



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et De la Recherche Scientifique  
Université d'ORAN Es - Senia  
Institut de Maintenance & de Sécurité Industrielle  
Département d'Instrumentation



## Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de :  
MAGISTER en AUTOMATIQUE

### Option :

Contrôle de processus industriel et de laboratoire

### Thème :

**Commande à structure variable par Observateur  
D'un robot manipulateur rigide  
de type SCARA**

Présentée par :

Mr. ABDOUNE ABDELKRIM

**Soutenu publiquement le : 30 Juin 2014 devant le jury :**

Mme . ZEBIRATE SORIYA	Maître de conférence A	IMSI-Oran	Président
Mr. MANSOURI ABDELLAH	Professeur	ENP-Oran	Encadreur
Mr. CHENAFI MOHAMED	Maître de conférence A	ENP-Oran	Examineur
Mr. HASSINI ABDELATIF	Maître de conférence A	IMSI-Oran	Examineur
Mr. HACHEMI KHALID	Maître de conférence B	IMSI-Oran	Examineur

Année universitaire : 2013 / 2014

# Remerciements

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse Monsieur MANSOURI ABDELLAH Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'OARN. Il n'a pas simplement accepté de diriger ma thèse, il m'a transmis la passion de la recherche et n'a eu de cesse de m'encourager et de me soutenir durant ces années. J'ai pu apprécier non seulement sa dimension professionnelle, mais aussi sa dimension humaine. J'en profite pour lui exprimer ici ma plus profonde gratitude.

Mes profondes remerciements vont aussi à :

Madame ZEBIRATE SORIYA maître de conférences à l'Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle de Université d'ORAN, pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury d'examen de ce mémoire.

Je remercie Monsieur CHENAFI MOHAMED maître de conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique d'OARN, pour avoir accepté d'examiner ce travail et pour ces conseils précieux et son temps précieux.

Monsieur HASSINI ABDELATIF maître de conférences à l'Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle de Université d'ORAN, pour avoir accepté d'examiner ce travail et pour son soutien moral.

Monsieur HACHEMI KHALID maître de conférences à l'Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle de Université d'ORAN, pour avoir accepté d'examiner ce travail et pour l'attention accordée de sa part.

Je n'oublie pas à remercier vivement Madame LEBSIR HAYAT maître de conférences à l'IMSI d'ORAN et Madame LOUNIS ZOUBIDA Professeur à l'IMSI d'ORAN pour les précieux conseils et leurs soutiens.

Enfin, je souhaite remercier ma famille pour leur soutien constant. Cette thèse, aboutissement de longues années d'études, je la dois beaucoup à mes parents exceptionnels. Il m'est impossible de trouver des mots pour dire à quel point je suis fier d'eux, à mes amis et collègues de travail.

## **DEDICACES**

*Je dédie cette thèse :*

*A mon père pour la patience Pour l'aide précieuse et les encouragements dans les moments de doute.*

*A ma mère pour l'amour, la lumière et ses prières, avoir fait de moi un homme.*

*A mes Frères, sœurs pour leur soutien moral, pour tous les encouragements tout au long de ces années.*

*A mes amis et collègues pour l'aide et le soutien pendant mes études.*

*À tous ceux que ma réussite leur tient à cœur*

**Résumé :** Dans ce mémoire, nous avons approfondi notre étude sur la commande non linéaire en mode glissant appliquée à un robot manipulateur rigide de type SCARA. La difficulté de la mesure des variables d'état a été surmontée par l'utilisation d'un observateur d'état, un observateur à mode glissant propose des solutions du problème de l'observabilité de la vitesse de rotation de notre système non linéaire. Nous avons prouvé qu'avec un observateur à mode glissant en forme triangulaire «étape par étape» donne une meilleure estimation de la vitesse. Finalement l'utilisation de la commande avec l'observateur non linéaire a été exécutée théoriquement et en simulation sous Matlab

**Mots clés :** Observabilité, Observateur à modes glissant. Commande en mode glissant .Modélisation dynamique d'un bars manipulateur

**Abstract:** In this paper, we have deepened our study on nonlinear sliding mode control applied to a rigid robot manipulator SCARA type. The difficulty of measuring the state variables has been overcome by the use of a state observer. A sliding mode observer offers solutions to the problem of observability of the speed of our nonlinear system. We have proved that with an sliding mode observer with triangular form "step by step» gives a better estimate of the speed. Finally the use of the command with the nonlinear observer was performed theoretically and simulation in Matlab.

**Key words:** Observability. Sliding mode observer. Sliding mode control . Dynamic modeling of a manipulator arm

# Table des matières

Résume .....	i
Table des matières .....	ii
Liste des figures .....	vi
Liste des tableaux .....	viii
Notations et abréviations. ....	ix
<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>

## CHAPITRE 0I

### Modélisation dynamique d'un robot manipulateur rigide

<b>I.1 Introduction à la Robotique.</b> .....	<b>03</b>
<b>I.2 Les Robots industriels</b> .....	<b>04</b>
<b>I.2.1 Définitions</b> .....	<b>04</b>
<b>I.2.2 Caractéristiques</b> .....	<b>05</b>
<b>I.2.3 Eléments constitutifs d'un robot</b> .....	<b>05</b>
<b>I.3 Classification des robots</b> .....	<b>08</b>
<b>I.3.1 Classification fonctionnelle</b> .....	<b>08</b>
<b>I.3.2 Classification géométrique</b> .....	<b>08</b>
<b>I.4 Performances des robots</b> .....	<b>10</b>
<b>I.4.1 Performances vis-à-vis des tâches</b> .....	<b>11</b>
<b>I.4.1. 1. Le volume atteignable (volume de travail)</b> .....	<b>11</b>
<b>I.4.1. 2. La Précision</b> .....	<b>12</b>
<b>I.4.1. 3. La vitesse</b> .....	<b>12</b>
<b>I.4.1. 4. La fiabilité</b> .....	<b>12</b>
<b>I.5 Géométrie structurelle d'un robot manipulateur</b> .....	<b>13</b>
<b>I.5.1 Introduction</b> .....	<b>13</b>
<b>I.5.2 Structure géométrique des robots manipulateurs à chaîne ouverte simple</b>	<b>13</b>
<b>I.5.3 Matrice de rotation autour d'un axe</b> .....	<b>14</b>
<b>I.5.4 Matrices de passage homogènes</b> .....	<b>15</b>
<b>I.6 Convention de Denavit-Hartenberg</b> .....	<b>16</b>
<b>I.6.1 Matrice de transformation homogène par la représentation de D.H</b> .....	<b>19</b>

<b>I.7</b>	<b>Modélisation dynamique d'un robot manipulateur rigide</b>	<b>21</b>
<b>I.7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>I.7.2</b>	<b>Formulation de Lagrange-Euler</b>	<b>22</b>
<b>I.7.3</b>	<b>Calcul de l'énergie cinétique</b>	<b>22</b>
<b>I.7.4</b>	<b>Calcul de l'énergie potentielle</b>	<b>28</b>
<b>I.7.5</b>	<b>Equations des mouvements du robot</b>	<b>28</b>
<b>I.8</b>	<b>Propriétés des équations dynamiques d'un robot manipulateur</b>	<b>32</b>
<b>I.8.1</b>	<b>Propriétés de la matrice d'inertie</b>	<b>32</b>
<b>I.8.2</b>	<b>Propriétés de la matrice des forces centrifuges et de Coriolis</b>	<b>33</b>
<b>I.8.3</b>	<b>Propriétés du vecteur de gravité</b>	<b>35</b>
<b>I.8.4</b>	<b>Propriétés du vecteur des frottements</b>	<b>35</b>
<b>I.8.5</b>	<b>Propriétés du vecteur des perturbations</b>	<b>36</b>
<b>I.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>36</b>

## **CHAPITRE II**

### **Application de la Commande en mode glissant au robot**

<b>II.1</b>	<b>Introduction à la Commande en Mode glissant.</b>	<b>37</b>
<b>II.2</b>	<b>Approche des modes glissants.</b>	<b>37</b>
<b>II.2.1</b>	<b>Définitions.</b>	<b>38</b>
<b>II.2.2</b>	<b>Phénomène de réticence.</b>	<b>41</b>
<b>II.2.3</b>	<b>Détermination de la dynamique de glissement.</b>	<b>42</b>
<b>II.2.3.1</b>	<b>Méthode de Filippov pour la détermination de la dynamique de glissement.</b>	<b>43</b>
<b>II.2.3.2</b>	<b>Méthode de la commande équivalente.</b>	<b>44</b>
<b>II.2.4</b>	<b>Degré relatif et choix de la surface de glissement.</b>	<b>47</b>
<b>II.3</b>	<b>Commande en mode glissant appliquée à un robot à deux articulations.</b>	<b>48</b>
<b>II.3.1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>48</b>
<b>II.3.2</b>	<b>Modélisation du robot à deux articulations.</b>	<b>48</b>
<b>II.3.3</b>	<b>Commande en modes glissants standard.</b>	<b>51</b>
<b>II.3.4</b>	<b>Stabilité de la commande au sens de Lyapunov.</b>	<b>53</b>
<b>II.4</b>	<b>Conclusion.</b>	<b>55</b>

## CHAPITRE III

### Synthèse d'un observateur à structure variable en mode glissant pour le robot

III.1	Introduction.	56
III.2	Observabilité.	56
III.2.1	Observabilité des systèmes linéaires.	58
III.2.2	Observabilité des systèmes non linéaires.	59
III.3.1	Observateur de Luenberger.	62
III.3.2	Filtre de Kalman.	64
III.3.3	Observateur à entrée inconnue.	64
III.4	Observateurs des systèmes non linéaires.	66
III.4.1	Observateur de Luenberger étendu.	66
III.4.2	Filtre de Kalman Etendu (EKF).	66
III.4.3	Observateurs à grand gain.	67
III.5	Observateurs à mode glissant.	68
III.5.1	Observateurs à mode glissant des systèmes linéaires.	71
III.5.2	Observateurs à mode glissant sous forme triangulaire.	74
III.6	Application de l'Observateur à un robot à deux articulations.	77
III.6.1	Mise sous forme triangulaire du modèle dynamique.	77
III.6.2	Observation en mode glissant sous forme triangulaire.	78
III.6.3	Convergence de l'observateur.	78
III.7	Conclusion	80

## CHAPITRE IV

### Résultat de simulation application à un robot 2ddl de type SCARA

IV.1	Application de la commande dynamique à un bras manipulateur à 2 ddl.	81
IV.2.	Modélisation du robot SCARA à deux degrés de liberté.	82
IV.2.1	Application de la méthode de Lagrange- Euler.	83
IV.2.2	Dynamique du manipulateur 2ddl.	86
IV.2.3	Les Paramètres du robot 2ddl.	87

