جامـــــــعة وهـــران 2

كلية العلــوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة

الإحصاء 2

لطلبة السنة الأولى (ل.م.د) جذع مشترك

ميدان العلوم الاقتصادية، التسيير والعلوم التجارية

مقدمة من طرف :

السيد: **شنوف صادق**

الرتبة: أستاذ محاضر " أ "

مارس 2022

مقدمــة

يسعدني أن أضع بين يدي طلاب السنة الأولى (ل.م.د) هذه المطبوعة في موضوع الإحصاء 1 الجزء الثاني الموجه أساسا لطلبة الجذع المشترك لميدان العلوم الاقتصادية، التسيير والعلوم التجارية (Domaine SEGC)، والموسوم بعنوان: " الإحصاء الوصفي: الجزء الثاني ".

في الجزء الأول، تناولنا كيفية إعداد جداول التوزيع التكراري العرض البياني ثم مفاهيم قاعدية وعامة حول خصائص النزعة المركزية والتشتت، أما الجزء الثاني نخصصه إلى الفصول الأساسية والضرورية في الإحصاء الوصفي على غرار مقاييس الشكل، الانحدار، الارتباط، التنبؤات والسلاسل الزمنية والمؤشرات الإحصائية (الأرقام القياسية)، وهي عناصر تشكل علبة وسائل ضرورية لميدان العلوم الاقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية في كافة تخصصاته، ومن هذا المنطلق فإننا نرى ضرورة إدراج الجزء الثاني في فلسفة وأساسيات البرنامج بما يتماشى والأهداف العلمية المسطرة، حيث بدون هذه الوسائل لا يمكن أن يتم تكوين متخصصين (في الاقتصاد، التجارة، المالية، المحاسبة و علوم التسيير) يستعملون الإحصاء لعدة غايات علمية.

أقدم هذه المطبوعة إلى الطلاب المبتدئين في دراسة علم الإحصاء، وقد راعيت فيها أن أناقش بشيء من التفصيل النواحي العملية المختلفة التي تسبق التحليل الرياضي للبيانات الإحصائية، حيث أنني لاحظت خلال السنوات التي قمت فيها بتدريس هذه المادة أن الطالب بسبب تركيز كتب الإحصاء على الناحية الرياضية لا يدرك أهمية النواحي العملية التي يتطلبها البحث الإحصائي.

و لا شك أن عدم إدراك الطالب لهذه النواحي يبعد عن ذهنه الهدف الأساسي من دراسته لعلم الإحصاء. إن الهدف الأساسي من تدريس طالب الاقتصاد أو التجارة أو التسيير أو المالية والمحاسبة هو تزويده بأسلوب في البحث العلمي يستطيع الاعتماد عليه كلما أراد بحث مشكلة من المشاكل بحثا علميا صحيحا.

نقدم هذه المطبوعة في الإحصاء الوصفي آملين أن تكون عونا لطلاب السنة الأولى. إذ حاولنا عرض مختلف الطرق المتعلقة بالإحصاء 1: الجزء الثاني، اعتمادا على مجموعة من المراجع التي تهتم بهذا الموضوع، وقد قسمناها إلى أربعة فصول، كل فصل منها مدعم بكثير من الأمثلة التوضيحية والتطبيقية التي تمكن من زيادة المكتسبات لدى الطالب.

فقد تناولنا في الفصل الأول مقاييس التشتت المطلقة والنسبية وطرق المقارنة بين تشتت الظواهر، وفي نهاية الفصل تطرقنا للعزوم ومعاملي الالتواء والتفرطح. وفي الفصل الثاني تناولنا موضوعي الانحدار والارتباط الخطيين، حيث انتقلنا في هذا الفصل الى دراسة العلاقة بين متغيرين من خلال معادلات الانحدار، ثم عالجنا الارتباط بين متغيرين بالنسبة للمعطيات الكمية من خلال قانون بيرسون **Pearson**.

أما في الفصل الثالث تناولنا موضوع السلاسل الزمنية**Séries temporelles ou chronologiques**، حيث تعرضنا إلى مفهوم السلسلة الزمنية و العوامل التي تؤثر فيها من اتجاه عام و تغيرات موسمية و تغيرات دورية و عرضية (عشوائية)، ثم بينا كيفية تخليص البيانات من أثر الاتجاه العام و أثر التغير الموسمية (تصحيح التغيرات الموسمية **CVS**: **Correction des Variations Saisonnières**).

وفي الفصل الرابع عالجنا موضوع الأرقام القياسية، فتناولنا الأرقام القياسية البسيطة والتجميعية والمرجحة بالنسبة للأسعار والكميات من خلال أرقام لاسبيرز**Laspeyres**، باش **Paasche** وفيشر **Fisher**.

إن المعلومات الواردة في كل فصل من الفصول السابقة، جاءت بصورة واضحة ومبسطة بحيث تسهل على القارئ فهمها واستيعابها لما تحتويه من تفسيرات اقتصادية وشروح تفصيلية.

ونحن نقدم هذه المطبوعة وكل رجاؤنا أن يجد فيها الطلبة ما يساعدهم على الإلمام بمبادئ الإحصاء 1 وتعميق معارفه ومكتسباته والتحضير الجيد لمختلف الامتحانات التي تخص هذه المادة.

ولا يفوتني في الخير أن أشكر لكل ناقد نصيحته سلفا تلك النصيحة التي تساعد في التطوير والتحسين.

والله ولي التوفيق

الفصل الأول
مقاييس الشكل

لقد رأينا فيما سبق أن التوزيع التكراري قد يمثل بقيمة متوسطة، ثم رأينا أن هذه القيمة لا تدل دلالة كافية على التوزيع وصفاته، فأرفقنا القيمة المتوسطة بمقياس التشتت.

ولإتمام الصورة يرفق الوصف السابق بمقياسين آخرين، الأول يقيس التواء منحنى التوزيع والثاني يقيس قمة منحنى التوزيع كونها حادة أو مفرطحة. وسندرس في هذا الفصل مقاييس الالتواء ومقاييس التفرطح، ونظرا إلى حاجتنا إلى تطبيق العزوم في دراسة مقاييس الشكل المذكورة، سندرس في لبداية العزوم، لأننا كما نعلم العزوم لها علاقة أساسية بعلم الفيزياء.

I. العزوم :

قبل أن نتطرق لهذه المعاملات نعطي لمحة بسيطة عن العزوم **Moments**. ونعرف العزم على أنه القوة في الذراع. ولا بد للعزم من مركز. فإذا حددنا المركز على أنه القيمة x_0 ومثلنا التكرار على أنه القوة؛ فإن العزم من الدرجة q للقيم x_i بالنسبة للمركز x_0 يساوي:

$$m_q = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - x_0)^q$$

إذا أخذنا $x_0 = 0$ فإننا نحصل على عزم بالنسبة للمركز 0 ويكون العزم من الدرجة 1 في هذه الحالة يساوي الوسط الحسابي أي:

$$m_1 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i = \bar{x}$$

ونكتب العزم من الدرجة q بالنسبة للمركز 0:

$$m_q = \frac{1}{N}\sum n_i {x_i}^q$$

مركز العزم x_0 لا بد أن يكون له مدلول معين، ويمكن أن نأخذ x_0 مساويا لأي مقياس من مقاييس النزعة المركزية. وبما أن الوسط الحسابي من أهم هذه المقاييس فإننا نأخذه كمركز ونكتب العزم من الدرجة q بالنسبة للوسط الحسابي:

$$\mu_q = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - \bar{x})^q$$

ونلاحظ في هذه الحالة أن العزم من الدرجة الثانية يعبر عن التباين الذي هو مربع الانحراف المعياري:

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\Sigma n_i (x_i - \bar{x})^2$$

بشكل عام نكتب العزم من الدرجة q بالنسبة للوسط الحسابي كما يلي:

$$\mu_q = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - \bar{x})^q$$

رأينا سابقا أن $\bar{x} = m_1$ ويمكننا أن نكتب إذا:

$$\mu_q = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - m_1)^q$$

نحاول كتابة العزوم μ بدلالة العزوم m لأننا سنستعملها في حساب مقاييس الالتواء و التفرطح.
لنحسب العزوم μ_2، μ_3 و μ_4:

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - m_1)^2 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i^2 - 2x_i m_1 + m_1^2)$$
$$= \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \frac{1}{N}2m_1\sum n_i x_i + \frac{1}{N}Nm_1^2$$
$$= m_2 - 2m_1^2 + m_1^2$$
$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$
$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - m_1)^3 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i^3 - 3x_i^2 m_1 + 3x_i m_1^2 - m_1^3)$$
$$= \frac{1}{N}\sum n_i x_i^3 - 3m_1\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 + 3m_1^2\frac{1}{N}\sum n_i x_i - \frac{1}{N}Nm_1^3$$
$$= m_3 - 3m_1 m_2 + 3m_1^3 - m_1^3$$
$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$$
$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - m_1)^4 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i^4 - 4x_i^3 m_1 + 6x_i^2 m_1^2 - 4x_i m_1^3 + m_1^4)$$
$$= \frac{1}{N}\sum n_i x_i^4 - \frac{1}{N}4m_1\sum n_i x_i^3 + \frac{1}{N}6m_1^2\sum n_i x_i^2 - \frac{1}{N}4m_1^3\sum n_i x_i + \frac{1}{N}\sum m_1^4$$
$$= m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 4m_1^4 + m_1^4$$
$$\mu_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4$$

تستعمل هذه العزوم لحساب مقاييس الشكل (الالتواء و التفرطح).

II. الالتـواء:

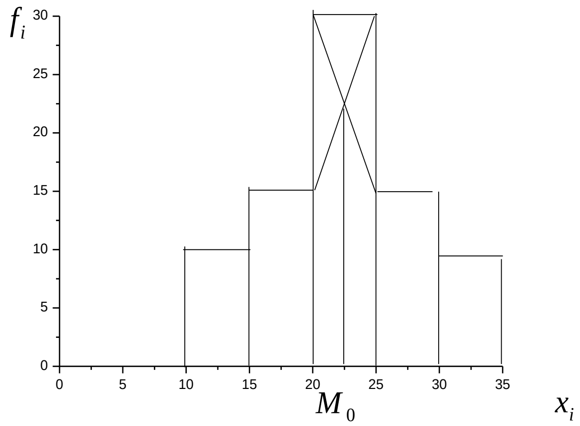
التناظر من الصفات التي تبحث عنها عند معاينتنا للأشكال، ويكون التناظر بالنسبة لمقياس أو محور ما.

بالنسبة للتوزيع التكراري فأن **التناظر يكون بالنسبة للمنوال** بحكمه القيمة التي تتكرر كثيرا والتي تعبر عن أكبر تكرار ومن ثمة يكون التوزيع التكراري متناظرا أو متماثلا إذا كان التكرار الموجود على يمين المنوال يساوي التكرار الموجود على يساره.

مثال 1:

الفئات	n_i
[10-15[	10
[15-20[	15
[20-25[	30
[25-30[	15
[30-35[	10
المجموع	**80**

لنرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع ونحدد المنوال بيانيا:



نلاحظ أن المنوال يساوي 22,5 ، وأن القيم الموجودة على يمين المنوال والقيم الموجودة على يساره متساوية: فالتوزيع التكراري متناظر أو متماثلDistribution symétrique.

عندما يكون التوزيع التكراري متناظرا يكون المتوسط الحسابي، المنوال والوسيط متساوين. لنحسب هذه المقاييس مستعملين الجدول الآتي:

الفئات	n_i	$nc_i\uparrow$	x_i	n_ix_i
[10-15[	10	10	12.5	125
[15-20[	15	25	17.5	262.5
[20-25[	30	55	22.5	675
[25-30[	15	70	27.5	412.5
[30-35[	10	80	32.5	325
المجموع	80	/	/	1800

$$Me = 20 + \frac{5}{30} \times 5 = 22,5$$

$$\bar{x} = \frac{1800}{80} = 22{,}5$$

$$M_0 = 20 + \frac{15}{15+15} \times 5 = 22{,}5$$

في التوزيع التكراري المتناظر يكون:

$$\bar{x} = Me = M_0$$

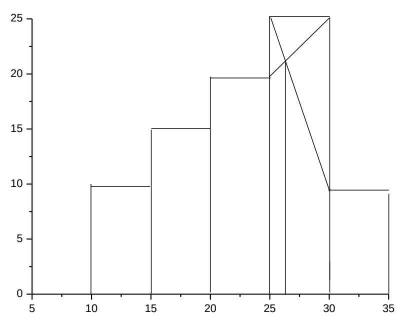
إذا لم يكن التوزيع متناظر فإنه يكون ملتو إما نحو اليمين أو نحو اليسار.

لتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

<u>مثال 2:</u>

الفئات	n_i
[10-15[	10
[15-20[	15
[20-25[	20
[25-30[	25
[30-35[	10
المجموع	**80**

الجدول يعطينا الشكل التالي:



نلاحظ أن القيم الموجودة على يسار المنوال أكثر من القيم الموجودة على يمينه. نقول أن هذا التوزيع ملتويا أو مائلا نحو اليسار Asymétrie à gauche.

نحسب الوسيط، المتوسط الحسابي والمنوال:

الفئات	n_i	$nc_i\uparrow$	x_i	n_ix_i
[10-15[	10	10	12.5	125
[15-20[	15	25	17.5	262.5
[20-25[	20	45	22.5	450
[25-30[	25	70	27.5	687.5
[30-35[	10	80	32.5	325
المجموع	80	/	/	1850

لنحسب مقاييس النزعة المركزية:

$$M_e = 20 + \frac{40-25}{20} \times 5 = 23{,}75$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \Sigma n_i x_i = \frac{1850}{80} = 23{,}12$$

$$M_0 = 25 + \frac{5}{5+15} \times 5 = 26{,}25$$

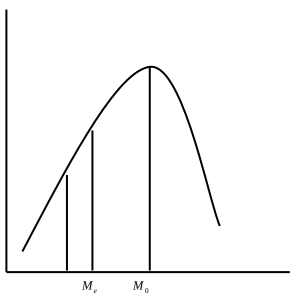
نلاحظ أن:

$$\bar{x} \prec M_e \prec M_0$$

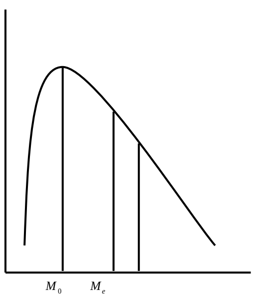
الوسيط يكون دائما محصور بين المتوسط الحسابي والمنوال سواء كانت التوزيع ملتويا –أي مائلا- نحو اليسار (الشكل 1) أو نحو اليمين (الشكل 2).

ويمكننا أن نميز الحالات التالية:

أ- في حالة الالتواء نحو اليمين يكون المعامل موجبا،
ب- ويكون سالبا إذا كان التواء نحو اليسار.
ت- في حالة التناظر يكون معمل التواء يساوي 0.



الشكل1



الشكل 2

لحساب الالتواء نستعمل هذه العلاقة الموجودة بين مقاييس النزعة المركزية الثلاث. ونقيس الالتواء بالمعاملات التالية:

- معـامل بيرسـون:

$$CP_1 = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma}$$

ويستعمل هذا المعامل في التوزيع غير المتناظر بشكل معتدل.

- **في حالة الالتواء: لدينا معاملين:**

1) <u>معامل بيرسون:</u>

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^{\ 2}}{\mu_2^{\ 3}}$$

في دراسة الالتواء من المهم جدا معرفة اتجاهه؛ والمعامل الذي يدل على هذا الاتجاه هو:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$$

ويكون موجبا في حالة التواء نحو اليمين وسالبا في حالة التواء نحو اليسار. إذا كان التوزيع متناظرا يكون عندنا:

$$\beta_1 = \gamma_1 = 0$$

ب- <u>معامل فيشر:</u>

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$$

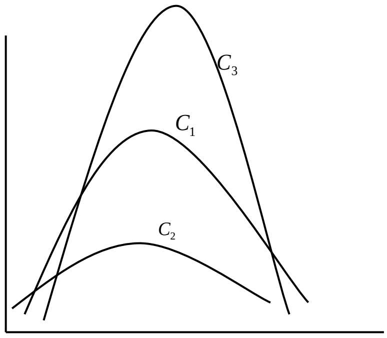
III. <u>التفـرطح:</u>

رأينا أن مقاييس الالتواء تعرفنا عن مدى تناظر التوزيع بالنسبة للمنوال، فإما أن يكون التوزيع متناظر، ملتو نحو اليمين أو نحو الشمال.

مكن أن نتساءل عن مدى انبساط التوزيع حسب محور (x) أو مدى تحدبه؛ وهذا يستلزم حساب مقاييس للشكل عير المقاييس السابقة.

هذه المقاييس التي تعطي مدى انبساط التوزيع التكراري أو تحدبه هي مقاييس التفرطح.

الشكل التالي يبن ذلك:



لدينا ثلاث منحنيات:

- المنحنى C_1 يبدو أكثر اعتدالا من المنحنين الآخرين. فلا هو منبسط ولا هو محدب، فهذا المنحنى يمثل ما يعرف بالتوزيع الطبيعي ونصفه على أنه على شكل جرس.
- المنحنى C_3 محدب؛
- والمنحنى C_2 منبسط.

وكلاهما حالة شاذة وغير طبيعية.

من أهم المقياس التي يقاس بها التفرطح لذا يمكن استعمال معاملات أخرى تعتمد على العزوم، وهي أكثر دقة رغم أنها أكثر صعوبة من ناحية الحساب.

- **في حالة التفرطح: لدينا معاملين:**

أ- <u>معامل بيرسون :</u>

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2}$$

هذا المقياس يساوي 3 في التوزيع الطبيعي، ويتغير من 1 إلى مالانهاية.

ب- <u>معامل فيشر :</u>

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

يكون هذا المعامل سالبا إذا كان التوزيع أقل تفرطحا من التوزيع الطبيعي؛ ويكون موجبا إذا كان التفرطح عكس ذلك.

لنوضح نأخذ مثالين، الأول لتبيان الالتواء والثاني لنبين التفرطح.

تمارين الفصل الأول

التمرين1:

لدينا الجدول التكراري التالي الذي يمثل علامات 50 طالب:

الفئات	n_i
[2-4[	2
[4-6[	3
[6-8[	4
[8-10[	10
[10-12[	12
[12-14[	11
[14-16[	8
المجموع	**50**

المطلوب: حساب معامل الالتواء لبيرسون.

التمرين2:

مثال 4:

لدينا الجدول التكراري التالي الذي يمثل علامات 23 طالب:

الفئات	n_i
[2-4[	2
[4-6[	3
[6-8[	4
[8-10[	5
[10-12[	4
[12-14[	3
[14-16[	2
المجموع	**23**

المطلوب: حساب معامل التفرطح لبيرسون.

حلول الفصل الأول

حل التمرين الأول:

لتحديد الالتواء حسب معامل بيرسون وفيشر. نحسب العزوم μ_2 و μ_3، ثم نحسب المعامل β_1 و γ_1؛ علما أن:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$$

جدول الحسابات كالتالي:

الفئات	n_i	x_i	$n_i.x_i$	${x_i}^2$	$n_i.{x_i}^2$	${x_i}^3$	$n_i.{x_i}^3$
[2-4[	2	3	6	9	18	27	54
[4-6[	3	5	15	25	75	125	375
[6-8[	4	7	28	49	196	343	1372
[8-10[	10	9	90	81	810	729	7290
[10-12[	12	11	131	121	1452	1331	15972
[12-14[	11	13	141	169	1859	2197	24167
[14-16[	8	15	120	225	1800	3375	27000
المجموع	**50**	**/**	**531**	**/**	**6210**	**/**	**76230**

$$\mu_2 = \frac{6210}{50} - \left(\frac{531}{50}\right)^2 = 11,2$$

$$\mu_3 = \frac{76230}{50} - 3\times\frac{531}{50}\times\frac{6210}{50} + 3\times\left(\frac{531}{50}\right)^2 = -41454,87$$

$$\beta_1 = \frac{{\mu_3}^2}{{\mu_2}^3} = \frac{\left(\frac{76230}{50}\right)^2}{\left(\frac{6210}{50}\right)^3} = 1,21$$

يوجد لدينا التواء لأنه لو لم يكن هناك التواء لكان المعامل $\beta_1 = 0$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{-41454,87}{(11,2)^{\frac{3}{2}}} = -1106,25$$

التفسير: القيمة التي وجدناها سالبة وهذا معناه أن التوزيع ملتو نحو اليسار.

حل التمرين الثاني:

المراحل اللازمة لحساب معامل التفرطح مبينة في هذا الجدول:

الفئات	n_i	x_i	$n_i.x_i$	${x_i}^2$	$n_i.{x_i}^2$	${x_i}^3$	$n_i.{x_i}^3$	${x_i}^4$	$n_i.{x_i}^4$
[2-4[	2	3	6	9	18	27	54	81	162
[4-6[	3	5	15	25	75	125	375	625	1875
[6-8[	4	7	28	49	196	343	1372	2401	9604
[8-10[	5	9	45	81	405	729	3645	6561	32805
[10-12[	4	11	44	121	484	1331	5324	14641	58564
[12-14[	3	13	39	169	507	2197	6591	28561	85683
[14-16[	2	15	30	225	450	3375	6750	50625	101250
المجموع	23	/	**207**	/	**2135**	/	**24112**	/	**289943**

نحسب μ_2 و μ_4 ثم المعامل β_2:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_2 = \frac{2135}{23} - \left(\frac{207}{23}\right)^2 = 11{,}82$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

$$\mu_4 = \frac{289943}{23} - 4\times\frac{207}{23}\times\frac{24112}{23} + 6\left(\frac{207}{23}\right)^2\frac{2135}{23} - 3\times\left(\frac{207}{23}\right)^4 = 296{,}17$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{296{,}17}{11{,}82^2} = 2{,}11$$

التفسير: نعرف أنه في حالة التوزيع الطبيعي يكون هذا المعامل يساوي 3وبما أن التوزيع الموجود لدينا "مضغوط" أكثر من التوزيع الطبيعي فإن قيمة معامل التفرطح التي وجدناها كانت متوقعة.

