\vec{k} \neq \vec{0}.$$

2- Calcul du travail de la force F

Entre O (0,0) et A (1,1)



$\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{\imath} + 4\,xy\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{dr} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

- Suivant la droite (OA): y=x ⇒ dx = dy⇒$W_{(OA)} = \int_O^A \vec{F}.\overrightarrow{dr}$

$W_{O\to A} = \int_O^A F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\ ,\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1 F_z = 0$

$W_{(OA)} = \int_O^B (y^2 - x^2).dx + 4\,x\,ydy = \int_O^B (\ 0).dx + 4\ y^2dy = \frac{4y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\ J, W_{(OA)} = \frac{4}{3}\ J.$

- Suivant (Ox) puis (Oy):de O à B, puis de B à A :

B (1,0),$W_{O\to B} = \int_O^B \vec{F}.\overrightarrow{dr}\ ,\ y = 0 \Rightarrow dy = 0{,}0 \le x \le 1,\ F_z = 0 \Rightarrow W_{O\to B} = \int_O^B F_x.dx$

$$W_{O\to B} = \int_O^B (x^2).dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}J$$

A (1,1),$W_{B\to A} = \int_B^A \vec{F}.\overrightarrow{dr}\ ,\ x = 1 \Rightarrow dx = 0 0 \le y \le 1\ ,\ F_z = 0 \Rightarrow W_{B\to A} = \int_B^A F_y.dy$

$$W_{B\to A} = \int_B^A (\ 4xy).dy = \frac{4xy^2}{2}\Big|_0^1 = 2J$$

$W_{O\to A} = W_{O\to B} + W_{B\to A}$ = ((1/3) + 2) J = (7/3) J

Solutions des exercices

Exercice 5

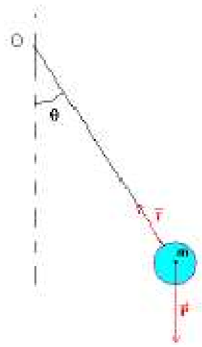
1- $W_{O\to A} = \int_O^A \vec{F}\,.\vec{dr} = \vec{F}.\vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 45J$

2- $P = \frac{W}{t} = \frac{45}{0.6} = 75\ W$

3- $\Delta E_c = w = 45J$

4- $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_F{}^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2,\ v_0 = 0,\ \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_F{}^2 = W, v_F{}^2 = \frac{2W}{m} \Rightarrow v_F = 3.87\ m/s$

Exercice 6



1- Em = Ec+Ep ,$\mathrm{Ec} = \frac{1}{2}\mathrm{m.v^2}$,$\mathrm{Ep} = \mathrm{mgl}(1-\cos\theta)$

$$\mathrm{Em} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\mathrm{L}\dot{\theta}\right)^2 + \mathrm{mgl}(1-\cos\theta)$$

2- $\frac{\partial \mathrm{Em}}{\partial \mathrm{t}} = 0 \Rightarrow \mathrm{ml}^{\,2}\dot{\theta}\ddot{\theta} + \mathrm{mgl}\,\dot{\theta}\,\sin\theta = 0 \ \Rightarrow \mathrm{l}\ddot{\theta} + \mathrm{g}\sin\theta = 0$

3- Pour les faibles oscillations: $\sin\theta = \theta$

$$\mathrm{l}\ddot{\theta} + \mathrm{g}\theta = 0 \ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}\theta = 0 \ \Rightarrow\ \omega = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}}, \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}}$$

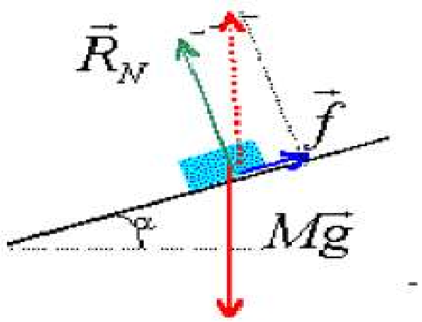
Exercice 7

1- Les forces exercées sont: le poids P, la réaction normale R_N et les force de frottements F.