<b>IV.3</b>	<b>Simulation de la commande en mode glissant appliquée à un robot 2ddl. ....</b>	<b>87</b>
<b>IV.3.1</b>	<b>Les Courbes de simulation de la commande en mode glissant. ....</b>	<b>88</b>
<b>IV.3.1.1</b>	<b>Les trajectoires réelles <math>x_1, x_3</math> et désirées des positions <math>x_{1d}, x_{3d}</math> ...</b>	<b>88</b>
<b>IV.3.1.2</b>	<b>Les Courbes des erreurs des trajectoires <math>e_1 = x_1 - x_{1d}</math> et <math>e_3 = x_3 - x_{3d}</math></b>	<b>89</b>
<b>IV.3.1.3</b>	<b>Les courbes des vitesses réelles <math>\dot{x}_1, \dot{x}_3</math>, et désirées <math>\dot{x}_{1d}, \dot{x}_{3d}</math> ....</b>	<b>90</b>
<b>IV.3.1.4</b>	<b>Les courbes des erreurs des vitesses <math>\dot{e}_1</math> et <math>\dot{e}_3</math> ....</b>	<b>91</b>
<b>IV.4</b>	<b>Simulation de l'observateur en mode glissant appliquée à un robot 2ddl. ....</b>	<b>92</b>
<b>IV.4.1</b>	<b>Les Courbes de simulation de l'Observateur en mode glissant. ....</b>	<b>92</b>
<b>IV.4.1.1</b>	<b>Les courbes des vitesses réelles <math>\dot{x}_1, \dot{x}_3</math>, et estimée <math>\hat{\dot{x}}_1, \hat{\dot{x}}_3</math> ....</b>	<b>92</b>
<b>IV.4.1.2</b>	<b>Les courbes des erreurs estimations des vitesses <math>\dot{e}_1</math> et <math>\dot{e}_3</math> ....</b>	<b>93</b>
<b>IV.5</b>	<b>Simulation de la commande M.G avec Observateur M.G appliquée à un robot. ....</b>	<b>94</b>
<b>IV.5.1</b>	<b>Les Courbes de la simulation. ....</b>	<b>95</b>
<b>IV.5.1 .1</b>	<b>Les trajectoires réelles <math>x_1, x_3</math> et désirées des positions <math>x_{1d}, x_{3d}</math> .</b>	<b>95</b>
<b>IV.5.1 .2</b>	<b>Les courbes des erreurs de trajectoire <math>e_1 = x_1 - x_{1d}</math> et <math>e_3 = x_3 - x_{3d}</math> .</b>	<b>96</b>
<b>IV.5.1 .3</b>	<b>Les courbes des vitesses réelles de commande <math>\dot{x}_1, \dot{x}_3</math>, et désirées <math>\dot{x}_{1d}, \dot{x}_{3d}</math></b>	<b>97</b>
<b>IV.51 .4</b>	<b>Les courbes des erreurs de Vitesse <math>\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}</math> et <math>\dot{e}_3 = \dot{x}_3 - \dot{x}_{3d}</math></b>	<b>98</b>
 <b>Conclusion générale et perspective .....</b>		<b>100</b>
<b>Bibliographie .....</b>		<b>102</b>
<b>Annexe .....</b>		<b>105</b>

## Liste des Figures

Figure I.1	La structure mécanique d'un robot industriel .....	06
Figure I.2	Organe terminal sous forme d'une Main à 10 ddl .....	06
Figure I.3	Éléments constitutifs d'un robot .....	07
Figure I.4	Coordonnées cartésiennes. Exemple : Robot CHAVERIAT .....	09
Figure I.5	Coordonnées cylindriques Exemple : Seiko RT3300 Robot .....	09
Figure I.6	Coordonnées polaires Exemple : Stanford Arm. ( Illinois . USA ) .....	09
Figure I.7	Coordonnées universelles Exemple : Robot ABB - IRB1400 .....	10
Figure I.8	Robot SCARA Exemple : Robot SCARA TS80 - STÄUBLI .....	10
Figure I.9	Représentation du volume de travail .....	11
Figure I.10	Schématisation d'un système mécanique articulé .....	13
Figure I.11	Rotation autour de z .....	14
Figure I.12	Transformation rigide du corps .....	15
Figure I.13	Référentiels et paramètres associés aux membres d'un robots selon DH ...	17
Figure I.14	Passage d'un repère $R_{i-1}$ à un repère $R_i$ par D-H .....	18
Figure II.1	Différents comportements en dehors de la surface de discontinuité .....	39
Figure II.2	Mode de glissement idéal .....	40
Figure II.3	Mode de glissement avec réticence. ....	42
Figure II.4	Construction de Filippov. ....	44
Figure II.5	Construction par la méthode de la commande équivalente. ....	46
Figure II.6	Schéma du bras manipulateur à deux articulations. ....	49
Figure II.7	Schématisation du mode de glissement dans le plan de phase .....	51
Figure III.1	Schéma d'un observateur .....	57
Figure III.2	Schéma de principe d'un observateur .....	58
Figure III.3	Schéma structurel de l'observateur de Luenberger .....	63
Figure III.4	Schéma fonctionnel d'un observateur à mode glissant. ....	70
Figure IV.1	Robot SCARA .....	81
Figure IV.2	Configuration Robot SCARA .....	81
Figure IV.3	Schéma du robot SCARA à 2ddl .....	83
Figure IV.4	Schéma de bloc robot 2ddl avec simulink .....	87
Figure IV.5	Schéma de la commande en mode glissant .....	87
Figure IV.6	Trajectoires 1 <sup>eme</sup> bras réelle $x_1$ et désirée $x_{1d}$ .....	88
Figure IV.7	Trajectoire 2 <sup>eme</sup> bras réelle $x_3$ et désirée $x_{3d}$ .....	88
Figure IV.8	Erreur de trajectoire $e_1 = x_1 - x_{1d}$ .....	89

Figure IV.9	Erreur de trajectoire $e_3 = x_3 - x_{3d}$ .....	98
Figure IV.10	Vitesses réelles $\dot{x}_1$ et désirées $\dot{x}_{1d}$ .....	90
Figure IV.11	Vitesses réelles $\dot{x}_3$ et désirées $\dot{x}_{3d}$ .....	90
Figure IV.12	Erreurs des vitesses $\dot{e}_1$ .....	91
Figure IV.13	Erreurs des vitesses $\dot{e}_3$ .....	91
Figure IV.14	Schéma de l'observateur en mode glissant .....	92
Figure IV.15	Vitesses réelles $\dot{x}_1$ , et estimée $\hat{\dot{x}}_1$ .....	92
Figure IV.15	Vitesses réelles $\dot{x}_3$ , et estimée $\hat{\dot{x}}_3$ .....	93
Figure IV.17	Erreurs d'estimations des vitesses $\dot{e}_1$ .....	93
Figure IV.18	Erreurs d'estimations des vitesses $\dot{e}_3$ .....	94
Figure IV.19	Schéma de la commande MG avec Observateur MG .....	94
Figure IV.20	Trajectoire réelle $x_1$ et désirée $x_{1d}$ , .....	95
Figure IV.21	Trajectoire réelle $x_3$ et désirée $x_{3d}$ .....	95
Figure IV.22	Erreurs de trajectoire $e_1$ 1 <sup>eme</sup> bras .....	96
Figure IV.23	Erreurs de trajectoire $e_3$ 2 <sup>eme</sup> bras .....	96
Figure IV.24	Vitesse réelle $\dot{x}_1$ et désirée $\dot{x}_{1d}$ , .....	97
Figure IV.25	Vitesse réelle $\dot{x}_3$ et désirée $\dot{x}_{3d}$ .....	98
Figure IV.26	Erreurs de vitesse ( $\dot{e}_1$ ) .....	98
Figure IV.27	Erreurs de vitesse ( $\dot{e}_3$ ) .....	99

## Liste des Tableaux

Tableau IV.1	Les paramètres des articulations du bras manipulateur SCARA .....	82
Tableau IV.2	La configuration de D-H du bras manipulateur SCARA .....	83

## Notations et Abréviations.

### NOTATIONS.

$\alpha_i$	: Articulation rotoïde autour de l'axe $X$
$\theta_i$	: Articulation rotoïde autour de l'axe $Z$
$K(q, \dot{q})$	: Energie cinétique
$U(q)$	: Energie potentielle
$L(q, \dot{q})$	: Formalisme de lagrange-Euler
$\tau$	: Vecteur des couples appliqués aux articulations
$\ddot{q}$	: Vecteur des accélérations articulaires
$\dot{q}$	: Vecteur des vitesses articulaires
$q$	: Vecteur des positions articulaires
$M(q)$	: Matrice d'inertie
$g(q)$	: Vecteur de force de gravité
$C(q, \dot{q})$	: Matrice des forces centrifuges et de Coriolis
$f(\dot{q})$	: Vecteur de frottement
$x(t)$	: Vecteur d'état
$u(t)$	: Vecteur de commande
$e(t)$	: Vecteur d'erreur
$V$	: Fonction de Lyapunov
$S$	: Surface de glissement

### ABREVIATIONS.

AFIA	Association Française de Robotique Industrielle
RIA	Robot Institute of America
SMA	Structure Mécanique Articulé
D-H	Denavit Hartenberg

## **INTRODUCTION GENERALE.**

Les systèmes réels sont dans la plupart du temps non linéaires, mal définis, et sont soumis à des perturbations externes. La modélisation de ces systèmes relève très souvent d'une approximation des phénomènes physiques mis en jeu. Or, c'est à partir de cette représentation approximative des systèmes que l'on souhaite construire une commande pour le système réel. Cette commande doit être alors robuste dans le sens où elle devra assurer une faible sensibilité aux incertitudes sur les paramètres, à leurs variations et aux perturbations externes.

L'objectif de ce travail consiste à déterminer une commande robuste, performante et relativement simple à mettre en œuvre, basée sur un observateur pour estimer des grandeurs supposées comme non mesurables ou inaccessibles.

Lorsque la partie commandée du procédé est faiblement perturbée, les commandes classiques, par exemple à action proportionnelle intégrale dérivée, peuvent s'avérer suffisantes si les exigences en précision et en performance du système ne sont pas trop sévères. Dans le cas contraire, il faut concevoir des algorithmes de commande assurant une robustesse du comportement, du processus vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres et leurs variations. On peut citer dans ce contexte, la commande en mode glissant [8], [27], [33]. Dans ce travail, nous avons choisi la technique des modes glissants connue par sa grande robustesse en stabilité et en performance.

La caractéristique principale d'une commande en mode glissant est sa structure variable avec commutation sous certaines conditions prédéfinies lors de la synthèse de part et d'autre d'une surface choisie a priori, appelée surface de glissement. Le système commandé est dit alors en régime glissant et sa dynamique devient moins sensible aux variations paramétriques, aux erreurs de modélisation et à certaines perturbations externes. La mise en œuvre d'une telle commande est relativement simple et ne nécessite pas une représentation exacte du processus, ce qui est un avantage considérable. Cependant, l'utilisation de cette approche a longtemps été limitée par les vibrations résiduelles en hautes fréquences qui se manifestent sur les grandeurs et les variables de commandes [2], [17].

Sur le plan expérimental, ce phénomène appelé réticence est un problème qui n'a été résolu qu'après les récents progrès de l'électronique de puissance, et plus particulièrement, des circuits de commutation, et les convertisseurs de puissances électriques, et des travaux de Slotine, Sira-Ramirez et autres [2], [29], [30], [34]..., permettant ainsi l'application réelle dans plusieurs domaines dont, en premier lieu, celui de la robotique et de l'électrotechnique (où l'électronique de puissance).

Ce travail est organisé en quatre chapitres :

1- Le premier chapitre est composé de deux parties complémentaires, la première partie donne un aperçu sur la robotique, définitions, la classification des robots et leurs objectifs. notre choix est orienté sur des robots de type rigide et fixe.

La deuxième partie est très importante parce qu'elle donne une représentation mathématique de ce système physique et d'être fidèle à son architecture mécanique, ce que on appelle en automatique une modélisation dynamique d'un robot.

2- Le deuxième chapitre est composé des éléments théoriques nécessaires à la compréhension de la commande en mode glissant, à la description des différentes méthodes qui permettent la détermination de la dynamique du système.