ملاحظة: يمكن حساب معاملي الالتواء والتفرطح لفيشرو التحقق من أنها تعطينا نفس الاستنتاج وبطبيعة الحال تختلف النتائج.

الفصل الثاني
الانحدار والارتباط

إن التوزيعات التكرارية التي تمت دراستها حتى الآن تتعلق بمعطيات تخص متغير واحد كقيمة مشتركة لجميع عناصر المجتمع (أجور العمال، أطوال الطلبة، نقاط في مادة ما...).

وغالبا ما يحدث في الواقع أن تتعلق بيانات مجموعة إحصائية بعدة صفات في آن واحد.
لهذا سوف نشرع في هذا الفصل بدراسة بعض الأمور التي تتعلق بمتغيرين في آن واحد (كالوزن وللقامة لمجموعة من الطلبة، رقم الأعمال وعدد العمال لمؤسسة ما، حجم المبيعات والتكاليف...).

إذن هذا الفصل يحتوي أساسا على مدخل في الانحدار الخطي البسيط والارتباط الخطي البسيط. ويتضمن على الأدوات الضرورية لدراسة العلاقة الموجودةبين متغيرين يكون أحدهما تابع والآخر مستقل.

I. الانحدار الخطي البسيط: Régression linéaire simple

تقتصر دراسة الانحدار الخطي البسيط على العلاقة الخطية بين متغيرين فقط. إن كلمة خطي تعني أن نسبة الزيادة في المتغير المستقل تساوي بالتقريب نسبة الزيادة في المتغير التابع، بمعنى أن سحابة النقاط الممثلة للقيم الحقيقية للمتغيرين تتبع خط مستقيم بالتقريب.

لدراسة العلاقة الموجودة بين متغيرين نمر بالمراحل التالية:

أ. تحديد المتغير التابع المدروس: ولهذا يجب وصف وتحديد المتغيرين بدقة وهذا باستعمال الإحصائيات الموجودة لدينا حتى نصل إلى تحديد المتغير الأكثر تأثيرا (المستقل).
ب. تحديد نوع العلاقة الموجودة بين المتغيرين: أي تحديد اتجاه المتغيرين. هذا الاتجاه يمكن أن يكون طردي (نفس الاتجاه) أو عكسي (اتجاه معاكس).
ج. وضع النموذج الرياضي للظاهرة الإحصائية وهذا بعد ما يتم تشكيل الكوكبة أو سحابة النقاط الممثلة للقيم (x,y).
هذه السحابة يمكن أن تأخذ عدة أشكال: خطية، أسية، لوغاريثمية...أي شكل يمكن صياغته على شكل نموذج رياضي.

كما قلنا في هذا الفصل نكتفي ب**الشكل المستقيم** من النقاط والذي يقع بالتقريب على استقامة واحدة. ففي هذه الحالة نلاحظ أن الشكل الرياضي المناسب هو الخط المستقيم.

لوضع هذا المستقيم لابد من توفير شرطان أساسيان:

1) يجب أولا أن يمر هذا المستقيم على النقطة المركزية $(\bar{x}, \bar{y})$.
2) يجب أن تكون المسافات التي تفصل بين نقاط الكوكبة و نقاط خط المستقيم **أقل ما يمكن Min.**

1. التعديل الخطي: Ajustement linéaire

ليكن : $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$
$(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$

إذا كان المتغير المستقل (x_i) والمتغير التابع (y_i) يمكن توفيق مستقيم على الكوكبة بالمعادلة التالية:

D : y/x $y_i = ax_i + b$

هذا المســتقيم يســمى بمســتقيم الانحدار أو مســتقيم التقدير. تمكننا هذه المعادلة من تقدير قيمة yعندما تكون قيمة xمعلومة. ويمثل الثابت أو المعامل a ميل خط الانحدار أو معامل الانحدار أما المعامل b فيشكل مقدار ثابت.

يتم تحديد القيمتين aو b باستعمال **طريقة المربعات الصغرى.**

2. **طريقة المربعات الصغرى:** **Méthode des Moindres carrés**

تتمثل هذه الطريقة في جعل الفروق بين نقاط الكوكبة و نقاط المســتقيم **أقل ما يمكن Min** حتى تتطابق مع هذا الخط. و يمكن كتابة هذه العلاقة كما يلي y_i:

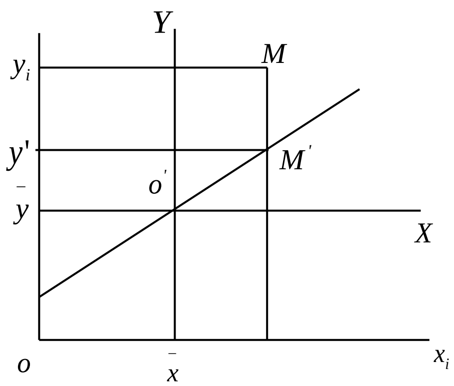
$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{'})^2 = \sum Min$$

في هذه الطريقة يتعين علينا إيجاد معادلة حسابية تجمع النقاط الغير المنتظمة. نفترض معادلة نظرية ثم نحاول تقريب النقاط غير المنتظمة من التمثيل البياني الذي يمثل المعادلة النظرية التي تم افتراضها[1].

فيما يتعلق بالمثال الذي أخذناه فإننا نفترض أن المعادلة النظرية خطية وذلك لأن الاتجاه العام للعلاقة الموجودة بين الظاهرتين المدروستين خطي.

البحث عن هذه المعادلة الخطية يتم بطريقة المربعات الصغرى. وتتمثل في رسم مستقيم نظري نفترض أنه يمر بأكبر عدد من النقاط ومن ثم تقليل المسافة أو الانحراف الذي يفصل النقاط المتباعدة عن المستقيم النظري بهدف تقريبها منه.

نستعمل الرسم البياني الموالي لنوضح ذلك:



المعادلة النظرية التي رسمناها هي معادلة خطية:

[1]-المعادلة التي نفترضها يجب أن تكون قريبة من الاتجاه العام الذي تأخذه مجموعة النقاط.

$$D : y/x \quad y_i = ax_i + b$$

في المرحلة الثانية يجب أن نقلل من المسافة التي تفصل نقاط الكوكبة البعيدة عن المستقيم. نأخذ النقطة M كمثال ثم نعمم على باقي النقاط.

بالنسبة للنقطة M فأن الانحراف الذي نريد تقليصه يساوي قيمة (ع) النقطة M ناقص قيمة (ع) الخاصة بإسقاط النقطة Mعلى المستقيم أي MM' و هو القيمة: $y_i - y'$

قيمة (ع) النقطة M المنحرفة عن المستقيم نرمز لها بالحرف y_i أما (ع) النقطة M' فنرمز لها بالحرف y'و هي القيمة النظرية الموجودة على المستقيم، ونكتبها $y' = ax_i + b$ لأنها موجودة على المستقيم النظري. يكون انحراف MM' يساوي:

$$y_i - y' = y_i - ax_i - b$$

نأخذ مجموع انحرافات كل النقاط غير الموجودة على المستقيم بالنسبة لإسقاطاتها. يكون لدينا:

$$\sum(y_i - y') = \sum(y_i - ax_i - b)$$

ثم نأخذ مربع هذه الانحرافات[2]ونكتب:

$$\sum(y_i - ax_i - b)^2$$

و نبحث عن:

$$Min\sum(y_i - ax_i - b)^2$$

لكي نتخلص من الثابت b نلجأ إلى تغيير المعلم $x0y$ بالمعلم $X0'Y$ الذي يمر بالضرورة بالوسطين الحسابيين $\bar{x}$ و $\bar{y}$ويصبح لدينا المتغيرات:

$$\begin{cases} X_i = x_i - \bar{x} \\ Y_i = y_i - \bar{y} \end{cases}$$

فإذا أردنا البحث عن $Min\sum(y_i - ax_i - b)^2$ بالنسبة للمعلم $X0'Y$ يكون لدينا:

$$y_i - y' = y_i - Y_i$$

مع العلم أن $Y_i = ax_i$

ونكتب:

---

2 - لأن مجموع مربع الانحرافات يكون أقل مما يمكن Min.

$$Min\sum(y_i - ax_i - b)^2 = Min\sum(Y_i - aX_i)^2$$
$$= Min\sum(Y_i^2 - 2aY_iX_i + a^2X_i^2)$$

لكي تكون هذه القيمة Min أي اقل ما يمكن يجب أن تكون المشتقة الأولى بالنسبة ل a[3]تساوي الصفر ويكون لدينا:

$$\frac{\delta Q}{\delta a} = 0$$

$$\sum(-2X_iY_i - 2aX_i^2) = 0$$

و منه:

$$a = \frac{\sum X_iY_i}{\sum X_i^2}$$

نعوض X_i و Y_i بقيمتيهما فنحصل على :

a يسمى معامل الانحدار أو معمل التقدير (الميل).

علاقة التعريف (1)

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

أما الثابت b يحسب كما يلي :

$$y_i = ax_i + b$$

$$\Rightarrow \sum y_i = \sum(ax_i + b)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb$$

نقسم الطرفين على n :

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = a.\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} x_i + \frac{nb}{n}$$

ثم نستنتج قيمة الثابت b:

$$\Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$$

هذا القانون الذي برهنا عنه يسمى **القانون المباشر أو علاقة التعريف.**

3 - نشتق بالنسبة ل a لأنه هو المتغير أما القيم X_i و Y_i فإنها معلومة من الجدول.

القانون المنشور أو علاقة كونينغ **Koning** :

هذا القانون سنبرهن عليه انطلاقا من القانون المباشر لدينا:

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

نقوم بنشر البسط:

$$\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum(x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x}\bar{y})$$
$$= \sum x_i y_i - \bar{y}\sum x_i - \bar{x}\sum y_i + n\bar{x}\bar{y}$$
$$= \sum x_i y_i - n\bar{y}\bar{x} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y}$$
$$= \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

ثم نقوم بنشر المقام:

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = \sum(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$$
$$= \sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\bar{x}^2$$
$$= \sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2$$
$$= \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$$

ومنه يصبح لدينا: القانون **المنشور وعلاقة Koning (2) و (3)**

$$a = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad (2)$$

إذا قسمنا البسط و المقام على n نحصل على :

$$a = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \frac{n\bar{x}\bar{y}}{n}}{\frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{n\bar{x}^2}{n}}$$

$$a = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}.\bar{y}}{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} = \frac{Cov(x,y)}{\delta_x^2} \, (3)$$

Cov(x,y) = التباين المشترك بين x و y.

تباينx= $V(x) = \delta_x^2$

لحساب معادلة الانحدار لما يكون (y_i) هو المتغير المستقل و (x_i) المتغير التابع نستخدم كذلك طريقة المربعات الصغرى لتحديد معالم النموذج:

D : x/y $\quad x_i = a' y_i + b'$

علاقة التعريف(1)

$$a' = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \, (1)$$

ومنه يصبح لدينا: **القانون المنشور أو علاقة كونينغ (2) و (3)**

$$a' = \frac{\sum x_i y_i - N \bar{x} \bar{y}}{\sum y_i^2 - N \bar{y}^2} \, (2)$$

$$a' = \frac{Cov(x,y)}{V(y)} = \frac{Cov(x,y)}{\delta_y^2} \, (3)$$

Cov(x,y) = التباين المشترك بين x و y.

تباين y= $V(Y) = \delta_Y^2$

ثم نستنتج قيمة الثابت b':

$$\Rightarrow b' = \bar{x} - a \bar{y}$$

تنبيه : للحساب يجب استخدام القانون الأكثر فائدة من وجهة نظر في الحسابات و من الأفضل استخدام القانون المنشور (3). و كل شيء يتعلق بالمعطيات التي تكون لدينا في البداية.

مثال رقم 1 :

لدينا المتغيرين **x** و **y**: حيث أن **x** يمثل الدخل الشهري و **y** يمثل النفقات الشهرية بمليون سنتيم ل**6** أسر حسب الجدول التالي:

54	15	12	09	07	06	05	**Xi**
42	12	08	07	06	05	04	**y_i**

المطلوب :

1- أوجد معادلة انحدار النفقات على الدخل Y/X (باستخدام علاقة التعريف).
2- قدر النفقات إذا كان الدخل يساوي 20 مليون سنتيم.
3- أوجد معادلة انحدار الدخل على النفقات X/Y (باستخدام علاقة التعريف). .
4- قدر الدخل إذا كانت النفقات تساوي 35 مليون سنتيم.
5- حساب التباين المشترك بين x وy. فسر النتيجة.

الحل :

$$\bar{x}=\frac{54}{6}=9 \quad \bar{y}=\frac{42}{6}=7$$

$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})$	y_i	x_i
9	12	-3	16	-4	04	05
4	6	-2	9	-3	05	06
1	2	-1	4	-2	06	07
0	0	0	0	0	07	09
1	3	1	9	3	08	12
25	30	5	36	6	12	15
40	**+ 53**		**74**		**42**	**54**

حساب المتوسطان الحسابيان ل x و y:

$$\bar{x}=\frac{54}{6}=9 \quad \bar{y}=\frac{42}{6}=7$$

1- **معادلة انحدار النفقات على الدخل** Y/X **:** (باستخدام علاقة التعريف).

D : y/x $\quad y_i = ax_i + b$

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{+53}{74} = +0,716$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 7 - (0,716 \times 9) = 0,556$$

وتكون المعادلة التي نبحث عنها هي:

$$y_i = 0,716x_i + 0,556$$

وتعبر عن العلاقة النظرية الموجودة بين الظاهرتين X و Y.

العلاقة التي وجدناها هي دالة $y = f(x)$ أي أن الظاهرة Y تتغير بدلالة الظاهرة Y و تعبر عن العلاقة عن الانحدار Y/X.

2- تقدير النفقات إذا كان الدخل يساوي 20 مليون سنتيم :

إذا كان x = 20 $\Rightarrow y = 0,716(20) + 0,556 = 14,876 \approx 15$

3- معادلة انحدار الدخل على النفقات X/Y : (باستخدام علاقة التعريف).

D : x/y $\quad x_i = a'y_i + b'$

يمكن أن نريد معرفة الانحدار X/Y الذي يعبر عن تغيير الظاهرة Y بدلالة الظاهرة X، فيجب أن نبحث عن دالة $x = f(y)$.

نستعمل نفس الطريقة ونجد في هذه الحالة أن الميل هو:

$$a' = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{+53}{40} = +1,325$$

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 9 - (1,325 \times 7) = -0,275$$

وتكون المعادلة التي نبحث عنها هي:

$$x_i = 1,325y_i - 0,275$$

4- تقدير الدخل إذا كانت النفقات تساوي 35 مليون سنتيم:

إذا كان $yi = 35 \Rightarrow x = 1{,}325(35) - 0{,}275 = 46{,}1 \approx 46$

5- حساب التباين المشترك بين x وy. مع تفسير النتيجة :

$$Cov(x,y) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{+53}{6} = +8{,}833$$

<u>التفسير :</u> $0 \rangle$ **Cov(x,y)** موجب $\Leftarrow$ علاقة طردية معنى ذلك أن المتغيران xوy يتغيران في نفس الاتجاه.

II. <u>الارتباط الخطي</u>:Coefficient de corrélation

لدراسة الارتباط نستعين بالانحدار. نبحث عن انحدار الظاهرةY بالنسبة للظاهرة Xو عن انحدار الظاهرة X بالنسبة للظاهرة Y.

بما أن كل ظاهرة تتغير بدلالة الأخرى فإن هذا يؤدي ألا وجود ارتباط بين الظاهرتين.

رأينا أن:

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

و أن:

$$a' = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

نحصل على معامل الارتباط بالعلاقة التالية:

$$r = \sqrt{a.a'} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

بمعنى أن:

$$r^2 = a.a'$$

لنبرهن على هذا نفترض $b = b' = 0$

نكتب إذا:

$$y = ax \quad (1)$$
$$x = a' y \quad (2)$$

نعوض (2) **في** (1) **نجد أن** $a.a' = 1$ **أي** $r^2 = 1$

و يكون معامل الارتباط r **محصورا بين 1+ و 1– .**

-إذا كان معامل الارتباط قريبا من $|1|$ فإن الارتباط يكون قويا.

-إذا كان معامل الارتباط قريبا من 0 فإن الارتباط يكون ضعيفا.

أما عن إشارة معامل الارتباط فإنها تدلنا عن الاتجاه. فإذا كانت الظاهرتان تتغيران في نفس الاتجاه هذا معناه أن الإشارة موجبة و يكون الارتباط طردي ؛ أما إذا كانت الظاهرتان تتغيران في اتجاه عكسي تكون الإشارة سالبة و يكون الارتباط عكسي.

في العلاقة:

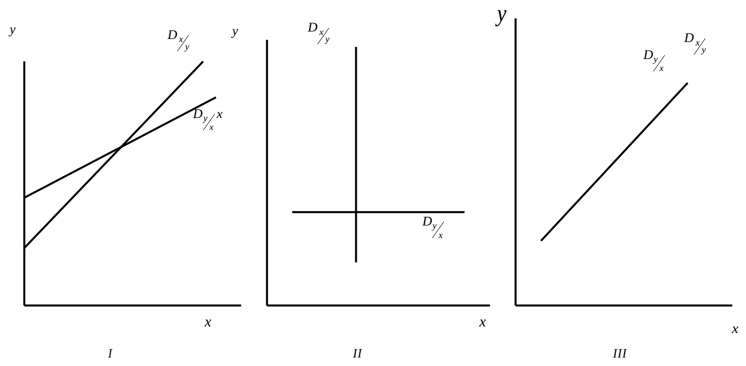
$$r = \sqrt{a.a'} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

يكون المقام دائما موجبا، والذي يحدد إشارة **r** هو البسط إذا.

بيانيا نحصل على مستقيمين قد يتقاطعان وقد يتطابقان.

- إذا كان المستقيمان متعامدان يكون(الشكل **II**) لدينا $a.a' = 0$ ومعناه أنه لا يوجد ارتباط بين الظاهرتين لأن اتجاه المستقيم $y = f(x)$ ليس له أي علاقة باتجاه المستقيم $x = f(y)$.
- إذا كان المستقيمان متطابقان (الشكل **III**) يكون $aa' = 1$

بشكل عام كلما كان المستقيمان متقاربين كلما كان الارتباط قويا (الشكل).



نرجع إلى المثال السابق و نحسب معامل الارتباط :

$$r=\sqrt{a.a'}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{+53}{\sqrt{74\times 40}}=+0{,}974$$

وبعبارة أخرى:

$$r=\sqrt{aa'}=\sqrt{0{,}716\times 1{,}325}=\pm 0{,}974$$

فالارتباط إذن قوي. لتحديد إشارة معامل الارتباط يجب أن نلاحظ اتجاه تغيير الظاهرتين. يأخذ إشارة الميل a و a'.

عندما نحسب معامل الارتباط لا يجب ألا نكتفي بالنتيجة وإنما يجب أن نبحث عن التفسير المنطقي للنتيجة التي وجدناها.

لذا يجب التمعن جيدا في تفسير معامل الارتباط، والتأكد من أن الظواهر المدروسة بينها علاقات سببية فعلا.

زيادة على هذا يجب أن نفرق بين الارتباط كشيء ممكن (يزيد الطول مع الوزن بشكل عام أو في أغلب الحالات) وبين القوانين الفيزيائية مثلا (يزيد تمدد المعدن مع زيادة الحرارة). القانون الثاني برهان علمي صالح لكل زمان ومكان، والعلاقة بين تمدد المعادن وزيادة الحرارة لا تعبر عن ارتباط لأنها قانون علمي. ما قد نسميه ارتباطا في هذه الحالة يساوي 1 لأننا نكون متأكدين من وجود العلاقة كاملة. إنما يكون الارتباط بين الظواهر التي لا تخضع للقوانين العلمية.

III. **معامل التحديد**: Coefficient de détermination

هو مربع معامل الارتباط :

$$r^2_{x,y}=a.a'$$

معامل التحديد مقياس يبين أو يقيس مدى تأثير المتغير المستقل (x_i) على المتغير التابع (y_i).

ملاحظة : $0\le r^2_{x,y}\le 1$

نرجع إلى المثال السابق و نحسب نحسب معامل التحديد :

$$r^2_{x,y} = (0{,}974)^2 = 0{,}948 \times 100 = 94{,}8\%$$

التفسير :

يمكن القول إن تغيرات الإنفاق (y_i) ترجع بنسبة 94,8% إلى تغيرات الدخل (x_i) أما النسبة الباقية وهي (100- 94.8 = 5,2%) ترجع إلى عوامل أخرى غير مدرجة في المعادلة (نجهلها).

تمارين الفصل الثاني

التمرين1:

لتكن السلسلة الإحصائية التالية التي تمثل نفقات (تكاليف) البحث (X) والربح (Y):

نفقات البحث X	40	42	26	45	60
الربح Y	50	60	40	50	80

المطلوب:

1- أوجد معادلة مستقيم الانحدار Y على X ثم معادلة مستقيم الانحدار X على Y.
2- أحسب معامل الارتباط الخطي بين X و Y. فسر النتيجة.
3 - إذا افترضنا أن الظاهرة تتبع نفس التطور في المستقبل، حدد قيمة الربح لما تكون قيمة نفقات البحث تساوي **80**.

التمرين2:

إن الجدول التالي يعطي استهلاك سلعتين X و y خلال 11 شهر:

استهلاك X	70	50	51	40	41	55	56	52	58	60	65
استهلاك y	50	69	70	80	81	65	66	67	64	65	67

المطلوب: دراسة اتجاه و شدة العلاقة (إن وجدت) بين المتغيرين X و y عن طريق تحديد كل من :

1) التباين المشترك بين X و y.

2) معامل الارتباط الخطي لبيرسون $r_{x,y}$.

3) معامل التحديد $r^2_{x,y}$.

مع تفسير و تحليل النتائج (المعنى الإحصائي ثم المعنى الاقتصادي).