2- D'après le principe de l'inertie, le mouvement du skieur étant rectiligne uniforme, ce dernier estpseudo isolé:$\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Par projection sur les axes du mouvement :F= Mg sinα

F= 90 x 9,8 x sin(14) = 213,3N, R_N= Mg cosα



3- Travail de la force F: W = F l cos 180 = - 213,3.100 = - 21 330 J.

4- Puissance P:$P = \vec{F}\vec{v} = F\ v\cos 180$, V = 19,44 m/s, P = -213,3 x 19,44 = -4146 W.

5- Le travail du poids est donc opposé au travail de la force F.

Solutions des exercices: Section VI

Exercice 1

1- $P = mg$ =0,8.9,8=7.84 N (1)

2- $F = GM_T m/{R_T}^2$ $=6{,}67\ 10^{-11}.\frac{5.98.10^{24} 0.8}{(6380.10^3)^2} = 7.84\ \mathrm{N}\ (2)$

3- Les deux résultats sont les mêmes $\Rightarrow$le poids $= \mathrm{GM_T m/{R_T}^2}$

4- (1) et (2) donnent: $g=GM_T/{R_T}^2$

Exercice 2

1- Le poids d'un corps: $P_0 = m.g_0$

2- $\mathrm{m} = \frac{P_0}{g_0} = \frac{500}{9{,}81} = 50.96\ \mathrm{Kg}$

3- $\mathrm{m.g_h = G\frac{M_{T}.m}{(R_{T}+h)^2} \Rightarrow g_h = G\frac{M_T}{(R_{T}+h)^2}x}$ (a)

$\mathrm{m\,.\,g_0 = G\frac{M_{T}.m}{{R_T}^2} \Rightarrow g_0 = G\frac{M_T}{{R_T}^2}}$ (b)

(a) et (b) donnent: $\frac{g_h}{g_0} = \frac{{R_T}^2}{(R_{T}+h)^2}$

$g_h = g_0.\frac{{R_T}^2}{(R_{T}+h)^2}$

$g_h = 9.81.\frac{\left(6400.10^{3^2}\right)}{(6400.10^3+4165)^2} = 9.79\ \mathrm{m/s^2}$

4- $\mathrm{P_h = G\frac{M_{T}.m}{(R_{T}+h)^2}}$ (c)

$\mathrm{P_0 = G\frac{M_{T}.m}{{R_T}^2}\ (d)}$

(c) et (d) donnent: $\frac{P_h}{P_0} = \frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2}$

$\frac{1}{9} =.\frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2} \Rightarrow 9{R_T}^2 = (R_T + h)^2$

$3R_T = R_T + h \Rightarrow h = 2\ R_T$

h = 12800 Km.

Exercice 3

1- $\mathrm{G_{sur\ I0} = G\frac{M_{I0}}{(R_{I0})^2}}$

$\mathrm{G_{sur\ I0}} = 6.67\ 10^{-11}.\frac{8.933.10^{22}}{(1.8.10^3)^2} = 1{,}84\ \mathrm{m/s^2}$

2- Le poids à la surface I_0**:** P_{I0} = m $g_{sur\ I0}$ =0,5 . 1,84 =0,92N

Le poids à la surface de la Terre: m. g_0 =0,5 .9,81 = 4.9

Le poids à la surface de la Terre est supérieurau poids à la surface I_0.