3- Dans le Troisième chapitre nous introduisons un aperçu sur les observateurs linéaires et non linéaires. Notre choix est orienté vers un observateur triangulaire en mode glissant permettant d'estimer l'état ( déplacement , vitesse ) du système que nous utiliserons pour la loi de commande choisie.

4- Dans le dernier chapitre une commande en mode glissant associée à un observateur en mode glissant est proposée dans le but de résoudre les problèmes des capteurs ( exemple : capteur de vitesse ) et aussi des simulations sont alors présentées pour illustrer d'une part la robustesse et d'autre part les performances de la commande et de l'observateur proposé.

Ainsi l'objectif de ce mémoire est la synthèse de schémas de commande et d'observation assurant à la fois, la robustesse et la performance, adaptés aux systèmes robots manipulateurs.

# **CHAPITRE I**

## **Modélisation dynamique d'un robot manipulateur rigide**

## I.1 Introduction à la Robotique

La robotique est un ensemble de disciplines techniques (mécanique, électronique, automatique, informatique) articulées autour d'un objectif et d'un objet commun. Cet objectif est l'automatisation flexible de nombreux secteurs de l'activité humaine réputés jusqu'à très récemment comme ne pouvant se passer de la présence de l'homme, et l'objet est le robot, sorte de machine universelle dont l'homme rêve depuis toujours [35].

D'une part, les progrès réalisés dans les différentes disciplines mentionnées plus haut permettent de construire des robots et autres systèmes "mécatroniques" performants et fiables. D'autre part, la situation économique actuelle dans les pays industrialisés conduit au développement d'une automatisation flexible impliquant l'implantation de robots dans de nombreuses branches d'activités. C'est l'apparition des robots et leur association à d'autres machines automatiques d'inspiration "classique" (par exemple, des machines-outils à commande numérique) qui permettent d'automatiser ou d'essayer d'automatiser des opérations considérées jusqu'ici comme non automatisables.

Le concept d'un robot industriel a été breveté en 1954 par G.C. Devol (U.S. Patent N° 2988237). Le brevet décrit comment construire un bras mécanique commandé capable d'accomplir certaines tâches dans l'industrie. En 1956, une société, UNIMATION, a été créée aux U.S.A., avec pour seul domaine d'activité la robotique ; elle a installé le premier robot industriel dans une entreprise de métallurgie mécanique en 1961. En 1972, soit 16 ans après sa fondation et après avoir investi 12 millions de dollars, UNIMATION a réalisé ses premiers bénéfices, en produisant de vrais robots industriels. Cette année 1972 a aussi vu l'apparition du premier robot "tout électrique", commercialisé par la firme suédoise A.S.E.A. (maintenant A.B.B.). Mais ce que l'on peut appeler l'ère de la robotique ne s'est engagé que fin des années 70 et début des années 80 [35] .

## I. 2 Les robots industriels

### I.2.1 Définitions [35].

La définition que l'on donne actuellement du robot industriel diffère quelque peu selon les pays. C'est au Japon que la définition est la plus vague. On y qualifie de robot « tout mécanisme permettant d'effectuer, en tout ou en partie, une tâche normalement réalisée par l'homme ». Le rôle du robot y est essentiellement de servir d'intermédiaire entre l'homme et la machine. Aux USA ou en France, où la définition d'un robot est beaucoup plus restrictive.

✓ La définition américaine du robot RIA (Robot Institute of America) est beaucoup plus spécifique :

« Un robot est un manipulateur reprogrammable à fonctions multiples. Il est conçu pour déplacer des matériaux, des pièces, des outils ou des instruments spécialisés suivant des trajectoires variables programmées, en vue d'accomplir des tâches très diverses ».

✓ C'est la définition de l'Association Française de Robotique Industrielle (AFRI) qui est la plus explicite, et aussi la plus proche de la technologie actuelle des robots :

« Un robot industriel est une machine formée de divers mécanismes comportant divers degrés de liberté, ayant souvent l'apparence d'un ou de plusieurs bras se terminant par un poignet capable de maintenir un outil, une pièce ou un instrument de contrôle. En particulier, son unité de contrôle doit contenir un système de mémorisation, et il peut parfois utiliser des accessoires sensitifs et adaptables qui tiennent compte de l'environnement et des circonstances. Ces machines, ayant un rôle pluridisciplinaire, sont généralement conçues pour effectuer des fonctions répétitives, mais sont adaptables à d'autres fonctions ».

En plus de la définition américaine, la définition française, du fait qu'elle envisage la perception de l'environnement par le robot, implique une certaine prise de décision. Elle annonce la génération des robots dits "intelligents".

## I.2. 2 Caractéristiques

Deux caractéristiques essentielles se dégagent des définitions précédentes, notamment de celle du RIA [35] :

- ✓ la variété des tâches que le robot peut effectuer
- ✓ la possibilité de reprogrammation.

La première de ces caractéristiques, appelée aussi "versatilité", est l'aptitude physique du robot à l'exécution de tâches diverses et/ou à l'exécution diversifiée d'une même tâche. Elle est liée aux potentialités géométriques et mécaniques du robot et implique que celui-ci possède une structure à géométrie variable ; elle dépend aussi d'autres éléments, en particulier de la structure de l'organe terminal du robot et notamment de la possibilité d'y adapter des outils différents.

La définition française implique la possibilité d'une troisième caractéristique : l'auto-adaptativité à l'environnement, c.-à-d. une capacité d'initiative du robot pour mener à bien des tâches incomplètement spécifiées, malgré des modifications imprévues de l'environnement ; ceci implique des capacités d'appréhension de l'environnement (capteurs), des capacités de réflexion pour l'analyse de la tâche et l'élaboration d'une stratégie d'exécution et des modes de commande automatique adéquats.

## I.2. 3 Eléments constitutifs d'un robot

Un robot est essentiellement une structure mécanique poly articulée, équipée d'actionneurs, de capteurs, d'une unité de traitement de l'information et de sources d'énergie.

Le robot est conçu pour saisir et déplacer des objets. Ceci suppose donc une structure mécanique. La maîtrise d'un objet dans l'espace implique sa localisation et son orientation. Pour localiser un point de l'objet dans l'espace, il faut disposer de 3 degrés de liberté (ddl), qui peuvent être des translations ou des rotations ( Figure 1.1 )

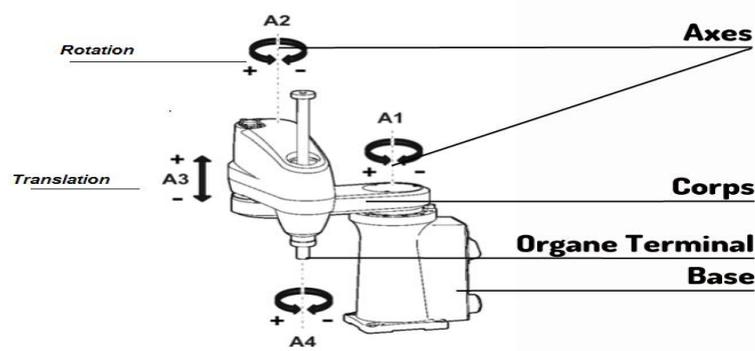


Figure I.1 La structure mécanique d'un robot industriel (SCARA)

Un point de l'objet étant fixe, si l'on désire orienter l'objet de manière quelconque, il faut disposer en plus de 3 autres ddl qui sont nécessairement des rotations (Figure 1.2). Les 3 premiers ddl définissent ce que l'on appelle le porteur (bras articulé), alors que les suivants constituent un poignet et à l'extrémité duquel se trouve l'organe terminal du robot.

Donc, il suffit de 6 ddl pour qu'un système soit complet (cela ne signifie pas qu'il sera universel, mais juste pour avoir une multifonctionnalité maximale). De nombreuses tâches industrielles ne nécessitent pas 6 degrés de liberté (assemblage de circuits imprimés ou de mécanismes plans, peinture, soudure, ...).

Cependant, il est très rare de trouver un porteur qui n'ait pas ses 3 ddl ; c'est presque toujours sur le poignet que se fait la réduction de mobilité. Inversement, dans certains cas, on a besoin de plus de mobilité, soit pour des raisons de fonctionnalité (fonctions spécialisées, robot à plusieurs bras). Soit pour des raisons de précision ou d'accessibilité. (Figure 1.2)



Figure I.2 Main robotique à 10 ddl

La structure mécanique d'un robot industriel comprendra par conséquent :

- un porteur doté généralement de 3 ddl, parfois plus.
- un poignet doté de 1 à 3 ddl ou plus.
- parfois un véhicule, pour déplacer le robot exemple (robot démineur).

Les autres éléments constitutifs du robot sont essentiellement:

1. les actionneurs (motorisation) qui font mouvoir les différentes articulations.
2. les capteurs qui recueillent des informations sous forme logique, analogique ou numérique, il y a au moins des capteurs de déplacements ou de positions de différentes articulations, et parfois aussi des capteurs de vitesse, de force, ...
3. l'unité de traitement de l'information, qui peut généralement se décomposer en plusieurs éléments :
  - une (ou plusieurs) unités de contrôle commande qui traitent l'information fournie par les capteurs et assurent le pilotage des actionneurs
  - un système de programmation qui assure la consommation avec un opérateur ou un réseau de communications, et lui permet de définir des tâches que le robot doit effectuer.

Tous ces éléments constitutifs sont repris dans la figure 1.3, ci-dessous [35].

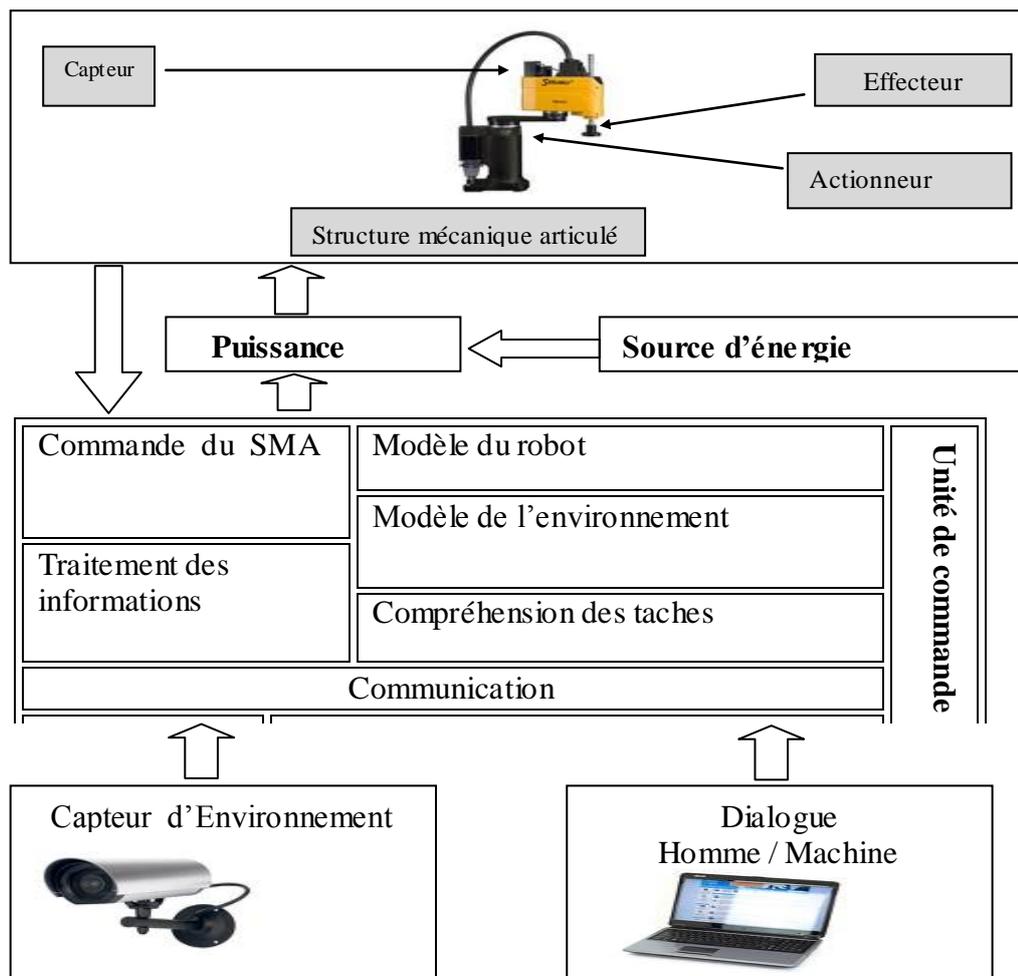


Figure I.3 Éléments constitutifs d'un robot

### **I.3 Classification des robots.**

On peut classer les robots d'un point de vue fonctionnel ou d'après leur structure géométrique.