التمرين3:

لدينا الإحصاءات التالية حول متوسط سعر البترول ومعدلات النمو الاقتصادي في الجزائر خلال الفترة 1989/1980:

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
سعر البترول (دولار)	35,19	39,54	35,50	30,60	29,67	29,11	14,18	18,72	16,26	18,41
معدل النمو الاقتصادي	0,9	3,6	4,0	5,6	4,1	5,2	1,0	−1,1	−1,8	−2,9

المطلوب: أوجد :

1) معادلة الانحدار Y على X .
2) معامل الارتباط الخطي. معامل التحديد.
3) تأكد من جودت معادلة الانحدار Y على X.
4) استخدمها في التنبؤ عندما سعر البترول (X) يكون مساويا 10 دولار ثم عندما يكون مساويا 30 دولار. مع تفسير و تحليل النتائج.

التمرين4:

لدينا ثلاث متغيرات Z,Y,X:

X:مؤشر ثمن الصادرات للبترول الخام للإمارات العربية المتحدة، ملاحظ بمتوسط حسابي سنوي بالدولار الأمريكي(أساس 100 في سنة 1975).

Y: ثمن الذهب ملاحظ في آخر السنة في لندن بالدولار الأمريكي.

Z: ثمن الدولار الأمريكي المعبر عنه بحقوق السحب الخاصة ملاحظ في آخر السنة.

السنوات	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
سعر البترول	14,7	17,6	19,8	27,6	98,2	100,0	107,1	115,8	119,1	7,971
سعر الذهب	37,37	43,63	64,90	112,25	186,50	140,25	134,75	164,95	226,00	512,00
سعر الدولار	1	0,921	0,921	0,829	0,817	0,854	0,861	0,823	0,768	0,759

المصدر: صندوق النقد الدولي (FMI)

المطلوب:

1. احسب معامل الارتباط بين **X** و **Y**: **r(x, y)** ثم قارنه مع معاملات الارتباط الأخرى **r(x, z) = 0,817** و**r(y, z) = 0,776**.
2. أوجد معادلة الانحدار التي تربط بين سعر الذهب **(y)** وسعر البترول **(x)** السابق.
3. في بداية سنة **1980** وبالخصوص في الثلاثي الأول، رجل أعمال تعرف من مصدر موثوق بأن سعر البترول سيرتفع إلى مستوى **265,2**، كم سيكون سعر الذهب في تلك الفترة؟

التمرين5:

لدينا المتغيرين X و Y حيث أن X يمثل الدخل العائلي الشهري بآلاف الدنانير و Y يمثل النفقات الشهرية بآلاف الدنانير. لدينا 10 عائلات حسب الجدول التالي:

الدخل X_i	52	57	62	67	72	77	82	87	92	97
النفقات Y_i	44	51	58	62	65	67	69	70	72	73

المطلوب:

1- اوجد معادلة انحدار النفقات على الدخل. ثم احسب معامل الارتباط بين X و Y مع تفسير النتيجة.
2- إذا كان Z هو الادخار و علمنا أن: $X_i = Y_i + Z_i$ اثبت أن $\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$.
3- اوجد معادلة انحدار الادخار على الدخل ، ثم احسب معامل التحديد بين الادخار والدخل .
4- احسب التباين المشترك بين النفقات و الادخار.

حلول الفصل الثاني

حل التمرين 1:

نفقات البحث Xi	الربح Yi	Xiyi	x_i^2	y_i^2
40	50	2000	1600	2500
42	60	2520	1764	3600
26	40	1040	676	1600
45	50	2250	2025	2500
60	80	4800	3600	6400
213	280	12610	9665	16600

.1 معادلة مستقيم الانحدار Y على X: $Y_i = ax_i + b$

نحدد قيمة الثابتين a و b :

$$a = \frac{\operatorname{cov}_{xy}}{\delta_x^2}.$$

$$\operatorname{cov}_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{N} = \frac{213}{5} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 42,6}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{280}{5} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 56}$$

$$\operatorname{cov}_{xy} = \frac{12610}{5} - 42,6 \times 56 \Rightarrow \boxed{\operatorname{cov}_{xy} = 136,4}$$

$$\delta_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{9665}{5} - (42,6)^2 \Rightarrow \boxed{\delta_x^2 = 118,24}$$

$$a = \frac{136,4}{118,24} = 1,153 \Rightarrow \boxed{a = 1,153}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 56 - (1,153 \times 42,6) \Rightarrow \boxed{b = 6,88}$$

معادلة مستقيم الانحدار Y على X: $\boxed{y_i = 1,153x_i + 6,88}$

معادلة مستقيم الانحدار Xعلى Y:

$$x_i = a'y_i + b'$$

نحدد قيمة الثابتين **a'** و **b'** :

$$a' = \frac{\text{cov}_{xy}}{\delta_y^2}.$$

$$\delta_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{16600}{5} - (56)^2 \Rightarrow \boxed{\delta_y^2 = 184}$$

$$a' = \frac{136,4}{184} = 1,153 \Rightarrow \boxed{a = 0,741}$$

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 42,6 - (0,741 \times 56) \Rightarrow \boxed{b' = 1,104}$$

معادلة مستقيم الانحدار Xعلى Y: $\boxed{x_i = 0,741 y_i + 1,104}$

2- معامل الارتباط الخطي بين Xو Y: (r_{xy})

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}_{xy}}{\delta_x \delta_y} = \frac{136,4}{\sqrt{118,24}\sqrt{184}} \Rightarrow \boxed{r_{xy} = 0,924}$$

العلاقة بين نفقات البحث والربح طردية وقوية جدا قريبة من التطابق.

3- تحديد قيمة الربح: $\boxed{y_i = 1,153 x_i + 6,88}$

$$x = 80$$

$$y = (1,153 \times 80) + 6,88 \Rightarrow \boxed{y = 99,12}$$

حل التمرين 2:

استهلاك x	استهلاك y	$xiyi$	x_i^2	y_i^2
70	50	3500	4900	2500
50	69	3450	2500	4761
51	70	3570	2601	4900
40	80	3200	1600	6400
41	81	3321	1681	6561
55	65	3575	3025	4225
56	66	3696	3136	4356
52	67	3484	2704	4489
58	64	3712	3364	4096
60	65	3900	3600	4225
65	67	4355	4225	4489
598	744	39763	33336	51002

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{598}{11} \Longmapsto \boxed{\bar{x} = 54{,}363}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{744}{11} \Longmapsto \boxed{\bar{y} = 67{,}636}$$

1. حساب التباين المشترك بين **x** و **y** :

$$cov(x,y) = \frac{\sum xiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{39763}{11} - (54{,}363 \times 67{,}636) \Longmapsto$$

$$<0 \boxed{\mathrm{cov}(t,y) = -62{,}077}$$

العلاقة بين التغيرين x وy سالبة⇐x و y يتغيران في اتجاه معاكس.

2. حساب معامل الارتباط الخطي:

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y}$$

$$V(x) = \delta_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{33336}{11} - 54{,}362^2 = 75{,}21 \Longmapsto \boxed{\delta_x = 8{,}672}$$

$$V(y) = \delta_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{51002}{11} - 67{,}636^2 = 61{,}917 \Longmapsto \boxed{\delta_y = 7{,}868}$$

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{-62{,}077}{8{,}672 * 7{,}868} = -0{,}909 < 0$$ سالب

التفسير : ارتباط عكسي قوي جدا بين استهلاك السلعة x واستهلاك السلعة y. اذن السلعتين x و y سلعتين بديلتين من الناحية الاقتصادية (الشاي و القهوة) لهما نفس المنفعة في نظر المستهلك(كلما نقص استهلاك السلعة x ازداد استهلاك السلعة y).

ملاحظة :

1. في حالة سلعتان بديلتان (الشاي والقهوة، اللحم و السمك) a و à سالبان:

سلعتان بديلتان
$$\begin{cases} a < 0 \\ à < 0 \end{cases}$$

2. في حالة سلعتان مكملتان (الشاي والسكر) a و a' موجبان:

سلعتان متكاملتان
$$\begin{cases} a > 0 \\ à > 0 \end{cases}$$

3. **معامل التحديد:** هو مقياس يبين او يقيس مدى تأثير المتغير المستقل x_i على المتغير التابعy_i :

$$r_{x,y}^2 = a.a' = (-0.909)^2 = 0.862 \times 100 = 82.6\%$$

التفسير: يمكن القول ان استهلاك السلعة y يرجع بنسبة 82,6% الى استهلاك السلعة x أما النسبة الباقية و هي 17, 4%= (82.6-100) ترجع الى عوامل أخرى نجهلها.

ملاحظة :

$$0 \leq r_{x,y}{}^2 \leq 1$$

حل التمرين 3:

السنوات	xi	yi	$xiyi$	x_i^2	y_i^2
1980	35,19	0,9	31,67	1238,330	0,81
1981	39,54	3,6	142,34	1563,410	12,96
1982	35,5	4	142	1260,250	16
1983	30,6	5,6	171,36	936,360	31,36
1984	29,67	4,1	121,65	880,300	16,81
1985	29,11	5,2	151,37	847,400	27,04
1986	14,18	1	14,18	201,070	1
1987	18,72	-1,1	-20,6	350,440	1,21
1988	16,26	-1,8	-29,27	264,380	3,24
1989	18,41	-2,9	-53,39	338,920	8,41
المجموع	267,18	18,6	671,31	7880,860	118,84

1. **معادلة الانحدار y على x:**

$$y_i = a\, x_i + b$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{X}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{267,18}{10} \Longrightarrow \boxed{\bar{x} = 26,718}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{18,6}{10} \Longrightarrow \boxed{\bar{y} = 1,86}$$

$$cov(x,y) = \frac{\sum xiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{671,36}{10} - (26,718 \times 1,86) \Longrightarrow \boxed{cov(x,y) = +17,436} > 0$$

موجب

علاقة موجبة بين x و y .ان المتغيرين x و y يتغيران في نفس الاتجاه، كلما ارتفع سعر البترول ارتفع معدل النمو الاقتصادي في الجزائر.

$$\delta_x^2 = V(x) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{7880,86}{10} - 26,718^2 = 74,235$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2} = \frac{+17,436}{74,235} = +\,0,234$$

$$b = \bar{y} - a\bar{X} = 1,86 - (0,234 * 26,718) = -\,4,392$$

معادلة الانحدار Y على X: $y_i = 0,234\, x_i - 4,392$

2. **حساب معامل الارتباط الخطي ومعامل التحديد:**

- **حساب معامل الارتباط الخطي:**

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y}$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{118,84}{10} - 1,86^2} = 2,902$$

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{+17,436}{8,615 * 2,902} = +0,697$$

وهذا يعني ان هناك علاقة طردية متوسطة بين سعر البترول ومعدل النمو الاقتصادي في الجزائر.

- **معامل التحديد:**

$$\boldsymbol{r_{x,y}^2 = (0.697)^2 = 0.485 \times 100 = 48.5\%}$$

و هذا يعني ان 48,5% من تغير معدل النمو الاقتصادي السنوي في الجزائر يمكن تفسيره بتغير سعر البترول بينما النسبة المتبقية (48,5-100=51,5%)ترجع إلى عوامل أخرى غير سعر البترول وهي غير مدرجة في المعادلة.

3. جودة معادلة الانحدار:

تكون المعادلة ذات جودة عالية لما:

$$\begin{cases} r_{x,y} > 0,9 \\ {r_{x,y}}^2 > 0,8 \end{cases}$$

ان المعادلة ليست ذات جودة عالية لان:

$$\begin{cases} r_{x,y} = 0,697 \ < 0,9 \\ {r_{x,y}}^2 = 0,485 < 0,8 \end{cases}$$

رغم ان المعادلة ليست ذات جودة عالية (باعتبار معامل الارتباط الجيد يجب أن يزيد عن 0,90 و معامل التحديد الجيد يجب ان يزيد عن 0,80) إلا أننا نستخدمها غي التنبؤ مثل ما هو مطلوب.

4. التنبؤ بمعدل النمو الاقتصادي عندما يكون سعر البترول10 دولار:

$$\mathrm{y_i} = 0,234(10) - 4,392 = -2,05$$

هذا يعني انه إذا كان متوسط سعر البترول في سنة من السنوات 10دولار سيكون معدل النمو الاقتصادي لتلك السنة 2,5- (سالب).

التنبؤ بمعدل النمو الاقتصادي عندما يكون سعر البترول30 دولار:

$$\mathrm{y_i} = 0,234(30) - 4,392 = +2,62$$

هذا يعني انه اذا كان متوسط سعر البترول في سنة من السنوات 30 دولار سيكون معدل النمو الاقتصادي لتلك السنة 2,62+ (موجب).

حل التمرين 4:

السنوات	xi	yi	$xiyi$	x_i^2	y_i^2
1970	14,7	37,37	549,339	216,09	1396,516
1971	17,6	43,63	767,888	309,76	1903,576
1972	19,8	64,9	1285,02	392,04	4212,01
1973	27,6	112,25	3098,1	761,76	12600,062
1974	98,2	186,5	18314,3	9643,24	34782,25
1975	100	140,25	14025	10000	19670,062
1976	107,1	134,75	14431,725	11470,41	18157,562
1977	115,8	164,95	19101,21	13409,64	27208,502
1978	119,1	226	26916,6	14184,81	51076
1979	177,9	512	91084,8	31648,41	262144
المجموع	797,8	1622,6	189573,982	92036,16	64433150,

$$(1\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{797{,}8}{10} \Longmapsto \boxed{\bar{x} = 79{,}78\ \$};\ \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{1622{,}6}{10} \Longmapsto \boxed{\bar{y} = 162{,}25\ \$}$$

حساب التباين المشترك بينxوy :

$$cov(x,y) = \frac{\sum xiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{189573{,}982}{10} - (79{,}78 \times 162{,}26) \Longmapsto \boxed{\mathrm{cov}(t,y) = 6012{,}296}$$

1. **حساب معامل الارتباط الخطي:**

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y}$$

$$V(x) = \delta_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{92036{,}16}{10} - 79{,}78^2 \Longmapsto \boxed{\delta_x^2 = 2838{,}768}$$

$$\Longmapsto \boxed{\delta_x = \sqrt{2838{,}768} = 53{,}28}$$

$$V(y) = \delta_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{433150{,}543}{10} - 162{,}26^2 \Longmapsto \boxed{\delta_y^2 = 16986{,}747}$$

$$\Longmapsto \boxed{\delta_y = \sqrt{16986{,}747} = 130{,}333}$$

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{6012{,}296}{53{,}28 * 130{,}333} = +0{,}865$$

ارتباط طردي قوي بين ثمن البترول x و ثمن الذهبy :$r_{x,y}$فكلما ارتفع ثمن البترول x ارتفع معه ثمن الذهب بعلاقة قوية (طردية قوية).

اما مقارنته مع الارتباطات الاخرى فان الارتباط بين ثمن البترولx وثمن الدولار z قوي (طردي قوي) لكنه اقل من$r_{x,y}$

$$r_{x,z} < r_{x,y} \Leftarrow$$

اما الارتباط بين ثمن الذهب y و ثمن الدولار z قوي لكنه عكسي فكلما ارتفع ثمن الذهبy انخفض ثمن الدولارz.

2. معادلة الانحدارYعلى X

فان معادلة الانحدار تكون دائما على الشكل(معادلة خط مستقيم).

$$\mathrm{y_i} = a\,\mathrm{x_i} + b$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2};\quad b = \bar{y} - a\bar{X}$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2} = \frac{6012{,}296}{2838{,}768} = 2{,}117$$

$$b = \bar{y} - a\bar{X} = 162{,}26 - (2{,}117 * 79{,}78) = -6{,}634$$

معادلة الانحدار Yعلى X : $\mathrm{y_i} = 2{,}117\,\mathrm{x_i} - 6{,}634$

3. التنبؤ بثمن الذهب عندما يرتفع ثمن البترول الى 265,5 دولار في بداية1980 :

x=265,5

$$\mathrm{y_i} = 2.117(265{,}5) - 6{,}634 = 555{,}429$$

ثمن الذهب في تلك الفترة $\boxed{\mathrm{y_i} = 555{,}429\$}$

حل التمرين 5:

1. معادلة انحدار النفقات على الدخل. وحساب معامل الارتباط بين X و Y.

- معادلة انحدار النفقات على الدخل: X /Y

$$y_i = axi + b$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{X}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{745}{10} \Longrightarrow \boxed{\bar{x} = 74{,}5}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{631}{10} \Longrightarrow \boxed{\bar{y} = 63{,}1}$$

$$cov(x,y) = \frac{\sum xiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{48237}{10} - (74{,}5 \times 63{,}1)$$

$$\Longrightarrow \boxed{cov(x,y) = 122{,}75}$$

$$\delta_x^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{57565}{10} - 74{,}5^2 \Longrightarrow \boxed{\delta_x^2 = 206{,}25}$$

$$a = \frac{122{,}75}{206{,}25} \Longrightarrow \boxed{a = 0{,}595};$$

$$b = 63{,}1 - (0{,}595 \times 74{,}5) \Longrightarrow \boxed{b = 18{,}772}$$

معادلة انحدار النفقات على الدخل: X /Y $\boxed{\mathbf{y_i = 0,595Xi + 18,772}}$

- حساب معامل الارتباط بين X و Y

$$r_{xy} = \frac{cov_{(x,y)}}{\delta_x . \delta_y}$$

$$\delta_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{40633}{10} - 63{,}1^2 \Longrightarrow \boxed{\delta_y^2 = 81{,}69}$$

$$r_{xy} = \frac{122{,}75}{\sqrt{206{,}25 \times 81{,}69}} \Longrightarrow \boxed{r_{xy} = 0{,}945}$$

2. **إذا كان Z هو الادخار و علمنا أن: $X_i = Y_i + Z_i$ نثبت أن** $\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$.

$$X_i = y_i + z_i \Rightarrow z_i = x_i - y_i$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{N} = \frac{\sum(x_i - y_i)}{N} = \frac{\sum x_i}{N} - \frac{\sum y_i}{N} \Rightarrow \boxed{\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}}$$ و هو المطلوب

3. **معادلة انحدار الادخار على الدخل ، وحساب معامل التحديد**

- معادلة انحدار الادخار على الدخل: (Z/X)

$$z_i = a'xi + b'$$

$$a' = \frac{cov(x,z)}{\delta_x^2}; \quad b' = \bar{z} - a'\bar{X}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{N} = \frac{745}{10} \Longrightarrow \boxed{\bar{x} = 74{,}5}; \qquad \bar{z} = \frac{\sum zi}{N} = \frac{114}{10} \Longrightarrow \boxed{\bar{z} = 11{,}4}$$

$$cov(x,z) = \frac{\sum xizi}{N} - (\bar{x}.\bar{z}) = \frac{9328}{10} - (74{,}5 \times 11{,}4) \Longrightarrow \boxed{cov(x,z) = 83{,}5}$$

$$a' = \frac{83{,}5}{206{,}25} \Longrightarrow \boxed{a' = 0{,}404};$$

$$b' = 11{,}4 - (0{,}404 \times 74{,}5) \Longrightarrow \boxed{b' = -18{,}698}$$

معادلة انحدار الادخار على *الدخل* (Z/X) $\boxed{\mathbf{z_i = 0,404Xi - 18,698}}$

- حساب معامل التحديد

$$r_{xz}^2 = \frac{cov_{(x,z)}^2}{\delta_x{}^2 . \delta_z{}^2}$$

$$\delta_z^2 = \frac{\sum z_i^2}{N} - \bar{z}^2 = \frac{1724}{10} - 11{,}4^2 \Longrightarrow \boxed{\delta_z^2 = 42{,}44}$$

$$r_{xz}^2 = \frac{83{,}5^2}{206{,}25 \times 42{,}44} \Longrightarrow \boxed{r_{xz}^2 = 0{,}796}$$

4. حساب التباين المشترك بين النفقات و الادخار:

$$cov(y,z) = \frac{\sum yizi}{N} - (\bar{y}.\bar{z}) = \frac{7604}{10} - (63{,}1 \times 11{,}4)$$
$$\Longrightarrow \boxed{cov(y,z) = 41{,}06}$$

الفصل الثالث
السلاسل الزمنية

مقدمة:

بمرور الزمن تتعرض معظم الظواهر الاقتصادية والاجتماعية للتغيير حسبة وتيرة معينة تكون إما سنوية، فصلية، شهرية أو قد تتغير بعض منها حتى كل ساعة، لحظة أو كل ثانية. وهذا التغيير يكون ناتج عن توفر مجموعة من الظروف في وقت معين.

مثال: لما نقوم بدراسة حول كمية الغاز المستهلكة في ناحية ما، نجد أنها ترتفع في فصل الشتاء ثم تبدأ بالانخفاض مع بداية الربيع لتصل هده الكمية إلي أدني حد في فصل الصيف وثم تبدأ بالارتفاع مع بداية فصل الخريف. وتتكرر هذه الوتيرة حسب الفصول الأربعة.

في مثل هذا المثال، تكون الظواهر الاقتصادية مرتبطة بتغييرات زمنية وتشكل مجموعة البيانات المتحصل عليها ما يسمي بالسلسلة الزمنية إذن السلسلة الزمنية سلسلة معطيات إحصائية مرتبطة بالزمن (أو بعبارة أخرى هي عبارة عن سلسلة قيم ظاهرة معينة تتغير مع الزمن) مثل: الإنتاج السنوي للقمح، نسبة التضخم السنوية....).

I. تعريف السلسلة الزمنية:

عموما فانا السلسلة الزمنية تحتوي على مغيرين الأول هو **الزمن** و يعتبر المتغير المستقل أما الثاني فهو قيمة الظاهرة ويعتبر المتغير التابع.

تهدف دراسة السلسلة الزمنية إلي إبراز غرضي أساسين:

- وصف سلوك المستهلك.
- تحليل هذا السلوك يساعد للتنبؤ بقيمة وتطور الظاهرة في المستقبل.

بالنسبة للغرض الأول فهو هدف وصفي يمكن من خلاله تفسير واستنباط أإثر بعض العوامل التاريخية (الماضية) على سلوك الظاهرة تحت الدراسة، الأمر الذي قد يؤدي إلى نتيجة تقريبية عامة تفيد في التنبؤ بسلوك الظاهرة إذا ما توافرت نفس الظروف والعوامل في المستقبل.

إذن الغرض من تحليل السلسلة الزمنية هو التنبؤ بما سيكون عليه السلوك لظاهرة ما في المستقبل بناءا على سلوكها في الماضي.