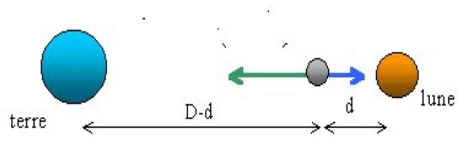
Solutions des exercices

Exercice 4

1- $F = G\frac{M_{T}.m}{d^2}$

2- $F' = G\frac{M_{lune}.m}{(D-d)^2}$

3- $G\frac{M_{T}.m}{(D-d_0)^2} = G\frac{M_{lune}.m}{{d_0}^2} \Rightarrow \frac{M_{T.}}{(D-d_0)^2} = \frac{M_{lune.}}{{d_0}^2}$



$\frac{M_{T.}}{M_{lune.}} = \frac{(D-d_0)^2}{{d_0}^2} \Rightarrow 83 = \frac{(D-d_0)^2}{{d_0}^2} \Rightarrow$

$9{,}11 = \frac{D-d_0}{d_0} \Rightarrow (D-d_0) = 9{,}11.d_0$

Do = 3841800 km

Exercice 5

1- Pricipe fondamental de la dynamique pour le satellite, soumis uniquement à la force de graviation de la Terre , dans le referentiel géocentrique:$-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u} = m.\vec{a}$

Par projection sur $\vec{u}$, nous avons: $-G\frac{Mm}{r^2} = -mr\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^3}$, $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{u}$donc $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

2- $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ donc $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$. Ce rapport est independant des caracteristiques du satellite , il est donc le meme piur tous les satellite de la Terre.

3- $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$et $E_p = -\frac{GMm}{r}$,$E_m = -\frac{GMm}{2r}$, E_m négative correspond à un état lié.

4- $T=T_T$ (le satellite fait un tour sur son orbite en meme temps que la Terre sur elle-même)

$$h = \left(\frac{GM{T_T}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R = 35800\ km = 6R$$

Exercice 6

1- le module de la force gravitationnelle subie par un objet de masse m s'écrit:

$$F = m\,g = G\frac{M_{T}.m}{{R_T}^2} \Rightarrow M_T = \frac{g{R_T}^2}{G},\ M_T = 5{,}96\,.\,10^{24}\ kg$$

2- La troisième loi de Kepler, appliquée à l'orbite terrestre s'écrit:

$$\frac{GM_S}{4\pi^2} = \frac{a^{\,3}}{T^2} \Rightarrow M_s = \frac{4\pi a^3}{{T_s}^2} \Rightarrow M_s = 2\ 10^{30}kg.$$

Exercice 7

1- $\vec{r} = a\vec{u} \Rightarrow \vec{v} = a\dot{\theta}\vec{n} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\dot{\theta}^2\vec{u}$

PFD : $\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow -G\frac{Mm}{a^2} = -m\frac{{V_0}^2}{a}\vec{u}$, d'où : $a{V_0}^2 = GM$

2- $T = \frac{2\pi a}{v_0} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{{v_0}^2} = \frac{4a^3\pi^2}{GM}$ d'où $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

3- $E_c = \frac{1}{2}m\,{V_0}^2 = \frac{1}{2}\frac{GM.m}{a} \Rightarrow E_c = -\frac{E_p}{2}$, $E_p = -\frac{GMm}{a}$, $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{GM.m}{a} - \frac{GMm}{a} = \frac{1}{2}\frac{GM.m}{a}$

Bibliographie

Bibliographie

1 : AlonsoFinn,

Cours de physique générale:

Tome I , Mécanique,

Presse de Sofia, Paris (1984)

2 : Bernard Gendreau

L'essentiel de la mécanique du point matériel,

Ed. Marketing, France (1993)

3 : Christian Gruber & Willy Benoit,

Cours de Mécanique général,

Presse polytechnique Romandes, Suisse (1997)

4 : Thierry Finot,

Ed. Phillips Marketing, PCSI-Physique, France (2013)

5 : G.Dévoré& R. Annequin,

Cours de physique,

Imprimerie Durand, France (1965)

6 : J. Boutigny,

Cours de physique,

Imprimerie Durand, France (1965)

7 : Y. Pironneau,

Mécanique, cinématique et cinétique,

Ed. Armand Colin, Paris (1970)