#### **I.3.1 Classification fonctionnelle [35].**

Le nombre de classe et les distinctions entre celles-ci varient de pays à pays (6 classes au Japon, 4 en France).

L'Association Française de Robotique Industrielle (A.F.R.I.) Distingue 4 classes illustrées ci-dessous :

**A** : manipulateurs à commande manuelle ou télécommande.

**B** : manipulateurs automatiques à cycles pré-réglés (le réglage se fait mécaniquement par cames, butées, la commande peut se faire par automate programmable) ; on peut distinguer entre manipulateurs à cycle fixe et manipulateurs à cycle programmable.

**C** : robots programmables : c'est la première génération de robots industriels ; ils répètent les mouvements qu'on leur a appris ou programmés, sans informations sur l'environnement ou la tâche effectuée.

**D** : robots "intelligents". On trouve actuellement des robots de seconde génération qui sont capables d'acquiescer et d'utiliser certaines informations sur leur environnement (systèmes de vision, détecteurs de proximité, capteurs d'efforts, ...). On étudie des robots de troisième génération, capables de comprendre un langage oral proche du langage naturel et de se débrouiller de façon autonome dans un environnement complexe, grâce à l'utilisation de l'intelligence artificielle.

#### **I.3.2 Classification géométrique.**

On peut aussi classer les robots suivant leur configuration géométrique, autrement dit l'architecture de leur porteur. Les 3 premiers d.l.l. d'un robot peuvent être réalisés avec un grand nombre de combinaisons de translations (max. 3T) et de rotations (max. 3R), autrement dit par des articulations prismatiques (P) ou rotoïdes (R)

1. **Porteur cartésien (TTT ou PPP)** : les 3 axes sont animés d'un mouvement de translation.

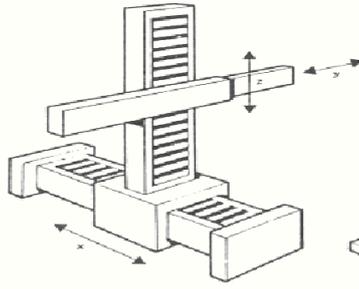


Figure I.4 : Coordonnées cartésiennes. (Exemple : Robot CHAVERIAT )

2. **Porteur en coordonnées cylindriques (RTT ou RPP)** : un mouvement de rotation et une translation axiale, complétées par une translation radiale

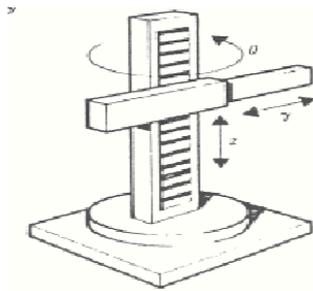


Figure I.5 : Coordonnées cylindriques (Exemple : Seiko RT3300 Robot).

3. **Porteur en coordonnées polaires ou sphériques (RRT ou RRP)** : deux rotations (longitude et latitude) autour d'axes orthogonaux, complétées par une translation radiale

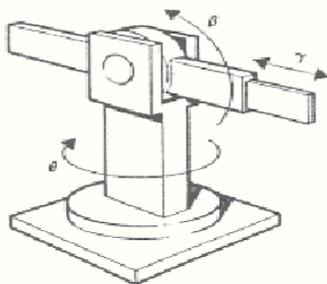


Figure I.6 : Coordonnées polaires Exemple : Sanford Arm. Université ( Illinois . USA )

4. **Porteur en coordonnées universelles (RRR)** : appelé aussi configuration polyarticulée ou anthropomorphe, trois rotations dont les deux dernières se font autour d'axes parallèles orthogonaux au premier, les trois articulations correspondant respectivement au tronc (base), à l'épaule et au coude d'un être humain.

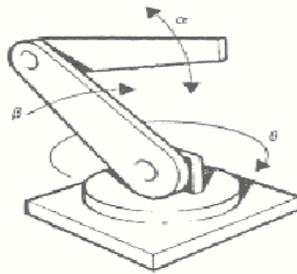


Figure. I.7 : Coordonnées universelles ( Exemple : Robot ABB - IRB1400)

5. Une cinquième architecture comprend deux rotations autour de deux axes parallèles, précédées ou suivies d'une translation dans la même direction (éventuellement celle-ci peut être reportée au niveau du poignet, qui peut aussi tourner autour du même axe, soit au total 4 ddm). Cette architecture est celle des robots SCARA (Selective Compliance Arm for Robotic Assembly) que l'on utilise dans des opérations d'assemblage.

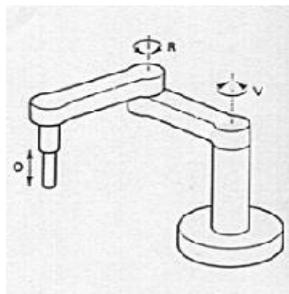


Figure. I.8 : Robot SCARA ( Exemple : Robot SCARA TS80 - STÄUBLI)

## I.4 Performances des robots

Lorsqu'on désire fabriquer un appareil, une machine ou un équipement quelconque, l'utilisateur ou celui qui passe commande présente un cahier des charges. Ce cahier des

charges définit les contraintes d'exploitation et il est souvent aisé de mesurer les performances de l'appareillage réalisé car elles s'expriment vis-à-vis de ces contraintes. Celles-ci peuvent être le poids et l'indépendance énergétique pour une machine transportable, le respect de la précision, la vitesse d'exécution, la fiabilité, etc... Pour d'autres machines.

On a vu qu'une des caractéristiques d'un robot est la versatilité, c'est-à-dire cette possibilité de faire des tâches diverses .mais dont on ne sait pas dire lesquelles à l'avance.

### I.4.1 Les Performances vis-à-vis des tâches

Un robot appliquant des efforts et des déplacements à son organe terminal, on peut en cerner les caractéristiques qui sont importantes en pratique.

#### 1. *Le Volume atteignable (volume de travail)*

Le volume de travail en position d'un robot manipulateur est défini comme l'espace physique engendré par un point de l'organe terminal lorsque la configuration du robot évolue. Il s'exprime en unités volumiques, mais la forme de son enveloppe (qui peut-être compliquée puisque formée par la combinaison des mouvements de plusieurs articulations) est aussi importante.

Le volume de travail est alors habituellement représenté par deux sections perpendiculaires choisies en fonction du type de robot manipulateur, cette représentation étant préférable à une seule vue en perspective.[35]

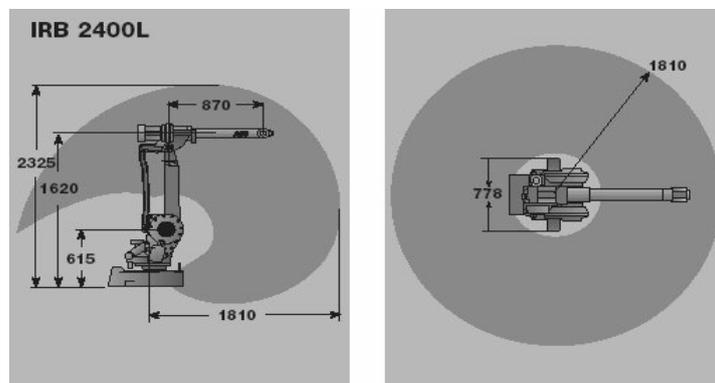


Figure I.9 Représentation du volume de travail

Le volume de travail, bien qu'étant une caractéristique approximative de la performance d'un robot manipulateur, permet cependant de comparer les différentes classes de robots, à la fois du point de vue du volume proprement dit et de sa forme.

## **2. La Précision**

Pour expliquer ces notions, considérons un robot manipulateur quelconque dont l'organe terminal est immobile dans une situation  $A$  et doit être déplacé pour arriver à vitesse nulle dans une situation  $B$ . Si ce déplacement est exécuté un grand nombre de fois, il est possible de définir une situation moyenne  $B_{moy}$  qui correspond à la moyenne des situations  $B_i$  atteintes au cours des déplacements répétés.

L'écart entre la situation  $B$  programmée et la situation moyenne  $B_{moy}$  définit la *précision statique* du robot manipulateur. Elle caractérise l'aptitude du robot à situer l'organe terminal en conformité avec la situation programmée.

## **3. La Vitesse**

C'est évidemment une caractéristique fondamentale pour les robots industriels, puisqu'elle déterminera les temps nécessaires à l'exécution d'une tâche. Or, ce sont ceux-ci qui intéressent essentiellement l'utilisateur. Dans l'évaluation des performances à priori, on ignore naturellement ces tâches. Il faut donc s'en tenir à des vitesses de déplacement et de rotation de l'organe terminal.

## **4. La Fiabilité**

Bien qu'elle mette en jeu tous les éléments présents dans le robot, c'est une donnée qui intéresse au plus haut point l'utilisateur, même s'il ignore tout du système. C'est pourquoi on peut la classer dans les performances-tâche. Comme pour tout autre système, elle sera définie par un taux de pannes, celui-ci étant exprimé soit par la fraction du temps durant laquelle le robot ne remplit pas la fonction qui lui est assignée, soit par un MTBF (Mean Time Between Failures). On exprime aussi souvent cette fiabilité à l'aide d'un diagramme fréquentiel (fréquence de pannes) tout au long de la vie du système.

## I.5 La géométrie structurelle d'un robot d'un robot manipulateur

### I.5.1 Introduction

La modélisation dynamique d'un robot manipulateur est un ensemble des formulations mathématiques constituées par des équations de mouvement de ce robot. Elles peuvent être exprimées par un système des équations différentielles. Pour construire ce système, nous devons tout d'abord faire une description géométrique du robot manipulateur à chaîne ouverte simple qui est introduite en utilisant les notions de Denavit-Hartenberg. Cette description est une représentation des changements de repères consécutifs

### I.5.2 Structure géométrique des robots à chaîne ouverte simple

la structure géométrique d'un robot manipulateur constitue une étape de base pour pouvoir trouver le modèle dynamique du robot manipulateur, il peut être modélisé par une chaîne ouverte des corps rigides articulés, ce robot est composé de « n » articulation et « n+1 » corps notés par  $C_0, \dots, C_n$ . Le corps  $C_0$  est appelé la base du robot et le corps  $C_n$  est appelé porte l'organe terminal (effecteur) [13] [36].