إذن تكون قيمة المتغير في السلسلة الزمنية تابع لحركة الزمن (هي دالة للزمن) **:Y=f(t)**

لتكن لدينا:

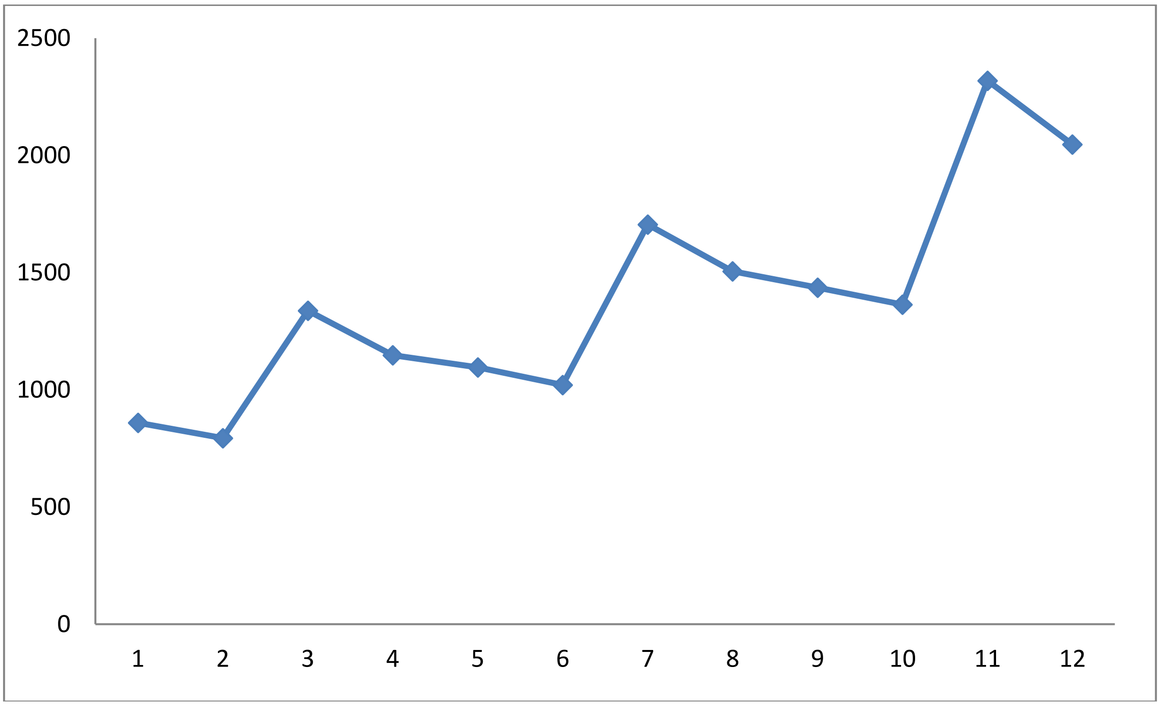
$$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_n.$$
$$t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_n.$$

مثال1:

الجدول التالي يبين عدد المبيعات الثلاثية بالنسبة لمؤسسة ما:

الثلاثيات / السنوات	1	2	3	4
2016	860	794	1338	1148
2017	1096	1021	1705	1505
2018	1436	1363	2319	2047

التمثيل البياني: Y=f(t)



ويمكن أن تكون المشاهدات التي نتابع تطورها إما تدفق أو مخزون **(flux ou stock):**

متغير المخزون: (Variable de stock)

تشكل كل المشاهدات المسجلة في تاريخ معين، مثال: سكان الجزائر أثناء إحصائهم في سنة 1995.

متغير التدفق:(Variable de flux)

تشكل كل المشاهدات المسجلة خلال فترة معينة، مثال: مجموعة الولادات المسجلة في الجزائر خلال شهر جانفي 2019.

مثال2:

رصيد الحساب البنكي في أول يوم من الشهر يعتبر متغير مخزون أما التغييرات في رصيد الحساب البنكي من أول يوم في الشهر إلى أخره يعتبر متغيرا لتدفق.

كما إن التحليل المتسلسلات الزمنية يسمح بتوقع بعض التغييرات ذات المستويات المختلفة ومن هذا يعلل منفعتها عن طريق الخواص التالية (مكونات السلسلة الزمنية):

II-**مكونات السلسلة الزمنية:**

تتكون السلسلة الزمنية من أربعة عناصر محددة ومخصصة، والتي تشكل في مجملها السلسلة الزمنية لعلم الإحصاء، وتكون عناصر السلسلة الزمنية كالتالي:

1. مركبة الاتجاه العام (حركة عامة): ونرمز لها ب La tendance générale T_t

وهو الذي يقصد بيه الحركة المنتظمة للسلسلة عبر فترة زمنية طويلة نسبياً حيث تهتم بالتغييرات الإجمالية (على العموم 5 سنوات أو أكثر).

إن لفظ الاتجاه العام يعني التغيير العام في المدى الطويل لهذه السلسة والفكرة العامة تعني إن هناك حركة دائمة في اتجاه معين، وفي معظم الأحيان يكون تأثير تلك العوامل بصورة منتظمة بطيئة وصغيرة ويظهر تأثيرها بعد فترة طويلة من الزمن وذلك ما يجعلنا نصف الاتجاه العام بأنه التغيير في المدى الطويل لتلك الظاهرة.

2. المركبة الموسمية (التغيرات الموسمية):ونرمز لهاب S_t La composante saisonnière

هي التي تمثل التغيرات المنتظمة القصيرة الأجل والتي تحدث خلال الفترة الزمنية الواحدة التي لا يزيد طولها عن السنة، فقد تكون أسبوعية أو شهرية أو فصلية، وهي ناتجة عن التغيير في الفصول أو المواسم (الإنتاج الزراعي، السياحة، العطل، الأعياد الدينية...).

3. المركبة الدورية (التغيرات الدورية):ونرمز لها ب C_t La composante cyclique

هي التي تمثل التغيرات التي تطرأ على قيم السلسلة الزمنية بصورة منتظمة ولكن على فترات متباعدة و هذه الحالة وسطية بين الحركة العامة و الحركة الموسمية حيث تبين اثر النشاط الاقتصادي في المدى المتوسط و تتناسب مراحلها مع مراحل الدورة الاقتصادية (الانتعاش، الرواج ، الركود، الكساد...) ويزيد أمدها عن السنة إلى 5 سنوات وعموما ليس لها مدة معينة، عادة لا نأخذ بعين الاعتبار هذه الحركة لان المعطيات الإحصائية غير كافية على مدى الزمن أو أن هذه المركبة غير موجودة.

4. المركبة العشوائية (التغيرات العشوائية):ونرمز لها ب ε_t La Composante aléatoire

التي تحدث فجائية لا يمكن التنبؤ بها أو مراقبتها أو التي لا توجد لها علاقة بعنصر الزمن. ومن أمثلتها ما يحدث للنشاط الاقتصادي في بلد ما بسبب الزلازل أو الحروب غير المتوقعة، مظهرات شعبية، تعطل وسائل الإنتاج...

III-تحليل السلاسل الزمنية:

بعد تقديم العناصر الأساسية التي تتكون منها السلسلة الزمنية، يمكن دراسةتغيير الظاهرة المدروسة بإحدى الطرقتين مختلفتين وهذا حسب نوع العلاقات الموجودة بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

يتطلب تحليل السلسلة الزمنية صياغة نموذج رياضي يمثل السلسلة المعطاة. وهناك عدة نماذج رياضية تربط بين قيم المشاهدات، وقيم المركبات المختلفة للسلسلة الزمنية ومن أبرز النماذج الرياضية التي تصف السلسلة الزمنية هي النموذج التجميعي (تزايدي) والنموذج التضاربي (التضاعفي)، بعبارة أخرى يمكن كتابة السلسلة الزمنية كدالة بدلالة مكونتها الأربعة بإحدى هذه الطرقتين:

1– حالة النموذج ألتزايدي (Modèle additif)

عند استعمال هذا النموذج يجب أن يكون بالإمكان فرض أن جميع المركبات مستقلة بعضها عن بعض، بمعنى أن حدوث إحداها لا يؤثر ولا تتأثر في حدوث المركبات الأخرى .وفي هذا النموذج يجب أن يكون مجموع قيم المركبة الفصلية على مدار السنة مساويا صفرً.

حيث يفترض أن قيمة الظاهرة(المشاهدة) المدروسة في أي نقطة زمنية هي حاصل جمع المركبات الأربعة والتي نرم لها ب (y) تكن كالتالي:

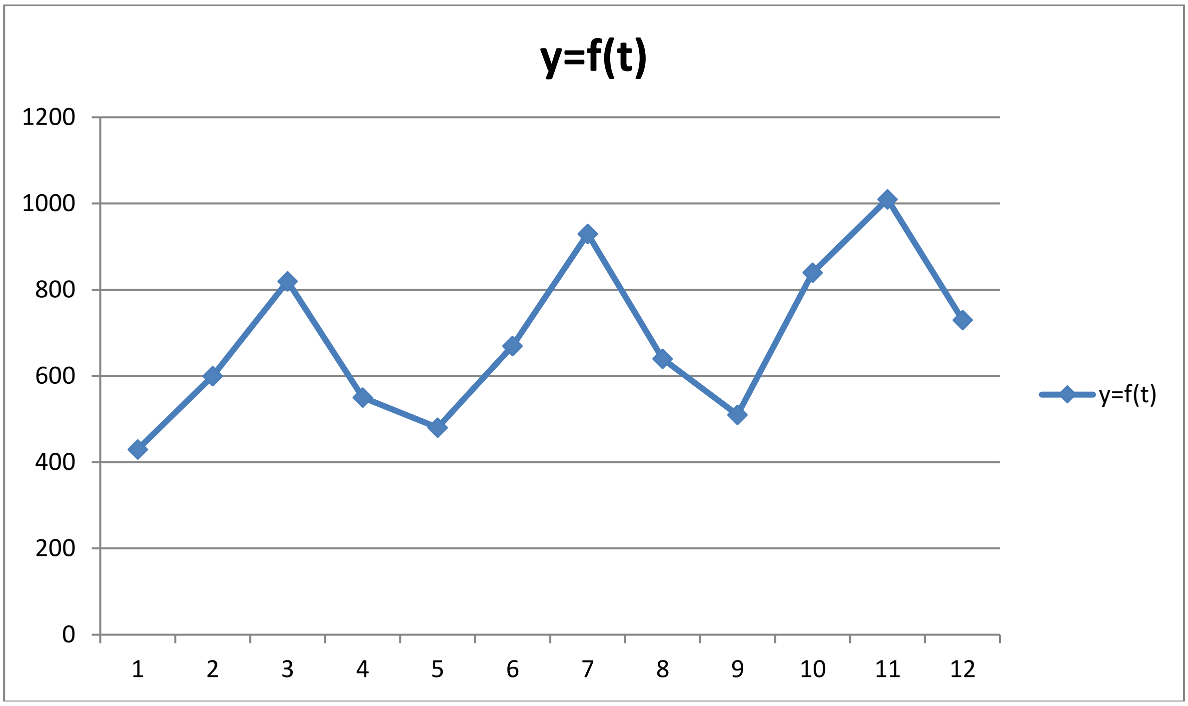
$$Y_t = T_t + C_t + S_t + \mathcal{E}_t$$

مثال3:

الجدول التالي يمثل رقم الأعمال بآلاف الدنانير لمؤسسة متوسطة خلال 3 سنوات:

السنوات / الثلاثيات	Année 1	Année2	Année3
1er trimestre	430	480	510
2eme trimestre	600	670	840
3eme trimestre	820	930	1010
4eme trimestre	550	640	730

الرسم البياني للقيم:



بيانيا تكو ن التغييرات الموسمية تقريبا متساوية من فترة إلى أخرى.

في هذه الحالة وعند رسم المستقيمين الذين يمران من ادني القيم ومن أقصى القيم نحصل على **مستقيمين متوازيين.**

في هذا النموذج يصعب أن نفرق بين الحركة الدورية وحركة الاتجاه العام، أي أن الحركة الدورية متطابقة مع حركة الاتجاه العام من جهة ومن جهة أخرى نعتبر أن التغييرات العشوائية هي حركات قصيرة المدى ولا يمكن مراقبتها.

يمكن افتراض بان الحركات العشوائية معدومة :nبالنسبة لسلسلة من المشاهدات على $\sum \varepsilon_t = 0$

<u>وبالتالي يصبح النموذج كالتالي:</u>

$$Y_t = T_t + S_t \Rightarrow S_t = Y_t - T_t$$

حالة النموذج التضاعفي2− (Modèle Multiplicatif)

هو النموذج الذي يفترض أن قيمة الظاهرة (المشاهدة) المدروسة عند أي نقطة زمنية يساوي حاصل ضرب المركبات الأربعة، ومنصفاتالنموذجأنهيستخدمفيالحالاتالتييمكنأننفرضفيهاأنالمركباتالأربع يؤثر بعضها في بعض على الرغم من أن مصادر حدوثها تكون مختلفة أي تأثر كل مركبة على الأخرى وتتأثر منها وتكون قيمة الظاهرة كاتالي:عند الفترة (t)

$$1^{er}\ \text{Cas:}\quad Y_t = T_t * C_t * S_t * \varepsilon_t$$

$$2^{eme}\ \text{Cas:}\quad Y_t = T_t * C_t * S_t + \varepsilon_t$$

في هذا النموذج تشبه الطريقة المستعملة في النموذج المتزايد، أي أن الحركة الدورية متطابقة مع حركة الاتجاه العام من جهة ومن جهة أخرى نعتبر أن التغييرات العشوائية هي حركات قصيرة المدى يمكن لا يمكن مراقبتها ويكون مجموع الحركات العشوائية معدومة

$$\sum \varepsilon t = 0$$

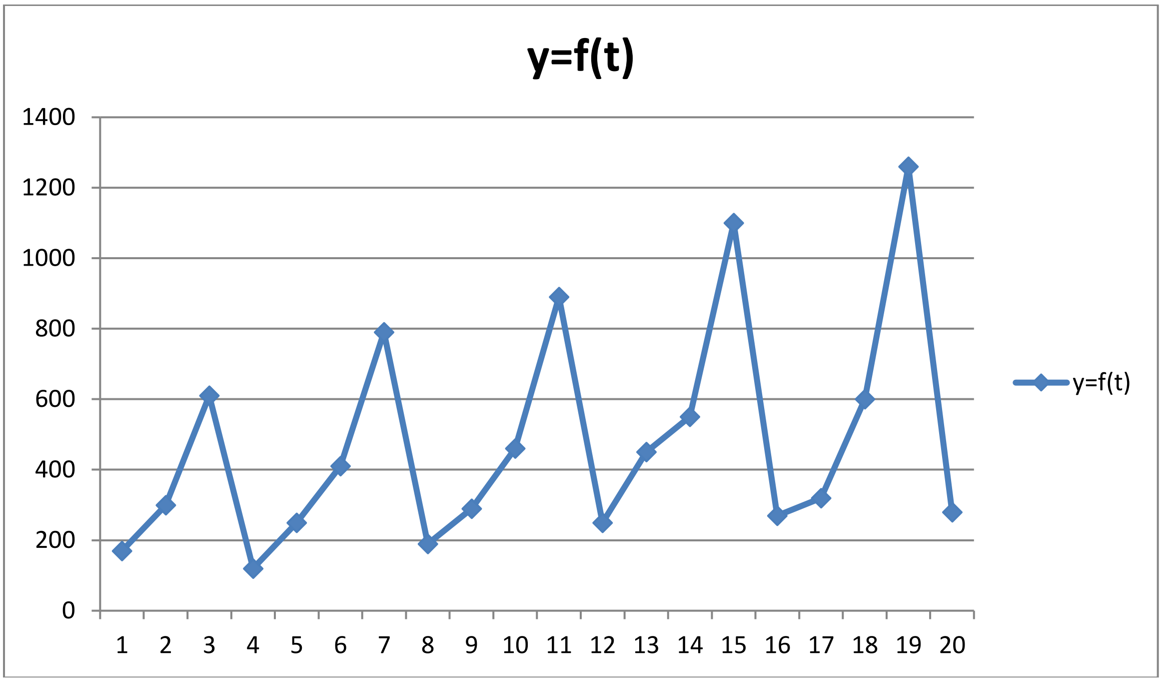
و بالتالي يصبح النموذج كالتالي: $Yt = T_t * S_t$

مثال4:

للرسم البياني للقيم السلسلة

مبيعات الثلاثية لعصير الفواكه في إحدى المحلات الكبرى بآلاف اللترات كانت كالتالي:

الثلاثيات / السنوات	I	II	III	IV
2014	170	300	610	120
2015	250	410	790	190
2016	290	460	890	250
2017	450	550	1100	270
2018	320	600	1260	280



في هذه الحالة وعند رسم المستقيمين الذين يمران من ادني القيم ومن أقصى القيم نحصل على **مستقيمين غير متوازيين**.

ملاحظة: تتناسب أغلب الحالات التطبيقية مع النموذج المتضاعف (التضاعفي)، لأنه يطابق التغييرات الموسمية التي تتزايد خلال الزمن. فيكون من الصعب دراسة الظاهرة الاقتصادية بأخذ بعين الاعتبار كل العوامل المؤثرة معا ولهذا نحاول إبعاد الحركة الموسمية والحركة الدورية ولعامل العشوائي ونكتفي غالبا بدراسة مركبة الاتجاه العام خاصة إذا كانت الظاهرة المدروسة على المدى الطويل (بحيث تكون التغييرات الظرفية المذكورة قليلة التأثير في المدى الطويل).

IV- **طرق تقدير الاتجاه العام:**

يمكننا تقدير الاتجاه العام بعدة طرق مهما ما هو **تحليلي** وذلك باللجوء عموما إلى **التوفيق الخطي بطريقة المربعات الصغرى** كما رأينا في الفصل السابق، وكذلك يمكننا استخدام بعض **الطرق الآلية** منها مثلا **طريقة المتوسطات المتحركة**.

1 - **طريقة المتوسطات المتحركة (الطريقة الآلية):**

إذا كانت لدينا السلسلة الزمنية: $y = y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n$

مأخوذة خلال الفترات الزمنية $t = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$

متتالية المتوسطات الحسابية التالية: نسمي المتوسط المتحرك من الدرجة

$$y_3=\frac{y_3+y_4+\dots+y_{p+2}}{p};\dots\ y_2=\frac{y_2+y_3+\dots+y_{p+1}}{p};\ y_1=\frac{y_1+y_2+\dots+y_p}{p};$$

$$y_{n-p+1}=\frac{y_{n-p+1}+\dots+y_n}{p}.$$

حيث **n** عدد القيم و **p** طول المتوسط المتحرك.

نلاحظ إذن أن المتوسط المتحرك يكون عدده n-p+ قيمة وهكذا نحصل على سلسلة جديدة.

طريقة حساب المتوسط المتحرك يتغير حسب فترة أو الطول المتوسط المتحرك (زوجي أو فردي).

أ-**<u>حالة متوسط متحرك إذا كان طولp فردي</u>:**

إذا كان طول المتوسط المتحرك فردي يكون عدد القيم الاتجاهية الناقصة على طرفي السلسلة الزمنية يساوي $\frac{p-1}{2}$.

<u>مثال5</u>: الجدول التالي يمثل تطور إنتاج مؤسسة ما بالألف الطن خلال 9 سنوات. احسب الأوساط المتحركة بطول= 3 .

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_t	4	6	5	3	7	5	4	3	6
MM_3		5	4.67	5	5	5.33	4	4.33	

$$\mathbf{MM_3(y_t)=\frac{yt-1+yt+yt+1}{3}}$$

<u>الحل</u>:

$$MM_3(y_6)=\frac{7+5+4}{3}=5.33$$

ملاحظة:

نلاحظ أن القمتين المتطرفتين t_1و t_2 قد اختفت (واحدة من كل طرف): $\frac{p-1}{2}=\frac{3-1}{2}=1$

مثال6:

احسب الأوساط المتحركة بطول= 5

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_t	4	6	5	3	7	5	4	3	6
$_5$MM	/	/	5	5.2	4.8	4.4	5	/	/

الحل:

$$\mathbf{MM5\ (y_t)=\frac{yt-2+yt-1+yt+yt+1+yt+2}{5}}$$

$$\mathbf{MM5\ (y_4)=\frac{6+5+3+7+5}{5}=5.2}$$

نلاحظ أن 4 قيم متطرفة نقصت من الجدول (2 من كل طرف) حيث: $2\frac{5-1}{2}=2$. (2 من كل جهة)
فانه يأخذ شكل $2r+1$ أي **(p=2r+1)**، p

ملاحظة: **إذا كان فردي**

ويكون عدد القيم الناقصة على الأطراف السلسلة $r=\frac{p-1}{2}$

والمتوسط المتحرك عند الفترة t كالتالي:

$$MM_{\mathbf{p}}(y_t) = MM_{\mathbf{2r+1}}(y_t) = \frac{1}{2r+1}\sum_{k=-r}^{k=+r} yt+k = \frac{1}{p}\sum_{k=-r}^{k=+r} yt+k$$

Si p=3=2r+1 → r=1 : donc $\mathbf{MM3\ (y_t) = \frac{1}{3}(y_{t-1}+y_t+y_{t+1})}$

Si p=5= 2r+1→ =2 : donc **MM5 (y_t) =** $\frac{1}{5}(y_{t-2}+y_{t-1}+y_t+y_{t+1}+y_{t+2})$

ب− حالة متوسط متحرك إذا كان طول p زوجي:

إذا كان **p** زوجي فانه يأخذ شكل p=2r فان عدد القيم الناقصة على أطراف السلسلة تكون تساوي $\frac{p}{2}$

مثال7: نأخذ المثال السابق ونحسب الأوساط المتحركة بطول يساوي 4

يجب اخذ 5 قيم لأكن نأخذ نصف القيمة الأولى ونصف القيمة الخامسة التي نضيفها للقيمة الثانية والثالثة والرابعة ونقسم الكل على 4 تتحصل إذن على الجدول التالي:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_t	4	6	5	3	7	5	4	3	6
MM_4	/	/	4.875	5.13	4.88	4.75	4.63	/	/

Exemple : MM4 (y_3) = $\frac{4/2+6+5+3+7/2}{4}$ = 4.875

MM4 (y_t) = $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(y_{t-2})+y_{t-1}+y_t+y_{t+1}+\frac{1}{2}(y_{t+2})\right)$

إذا كان **p** زوجي يأخذ شكل p=2r، يكون المتوسط المتحرك في الفترة t:

$$MMp(y_t)= MM2r(y_t)= \frac{1}{2r}\left[\frac{1}{2}\ yt-r+\sum_{k=-r+1}^{k=+r-1} yt+k+\ \frac{1}{2}yt+r\right]$$

مثال : اذا p= 6 = 3 =r ⇐ 2r

MM6 (y_t)= $\frac{1}{6}(\ \frac{1}{2}y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \frac{1}{2}y_{t+3}\ )$

ملاحظة: لما نقوم بالرسم البياني نلاحظ أن الخط البياني تغير شكله بحيث لن يصبح متعرجا ويصبح في صورة خط مستقيم، إن المتوسطات المتحركة تنظم قيم السلسلة وتظهر الاتجاه العام للسلسلة، إن طريقة المتوسطات المتحركة تستبعد تأثير الحركات الدورية، الموسمية والغير المنتظمة ولا يبقى إلا الاتجاه العام الذي نرغب دراسته.