On note que l'articulation « i » connecte le corps  $C_i$  au corps  $C_{i+1}$ .

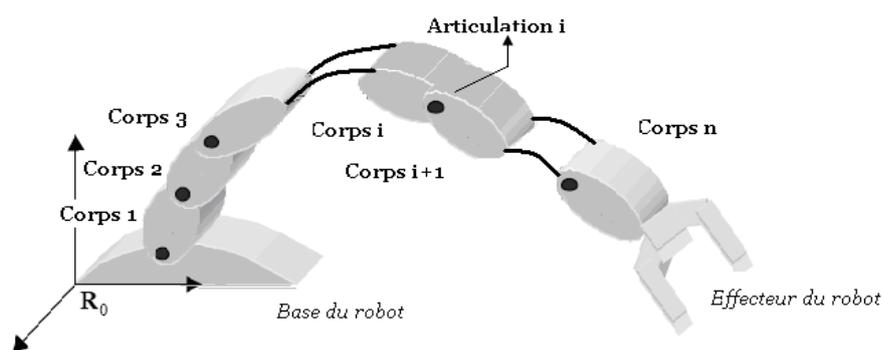


Figure I.10 Schématisation d'une mécanique articulée

### I.5.3 Matrice de rotation autour d'un axe coordonné

Soit le référentiel  $\{x', y', z'\}$  qui, par rapport à  $\{x, y, z\}$ , a subi une rotation autour de l'axe  $z$ , d'un montant  $\theta$ . On recherche la matrice de rotation  $rot(z, \theta)$ . par définition, les colonnes de celle-ci sont coordonnées des vecteurs de base du référentiel  $\{x', y', z'\}$  exprimés dans  $\{x, y, z\}$  [3].

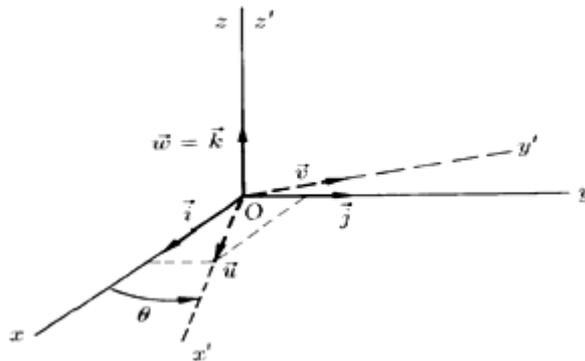


Figure I.11 Rotation autour de z

Comme

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k} \\ \vec{v} &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} + 0 \vec{k} \\ \vec{w} &= 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + 1 \vec{k}\end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

La matrice de rotation du repère  $\{x', y', z'\}$ , par rapport au repère  $\{x, y, z\}$  est donnée par ;

$$rot(z, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

- Similairement, les rotations d'un montant  $\theta$  autour des axes  $x$  et  $y$  conduisent respectivement aux matrices de rotation ;

$$\text{rot}(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

$$\text{rot}(y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{I.4})$$

#### I.5.4 Matrices de passage homogènes

Une transformation rigide résulte en général de la combinaison d'une translation et d'une rotation. Elle est définie par la paire  $g = (p, R)$  avec  $p$  la translation de l'origine du repère lié au corps en mouvement (Figure I.12).

Soient  $m = (m_x \ m_y \ m_z)^T$  et  $m' = (m'_x \ m'_y \ m'_z)^T$  les coordonnées d'un point  $M$  respectivement dans  $R$  et  $R'$ . La transformation rigide résultant de la translation  $p$  du repère  $R$  puis de la rotation du repère obtenu vers  $R'$ , on a :

$$m = p + Rm' \quad (\text{I.5})$$

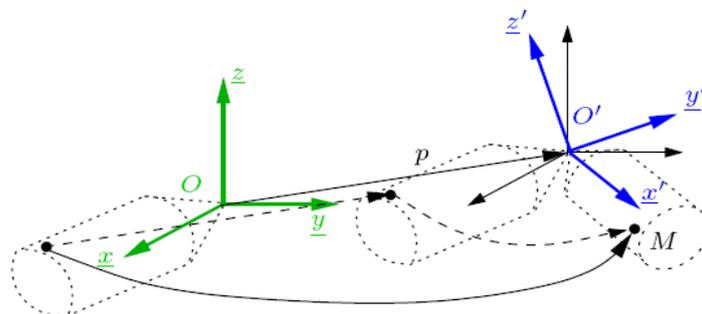


Figure I.12 Transformation rigide du corps

Ceci peut se mettre sous forme linéaire en introduisant les *coordonnées homogènes* du point  $M$  qui sont représenté par un vecteur de dimension  $4 \times 1$  :

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } R \text{ et} \quad \bar{m}' = \begin{pmatrix} m'_x \\ m'_y \\ m'_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } R' \quad (\text{I.6})$$

On peut alors exprimer la transformation rigide par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.7})$$

que l'on notera :

$$\bar{m} = T \bar{m}' \quad (\text{I.8})$$

en posant :

$$T = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

La matrice  $T$ , dite *matrice de passage homogène*, décrit ainsi le passage du repère  $R$  au repère  $R'$  et donc la transformation rigide  $g = (p, R)$ .

## I.6 Convention de Denavit-Hartenberg

Pour d'écrire la structure géométrique d'un robot manipulateur, plusieurs techniques sont utilisées. La représentation de Denavit-Hartenberg est largement utilisée et qui est considérée plus utile dans cette section. Cette représentation permet une description homogène avec un minimum de paramètres [3] [7] [12].

Pour un système à chaîne ouverte la description géométrique est basée sur les règles et les conventions suivantes :

1- les corps sont considérés parfaitement rigides ;

Un corps est rigide si, pour toute paire de points de ce corps de coordonnées  $m$  et  $n$ ,  $\|m(t) - n(t)\| = \|m(0) - n(0)\| = \text{constante}$  au cours du temps. Par la suite tous les corps seront considérés comme rigides.

2- les articulations sont soit rotoïde soit prismatiques ;

Dans le cas d'une articulation rotoïde  $q_i \equiv \theta_i$  représente un déplacement angulaire, tandis que pour une articulation prismatique  $q_i \equiv d_i$  représente une translation.

3- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$  ;

4- les paramètres définissant le repère  $R_i$  par rapport au repère  $R_{i-1}$  sont indicés ( $i$ ).

le repère  $R_i$  est défini tel que :

- l'axe  $Z_i$  est porté par l'axe de l'articulation ( $i$ ).
- l'axe  $X_i$  est porté par perpendiculaire commun de  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$ .
- l'axe  $Y_i$  est choisi de façon à obtenir un repère formé de trois axes.

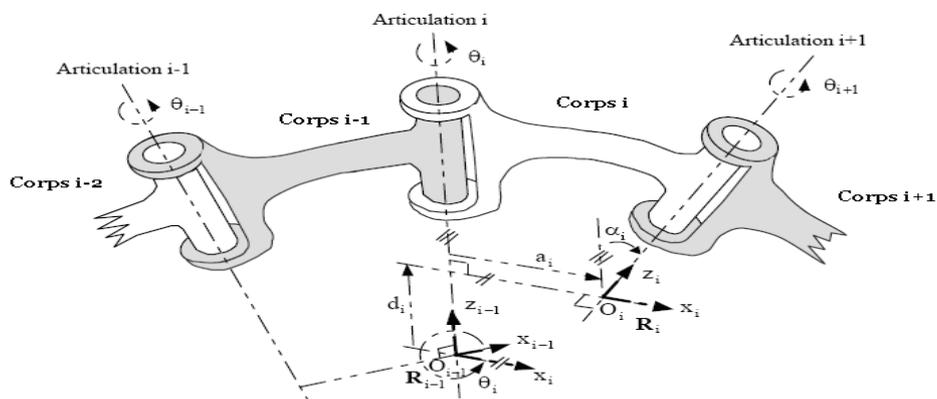


Figure I.13 Référentiels et paramètres associés aux membres d'un robot selon la convention de Denavit et Hartenberg

Le passage d'un repère  $R_{i-1}$  à un repère  $R_i$  peut être déterminé complètement par les quatre paramètres de Denavit–Hartenberg suivants :

1.  $\alpha_i$  l'angle entre l'axe  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  mesuré autour de l'axe  $X_{i-1}$  ;
2.  $d_i$  la distance entre le centre  $O_{i-1}$  du repère  $R_{i-1}$  et l'axe  $Z_i$  ;
3.  $\theta_i$  l'angle entre  $X_{i-1}$  et  $X_i$  autour de l'axe  $Z_i$  ;
4.  $a_i$  la distance entre le centre  $O_i$  du repère  $R_i$  et l'axe  $X_{i-1}$  ;

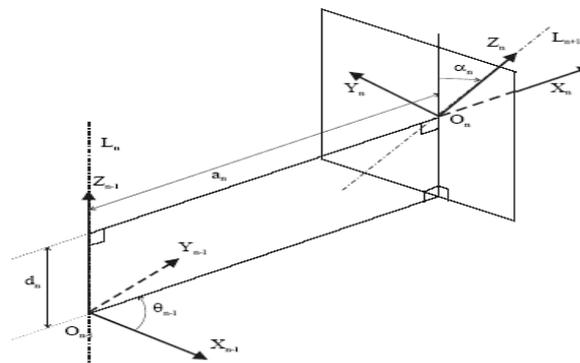


Figure 1.14 Passage d'un repère  $R_{i-1}$  à un repère  $R_i$  par D-H

Les paramètres  $\alpha_i$  et  $d_i$  sont constants.

Un des paramètres  $\theta_i$  ou  $a_i$  varie lorsque l'articulation se déplace :

- Si l'articulation est rotoïde, le paramètre  $\theta_i$  est la variable d'état représentant le déplacement de l'articulation tandis que  $a_i$  est une constante.
- Si l'articulation est prismatique, le paramètre  $a_i$  est la variable d'état représentant le déplacement de l'articulation tandis que  $\theta_i$  est une constante.

La variable articulaire  $q_i$  associée à la  $i^{\text{ème}}$  articulation est définie par :

$$q_i = (1 - \sigma_i)\theta_i + \sigma_i a_i \tag{I.10}$$

Avec :

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{si l'articulation est rotoïde} \\ 1 & \text{si l'articulation est prismatique} \end{cases} \tag{I.11}$$

## I.6 .1 La matrice de transformation homogène par la représentation de Denavit-Hartenberg

Conformément au paramétrage de Denavit Hartenberg ,la matrice de transformation homogène définissant la rotation entre les corps  $C_{i-1}$  et  $C_i$  , donc le repère  $R_i$  par rapport au repère antécédent  $R_{i-1}$  [35].[35].:

On a :

- Articulation rotoïde  $\alpha_i$  autour de l'axe  $X_i$

$$Rot(x, \alpha_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.12})$$

- Articulation rotoïde  $\theta_i$  autour de l'axe  $Z_i$

$$Rot(z, \theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.13})$$

- L'articulation prismatique  $d_i$  entre  $O_{i-1}$  du repère  $R_{i-1}$  et l'axe  $Z_i$

$$Trans(x, d_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

- L'articulation prismatique entre  $O_{i-1}$  du repère  $R_{i-1}$  et l'axe  $X_i$

$$Trans(z, a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.15})$$

- Alors la matrice de transformation homogène DH est :

$${}^{i-1}T_i = \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(z, d_i) \text{Trans}(x, a_i) \text{Rot}(x, \alpha_i) \quad (\text{I.16})$$

$${}^{i-1}T_i = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rot}(z, \theta_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Trans}(z, d_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Trans}(x, a_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rot}(x, \alpha_i)} \quad (\text{I.17})$$

$${}^{i-1}T_i = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(z, d_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rot}(x, \alpha_i) \text{Trans}(x, a_i)}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.18})$$

La matrice de transformation homogène prend la forme générale

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}P_i \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.19})$$

- ${}^{i-1}R_i$  est une matrice  $\in R^{3 \times 3}$  qui définit l'orientation de la base du repère  $R_i$  par rapport à celle du repère  $R_{i-1}$

$${}^{i-1}R_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \quad (\text{I.20})$$

- ${}^{i-1}P_i$  est une matrice  $\in R^3$  qui définit les coordonnées de l'origine  $O_i$  du repère  $R_i$

Dans le repère  $R_{i-1}$

$${}^{i-1}P_i = (a_i \cos \theta_i \quad a_i \sin \theta_i \quad d_i)^T \quad (\text{I.21})$$

## I.7 Modélisation dynamique d'un robot manipulateur rigide

### 1.7.1 Introduction

Afin de pouvoir commander ou simuler les robots, il est nécessaire d'établir son modèle dynamique, c'est-à-dire les équations liant les couples et les forces exercés par les actionneurs et ceux dus aux interactions avec l'environnement aux déplacements des axes.

Le modèle dynamique d'un robot manipulateur est constitué par des formulations mathématiques des équations de mouvement de ce robot. Les équations des mouvements sont un ensemble des équations différentielles décrivant le comportement dynamique du robot manipulateur [3].

Il existe deux types de modèles dynamiques. Le modèle dynamique inverse utilisé dans les applications de la commande, ce modèle fournit les couples articulaires ; exercés par les actionneurs ; en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires ; et le modèle dynamique direct, utilisé en simulation, qui fournit les accélérations articulaires en fonction des positions ; vitesses et couple articulaires [3] [7].

Plusieurs méthodes sont utilisées pour obtenir le modèle dynamique inverse nous citons la formulation de newton-euler et la formulation de lagrange-euler.

Dans cette section nous utilisons la formulation de lagrange-euler ; parce qu'elle est simple et systématique et décrit le modèle dynamique du système en termes de travail et d'énergie en utilisant les coordonnées généralisées.

## I.7.2 Formulation de Lagrange-Euler

Afin obtenir le modèle dynamique en utilisant le formalisme de Lagrange-Euler, on doit déterminer l'énergie cinétique  $K(q, \dot{q})$  et l'énergie potentielle  $U(q)$ .

Lagrangien  $L(q, \dot{q})$  est défini par équation suivante [12] [22] [24].

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (\text{I.22})$$

En utilisant le Lagrangien donné par l'équation (1.22)

L'équation de mouvement du robot manipulateur est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (\text{I.23})$$

Avec :

$q$  et  $\dot{q} \in R^n$  sont respectivement les coordonnées et les vitesses généralisées,

$\tau \in R^n$  vecteur des couples généralisées.

## I.7.3 Calcul de l'énergie cinétique

On suppose un point ( $i$ ) avec le vecteur de coordonnées  ${}^i r_i = [X_i \ Y_i \ Z_i \ 1]^T$  par rapport au repère  $R_i$  associé au corps considéré, les coordonnées de ce point dans le repère  $R_0$  s'écrivent :

$${}^i r_0 = {}^0 T_i {}^i r_i \quad (\text{I.24})$$

Avec

$${}^0 T_i = {}^0 T_1 {}^1 T_2 \dots {}^{i-1} T_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1} T_j \quad (\text{I.25})$$

${}^0 T_i$  est la matrice de transformation homogène qui définit le repère  $R_i$  dans le référentiel de base et elle est obtenue par la multiplication des matrices de transformation homogène d'indice ( $i$ ) jusqu'à la matrice de transformation homogène d'indice 0.

Une transformation homogène  $\in R^{4 \times 4}$  qui est fonction des variables articulaires.  $q_1, q_2, \dots, q_i$

Note :

En général tous les éléments non nuls dans la matrice  ${}^0T_i$  sont fonction des paramètres  $\theta_i, \alpha_i, a_i, d_i$  connus à partir de la cinématique du bras manipulateur. C'est les variables articulaires  $\theta_i$  ou  $d_i$  qui seront commandées. Pour obtenir les équations du mouvement applicables aux deux articulations rotoïde et prismatique, on doit utiliser une notation unifiée qui est  $q_i$  pour représenter la coordonnée généralisée de l'articulation  $i$  qui est soit  $\theta_i$  pour une articulation rotoïde ou  $d_i$  pour une articulation prismatique. Le point choisi sur le segment  $i$  est fixe par rapport au repère  $i$ . On suppose que tous les segments sont rigides [3] [12].

Ainsi la vitesse de tous les points du segment  $i$  est nulle par rapport au repère  $i$ . Par conséquent, la vitesse du point sur le segment  $i$  considéré dans le repère  $R_O$  est donnée par l'expression :

$$V_i \equiv {}^0V_i = \frac{d}{dt}({}^0r_i) = \frac{d}{dt}({}^0T_i {}^i r_i) \quad (I.26)$$

$$V_i = {}^0\dot{T}_1 {}^1T_2 \dots {}^{i-1}T_i {}^i r_i + {}^0T_1 {}^1\dot{T}_2 \dots {}^{i-1}T_i {}^i r_i + \dots + {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{i-1}\dot{T}_i {}^i r_i + {}^0T_i {}^i \dot{r}_i \quad (I.27)$$

On a :  ${}^i \dot{r}_i = 0$  car segment ( $i$ ) est rigide, donc :

$$V_i = \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{dt} \right] {}^i r_i = \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \quad (I.28)$$

Puisque  $\frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_j} = 0$  pour  $j > i$ , nous pouvons remplacer la limite supérieur de la sommation par  $(n)$  qui est le nombre des articulations.

$$V_i = \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \quad (\text{I.29})$$

- L'énergie cinétique d'une particule de masse élémentaire  $dm$  du segment  $i$  exprimée dans le référentiel de base est donnée par :

$$dK_i = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dm \quad (\text{I.30})$$

$$dK_i = \frac{1}{2} (V_i V_i^T) dm \quad (\text{I.31})$$

Avec une vitesse 
$$V_i = [v_x \ v_y \ v_z]^T \quad (\text{I.32})$$

En utilisant l'expression de la vitesse ( $V_i$ ) donnée par l'équation (1.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \left( \left[ \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] {}^i r_i \right)^T \right\} dm \\ dK_i &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i r_i {}^i r_i^T \left( \left[ \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] \right)^T \right\} dm \\ dK_i &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} ({}^i r_i {}^i r_i^T dm) \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

L'énergie cinétique totale du corps ( $i$ ) est la somme des énergies de tous les points, elle est donnée par :

$$K_i = \int dK_i \quad (\text{I.34})$$

$$K_i = \frac{1}{2} tr \left\{ \int \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} \left( {}^i r_i^i r_i^T dm \right) \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \quad (I.35)$$

Dans l'expression (1.37), nous pouvons déplacer le symbole d'intégration à l'intérieur des sommations. Alors ; la matrice de pseudo-inertie  $I_i$  pour le corps  $i$  est donnée par :

$$K_i = \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} \left( \int {}^i r_i^i r_i^T dm \right) \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \quad (I.36)$$

$$I_i = \int {}^i r_i^i r_i^T dm \quad (I.37)$$

L'énergie cinétique du corps ( $i$ ) peut s'écrire :

$$K_i = \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_j^i \sum_k^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \quad (I.38)$$

- Trouvons la matrice de pseudo-inertie avant de déterminer l'énergie cinétique totale.

Soit  ${}^i r_i = [x_i \ y_i \ z_i \ 1]$  les coordonnées dans le repère  $R_i$  de la masse infinitésimale  $dm$ .

Alors, le développement de la relation (1.39) donne :

$$I_i = \int {}^i r_i^i r_i^T dm = \int \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} dm \quad (I.39)$$

$$I_i = \begin{bmatrix} \int x^2 dm & \int yx dm & \int zx dm & \int x dm \\ \int xy dm & \int y^2 dm & \int zy dm & \int y dm \\ \int xz dm & \int yz dm & \int z^2 dm & \int z dm \\ \int x dm & \int y dm & \int z dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (I.40)$$

$(I_i)$  est une matrice constante qui est évaluée une fois pour chaque corps. Elle dépend de la géométrie et la distribution de la masse du corps ( $i$ ). En effet, elle est exprimée en termes des moments d'inertie du corps ( $i$ ) :

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad (\text{I.41})$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

Produits de croisés de l'inertie

$$I_{xy} = \int xy dm \quad (\text{I.42})$$

$$I_{xz} = \int xz dm$$

$$I_{yz} = \int yz dm$$

Et des moments premiers

$$m\bar{x} = \int x dm \quad (\text{I.43})$$

$$m\bar{y} = \int y dm$$

$$m\bar{z} = \int z dm$$

avec ( $m$ ) est la masse totale du corps ( $i$ ) et  ${}^i\bar{r}_i = [\bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{z}_i \quad 1]^T$  représente le vecteur des coordonnées de centre de gravité du corps ( $i$ ) dans le repère  $R_i$ , nous pouvons écrire :

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xx} & m\bar{x} \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m\bar{y} \\ I_{xx} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{bmatrix} \quad (\text{I.44})$$

Ces grandeurs sont données par les spécifications du constructeur , soit peuvent être calculées à partir des grandeurs trouvées dans ces spécifications .

- L'énergie cinétique totale du bras manipulateur à  $n$  degrés de liberté est :

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left\{ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \quad (\text{I.45})$$

Puisque la trace d'une somme des matrices est la somme des traces individuelles, nous pouvons interchanger les sommations et l'opérateur de la trace pour obtenir :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left\{ \text{tr} \left( \frac{\partial^0 T_i}{\partial^0 q_j} I_i \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \quad (\text{I.46})$$

Avec :

$$m_{jk}(q) = \sum_{i=1}^n \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k} \right\} \quad (\text{I.47})$$

Donc énergie cinétique ;

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i m_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad \text{pour } i=1,2,\dots,n \quad (\text{I.48})$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (\text{I.49})$$

$M(q) \in R^{n \times n}$  la matrice d'inertie du bras.

$\dot{q}$  est le vecteur de vitesse articulaire  $\in R^n$

### I.7.4 Calcul de l'énergie potentielle

Pour un corps ( $i$ ) d'une masse  $m_i$  a un centre de gravité  ${}^i\bar{r}_i$  exprimé dans les coordonnées du repère  $R_i$ , l'énergie potentielle du corps est donnée par

$$U_i = -m_i g {}^0\bar{r}_i \quad (\text{I.50})$$

$$U_i = -m_i g ({}^0T_i {}^i\bar{r}_i) \quad (\text{I.51})$$

Avec :  $g$  est le vecteur de gravité exprimé avec les coordonnées de repère de base  $R_0$  ainsi

$$g = [g_x \quad g_y \quad g_z \quad 1]^T \quad (\text{I.52})$$

L'énergie potentielle totale du bras est la somme des énergies potentielles de tous les segments, alors

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n m_i g {}^0T_i {}^i\bar{r}_i \quad (\text{I.53})$$

Puisque seule  ${}^0T_i$  est en fonction de  $q$  alors est en fonction seulement de  $q$ .