2- الطرق التحليلية: هذه الطرق تمكننا من تقدير قيمة الاتجاه العام بواسطة الحساب الجبري بحيث يجب تحديد بواسطة الشكل (الرسم البياني) صياغة نموذج رياضي يمثل السلسلة المعطـاة ونوعية الدالة والتي تمكننا من إيجاد مجاهل النموذج.

أ-تحليل الاتجاه العام:

يتم تحديد الاتجاه العام لأي ظاهرة بطرق كثيرة، ومن أهم الطرق التي نستخدمها في هذا المجال هي:
طريقة المربعات الصغرى: يمكن تقدير الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بطريقة المربعات الصغرى، ويمكن استخدام معادلة الانحدار للتنبؤ عن قيم Y وقيم السلسلة t كمتغير مستقل مستقبلية لهذه السلسلة .وهناك أنواع عديدة من معادلات الاتجاه العام منها:

$$\mathbf{Y_i = at_i + b}$$

ونحسب الميل a للمعادلة بطريقة المربعات الصغرى التي سبق لنا شرحها:

$$\mathbf{a}= \frac{cov(t,y)}{\sigma 2\ t} = \frac{\frac{\sum tiyi}{n} - \overline{ty}}{\frac{\sum t^2}{n} - \bar{t}^2} = \frac{\sum tiyi - n\overline{ty}}{\sum ti^2 - n\bar{t}^2}$$

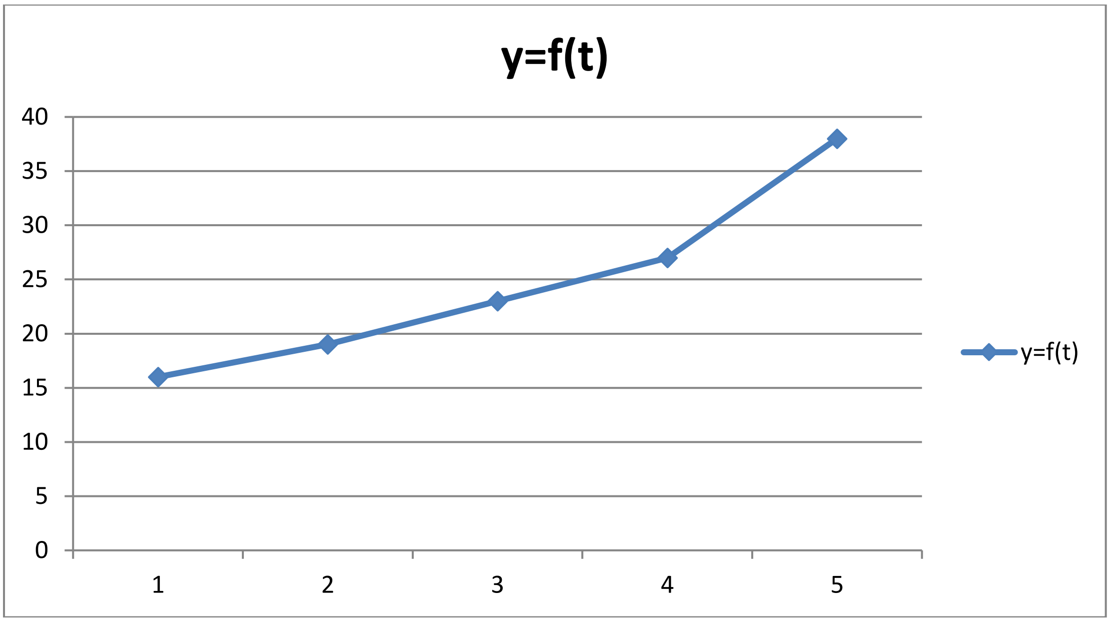
$$b = \bar{y} - a\bar{t}$$

مثال8: فيما يلي قيم متغير خلال الفترة 2012 -2016

السنوات	y_i	t_i	t^2_i	t_iy_i	$\acute{Y}_i = 5.2t_i + 9$
2012	16	1	1	16	14.2
2013	19	2	4	38	19.4
2014	23	3	9	69	24.6
2015	27	4	16	108	29.8
2016	38	5	25	190	35
المجموع	123	15	55	421	123

المطلوب: قدر معادلة الاتجاه العام لهذه البيانات.

الرسم البياني لهذه السلسلة



بعد الرسم البياني نلاحظ أن الاتجاه العام لهذه السلسلة يأخذ شكل خط مستقيم ويمكن صيغته بالمعادلة الخطية التالية:

$$y_i = at_i + b$$

y_i : قيمة الاتجاه العام للمتغير التابع.

a : هو ميل المستقيم ويمثل الزيادة السنوية للظاهرة.

b هي قيمة الاتجاه العام للمتغير في نقطة الأصل للزمن :

t_i : يمثل الزمن وهو قيم السنوات المتتالية في السلسلة الزمنية.

لتحديد قيم الثابتين a و b في معادلة الاتجاه العام: $\mathbf{y_i = at_i + b}$

$$\bar{t} = \frac{\sum ti}{n} = \frac{15}{5} = 3 \;; \bar{y} = \frac{\sum yi}{n} = \frac{123}{5} = 24.6$$

نستعمل طرية المربعات الصغرى:

$$a = \frac{cov(t,y)}{\sigma 2\ t} = \frac{10.4}{2} = 5.2$$

$$cov(t,y) = \frac{\sum tiyi}{n} - \bar{t}\bar{y} = \frac{421}{5} - (3*24.6) = 84.2 - 73.8 = 10.4$$

$$\sigma^2{}_t = \frac{\sum t^2}{n} - \bar{t}^2 = \frac{55}{5} - 9 = 2$$

$$b = \bar{y} - a\bar{t} \rightarrow b = 24.6 - (5.2*3) = 9.$$

معادلة الاتجاه العام $\boldsymbol{Y'_i = 5.2t_i + 9}$

ملاحظة: $\sum Y'i = \sum y_i$

V– تصحيح التغييرات الفصلية: Correction des variations saisonnières (CVS)

إذا أخذنا المثال السابق المتعلق برقم الأعمال لمؤسسة خلال 3 سنوات نلاحظ من خلال الرسم البياني أن:

– هناك ارتفاع للرقم الأعمال (الاتجاه العام) في المدى الطويل.

– تغييرات الفصلية: رقم الأعمال يرتفع خلال كل سنة في الفصل الثاني والثالث وينخفض خلال الفصل الأول والرابع.

الاتجاه العام يمكن توفيقه بواسطة خط مستقيم يمكن إيجادها بطريقة المربعات الصغرى، لأخذ بعين الاعتبار التغييرات الفصلية يمكن حساب قيم جديدة التي تأخذ بعين الاعتبار هذه التغييرات لكي نضبط **Série désaisonnalisée** أو **(CVS)** التنبؤات و هذا ما يسمى بالسلسلة المصححة من التغييرات الفصلية

السلسلة **(CVS** هي السلسلة الزمنية **(y_t)** التي ننزع منها التغييرات الفصلية.

–طريقة حساب السلسلة المصححة(CVS) : لتكن السلسلة الزمنية y_t

1–نضع الرسم البياني لهذه السلسلة الأصلية y_t

2– نقدر الاتجاه بواسطة الأوساط المتحركة على p فترة أي حساب الأوساط المتحركة $MMp(y_t)$

3– نختار طبيعة النموذج : تزايدي او تضاعفي.

أ) – النموذج التزايدي: $Y_t= T_t +S_t$

1– نحسب المعاملات التي تمثل الفرق $y_t – MMp(y_t)$

2– نحسب المعاملات الفصلية حسب النموذج التزايدي، S_j هي المتوسط لكل فصل بالنسبة للفروق

نأخذ $y_t – MMp(y_t)$

ثم نحسب $\bar{S}=\frac{\sum sj}{n}$.

3–ثم نحسب المعاملات النهائية : $S_j = s_j - \bar{S}$ **ملاحظة:** في النموذج التزايدي $\sum sj = 0$

4– هذه المعاملات تستعمل لتحديد لسلسلة المصححة $y_{ij}^{CVS} = y_{ij} – S_j = y_t - S_j$

نحصل على السلسلة المصححة بحساب الفرق بين قيم السلسلة الأصلية و قيم المعاملات الفصلية S_j

ب)- **النموذج التضاعفي:** $Y_t = T_t * S_t$

1- نحسب المعاملات التي تمثل الكسر بين القيمة الأصلية Y_t: والمتوسط المتحرك $MMp(yt)$

$$\frac{Yt}{MMp(yt)}$$

2-نحسب المعاملات الفصلية حسب النموذج التضاعفي، نأخذ **Sj** هي قيمة المتوسط لكل فصل بالنسبة

$\frac{Yt}{MMp(yt)}$ ثم نحسب $\bar{S}=\frac{\sum sj}{n}$

3-ثم نحسب المعاملات النهائية: $S_j = sj - \bar{S}$ **ملاحظة:** في النموذج التضاعفي يكون $\sum sj = 1$

4- هذه المعاملات تستعمل لتحديد لسلسلة المصححة من التغييرات الفصلية كالتالي:

$$y_{ij}^{CVS} = \frac{yij}{Sj} = \frac{yt}{sj}$$

تمارين الفصل الثالث

التمرين 1:

لدينا جدول التالي الذي يبين مردود القمح خلال 08 سنوات متتالية في منطقة ما:

المجموع	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	السنوات
96	18	15	13	9	11	12	10	8	المردود (ق/الهكتار)

المطلوب:

1- احسب المتوسطات المتحركة بطول دورة تساوي 3.
2- أحسب معادلة الاتجاه العام الخطية: $y_i= at_i+b$.
3- حدد قيمة مردود القمح في سنة 2007.

التمرين 2:

الجدول التالي يمثل سلسلة ثلاثية لرقم الأعمال لمؤسسة صغيرة ومتوسطة بآلاف الدنانير خلال 3 سنوات:

IV	III	II	I	الفصول / السنوات
75,2	72	99,2	91,2	**2013**
92,8	85 ,6	96,4	104	**2014**
105,6	98,4	112	103,2	**2015**

المطلوب: إذا علمت أن المركبة هي على شكل نموذج تزايدي:

1. أحسب المتوسطات المتحركة من الدرجة الرابعة 4.
2. أحسب المعاملات الفصلية.
3. أحسب المعاملات الفصلية المصححة.
4. حدد السلسلة المصححة من التغيرات الفصلية.

التمرين 3:

يمثل الجدول إنتاج الحليب خلال **10** سنوات في مؤسسة صغيرة ومتوسطة ب 10^2لتر :

السنوات	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
الإنتاج	10	12	12	13	14	16	17	18	20	22

المطلوب:

1. مثل بيانيا هذه المعطيات. ماذا تلاحظ؟
2. حدد المعادلة التي تقوم بالتوفيق الخطي حسب مبدأ المربعات الصغرى.
3. إذا لم يتغير أي شيء قدر مستوى إنتاج الحليب في سنة 2023.

التمرين 4:

كانت المبيعات الفصلية لعصير الفواكه في أحد المحلات الكبرى بآلاف اللترات كالتالي:

الفصول / السنوات	I	II	III	IV
2016	100	190	280	140
2017	250	290	440	220
2018	400	420	630	315
2019	250	340	510	250

المطلوب:

1. بالاستناد إلى البيان كيف يمكن كتابة المركبة؟ (أي ما هو شكل النموذج؟).
2. قدر مبيعات الفصل الثالث للسنة 2022.

التمرين 3:

كانت المبيعات الفصلية لعصير الفواكه في أحد المحلات الكبرى بآلاف اللترات كالتالي:

الفصول / السنوات	I	II	III	IV
2017	43,6	47,6	34	35,6
2018	50	46,2	40,8	44,4
2019	49,6	54	47,2	50,8

المطلوب:

1. أحسب المتوسطات المتحركة من الدرجة الرابعة.
2. حدد المعاملات الفصلية
3. حدد السلسلة المصححة من التغيرات الفصلية (CVS) بطريقة المربعات الصغرى.

التمرين 6:

لدينا الجدول التالي الذي يعبر عن تطور رقم الإعمال خلال 3 سنوات. مع العلم أن المركبة على شكل **نموذج تزايدي**.

الفصل / السنة	I	II	III	IV
2009	91,2	99,2	72	75,2
2010	104	96,4	85 ,6	92,8
2011	103,2	112	98,4	105,6

المطلوب:

1. أحسب المتوسطات المتحركة من الدرجة الرابعة 4.
2. أحسب المعاملات الفصلية.
3. أحسب المعاملات الفصلية المصححة.
4. حدد السلسة المصححة من التغيرات الفصلية : (CVS).

التمرين 7:

الجدول التالي الذي يبين مردود القمح خلال 08 سنوات متتالية في منطقة ما:

السنوات	المردود (ق/الهكتار)
2007	8
2008	10
2009	12
2010	11
2011	9
2012	13
2013	15
2014	18

المطلوب:

1. احسب المتوسطات المتحركة بطول دورة تساوي **3**.
2. أحسب معادلة الاتجاه العام الخطية : $y_i = at_i + b$.
3. حدد قيمة مردود القمح في سنة **2017** .

حلول تمارين الفصل الثالث

حل التمرين 1:

1. حساب المتوسطات المتحركة بطول دورة تساوي 3 : **MM3(Yt)**

$$MM_3(Y_t) = \frac{Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}}{3}$$

عدد القيم الاتجاهية الناقصة على طرفي السلسلة هو: $r = \frac{p-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{r = 1}$

السنة	Yi	Ti	MM3(Yt)	YiTi	Ti^2
2007	8	1	--	8	1
2008	10	2	10	20	4
2009	12	3	11	36	9
2010	11	4	10.66	44	16
2011	9	5	11	45	25
2012	13	6	12.33	78	36
2013	15	7	15.33	105	49
2014	18	8	-	144	64
المجموع	**96**	**36**		**500**	**204**

2. معادلة الاتجاه العام الخطية: **yi= a.ti+b.**

$$y_i = a = \frac{cov(t,y)}{\delta_t^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{X}$$

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} = \frac{36}{8} \Longrightarrow \boxed{\bar{x} = 4{,}5}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{96}{8} \Longrightarrow \boxed{\bar{y} = 12}$$

$$cov(t,y) = \frac{\sum tiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{500}{8} - (4{,}5 \times 12) \Longrightarrow \boxed{cov(t,y) = 8{,}5}$$

$$\delta_t^2 = \frac{\sum t_i^2}{N} - \bar{t}^2 = \frac{204}{8} - 4{,}5^2 \Longrightarrow \boxed{\delta_t^2 = 5{,}25}$$

$$a = \frac{8{,}5}{5{,}25} \Longrightarrow \boxed{a = 1{,}619}$$

$$b = 12 - (1{,}619 \times 4{,}5) \Longrightarrow \boxed{b = 4{,}715}$$

معادلة الاتجاه العام الخطية: $\boxed{y_i = 1{,}619ti + 4{,}715}$

3- تحديد قيمة مردود القمح في سنة 2017 أي لما : t =11

$$y = 1{,}619 \times 11 + 4{,}715 = 22{,}524 \Longrightarrow \boxed{y = 22{,}524}$$

حل التمرين 2:

النموذج التزايدي: $Y_t = T_t + S_t$ ⇐ $S_t = Y_t - T_t$

1. حساب المتوسطات المتحركة من الدرجة الرابعة 4.(p=4)

عدد القيم الناقصة على طرفي السلسلة هو: $r = \frac{P}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$$MM_4(Yt) = \frac{1}{4}(\frac{Y_{t-2}}{2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}\frac{Y_{t+2}}{2})$$

الفصول / السنوات	I	II	III	IV
2013	–	–	86	87.25
2014	88.6	92.5	94.6	96.45
2015	100	103.2	–	–

- حساب الفروق الفصلية: $\boxed{Y_t - MM_4(Yt)}$

-

الفصول / السنوات	I	II	III	IV
2013	–	–	- 14	-12.05
2014	15.4	3.9	- 9	- 3.65
2015	3.2	8.8	–	–

2. حساب المعاملات الفصلية: (sj)

S_j	9.3	6.35	- 11.5	**- 7.85**

$$\bar{s} = \frac{\sum \mathbf{sj}}{N} = \frac{-3.7}{4} \Rightarrow \boxed{\bar{s} = -0.925}$$

$$Sj = sj - \bar{s}$$

<u>3.حساب المعاملات الفصلية المصححة (المعاملات النهائية):(Sj)</u>

$Sj = sj - \bar{s}$	10.225	7.275	- 10.575	- 6.925

في **<u>النموذج التزايدي</u>** يكون : $\sum \mathbf{Sj} = 0$

<u>4. تحديد السلسلة المصححة من التغيرات الفصلية Yt - Sj : (CVS)</u>

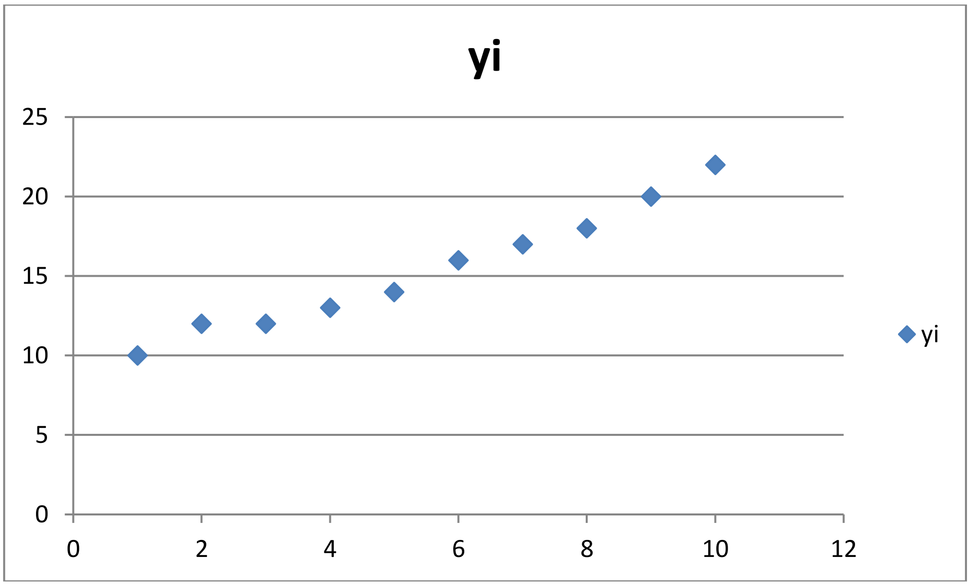
الفصول / السنوات	I	II	III	IV
2013	80.975	91.925	82.575	82.125
2014	93.775	89.125	96.175	99.725
2015	92.975	104.725	108.975	112.525

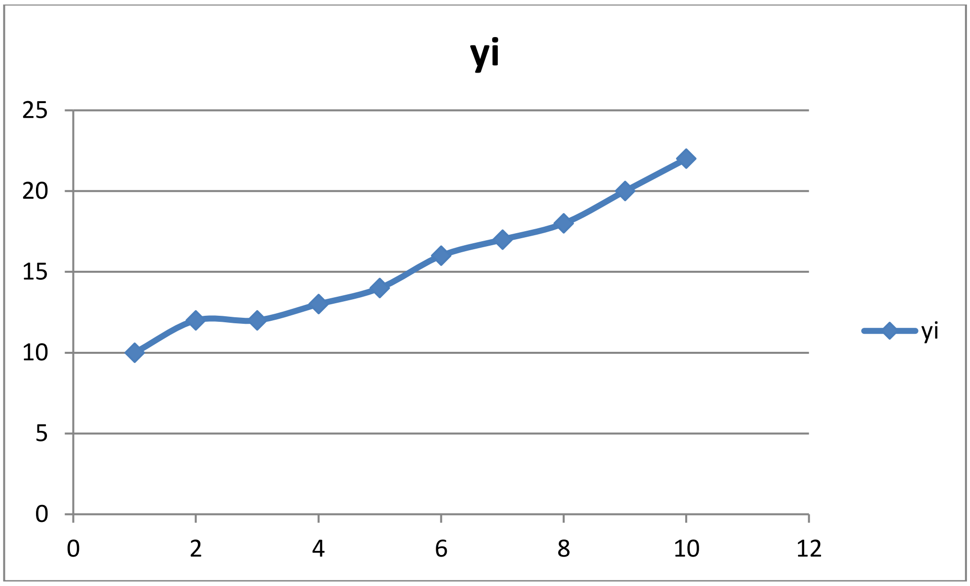
<u>حل التمرين 3:</u>

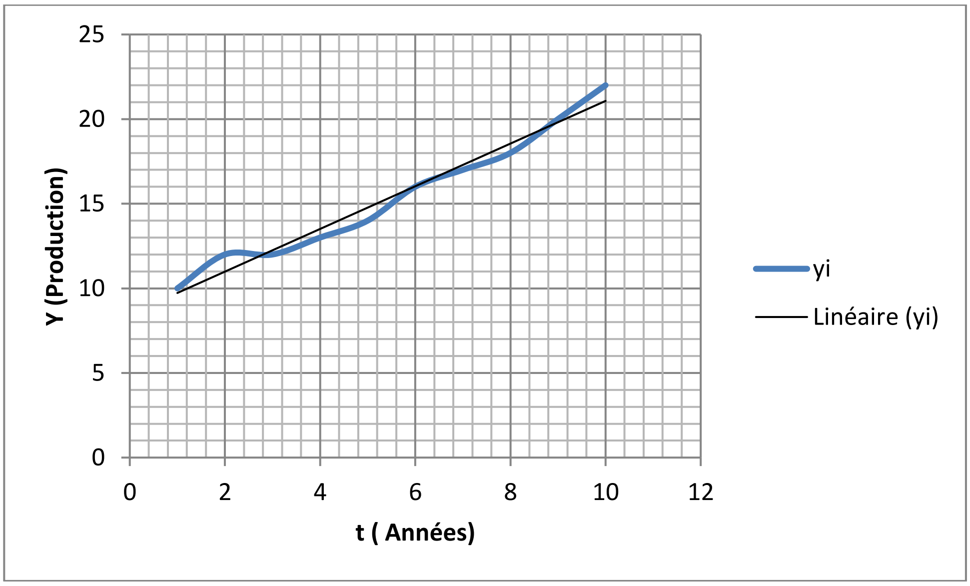
1. التمثيل البياني للمعطيات:

نلاحظ أن السحابة من النقاط تستحق تعديل خطي أو توفيق خطي على الشكل:

$$y_i = a\, t_i + b$$







ملاحظة:

نلاحظ أن الاتجاه العام للعلاقة الموجودة بين الظاهرتين المدروستين خطية على شكل مستقيم (معادلة من الدرجة الأولى).