### I.7.5 Les équations des mouvements du robot

La fonction du Lagrangien est donnée par la différence des énergies cinétique et potentielle

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q)$$

L'équation du mouvement du robot manipulateur est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

Donc ;

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U(q)}{\partial \dot{q}} \right] - \left[ \frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial q} - \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right] = \tau$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau_k \quad (\text{I.54})$$

En utilisant l'expression (I.48) de l'énergie cinétique qui est fonction de  $q$  et  $\dot{q}$  pour déterminer le terme  $\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}}$  :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_i^n m_{ik}(q) \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_j^n m_{kj}(q) \dot{q}_j \right\} \quad (\text{I.55})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_j^n m_{kj}(q) \dot{q}_j \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} &= \sum_j^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{ij}^n \frac{dm_{kj}(q)}{dt} \dot{q}_j \\ &= \sum_j^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{ij}^n \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

Et même pour calculer le terme  $\frac{\partial K}{\partial q_k}$  ;

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (\text{I.57})$$

donc les équations de mouvement peuvent s'écrire :

$$\sum_j^n m_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau_k \text{ avec } k = 1, \dots, n \quad (\text{I.58})$$

• En interchangeant les ordres de sommation et l'avantage de la symétrie de  $M(q)$  ; nous pouvons démontrer que :

$$\sum_{i,j}^n \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (\text{I.59})$$

Donc

$$\sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (\text{I.60})$$

Les termes

$$C_{ij,k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \quad (\text{I.61})$$

Sont appelés symboles de Christoffel. Nous remarquons que ; pour un k donné ; nous avons

$$C_{ij,k} = C_{ji,k}$$

• Finalement ; nous avons les termes :

$$g_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (\text{I.62})$$

Alors nous pouvons écrire les équations du mouvement sous la forme :

$$\sum_j^n m_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n C_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k \quad (\text{I.63})$$

Dans l'équation ci-dessus ; il y a trois types de termes. Les premiers comportent la dérivée seconde des coordonnées généralisées. Les seconds peuvent être classifiés en deux types ; des termes concernant un produit du type  $q_i^2$  Sont appelés centrifuges ; par contre ; les termes concernant un produit de type  $q_i q_j$ , ou  $i \neq j$  ; sont appelés des termes de coriolis. Le troisième type de termes est fonction seulement de  $q$  qui est issu de la dérivation de l'énergie potentielle et qui est appelé vecteur des forces de gravité [3] [7] [12].

Il est habituel d'écrire (1.63) sous une forme matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (\text{I.64})$$

Ou

$\tau$  : Vecteur des couples appliqués aux articulations  $\in R^n$  ;

$\ddot{q}$  : Vecteur des accélérations articulaires  $\in R^n$  ;

$\dot{q}$  : Vecteur des vitesses articulaires  $\in R^n$  ;

$q$  : Vecteur des positions articulaires  $\in R^n$  ;

$M(q)$  : Matrice d'inertie  $\in R^{n \times n}$  ;

$g(q)$  : Vecteur de force de gravité  $\in R^n$  ;

$C(q, \dot{q})$  : Matrice des forces centrifuges et de Coriolis  $\in R^{n \times n}$  dont les éléments sont :

$$C_{kj} = \sum_i^n C_{ijk}(q)\dot{q}_i$$

$$C_{kj} = \sum_i^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \quad (\text{I.65})$$

## I.8 Les propriétés des équations dynamiques d'un robot manipulateur

En général, le robot est un système dynamique à  $n$  entrée formant, le vecteur de couples  $\tau$  et  $n$  sorties qui forment les vecteurs de positions et de vitesse.

Un robot manipulateur est toujours affecté de frottement et perturbation. Par conséquent ; nous devons généraliser le modèle du bras exprimé par l'équation (1.63) en écrivant le modèle dynamique du manipulateur ainsi [3] [7] [12].

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (\text{I.66})$$

Nous avons ajouté un terme de frottement de la forme :

$$f(\dot{q}) = F_v \dot{q} + f_s \quad (\text{I.67})$$

Avec  $F_v \in R^{n \times n}$  est la matrice de coefficient du frottement visqueux et  $f_s \in R^n$  un terme de frottement sec ; ainsi qu'un terme  $\tau_d$  De perturbations ou bien des couples résistants.

- Examinons les propriétés de chaque terme du modèle dynamique de l'équation (1.66) et des autres propriétés qui auront une grande importance lors de la conception des lois de commandes.

### I.8.1 Propriétés de la matrice d'inertie

Comme nous avons vu.  $M(q)$  est symétrique et définie positive. En effet ; l'énergie cinétique du bras est ;

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

Une autre propriété essentielle de  $M(q)$  est qu'elle est bornée ; c'est-à-dire :

$$\lambda_{\min} I_n \leq M(q) \leq \lambda_{\max} I_n \quad (\text{I.68})$$

Avec  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  sont des valeurs propres (scalaires) minimale et maximale strictement positives de  $M(q)$  pour toutes les configurations de  $q$ .

En plus, la matrice d'inertie inverse est bornée ;

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} I_n \leq M^{-1}(q) \leq \frac{1}{\lambda_{\max}} I_n \quad (\text{I.69})$$

Si l'articulation est rotoïde ; les limites  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  sont constantes puisque  $q$  apparaît dans  $M(q)$  seulement a travers des termes de  $\sin$  et  $\cos$ , qui sont bornés par 1. Par contre ; si le bras a des articulations prismatiques, alors  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  peuvent être des fonctions scalaires de  $q$ .

## I.8.2 Propriétés de la matrice des forces centrifuges et de Coriolis

La matrice des forces centrifuges et de Coriolis est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

❖ Propriété 1 : la matrice définie par :

$$N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \quad (\text{I.70})$$

Est antisymétrique c'est-à-dire que les termes de  $N(q, \dot{q})$  vérifient  $q^T N(q, \dot{q}) q = 0$

et que :

$$n_{jk} = -n_{kj}$$

$$n_{ij} = \dot{m}_{kj}(q) - 2C_{kj,i}(q)\dot{q}_k$$

$$n_{ij} = \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_k} - 2C_{kj,i}(q)\dot{q}_k \quad (\text{I.71})$$

En remplaçant l'expression donnée par l'équation, nous obtenons ;

$$\begin{aligned}
n_{ij} &= \left\{ \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_k \\
&= \left\{ \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_k
\end{aligned} \tag{I.72}$$

En profitant de la symétrie de la matrice d'inertie  $M(q)$  nous pouvons écrire aussi :

$$\begin{aligned}
n_{ij} &= \left\{ \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_k \\
&= - \left\{ \frac{\partial m_{ik}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_k \\
n_{ij} &= -n_{ji}
\end{aligned} \tag{I.73}$$

On peut donner une interprétation énergétique à cette propriété, en utilisant le principe de la conservation de l'énergie. Nous pouvons remarquer que la dynamique du robot manipulateur peut s'écrire en termes de la matrice antisymétrique  $N(q, \dot{q})$  ainsi :

$$M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} \{ \dot{M}(q) - N(q, \dot{q}) \} \dot{q} = \tau - g(q) \tag{I.74}$$

tel que les vecteurs de perturbations et frottements sont ignorés, ou  $K$  représente l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{q}^T M(q) \dot{q}) \\
&= \frac{1}{2} \ddot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \ddot{q} \\
&= \ddot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}
\end{aligned} \tag{I.75}$$

- Ceci est le principe de la conservation de l'énergie, avec  $q^T N(q, \dot{q})q$  est un terme nul car les forces centrifuges et de Coriolis ne travaillent pas,  $\dot{q}^T \tau$  désigne la puissance mécanique fournie par les actionneurs et  $\dot{q}^T g(q)$  est la puissance des actions de pesanteurs

❖ Propriété 2 la matrice  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  vérifie la relation suivante :

$$C(q, x)y = C(q, y)x \text{ pour tous } x, y \in R^n \quad (\text{I.76})$$

$x, y$  deux vecteurs de dimension  $(n \times 1)$

❖ Propriété 3 la relation suivante est vérifiée :

$$\|C(q, x)\| \leq C_0 \|x\| \quad \forall x \in R^n \quad (\text{I.77})$$

Pour une certaine constante bornée  $C_0 > 0$

### I.8.3 Propriétés du vecteur de gravité

Dans le cas d'un robot possédant seulement des articulations rotoïdes ; la variable articulaire apparaît dans  $g(q)$  seulement à travers des fonctions sinus et cosinus. Par conséquent ; nous pouvons avoir la majoration suivante :

$$\|g(q)\| < g_0 \quad (\text{I.78})$$

Pour une certaine constante bornée  $g_0 > 0$

### I.8.4 Propriétés du vecteur des frottements

Le vecteur des frottements exprimé par la relation (1.67) est composé de frottements visqueux et de frottements secs. Supposant que le frottement sur chaque articulation dépend seulement de la vitesse de l'articulation considérée ;

nous avons alors pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$F_v = \text{diag}(\dot{q}_i) \quad \text{et} \quad f_s = [k_1 \text{sgn}(\dot{q}_1) \dots k_i \text{sgn}(\dot{q}_i) \dots k_n \text{sgn}(\dot{q}_n)] \quad (\text{I.79})$$

Avec  $k_i$  sont des coefficients connus et la fonction  $\text{sgn}$  est définie par :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ \text{indéterminée} & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Une majoration des vecteurs de frottements peut être considérée de la forme :

$$\|F_v \dot{q} + f_s(\dot{q})\| \leq F_{1,M} + F_{2,M} \|\dot{q}\| \quad (\text{I.80})$$

Avec  $F_{1,M}$  et  $F_{2,M}$  données pour un bras spécifique

### I.8.5 Propriétés du vecteur des perturbations

Le modèle dynamique possède un vecteur de perturbation qui représente les incertitudes du modèle dynamique et les perturbations externes. Nous considérons qu'il est borné tel que :

$$\|\tau_d\| \leq T_0 \quad (\text{I.81})$$

Où  $T_0$  est une constante scalaire qui peut être calculée pour un bras donné

## I.9 Conclusion

Dans ce chapitre au premier partie nous avons donné une aperçu d'ordre générale sur les caractéristiques principales des robots manipulateurs rigides de structures série, ses éléments constitutifs et leur classifications .

La deuxième partie nous avons présenté la description de la structure géométrique des robots manipulateurs en utilisant la représentation de Denavit-Hartenberg, qui est la première étape pour constituer un modèle dynamique pour les robots manipulateurs à chaîne ouverte simple. Ensuite, nous avons présenté le formalisme de Lagrange avec lequel nous avons établi l'équation générale de mouvement des robots manipulateurs.

Quelques propriétés structurelles fondamentales de la matrice d'inertie, de la matrice des forces centrifuges et de Coriolis, du vecteur de gravité, du vecteur de frottement ont été détaillées vu leur utilité dans la conception des lois de commande du robot. Finalement, et pour illustrer la méthode présentée pour établir le modèle dynamique des robots manipulateurs rigides, nous avons exploité un robot manipulateur de type SCARA qui va être utilisé dans la simulation pour valider l'étude théorique présentée dans ce mémoire.

# **CHAPITRE II**

## **Application de la commande en mode glissant au robot**

## II.1 Introduction à la Commande en Mode glissant

La commande par mode de glissement fait partie de la famille des contrôleurs à structure variable. C'est une commande qui est reconnue pour sa grande robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques et les perturbations externes au système, d'autant plus qu'elle est simple à implémenter. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'étudier la commande par mode de glissement. Toutefois, la commande par mode de glissement induit en pratique des commutations haute fréquence sur la commande. Ces commutations peuvent exciter des dynamiques non désirées qui risquent de déstabiliser, détériorer voire même de détruire le système étudié [9].