2. **المعادلة التي تقوم بالتوفيق الخطي حسب مبدأ المربعات الصغرى (معادلة الاتجاه العام للسلسلة):**

السنوات	t_i	y_i	$t_i\, y_i$	t_i^2
2010	1	10	10	1
2011	2	12	24	4
2012	3	12	36	9
2013	4	13	52	16
2014	5	14	70	25
2015	6	16	96	36
2016	7	17	119	49
2017	8	18	144	64
2018	9	20	180	81
2019	10	22	220	100
	55	154	951	385

$$y_i = a\, t_i + b$$

$$a = \frac{cov(t,y)}{\delta_t^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{t}$$

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} = \frac{55}{10} \Longrightarrow \boxed{\bar{t} = 5{,}5}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{154}{10} \Longrightarrow \boxed{\bar{y} = 15{,}4}$$

$$cov(t,y) = \frac{\sum tiyi}{N} - (\bar{t}.\bar{y}) = \frac{951}{10} - (5{,}5 \times 15{,}4) \Longrightarrow \boxed{cov(t,y) = 10{,}4}$$

$$\delta_t^2 = \frac{\sum t_i^2}{N} - \bar{t}^2 = \frac{385}{8} - 5{,}5^2 \Longrightarrow \boxed{\delta_t^2 = 8{,}25}$$

$$a = \frac{cov(t,y)}{\delta_t^2} = \frac{10{,}4}{8{,}25} \Longrightarrow \boxed{a = 1{,}26}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{t} = 15{,}4 - (1{,}26 \times 5{,}5) \Longrightarrow \boxed{b = 8{,}47}$$

معادلة الاتجاه العام الخطية: $\boxed{y_i = 1{,}26\, ti + 8{,}47}$

3. **مستوى إنتاج الحليب في سنة 2023 (القيم الاتجاهية المقدرة):**

عدد السنوات من2010 الى 2023 هو 14 سنة (2010-2023) +1 أي السنة 2023 تمثل السنة رقم 14 (t=14) .

إذن إنتاج الحليب المقدر في سنة 2023 هو:

$$y_i = a\, t_i + b = 1{,}26\, t_i + 8{,}47 = 1{,}26(14) + 8{,}47 = \boxed{26{,}11}$$

حل التمرين 4:

t_i	y_i	$t_i\ y_i$	t_i^2
1	100	100	1
2	190	380	4
3	280	840	9
4	140	560	16
5	250	1250	25
6	290	1740	36
7	440	3080	49
8	220	1760	64
9	400	3600	81
10	420	4200	100
11	630	6930	121
12	315	3780	144
13	250	3250	169
14	340	4760	196
15	510	7650	225
16	250	4000	256
136	5025	47880	1496

تقديرات المبيعات بالنسبة الفصل الثالث لسنة 2022

لتحديد قيمة المبيعات في الفصل الثالث من سنة2022 نستعمل تعديل خطي على الشكل:

$$y_i = a\ t_i + b$$

$$a = \frac{cov(t,y)}{\delta_t^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{t}$$

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} = \frac{136}{16} \Longmapsto \boxed{\bar{t} = 8{,}5}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{5025}{16} \Longmapsto \boxed{\bar{y} = 314{,}06}$$

$$cov(t,y) = \frac{\sum tiyi}{N} - (\bar{t}.\bar{y}) = \frac{47880}{16} - (8{,}5 \times 314{,}06) \Longmapsto \boxed{cov(t,y) = 322{,}99}$$

$$\delta_t^2 = \frac{\sum t_i^2}{N} - \bar{t}^2 = \frac{1496}{16} - 8{,}5^2 \Longmapsto \boxed{\delta_t^2 = 21{,}25}$$

$$a = \frac{cov(t,y)}{\delta_t^2} = \frac{322{,}99}{21{,}25} \Longmapsto \boxed{a = 15{,}19}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{t} = 314{,}06 - (15{,}19 \times 8{,}5) \Longmapsto \boxed{b = 184{,}94}$$

معادلة الاتجاه العام الخطية: $\boxed{y_i = 15{,}19\ ti + 184{,}94}$

الفصل الثالث لسنة 2022 يناسب t=27 لأنه :

من 2016 إلى2019:لدينا4 سنوات أي16 فصل (4 سنوات× 4 فصول).

من2016 إلى الفصل الثالث من سنة 2022 : لدينا 27 فصل (24 فصل + 3 فصول = 27 فصل).

$$y_i = 15{,}19\ t_i + 184{,}94 = 15{,}19(27) + 184{,}94 = \boxed{595{,}07}$$

حل التمرين 5:

1. **حساب المتوسطات المتحركة بطول دورة تساوي 4** : MM4(Yt)

$$MM_4(Y_t) = \frac{\frac{1}{2}Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + \frac{1}{2}Y_{t+2}}{4}$$

عدد القيم الاتجاهية الناقصة على طرفي السلسلة هو: $r = \frac{p}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Longrightarrow \boxed{r = 2}$

السلسلة الأصلية Y_t

الثلاثيات / السنوات		I	II	III	IV
7120	**7120**	43,6	47,6	34	35,6
8120	**8120**	50	46,2	40,8	44,4
9120	**9120**	49,6	54	47,2	50,8

المتوسطات المتحركة

الثلاثيات / السنوات	I	II	III	IV
7120	/	/	41	41,625
8120	42,3	44,25	45,3	46,225
9120	48	49,6	/	/

2- المعاملات الفصلية:

***حساب المعاملات الخام:** هو الفرق بين السلسلة الأصلية و المتوسطات المتحركة.

$$\text{المعاملات الخام}=Y_t - \mathbf{MM4(Yt)}$$

الثلاثيات / السنوات	I	II	III	IV	
7120	/	/	34-41=-7	35,6-41,625=-6,025	
8120	7,7	1,95	-4,5	-1,825	
9120	1,6	4,4	/	/	
متوسط المعاملات الخام **Sj**	(7,7+1,6)/2 =4,65	3,175	-5,75	-3,925	$=\sum sj$ -1,85

$$s_1=\frac{7{,}7+1{,}6}{2} = 4{,}65$$

$$=\frac{1{,}95+4{,}4}{2} = 3{,}175_2s$$

$$=\frac{-7-4{,}5}{2} = -5{,}75_3s$$

$$=\frac{-6{,}025-1{,}825}{2} = -3{,}925_4s$$

*** المعاملات النهائية أي (المعاملات الفصلية):**

$$S_j=s_j-\bar{s}$$

$$\bar{s} = \sum \frac{s_j}{N} = \frac{4{,}65+3{,}175-5{,}175-3{,}925}{4} = \frac{-1{,}85}{4} = -0{,}4625$$

	I	II	III	IV
المعاملات الفصلية **Sj**	4,65-(0,4625)=5,1	3,175-(-0,4625)=3,6	-5,75+0,4625=-5,3	-3,925+0,4625=-3,4

ملاحظة:

$$\sum S_j = 0$$

3. السلسلة المصححة من التغيرات الفصلية:

المعاملات السابقة تستعمل لتحديد السلسلة المصححة كالتالي:

$$Y_{ij}^{CVS} = Y_{ij} - S_j = Y_t - S_j$$

نحصل على **السلسلة المصححة** بحساب الفرق بين السلسلة الأصلية وقيم المعاملات الفصلية

الثلاثيات / السنوات		I	II	III	IV
7120	7120	43,6-5,1=38,5	47,6-3,6=44	34-(-5,3)=39,3	35,6-(-3,4)=39
8120	8120	50-5,1=44,9	46,2-3,6=42,6	40,8-(-5,3)=46,1	44,4-(-3,4)=47,8
9120	9120	49,6-5,1=44,50	54-3,6=50,4	47,2-(-5,3)=52,5	50,8-(-3,4)=54,2

<u>حل التمرين 5</u>:

1. <u>حساب المتوسطات المتحركة من الدرجة الرابعة 4</u>.(p=4)

عدد القيم الناقصة على طرفي السلسلة هو: $r = \frac{P}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$$MM_4(Yt) = \frac{1}{4}(\frac{Y_{t-2}}{2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}\frac{Y_{t+2}}{2})$$

الفصل / السنة	I	II	III	IV
2009	-	-	86	87,25
2010	88,6	92,5	94 ,6	96,45
2011	100	103,2	-	-

$$\boxed{Y_t - MM_4(Yt)}$$

- حساب الفروق الفصلية:

Calcul des écarts saisonniers

الفصل / السنة	I	II	III	IV
2009	-	-	- 14	-12,05
2010	15,4	3,9	-9	-3,65
2011	3,2	8,8	-	-

2. حساب المعاملات الفصلية حسب النموذج التزايدي: (sj)

Calcul des coefficients saisonniers selon le modèle additif (sj)

Sj	9,3	6,35	-11,5	-7,85

$$\bar{s} = \frac{\sum sj}{N} = \frac{-3,7}{4} \Rightarrow \boxed{\bar{s} = -0,925}$$

$$\boxed{Sj = sj - \bar{s}}$$

3. حساب المعاملات النهائية: (Sj) **Calcul des coefficients définitifs**

Sj	10,2	7,3	-10,6	-6,9

Donc c'est vérifié c'est un modèle additif إذن النموذج تزايدي $\sum \boldsymbol{Sj} = \mathbf{0}$

4. تحديد السلسلة المصححة من التغيرات الفصلية : (CVS) Yt - Sj

On détermine la série Corrigée des Variations Saisonnières (CVS)

الفصل / السنة	I	II	III	IV
2009	81	91,9	82,6	82,1
2010	93,8	89,1	96,2	99,7
2011	93	104,7	109	112,5

حل التمرين 6:

1. حساب المتوسطات المتحركة بطول دورة تساوي 3 : MM3(Yt)

$$MM_3(Y_t) = \frac{Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}}{3}$$

عدد القيم الاتجاهية الناقصة على طرفي السلسلة هو: $r = \frac{p-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \Longrightarrow \boxed{r = 1}$

السنة	Yi	ti	MM3(Yt)	Yiti	ti^2
2007	8	1	-	8	1
2008	10	2	10	20	4
2009	12	3	11	36	9
2010	11	4	10,66	44	16
2011	9	5	11	45	25
2012	13	6	12,33	78	36
2013	15	7	15,33	105	49
2014	18	8	-	144	64
	96	36		**480**	204

2. معادلة الاتجاه العام الخطية : yi= ati+b.

$$y_i = a = \frac{cov(t,y)}{\delta_t^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{X}$$

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} = \frac{36}{8} \Longmapsto \boxed{\bar{t} = 4{,}5}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{96}{8} \Longmapsto \boxed{\bar{y} = 12}$$

$$cov(t,y) = \frac{\sum tiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{\mathbf{480}}{8} - (4{,}5 \times 12) \Longmapsto \boxed{cov(t,y) = \mathbf{6}}$$

$$\delta_t^2 = \frac{\sum t_i^2}{N} - \bar{t}^2 = \frac{204}{8} - 4{,}5^2 \Longmapsto \boxed{\delta_t^2 = 5{,}25}$$

$$a = \frac{\mathbf{6}}{5{,}25} \Longmapsto \boxed{\boldsymbol{a = 1,142}}$$

$$b = 12 - (\mathbf{1,142} \times 4{,}5) \Longmapsto \boxed{\boldsymbol{b = 6,861}}$$

معادلة الاتجاه العام الخطية : $\boxed{\mathbf{y_i = 1,142\ ti + 6,861}}$

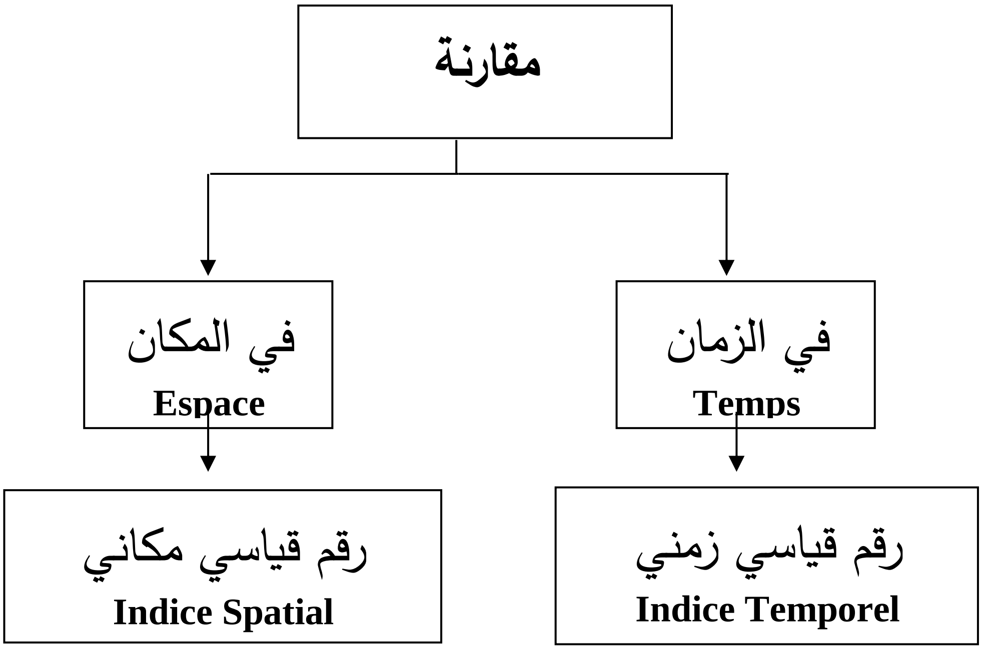
3. تحديد قيمة مردود القمح في سنة 2017 أي لما : t=11

$$\mathbf{y = (1,142 \times 11) + 6,861 = 19,423 \Rightarrow \boxed{y = 19,423}}$$

الفصل الرابع
الأرقام القياسية

تعريف الرقم القياسي:

الرقم القياسي هر مؤشر قبل كل شيء، يعرف بأنه أداة إحصائية أو مقياس إحصائي. يستعمل لقياس التغيرات التي تطرأ على ظاهرة أو عدة ظواهر، إنه يبين التغيرات المرتبطة بالسعر (P) أو الكمية (Q) لمادة أو عدة مواد بين فترتين زمنيتين مختلفتين أو بين مكانين مختلفين.



كما تستخدم الأرقام القياسية في تحديد التوقعات بالنسبة لمختلف الأعمال الاقتصادية في المستقبل. تطبق الأرقام القياسية في عدة ميادين نذكر منها:

1. تحديد التغير في الأسعار من فترة زمنية إلى أخرى بهدف اكتشاف أسباب التغيرات ومنه إيجاد الحلول التي يطالب بها أفراد المجتمع.
2. قياس الانحراف في مستوى المعيشة ومنه التحكم في مطالب المجتمع.
3. قياس التغير في حجم البطالة وكذلك القوة العاملة في منطقة معينة.

يمكن أن نميز بين نوعين من الأرقام القياسية:

- **الأرقام القياسية البسيطة والتجميعية:** حيث تستعمل في حالة وجود نفس المستوى من الأهمية أو الترجيح للمواد المدروسة.
- **الأرقام القياسية المرجحة:** التي تستعمل عندما يكون للمواد المدروسة مستويات متفاوتة الأهمية والترجيح.

مثلا: مجموعة المواد المستهلكة من طرف الأسرة لها مستويات متباينة من الأهمية:(التغذية، الألبسة، النقل والمواصلات، الصحة، الترفيه ....).

تقاس هذه لأهمية بمعامل الميزانية (Le coefficient budgétaire) أو معامل الترجيح (Le coefficient de pondération) أو بعدد الوحدات المستهلكة.

I. الرقم القياسي البسيط و التجميعي: (L'Indice Elémentaire)

1. الرقم القياسي البسيط:

يستعمل لقياس تطور سعر أو كمية مادة واحدة بين فترتين زمنيتين مختلفتين أو بين مكانين مختلفين.

أ- الرقم القياسي للسعر أو منسوب السعر: (Indice de Prix)

وهو عبارة عن النسبة بين سعر المادة الواحدة في فترة المقارنة P_t (الفترة المدروسة أو الجارية (Période courante) و سعرها في فترة أخرى تسمى فترة الأساس (Période de base)P_0. نرمز ل فترة المقارنة بـ (t) و فترة الأساس بـ (0)، و يكتب الرقم القياسي للسعر كالتالي:

$$\boxed{IP_{t/0} = \frac{P_t}{P_0} \times 100}$$

ب- ألرقم القياسي للكمية أو منسوب الكمية: (Indice de Quantité)

إذا كانت Q_0 تعتبر كمية السلعة المنتجة، المستهلكة أو المصدرة أو غير ذلك خلال فترة الأساس و Q_t تعتبر كمية السلعة المنتجة، المستهلكة أو المصدرة أو غير ذلك خلال فترة المقارنة، يكتب الرقم القياسي للكمية كالتالي:

$$\boxed{IQ_{t/0} = \frac{Q_t}{Q_0} \times 100}$$

ت- الرقم القياسي للقيمة الإجمالية أو منسوب القيمة الإجمالية: (Indice de la valeur globale)

إذا كان (P) هو سعر السلعة خلال فترة ما و(Q) الكمية المنتجة أو المباعة خلال نفس الفترة، فإن(PxQ) تمثل القيمة الإجمالية (VG) لهذه السلعة.

إذا كانت (VG_0) هي القيمة الإجمالية خلال فترة الأساس و (VG_t) هي القيمة الإجمالية خلال فترة المقارنة يكتب الرقم القياسي للقيمة الإجمالية كالتالي:

$$IVG_{t/0} = \frac{VG_t}{VG_0} \times 100 = \left(\frac{P_t \times Q_t}{P_0 \times Q_0}\right) \times 100 \Rightarrow \boxed{IVG_{t/0} = \frac{P_t}{P_0} \times \frac{Q_t}{Q_0} \times 100}$$

$$IVG_{t/0} \times 100 = \frac{P_t}{P_0} \times 100 \frac{Q_t}{Q_0} \times 100$$

$$\boxed{\mathrm{IVG}_{\mathrm{t/0}} \times 100 = \mathrm{IP}_{\mathrm{t/0}} \times \mathrm{IQ}_{\mathrm{t/0}}} \Leftrightarrow \mathrm{IP}_{\mathrm{t/0}} = \frac{\mathrm{IVG}_{\mathrm{t/0}}}{\mathrm{IQ}_{t/0}} \times 100\ et \mathrm{IQ}_{\mathrm{t/0}} = \frac{\mathrm{IVG}_{\mathrm{t/0}}}{\mathrm{IP}_{t/0}} \times 100$$

ملاحظة: يمكن أن نميز بين ثلاث حالات لنتيجة الرقم القياسي:
- إذا كان الرقم القياسي (للسعر أو الكمية) يساوي 100: يكون هناك ثبات في تطور السعر أو الكمية.
- إذا كان الرقم القياسي (للسعر أو الكمية) أصغر من 100: يكون هناك انخفاض في تطور السعر أو الكمية. مقدار الانخفاض يساوي 100 ناقص قيمة الرقم القياسي. يتراوح مقدار الانخفاض من 0 إلى 100.
- إذا كان الرقم القياسي (للسعر أو الكمية) أكبر من 100: يكون هناك ارتفاع في تطور السعر أو الكمية. مقدار الزيادة يساوي قيمة الرقم القياسي ناقص 100. يتراوح مقدار الزيادة من 0 إلى +∞.

أمثلة تطبيقية:

مثال 1: لنفترض أن سعر السلعة (X) في سنة 2000 كان 240 دج و في سنة 2003 أصبح سعر هذه السلعة 270 دج . باعتبار سنة 2003 سنة المقارنة ، أحسب منسوب السعر.

$$IP_{2003/2000} = \frac{\mathrm{P}_{2003}}{\mathrm{P}_{2000}} \times 100 = \frac{270}{240} \times 100 \Rightarrow \boxed{IP_{2003/2000} = 112{,}5\%}$$

بما أن منسوب السعر هو 112,5 %هذا يعني أن هناك ارتفاع في سعر المادة (X)بمقدار 12,5% أي: (112,5 – 100) في سنة 2003 عما كان عليه في سنة 2000.

مثال 2: إذا أخذنا نفس المثال السابق و لكن نعتبر أن سنة المقارنة هي السنة 2000 و سنة الأساس هي سنة 2003، أحسب منسوب السعر لهذه السلعة.

$$IP_{2000/2003} = \frac{\mathrm{P}_{2000}}{\mathrm{P}_{2003}} \times 100 = \frac{240}{270} \times 100 \Rightarrow \boxed{IP_{2000/2003} = 88{,}8\%}$$

بما أن منسوب السعر هو 88,8% هذا يعني أن هناك انخفاض في سعر المادة (X)بمقدار 11,2% أي: (100 – 88,8) في سنة 2000 مقارنة بسنة 2003.

مثال 3: في جانفي 2010 كان مجموع قائمة الأجور بمصنع به 120 عاملا 1500000 دج ، و في أوت من نفس السنة أضيف 30 عاملا إلى قائمة الأجور ودفع المصنع 225000 دج أكثر مما دفع في شهر جانفي.

المطلوب:

باستخدام شهر جانفي كأساس أوجد:

- الرقم القياسي للعمالة (منسوب الكمية) لشهر أوت.

- الرقم القياسي لتكلفة العمالة (منسوب القيمة الإجمالية) لشهر أوت.
- باستخدام النتيجة: الرقم القياسي للسعر xالرقم القياسي للكمية = الرقم القياسي للقيمة الإجمالية، ما هو التفسير الممكن إعطاؤه للرقم القياسي للسعر في هذا المثال.

الحل:

- الرقم القياسي للعمالة:

$$IQ_{t/0}=\frac{Q_t}{Q_0}\times 100=\frac{120+30}{120}\times 100 \Rightarrow \boxed{IQ_{t/0}=125\%}$$

و هذا يعني أن العمالة قد زادت بنسبة 25% في شهر أوت مقارنة بشهر جانفي.

- **الرقم القياسي للقيمة الإجمالية:**

$$IVG_{t/0}=\frac{VG_t}{VG_0}\times 100=\frac{1500000+225000}{1500000}\times 100 \Rightarrow \boxed{IVG_{t/0}=115\%}$$

و هذا يعني أن القيمة الإجمالية للأجور المدفوعة للعمال في شهر أوت قد ازدادت بنسبة 15% مقارنة بشهر جانفي.

- **الرقم القياسي للسعر:**

$$IP_{t/0}=\frac{IVG_{t/0}}{IQ_{t/0}}\times 100=\frac{115}{125}\times 100 \Rightarrow \boxed{IP_{t/0}=92\%}$$

تفسير النتيجة: سعر العمالة انخفض عما كان عليه في شهر جانفي بنسبة 8%.

2. الرقم القياسي التجميعي:

وهو عبارة عن النسبة بين أسعار أو كميات مجموعة من المواد في السنة المدروسة (سنة المقارنة) ومجموع أسعار أو كميات هذه المواد في سنة الأساس. وتعطى العلاقة الإحصائية للرقم القياسي التجميعي كما يلي: حيث أن i هو عدد المواد.

أ- الرقم القياسي التجميعي للأسعار:

$$\boxed{IP_{t/0}=\frac{\sum_{i=1}^{k}P_t^i}{\sum_{i=1}^{k}P_0^i}\times 100}$$

ب- الرقم القياسي التجميعي للكميات:

$$\boxed{IQ_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Q_t^i}{\sum_{i=1}^{k} Q_0^i} \times 100}$$

ت- الرقم القياسي التجميعي للقيمة الإجمالية :

$$\boxed{IVG_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{k} P_t^i \times Q_t^i}{\sum_{i=1}^{k} P_0^i \times Q_0^i} \times 100}$$

مثال 4:

يبين الجدول التالي أسعار 3 مواد من مشتقات النفط خلال 4 سنوات. حدد الرقم القياسي التجميعي للأسعار عاما أن سنة الأساس هي السنة الأولى.

السنة	Super(1L) ممتاز 1ل	Normal(1/2L) عادي $\frac{1}{2}$ ل	Gasoil(1L) مازوت 1ل
1	6	2,5	2
2	9 ,5	4,1	6
3	11	4,25	6,5
4	16,5	7,25	9,5

$$IP_{2/1} = \frac{\sum_{i=1}^{3} P_2^i}{\sum_{i=1}^{3} P_1^i} \times 100 = \frac{9{,}5 + 4{,}1 + 6}{6 + 2{,}5 + 2} \times 100 = \frac{19{,}6}{10{,}5} \Rightarrow \boxed{IP_{2/1} = 186{,}66\%}$$

$$IP_{3/1} = \frac{\sum_{i=1}^{3} P_3^i}{\sum_{i=1}^{3} P_1^i} \times 100 = \frac{11 + 4{,}25 + 6{,}5}{6 + 2{,}5 + 2} \times 100 = \frac{21{,}75}{10{,}5} \Rightarrow \boxed{IP_{3/1} = 207{,}14\%}$$

$$IP_{4/1} = \frac{\sum_{i=1}^{3} P_4^i}{\sum_{i=1}^{3} P_1^i} \times 100 = \frac{16{,}5 + 7{,}25 + 9{,}5}{6 + 2{,}5 + 2} \times 100 = \frac{33{,}25}{10{,}5} \Rightarrow \boxed{IP_{4/1} = 316{,}7\%}$$

من هذه النتائج نلاحظ أن أسعار المواد الثلاثة ارتفعت:
بمقدار % 86,66 في السنة الثانية مقارنة بالسنة الأولى، ثم تواصل هذا الارتفاع ليصل إلى % 107,14 في السنة الثالثة مقارنة بالسنة الأولى، ووصل إلى % 216,7 في السنة الرابعة مقارنة بالسنة الأولى.

ملاحظة: على الرغم من سهولة هذه الطريقة في التطبيق العملي إلا أنها تتضمن على نقائص، حيث أن هذه الطريقة لا تأخذ في حساب الرقم القياسي الأهمية النسبية لمختلف السلع. في المثال السابق عند حساب الرقم القياسي للأسعار لم نأخذ بعين الاعتبار ثمن الوحدة (اللتر أو نصف لتر).

II. الأرقام القياسية المرجحة:

1. الرقم القياسي لــلاسبير: Indice de Laspeyres

استعمل لسبير في حسابه للرقم القياسي أهمية المواد لسنة الأساس في عملية الترجيح.

أ. الرقم القياسي لــلاسبير للأسعار:

يكون الرقم القياسي لــلاسبير للأسعار مرجح بكميات سنة الأساس.

$$\boxed{\mathrm{ILP}_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(P_t^i \times Q_0^i)}{\sum_{i=1}^{k}(P_0^i \times Q_0^i)} \times 100}$$

ب. الرقم القياسي لــلاسبيرللكميات:

يكون الرقم القياسي لــلاسبيرللكميات مرجح بأسعار سنة الأساس.

$$\boxed{\mathrm{ILQ}_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(Q_t^i \times P_0^i)}{\sum_{i=1}^{k}(Q_0^i \times P_0^i)} \times 100}$$

ج. الرقم القياسي لــلاسبير للقيمة الإجمالية:

$$\boxed{\mathrm{ILVG}_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(P_t^i \times Q_t^i)}{\sum_{i=1}^{k}(P_0^i \times Q_0^i)} \times 100}$$

2. الرقم القياسي لبــاش: Indice de Paasche

استعمل باش في حسابه للرقم القياسي أهمية المواد لسنة المقارنة في عملية الترجيح.

أ. الرقم القياسي لـبـــاش للأسعار:

يكون الرقم القياسي لـباش للأسعار مرجح بكميات سنة المقارنة.

$$\boxed{\mathrm{IPP}_{t/0}=\frac{\sum_{i=1}^{k}(P_t^i\times Q_t^i)}{\sum_{i=1}^{k}(P_0^i\times Q_t^i)}\times 100}$$

ب. الرقم القياسي لـبـــاش للكميات:

يكون الرقم القياسي لـباش للكميات مرجح بأسعار سنة المقارنة.

$$\boxed{\mathrm{IPQ}_{t/0}=\frac{\sum_{i=1}^{k}(Q_t^i\times P_t^i)}{\sum_{i=1}^{k}(Q_0^i\times P_t^i)}\times 100}$$

ج. الرقم القياسي لـبـــاش للقيمة الإجمالية:

$$\boxed{\mathrm{IPVG}_{t/0}=\frac{\sum_{i=1}^{k}(P_t^i\times Q_t^i)}{\sum_{i=1}^{k}(P_0^i\times Q_0^i)}\times 100}$$

ملاحظة: تكون العلاقة التالية دائما محققة.

$$\mathrm{ILP}\times\mathrm{IPQ}=\mathrm{ILQ}\times\mathrm{IPP}=ILVG=IPVG=IVG$$

البرهان: نضع: $\mathrm{ILVG}=\mathrm{IPVG}=\mathrm{IVG}$

$$\mathrm{ILP}\times\mathrm{IPQ}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(P_t^i\times Q_0^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(P_0^i\times Q_0^i\right)}\times\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Q_t^i\times P_t^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(Q_0^i\times P_t^i\right)}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(P_t^i\times Q_t^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(P_0^i\times Q_0^i\right)}=\mathrm{IVG}$$

$$\mathrm{ILQ}\times\mathrm{IPP}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Q_t^i\times P_0^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(Q_0^i\times P_0^i\right)}\times\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(P_t^i\times Q_t^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(P_0^i\times Q_t^i\right)}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(P_t^i\times Q_t^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(P_0^i\times Q_0^i\right)}=\mathrm{IVG}$$

لما تكون كميتين تساوي نفس القيمة نستنتج أن الكميتين متساويتين ما بينها: $\boxed{\mathrm{ILP}\times\mathrm{IPQ}=\mathrm{ILQ}\times\mathrm{IPP}}$

3. الرقم القياسي لـفيــشر:Indice de Fisher

وهو عبارة عن الوسط الهندسي لرقمي لاسبير وبــاش.

1. الرقم القياسي لـفيــشر للأسعار:

$$\boxed{\mathrm{IFP} = \sqrt{\mathrm{ILP} \times \mathrm{IPP}} \times 100 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(P_t^i \times Q_0^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(P_0^i \times Q_0^i\right)} \times \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(P_t^i \times Q_t^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(P_0^i \times Q_t^i\right)}} \times 100}$$

2. الرقم القياسي لـفيــشر للكميات:

$$\boxed{\mathrm{IFQ} = \sqrt{\mathrm{ILQ} \times \mathrm{IPQ}} \times 100 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Q_t^i \times P_0^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(Q_0^i \times P_0^i\right)} \times \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Q_t^i \times P_t^i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(Q_0^i \times P_t^i\right)}} \times 100}$$

ملاحظة: يقع الرقم القياسي لفيشر بين رقمي لاسبير و باش. تكون العلاقة التالية دائما محققة.

$$\mathrm{ILP} \times \mathrm{IPQ} = \mathrm{ILQ} \times \mathrm{IPP} = IFP \times IFQ = IVG$$

مثال 5:

يمثل الجدول التالي أسعار وكميات ثلاثة بضائع خلال سنة 2005(هي سنة الأساس 0) و 2015 (سنة المقارنة t).

السنة ⇨	**2005**		**2015**		$P_0^iQ_0^i$	$P_t^iQ_0^i$	$P_0^iQ_t^i$	$P_t^iQ_t^i$
البضاعة ⇩	P_0^i	Q_0^i	P_t^i	Q_t^i				
A	12	15	16	20	180	240	240	320
B	10	12	12	25	120	144	250	300
C	20	18	25	45	360	450	900	1125
المجموع	**42**		**53**		**660**	**834**	**1390**	**1745**

1. احسب الرقم القياسي التجميعي للأسعار

$$IP_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{3} P_t^i}{\sum_{i=1}^{3} P_0^i} \times 100 = \frac{53}{42} \times 100 \Rightarrow \boxed{IP_{t/0} = 126,190\%}$$

2. احسب الرقم القياسي للأسعار للاسبير، بـــاش و فيـــشر

أ. الرقم القياسي للأسعار للاسبير

$$ILP_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\left(P_t^i \times Q_0^i\right)}{\sum_{i=1}^{3}\left(P_0^i \times Q_0^i\right)} \times 100 = \frac{834}{660} \times 100 \Rightarrow \boxed{ILP_{t/0} = 126{,}36\%}$$

ب. الرقم القياسي للأسعار لباش

$$IPP_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\left(P_t^i \times Q_t^i\right)}{\sum_{i=1}^{3}\left(P_0^i \times Q_t^i\right)} \times 100 = \frac{1745}{1390} \times 100 \Rightarrow \boxed{IPP_{t/0} = 125{,}54\%}$$

ج. الرقم القياسي للأسعار لـفيشر

$$IFP_{t/0} = \sqrt{ILP_{t/0} \times IPP_{t/0}} \times 100 = \sqrt{\frac{126{,}36}{100} \times \frac{125{,}54}{100}} \times 100$$
$$\Rightarrow \boxed{IFP_{t/0} = 126{,}36\%}$$

3. احسب الرقم القياسي للكميات للاسبير، بـــاش و فيـــشر

أ. الرقم القياسي للكميات للاسبير

$$\mathrm{IL(Q)}_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{3}(Q_t^i \times P_0^i)}{\sum_{i=1}^{3}(Q_0^i \times P_0^i)} \times 100 = \frac{1390}{660} \times 100 \Rightarrow \boxed{\mathrm{IL(Q)}_{t/0} = 210{,}6\%}$$

ب. الرقم القياسي للكميات لـباش

$$\mathrm{IP(Q)}_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{3}(Q_t^i \times P_t^i)}{\sum_{i=1}^{3}(Q_0^i \times P_t^i)} \times 100 = \frac{1745}{834} \times 100 \Rightarrow \boxed{\mathrm{IP(Q)}_{t/0} = 209{,}23\%}$$

ج. الرقم القياسي للكميات لفيشر

$$IFQ_{t/0} = \sqrt{ILQ_{t/0} \times IPQ_{t/0}} \times 100 = \sqrt{\frac{210{,}6}{100} \times \frac{209{,}23}{100}} \times 100$$
$$\Rightarrow \boxed{IFQ_{t/0} = 209{,}91\%}$$

4. تحقق من العلاقة:

$$\text{ILP} \times \text{IPQ} = \text{ILQ} \times \text{IPP} = IFP \times IFQ = IVG$$

$$\text{ILP}_{\text{t/0}} \times \text{IPQ}_{\text{t/0}} = \left(\frac{126{,}36}{100} \times \frac{209{,}23}{100}\right) \times 100 = 264{,}38\%$$

$$\text{ILQ}_{\text{t/0}} \times \text{IPP}_{\text{t/0}} = \left(\frac{210{,}6}{100} \times \frac{125{,}54}{100}\right) \times 100 = 264{,}38\%$$

$$\text{IFP}_{\text{t/0}} \times \text{IFQ}_{\text{t/0}} = \left(\frac{125{,}94}{100} \times \frac{209{,}91}{100}\right) \times 100 = 264{,}38\%$$

$$\text{IVG}_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{3}(P_t^i \times Q_t^i)}{\sum_{i=1}^{3}(P_0^i \times Q_0^i)} \times 100 = \frac{1745}{660} \times 100 \Rightarrow \text{IVG}_{t/0} = 264{,}39\%$$

العلاقة محققة: $\boxed{\text{ILP} \times \text{IPQ} = \text{ILQ} \times \text{IPP} = IFP \times IFQ = IVG}$

تمارين الفصل الرابع

التمرين1:

الجدول التالي يبين أسعار و كميات ثلاثة مواد **Z , Y, X** في سنتي **2005** (سنة الأساس) و في سنة **2010** (سنة المقارنة):

المواد Produits	2005		2010	
	الأسعار Prix	الكميات Quantités	الأسعار Prix	الكميات Quantités
X	10	6	30	6
Y	20	5	50	7
Z	5	9	15	7

1) أحسب الرقم التجميعي البسيط للأسعار.
2) أحسب منسوب السعر (الرقم القياسي البسيط للسعر) بالنسبة للسلعة X.
3) أحسب منسوب الكمية (الرقم القياسي البسيط للكمية) بالنسبة للسلعة Y.
4) أحسب الأرقام القياسية التجميعية المرجحة ل**Laspeyres** و ل **Paasche** للأسعار و للكميات.
5) أحسب الرقم القياسي الأمثل ل **Fisher** للأسعار و للكميات.

التمرين2:

الجدول التالي يبين أسعار و كميات ثلاثة مواد **Z , Y, X** في سنتي **2006** (سنة الأساس) و في سنة **2009** (سنة المقارنة):

مواد Produits	Quantité 2006	Prix 2009	I(Q) 2009/2006	I(P) 2009/2006
x	5	30	100	300
y	4	50	150	250
z	8	15	75	300

المطلوب:

1) أحسب كميات سنة المقارنة **(2009)**.
2) أحسب أسعار سنة الأساس **(2006)**.

التمرين3:

الجدول التالي يبين الأسعار و الكمياتالمستهلكة لثلاثة سلع A , B , Cفي سنتي **0** (سنة الأساس) و في سنة**t** (سنة المقارنة):

السلع	A	B	C
الأسعار$Prix_0$	12	?	50
الكميات$Quantité_0$	60	35	5
الأسعار$Prix_t$	?	22	58
الكميات$Quantité_t$	50	30	15

يقدر الرقم القياسي **Laspeyres** للكميات ب **116,766 %**و يقدر الرقم القياسي **Paasche** للكميات ب **% 122,289**.

المطلوب:

1) أكمل الجدول بحساب الأسعار المناسبة.
2) أوجد الرقم القياسي الأمثل.

التمرين4:

لدينا البيانات الإحصائيات التالية عن الأرقام القياسية لأسعار الاستهلاك:

السنوات	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
الأرقام القياسية	100	104,2	109,8	116,3	121,3	125,3	133,1	147,7	161,2

المطلوب: تحديد قيمة العملة (الدينار الجزائري) بالنسبة لكل سنة.

التمرين5:

ما هو معدل نمو سعر مادة ما لما الكمية المباعة تنمو ب**15**%و القيمة تنمو ب**30** % ؟

التمرين6:

في جانفي **2009** كان مجموع قائمة الأجور بمصنع به **120** عاملا هو **1500000 د.ج**, و في أوت من نفس السنة أضيف **30** عاملا إلى قائمة الأجور و دفع المصنع **225000 د.ج** أكثر مما دفع في شهر جانفي. باستخدام شهر جانفي كأساس.

المطلوب:

أوجد:

1. الرقم القياسي للعمالة (الرقم القياسي للكمية) لشهر أوت.
2. الرقم القياسي لتكلفة العملية (الرقم القياسي للقيمة الإجمالية) لشهر أوت.
3. باستخدام النتيجة: **الرقم القياسي للسعر x الرقم القياسي للكمية = الرقم القياسي للقيمة الإجمالية.**
   ما هو التفسير الممكن إعطاؤه للرقم القياسي للسعر في هذا المثال؟

التمرين7:

لدينا البيانات التالية حول الإنتاج الزراعي (بالطن) في بلد ما:

	1980-1985	1986-1991	1992-1997
إنتاج الحبوب	1200	1600	1400
إنتاج الخضر	900	800	750
إنتاج الحمضيات	500	550	550

المطلوب:

1. أحسب الأرقام القياسية البسيطة:
   أ-إنتاج الحبوب بين الفترة الأولى و الفترة الأخيرة.
   ب-إنتاج الخضر ما بين الفترة الثانية و الثالثة.
   ج-إنتاج الحمضيات ما بين الفترة الأولى و الثانية.
2. فسر النتائج.

التمرين8:

الجدول التالي يمثل أسعار و الكميات المستهلكة من سلعتين:

	2020		2021	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
السلعة X	10	25	12	20
السلعة Y	12	35	10	40

المطلوب:

1. احسب الرقم القياسي "باش للكميات".
2. احسب الرقم القياسي "لاسبير للأسعار".
3. احسب الرقم القياسي للقيم الإجمالية لكل من "باش" و "لاسبير".
4. احسب الرقم القياسي "فيشر" للكميات وللأسعار.

حلول الفصل الرابع

حل التمرين 1:

نقوم بإعداد الجدول:

المواد	P_{2005}	Q_{2005}	P_{2010}	Q_{2010}	$P_{2010}.Q_{2005}$	$P_{2010}.Q_{2010}$	$P_{2005}.Q_{2005}$	$P_{2005}.Q_{2010}$
X	10	6	30	6	180	180	60	60
Y	20	5	50	7	250	350	100	140
Z	5	9	15	7	135	105	45	35
∑	**35**		**95**		**565**	**635**	**205**	**235**

سنة الأساس = 2005   سنة المقارنة = 2010

1− الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار:

$$IP_{2010/2005} = \frac{\sum P^{i}_{2010}}{\sum P^{i}_{2005}} \times 100$$

حيث أن i تمثل عدد المواد

$\sum P^{i}_{2010}$ مجموع أسعار المواد الثلاثة لسنة المقارنة

$\sum P^{i}_{2005}$ مجموع أسعار المواد الثلاثة لسنة الأساس

$$IP_{2010/2005} = \frac{95}{35} \times 100 = 271{,}42\%$$

التفسير : إن أسعار المواد الثلاثة ارتفعت بمقدار :

(271,42−100) =171,42% من السنة 2005 إلى السنة 2010.

-منسوب السعر x : معناه الرقم القياسي البسيط للسعر للسلعةx:

Indice élémentaire des prix du produit x

$$I(P)^{x}_{2010/2005}=\frac{P^{x}_{2010}}{P^{x}_{2005}}\times 100$$

$$I(P)^{x}_{2010/2005}=\frac{30}{10}\times 100=300\%$$

سعر السلعةx ازداد أي ارتفع ب :

300-100=200% بين سنتي 2005 و2010

-منسوب السعر y : معناه الرقم القياسي البسيط للكميات للسلعة y:

Indice élémentaire des quantités du produit y

$$I(Q)^{y}_{2010/2005}=\frac{Q^{y}_{2010}}{Q^{y}_{2005}}\times 100$$

$$I(Q)^{y}_{2010/2005}=\frac{7}{5}\times 100=1{,}4\times 100=140\%$$

كمية السلعة y ارتفعت ب :

140-100=40% بين سنتي 2005 و2010

4-لاسبيرز للأسعار:

أي الرقم القياسي لاسبيرز للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس

Laspeyres des Prix

$$L(P)_{2010/2005}=\frac{\sum P^{3}_{2005}Q^{3}_{2005}}{\sum P^{3}_{2005}Q^{3}_{2005}}\times 100$$

3 هو عدد المواد

$$L(P)_{2010/2005} = \frac{565}{205} \times 100 = 275{,}609$$

<u>باش للأسعار:</u>

أي الرقم القياسي باش للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة ***Paasche des prix***

$$P(P)_{2010/2005} = \frac{\sum^{3} P_{2010} Q^{3}_{2010}}{\sum^{3} P_{2005} Q^{3}_{2010}} \times 100$$

$$P(P)_{2010/2005} = \frac{635}{235} \times 100 = 270{,}212$$

<u>لاسبيرز للكميات:</u>

أي الرقم القياسي لاسبيرز للكميات المرجح بأسعار سنة الأساس

Laspeyres des Quantités

$$L(Q)_{2010/2005} = \frac{\sum^{3} P_{2005} Q^{3}_{2010}}{\sum^{3} P_{2005} Q^{3}_{2005}} \times 100$$

3 هو عدد المواد

$$L(Q)_{2010/2005} = \frac{235}{205} \times 100 = 114{,}634$$

<u>* باش للكميات :</u>

أي الرقم القياسي باش للكميات المرجح بأسعار سنة المقارنة

Paasche des Quantités

$$P(Q)_{2010/2005} = \frac{\sum^{3} P_{2010} Q^{3}_{2010}}{\sum^{3} P_{2010} Q^{3}_{2005}} \times 100$$

3 هو عدد المواد

$$P(Q)_{2010/2005} = \frac{635}{565} \times 100 = 112{,}389$$

5-الرقم القياسي الأمثل لفيشر

-فيشر للأسعار *Fisher des Prix*

$$F(P)_{2010/2005} = \sqrt{L(P) \times P(P)}$$

$$F(P)_{2010/2005} = \sqrt{275{,}609 \times 270{,}21} = 272{,}896$$

-فيشر للكميات *Fisher des Quantités*

$$F(Q)_{2010/2005} = \sqrt{L(Q) \times P(Q)}$$

$$F(Q)_{2010/2005} = \sqrt{114{,}634 \times 112{,}389} = 113{,}505$$

ملاحظة:

- إن الرقم القياسي الأمثل لفيشر هو عبارة عن الوسط الهندسي للرقمين القياسيين لكل من لاسبيرز وباش.

- الرقم القياسي لفيشر محصور بين رقمي لاسبيرز وباش.

$$P \langle F \langle L$$

بالنسبة للأسعار $P(P) \langle F(P) \langle L(P)$

$$270{,}12 \langle 272{,}896 \langle 275{,}609$$

بالنسبة للكميات $P(Q) \langle F(Q) \langle L(Q)$

$$112{,}389 \langle 113{,}505 \langle 114{,}634$$

حل التمرين2:

1- حساب كميات سنة المقارنة: (2009)

لدينا منسوب الكميات أي الرقم القياسي البسيط للكميات:

Indice élémentaire des Quantités

$$I(Q)_{2009/2006} = \frac{Q_{2009}}{Q_{2006}} \times 100$$

نحن نبحث عن كميات سنة المقارنة Q_{2009}

$$\Rightarrow Q_{2009} \times 100 = I(Q)_{2009/2006} \times Q_{2006}$$

$$\boxed{\Rightarrow Q_{2009} = \frac{I(Q)_{2009/2006} \times Q_{2006}}{100}}$$

بالنسبة للسلعة x: كميات Quantités

$$Q^{x}_{2009} = \frac{I(Q)^{x}_{2009/2006} \times Q^{x}_{2006}}{100}$$

$$\Rightarrow Q^{x}_{2009} = \frac{100 \times 5}{5} = 5$$

$$\boxed{\Rightarrow Q^{x}_{2009} = \frac{100 \times 5}{100} = 5}$$ ***كمية المادة x في سنة المقارنة***

بالنسبة للسلعة y: كميات Quantités

$$\boxed{\Rightarrow Q^{y}_{2009} = \frac{150 \times 4}{100} = 6}$$ ***كمية المادة y في سنة المقارنة***

بالنسبة للسلعة z: **كميات Quantités**

$$\boxed{\Rightarrow Q^{z}_{2009} = \frac{75 \times 8}{100} = 6}$$ ***كمية المادة z في سنة المقارنة***

2- حساب أسعار سنة الأساس : (2006)

Indice élémentaire des Prix

نستخدم نفس الطريقة

$$I(P)^{i}_{2009/2006} = \frac{P^{i}_{2009}}{P^{i}_{2006}} \times 100$$

$$\Rightarrow P^{i}_{2006} = \frac{P^{i}_{2009}}{I(P)^{i}_{2009/2006}} \times 100$$

بالنسبة للسلعة x: **أسعار Prix**

$$\boxed{\Rightarrow P^{x}_{2006} = \frac{30}{300} \times 100 = 10}$$ ***سعر المادة x في سنة الأساس***

بالنسبة للسلعة y: **أسعار Prix**

$$\boxed{\Rightarrow P^{y}_{2006} = \frac{50}{250} \times 100 = 20}$$ ***سعر المادة y في سنة الأساس***

بالنسبة للسلعة z: **أسعار Prix**

$$\boxed{\Rightarrow P^{z}_{2006} = \frac{15}{300} \times 100 = 5}$$ ***سعر المادة*** z في سنة الأساس

ملاحظة:

السلعة أو المادة تعني نفس الشيء.

حل التمرين 3 :

نقوم بإعداد الجدول باستخدام:

0 سنة الأساس

t سنة المقارنة

السلع	السنة 0		السنة t		$P_0.Q_0$	$P_t.Q_0$	$P_t.Q_t$	$P_0.Q_t$
	P_0	Q_0	P_t	Q_t				
A	12	60	?	50	720	$60P_{tA}$	$50P_{tA}$	600
B	?	35	22	30	$35P_{0B}$	770	660	$30P_{0B}$
C	50	5	58	15	250	290	870	750
Σ					**$970+35P_{0B}$**	**$1060+60P_{tA}$**	**$1530+50P_{tA}$**	**$1350+P_{0B}$**

1− لاسبيرز للكميات

Laspeyres des Quantités

$$L(Q)_{t/0} = \frac{\sum P_0^i Q_t^i}{\sum P_0^i Q_0^i} \times 100$$

$$\Rightarrow 116{,}766 = \frac{1350 + 30P_{0B}}{970 + 35P_{0B}} \times 100$$

$$113263{,}02 + 4086{,}81 \times P_{0B} = 1350 + 3000 \times P_{0B}$$

$$\boxed{\Rightarrow P_{0B} = 20}$$

سعر السلعة B في سنة الأساس 0

باش للكميات

Paasche des Quantités

$$P(Q)_{t/0} = \frac{\sum P_t^i Q_t^i}{\sum P_t^i Q_0^i} \times 100$$

$$\Rightarrow 122{,}289 = \frac{1530 + 50P_{tA}}{1060 + 60P_{tA}} \times 100$$

$$12962{,}34 + 7337{,}34 \times P_{tA} = 15300 + 5000 \times P_{tA}$$

$$\boxed{\Rightarrow P_{tA} = 10}$$

سعر السلعة A في سنة المقارنة t

2-الرقم القياسي الأمثل هو رقم فيشر

بما انه لدينا أرقام لاسبيرز و باش للكميات فإن الرقم القياسي الأمثل المناسب هو رقم فيشر للكميات :

فيشر للكميات **Fisher des Quantités**

$$F(Q)_{2010/2005} = \sqrt{L(Q) \times P(Q)}$$

$$\boxed{\Rightarrow F(Q)_{2010/2005} = \sqrt{116{,}766 \times 112{,}289} = 119{,}495}$$

حل التمرين 4:

لتحديد القدرة الشرائية للعملة نقسم وحدة واحدة من هذه العملة على الرقم القياسي للأسعار الاستهلاكية:

$$\text{قيمة الدينار الجزائري} = \frac{1}{\text{الرقم القياسي}} \times 100$$

Pour l'année 1986 بالنسبة لسنة $= \frac{1}{100} \times 100 = 1$

Pour l'année 1987 بالنسبة لسنة$= \frac{1}{104{,}2} \times 100 = 0{,}959$

هذا معناه أن قيمة الدينار الجزائري أي القيمة الشرائية انخفضت في سنة 1987.

وهكذا نحصل على الجدول التالي :

السنوات	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
قيمة الدينار	1	0,959	0,910	0,859	0,824	0,798	0,751	0,677	0,62

إذن نلاحظ أن قيمة الدينار الجزائري في تناقص من سنة إلى أخرى و هذا يرجع إلى ارتفاع أسعار المواد الاستهلاكية.

ومنه فإن دينار واحد لسنة **1994** لا يساوي دينار واحد لسنة **1986** بل يمثل **0,62** من دينار **1986.**

<u>حل التمرين 5 :</u>

نرمز لمعدل نمو السعر، معدل نمو الكمية المباعة و معدل نمو القيمة الإجمالية بالرموز التالية :

= معدل نمو السعر = ؟ i^{P}

= معدل نمو الكمية = i^{Q} $15\% = 0,15$

= معدل نمو القيمة الإجمالية = i^{VG} $30\% = 0,30$

نحصل على الرقم **I(Q)** في الرقم القياسي للكميات **I(P)** إذا ضربنا الرقم القياسي للأسعار القياسي للقيمة الإجمالية **I(VG):**

$$\boxed{I(VG) = I(P) \times I(Q)}$$

و لدينا أيضا الرقم القياسي هو معدل النمو زائد واحد أي :

$$I = i + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} I(VG)=I(P)\times I(Q) \\ I=i+1 \end{array}\right\} \Rightarrow I(P)=\frac{I(VG)}{I(Q)}=i^{P}+1$$

الرقم القياسي للأسعار :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} I(VG)=i^{VG}+1=0{,}3+1=3{,}1 \\ I(Q)=i^{Q}+1=0{,}15+1=1{,}15 \end{array}\right\} \Rightarrow I(P)=\frac{I(VG)}{I(Q)}=\frac{1{,}3}{1{,}15}=1{,}1304}$$

بما أن $I(P)=i^{p}+1$

$$\Rightarrow i^{p}=I(P)-1=1{,}1304-1=0{,}1304$$

معدل نمو سعر المادة هو: $\boxed{\Rightarrow i^{p}=0{,}1304\times 100=13.04\%}$

حل التمرين 6:

1- الرقم القياسي للعمالة أي الرقم القياسي للكميات :

Indice de l'emploi = Indice des Quantités

$$I(Q)_{Aout/Janvier}=\frac{Q_{Aout}}{Q_{Janvier}}\times 100=\frac{120+30}{120}\times 100$$

$$\boxed{I(Q)_{Aout/Janvier}=125\%}$$

هذا يعني أن العمالة $Emploi$ قد ازدادت بنسبة $(100-125)=25\%$ في شهر أوت مقارنة بشهر يناير(جانفي).

2- الرقم القياسي لتكلفة العملية أي الرقم القياسي للقيمة الإجمالية:

$$I(VG)_{Aout/Janvier} = \frac{VG_{Aout}}{VG_{Janvier}} \times 100 = \frac{1500000 + 225000}{1500000} \times 100$$

$$\boxed{I(VG)_{Aout/Janvier} = 115\%}$$

هذا يعني أن القيمة الإجمالية (VG) للأجور المدفوعة قد ازدادت بنسبة $(100-115) = 15\%$ في شهر أوت مقارنة بشهر يناير(جانفي).

3- الرقم القياسي للسعر:

Indice des Prix

$$I(P)_{Aout/Janvier} = I(Q)_{Aout/Janvier} = I(VG)_{Aout/Janvier}$$

$$\Rightarrow I(P)_{Aout/Janvier} = \frac{I(VG)_{Aout/Janvier}}{I(Q)_{Aout/Janvier}} = \frac{115}{125} = 0,92$$

$$\boxed{\Rightarrow I(P)_{Aout/Janvier} = 92\%}$$

إن التفسير الذي يمكن إعطاؤه لهذه النتيجة هو أن سعر العمالة قد انخفض بنسبة $(92-100) = 8\%$ في شهر أوت **2009** عما كان عليه في شهر يناير(جانفي) **2009**.

حل التمرين 7:

1. الرقم القياسي البسيط هو مقارنة إنتاج الفترة الحالية بإنتاج الفترة السابقة، لا يطرح فيه إشكال الترجيح ولا اختيار الأساس.

أ-الرقم القياسي البسيط لإنتاج للحبوب بين الفترة الأولى والفترة الثالثة:

$$I = \frac{1400}{1200} \times 100 = 116{,}66$$

ب-بالنسبة للخضر لدينا:

$$I = \frac{1600}{1200} \times 100 = 133{,}33$$

ج-الرقم القياسي لإنتاج الحمضيات:

$$I = \frac{750}{800} \times 100 = 93{,}75$$

2. الرقم القياسي الأول والثاني يدلان على أن هناك ارتفاع في إنتاج الحبوب والخضر ويقدر هذا الارتفاع على الترتيب ب 16,66% و 33,33%؛ في حين يوجد انخفاض في إنتاج الحمضيات و يساوي هذا الانخفاض ب 6,25.

الارتفاع الحاصل في إنتاج الحبوب مثلا يمثل الاتجاه بين بداية الفترة ونهايتها في حين لو حسبنا الرقم القياسي بين الفترة الأولى والثانية لوجدناه يساوي 133,33 مما يدل على الإنتاج كان أكثر ارتفاعا في الفترة الثانية من الفترة الأولى. فعندما نحسب الرقم القياسي في فترة ممتدة نوعا ما (من 1980 إلى 1997) فإن النتائج قد لا يكون لها معنى مفيدا للفاصل الزمني بين سنة الأساس وسنة المقارنة.

حل التمرين 8:

1. رأينا أن "باش" يرجح بسنة المقارنة والرقم القياسي للكميات سيرجح إذا بأسعار سنة المقارنة؛ ونكتب:

$$P_{Q\,2001/2000} = \frac{\Sigma P_t^i Q_t^i}{\Sigma P_t^i Q_0^i} \times 100 = \frac{(12 \times 20) + (10 \times 40)}{(12 \times 25) + (10 \times 35)} \times 100 = 92,30$$

2. أما "لاسبير" فإنه يرجح بسنة الأساس؛ فالرقم القياسي للأسعار سيرجح بكميات سنة الأساس، ومنه:

$$L_{P\,2001/2000}=\frac{\Sigma P_t^i Q_0^t}{P_0^i Q_0^i}=\frac{(12\times 25)+(10\times 35)}{(10\times 25)+(12\times 35)}\times 100=97,01$$

3. بالنسبة للقيم الإجمالية فإن الرقم القياسي "باش" و "لاسبير" يتساويان ونكتب :

$$L_{vg}=P_{vg}=\frac{\sum P_t\ Q_t}{\sum P_0{}^i Q_0}\times 100$$
$$=\frac{(12\times 20)+(10\times 40)}{(10\times 25)+(12\times 35)}\times 100=95$$

هذا الرقم القياسي يسجل انخفاضا يساوي 5%.

4. بالنسبة للقيم الإجمالية فإن الرقم القياسي "باش" و "لاسبير" يتساويان ونكتب :

الرقم القياسي Fisher يساوي $F=\sqrt{LP}$

- -بالنسبة للكميات نكتب إذا:

$$F_Q=\sqrt{L_Q\times P_Q}$$

كنا قد حسبنا P_Q نحسب L_Q:

$$L_Q=\frac{\Sigma P_t^i Q_t^i}{\Sigma P_t^i Q_0^i}=\frac{(10\times 20)+(12\times 40)}{(10\times 25)+(12\times 35)}\times 100=94,44$$

ونجد:

$$F_Q=\sqrt{92,30\times 94,44}=93,35$$

- -بالنسبة للأسعار نكتب:

$$F_P=\sqrt{P_P\times L_P}$$

وكنا قد وجدنا أن: $L_P=97,01$.

نحسب:

$$P_P=\frac{\Sigma P_t^i Q_t^i}{\Sigma P_0^t Q_t^i}\times 100=\frac{(12\times 20)+(10\times 40)}{(10\times 20)+(12\times 40)}\times 100=94,11$$

ومنه:

$$F_Q = \sqrt{97,01 \times 94,11} = 95,54$$

قائمة المراجع

-**جاك لوكايون و كريستيان لابروس :**"الإحصاء الوصفي"، ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 1985

-**محمد صبحي أبو صالح و عدنان محمد عوض :**"مقدمة في الإحصاء"، دار المسيرة عمان 2007.

-**عز الدين جوني :** "نظرية الإحصاء"، ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 1984.

-**عبد العزيز فهمي هيكل :**"طرق التحليل الإحصائي"، دار النهضة العربية بيروت.

- **عبد الجبار توفيق البياتي :**"الإحصاء و تطبيقاته"، إثراء للنشر و التوزيع، عمان 2008.

- **عبد الناصر رويسات :**"الإحصاء الوصفي و مدخل الاحتمالات دروس و تمارين"، ديوان المطبوعات الجامعية المطبعة الجهوية بوهران 2006.

- **جلاطوجيلالي:**"الإحصاء مع تمارين و مسائل محلولة "، ديوان المطبوعات الجامعية - الجزائر- 1998.

- **حامد نور الدين:**" دروس في مقياس الإحصاء الوصفي"، دار اليازوري العلمية للنشر و التوزيع – عمان - 2016.

- مواقع الأنترنت : قوقل، يوتيوب : كتابة دروس، محاضرات، تمارين و امتحانات في الإحصاء الوصفي.

- BAILLARGEON G., «**Probabilité, statistique descriptive et technique de régression** » , SMG, 1989.

- BARTHE René., «**La Statistique Descriptive en 10 leçons : Méthode progressive "ABCD"** » , Edition Economica, 1989.

- CALOT Gérard, «**Cours de statistique descriptive»**, édition Dunod, Paris, 1973.

- CHAUVAT Gérard, REAU Jean-Philippe, « **Statistiques descriptives**», ARMAND COLIN, 2002.

- DagnelieP., «**Théorie et méthodes statistiques 2 tomes**», Presses agronomiques Gembloux 1985.

- DROESBEKE Jean-Jacques, « **Eléments de Statistique** », OPU, 1988 by Editions de l’Université de Bruxelles (Belgique).

- GIARD V., « **Statistique appliquée à la gestion**» , Economica, 1987.
- GOLDFARB Bernard, PARDOUX Catherine,**« Introduction à la Méthode Statistique, Exercices Corrigés** », DUNOD, 2003.
- GOLDFARB Bernard, PARDOUX Catherine, « **Introduction à la Méthode Statistique**», DUNOD, 2003.
- GRAIS B., « **Statistique descriptive** », Edition Dunod, 1995.
- GRAIS B., « **Exercices corrigés de statistique descriptive avec rappel de cours** », Dunod, 1991.
- GRAIS B., « **Statistique pour économistes** », Economica, 1987.
- GUITTON Henri, « **Statistique** «, Edition Dalloz,1976.
- Léonard G Kazmier, « **Statistiques de la gestion** », McGRAW-HILL Québec 1982.
- Khaldi Khaled, « **Méthodes statistiques** », OPU Constantine 2005.
- LABROUSSE Christian, Statistique, « **Exercices corrigés avec rappel**

  de cours », Dunod, 292 p., Paris, 1980.
- LETHIELLEUX Maurice, « **Statistique descriptive**», Dunod, 2003.
- MASIERI Walder, « Méthodes **Quantitatives** », 2ème Dunod, Paris 1990.
- MASIERI Walder, « **Statistique et calcul des probabilités** », Dalloz, Paris 2001.
- MONINO Jean-Louis, KOSIANSKI Jean-Michel, LE CORNU François, «**Statistiques descriptives - Travaux dirigés** », DUNOD, 2000.
- MURRAY R. Spiegel, « **Statistique** », Série Schaum, 2ème édition, traduction de la 2ème américaine, France, 1996.

- Murray R. Spiégel, « **Théorie et application de la statistique** », McGRAW-HILL Québec 1985.

- P. Pacé et R Cluzel, « **Statistique et probabilité** », Ed Delagrave Paris 1982.

- PY Bernard, « **Exercices corrigés de Statistique Descriptive**», ECONOMICA, 2ème édition, Paris, 1994.

- PY Bernard, « **Statistique Descriptive**», ECONOMICA, 4ème édition, Paris, 2001.

- TENENHAUS Michel, **« Statistique : Méthodes pour décrire, expliquer et prévoir** », DUNOD, 2006.

- SALVAORE Dominick, « **Econométrie et statistique appliquée, Cours et problème** », Série Schaum, 297 p., Paris, 1985.

- TUFFERY Stéphane,« **Data Mining et statistique décisionnelle TECHNIP 2012». Un** panorama très complet du data mining avec quelques rappels de statistiques. Plus axé sur l'opérationnel que sur les démonstrations.

- LEBART L., PIRON M et MORINEAU A.,« **Statistique exploratoire multidimensionnelle**», **DUNOD 2006.**Un incontournable de niveau master.

- MELARD Guy,« **Méthodes de prévision à court terme** », **ELLIPSES 2007.** Un ouvrage particulièrement clair et opérationnel qui explore à fond certaines techniques. Avec CD-ROM. Mais il n'est plus édité...

- SAPORTA Gilbert,« **Probabilités, analyse des données et statistiques**» **TECHNIP 2011.** La référence, tant pour les statistiques que pour l'analyse de données. Bon niveau en maths exigé !

- TRIBOUT Brigitte,« **Statistiques pour économistes et gestionnaires** », **PEARSON 2013.** Initiation très claire qui ne s'adresse pas qu'aux économistes...

- DEHON Catherine, DROESBEKE Jean-Jacques et VERMANDELE Catherine,« **Éléments de statistiques** », **SMA 2008.** Une copieuse introduction aux statistiques qui aborde aussi l'analyse de données. Lecture facile.

- GEORGIN Jean-Pierre, GOUET Michel,« **Statistiques avec Excel, descriptives, tests paramétriques et non paramétriques à partir de la version Excel 2000** », **PUR 2005.** Je dois beaucoup à cet ouvrage qui détaille des tests pour certains peu connus. Avec CD-ROM.

- Webographie et Sites internet en arabe et en langues étrangères : Google, YouTube,…: Ecrire cours, exercices et examens de statistique descriptive.

الفهرس