Le réglage en mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier des systèmes à structure variable. La théorie donc des systèmes à structure variable et les modes glissants associés (en anglais : sliding mode), est une technique de commande non linéaire, elle est caractérisée par la discontinuité de la commande aux passages par une surface de commutation appelée surface de glissement. [14] [15].

La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'un état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement.

## II.2 Approche des modes glissants.

Un modèle mathématique constitue souvent une description approchée de la réalité physique, et la loi de commande ne pourrait être construite que sur ce dernier. Ainsi la commande choisie devra être robuste dans le sens où elle devra garantir une faible sensibilité aux erreurs et aux incertitudes sur les paramètres, à leurs variations et aux perturbations. Notre choix s'est porté sur la commande en mode de glissement qui n'est autre qu'un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable et multifonctions ; basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinu, initiée par Filippov en 1960 [13], sera utilisée dès la parution des livres d'Emelyanov [9], d'Itkis [20] et d'Utkin [26].

La communauté automatique s'est rapidement rendu compte de l'intérêt de cette technique qui allie simplicité de synthèse et robustesse [10], [34], [30], [31], [35].

### II.2.1 Définitions.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{Avec} \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{II.1})$$

et l'hypersurface :  $S(x) = 0$

$f$  un champ de vecteur d'état et de commande.

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$$u(x, t) \in [-1, 1] \quad \text{si } s(x) = 0$$

$u \in \mathfrak{R}$  : est la commande du système.

Où  $x$  est l'état du système de dimension  $n$ , caractérisant le domaine physique de fonctionnement du système. Le système (II.1) avec la loi de commande (II.2) est intrinsèquement à structure variable [26]. En revanche, le système rendu discontinu par le choix d'une commande discontinue,  $u$  est dit à discontinuité artificielle.

Le système variable (II.1) avec la loi de commande (II.2) peut se ramener à l'écriture suivante

$$\dot{x} = f(x, t, u) = \begin{cases} f^+(x, t) & \text{si } s(x, t) > 0 \\ f^-(x, t) & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Où  $f^+(x, t)$  et  $f^-(x, t)$  sont des champs de vecteurs complets dans  $\mathfrak{R}^n$

$s(x, t)$  : est une surface dans  $\mathfrak{R}^n$  qui divise l'espace en deux parties disjointes

$s(x, t) > 0$  et  $s(x, t) < 0$  qu'on notera respectivement  $\varepsilon^+$  et  $\varepsilon^-$

**Remarque 1.1 :** D'autres systèmes sont de conception naturellement discontinus, à titre d'exemples les circuits électroniques contenant des commutateurs et les systèmes mécaniques contenant un frottement sec [6], [26], [28]. Qu'ils soient à discontinuité artificielle ou naturelle, les systèmes à structure variable de type (II.1) peuvent tous se ramener à la forme (II.3). En dehors de la surface de discontinuité, les vecteurs vitesse  $f^+$  et  $f^-$  peuvent avoir différents comportements :

- les vecteurs vitesses  $f^+$  et  $f^-$  traversent la surface d'un côté vers l'autre Figure (II.1.a) et Figure (II.1.b)
- les vecteurs vitesses  $f^+$  et  $f^-$  sont pointés chacun vers la surface Figure (II.1.c)

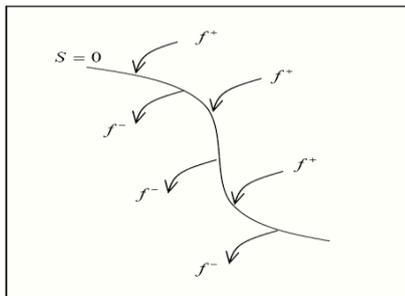


Figure (II.1.a)

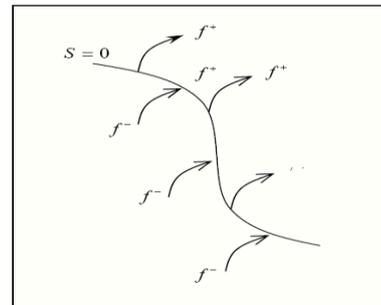


Figure (II.1.b)

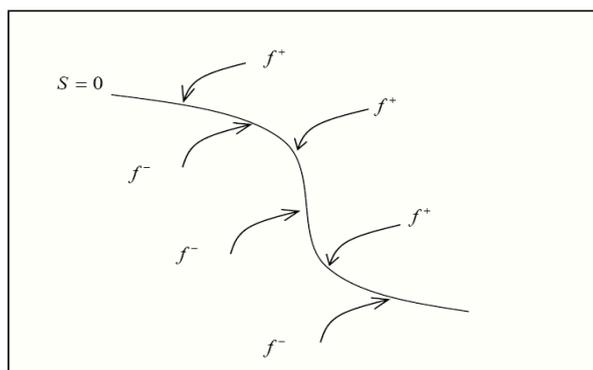


Figure (II.1.c)

Figure II.1 : Différents comportements en dehors de la surface de discontinuité.

Le cas qui nous intéresse est celui où les deux vecteurs vitesses  $f^+$  et  $f^-$  sont pointés chacun vers la surface, on dit alors que la surface est attractive Figure (II.1.c).

**Définition 1.1** [26] [28].

Une surface  $s = 0$  est attractive pour un domaine de convergence donné si toute trajectoire évoluant dans le domaine d'attraction est dirigée vers cette surface.

**Définition 1.2** [26] [28].

Une surface  $s = 0$  est invariante si toute trajectoire débutant dans cette surface ou atteignant cette surface, ne peut en sortir et évolue donc sur cette surface. Si l'état du système est de côté  $\varepsilon^+$  de l'espace d'état (ou du côté  $\varepsilon^-$ ), il rejoindra forcément la surface  $s = 0$ . s'il dépasse de l'autre côté  $\varepsilon^+$  (ou du côté  $\varepsilon^-$ ), il se ramènera vers  $s = 0$  (Figure II.2). Cette surface  $s = 0$  est donc appelée surface glissante et le mouvement sur cette surface est un mode glissant dont l'équation détermine la dynamique désirée du système.

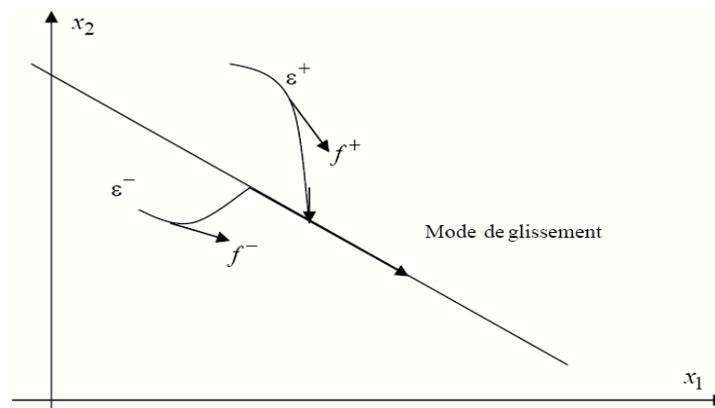


Figure II.2 Mode de glissement idéal

Une surface de discontinuité  $s = 0$ , suivant que l'état du système est sur  $\varepsilon^+$  ou sur  $\varepsilon^-$ , il atteint la surface respectivement avec les vitesses  $f^+$  et  $f^-$ .

L'équation du mouvement est alors donnée par les solutions des équations différentielles à second membre continu  $f^+(x, t)$  et  $f^-(x, t)$ , à savoir:

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x, t) & \text{si } x \in \varepsilon^+ \\ f^-(x, t) & \text{si } x \in \varepsilon^- \end{cases}$$

Où les solutions à ces deux équations différentielles ordinaires existent par hypothèses.

En général l'étude théorique de ce type de systèmes comportant des discontinuités n'est pas classique [16].

En effet, les équations différentielles ne satisfont pas les conditions d'existence et d'unicité de solution à cause des termes discontinus non Lipchitziens, et en général non définie sur les surfaces de discontinuités.

### II.2.2 Phénomène de réticence.

En pratique, le terme discontinu de l'équation ( II.2 ) peut exciter des dynamiques hautes fréquences non modélisées qui entraînent l'apparition de ce qu'on appelle "réticence" ou "broutement" connu en anglais sous le nom de "chattering", et qui se caractérise par des fortes oscillations autour de la surface.

Du point de vue de la synthèse de commande, on procède généralement au choix de la surface de commutation  $s(x) = 0$  en fixant le plus souvent la dynamique de glissement, puis on en déduit une commande discontinue  $u(x, t)$  du type ( II.2 ) qui rend cette surface attractive et assure ainsi l'apparition du mode de glissement.

Ce mode de glissement idéal est illustré par la figure ( II.2 ). Un mode de glissement idéal correspond à une commande qui commute à une fréquence infinie or il n'existe aucun organe de commande pouvant réaliser cette opération [2] [6] .

Malgré les différents avantages de la commande en mode de glissement, son utilisation a été entravée par un inconvénient majeur lié au phénomène de réticence (broutement ou encore chattering) (Figure II.3 ). Ce phénomène est une conséquence naturelle du comportement dynamique réel de l'ensemble actionneur système à commander.

La réticence peut provoquer une détérioration anticipée de l'organe de commande ou exciter des dynamiques hautes fréquences non considérées dans la modélisation du système [11] [6] [16] .

Ainsi, on peut limiter ce phénomène par différentes méthodes

- Une approche consiste à remplacer la fonction signe par une fonction plus lisse. [8]

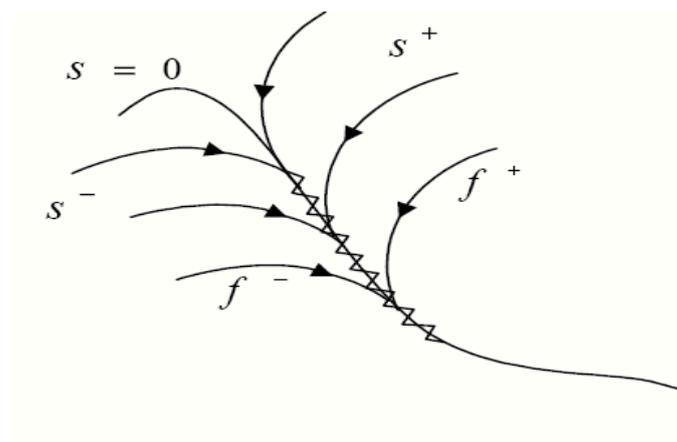


Figure II.3 Mode de glissement avec r eticence.

### II.2.3 D etermination de la dynamique de glissement.

Pour décrire le mouvement de glissement sur la surface  $s(x) = 0$ , de nombreux travaux existent et s'inscrivent tous dans le cadre de la résolution des équations différentielles à second membre discontinu. On citera principalement les ouvrages d'Utkin [27],[28], celui de Filippov [13], et de Slotine et Li [32] qui traitent de manière détaillée le mode de glissement. Quand la surface de glissement est atteinte, la théorie des équations différentielles ordinaires n'est plus applicable car le système (II.3) ne vérifie plus les conditions classiques d'existence de solutions du théorème de Cauchy-Lipshitz. En effet, la solution de l'équation (II.3) existe et unique si la condition de Lipsitchz est satisfaite :

$$\forall t > 0, \exists L > 0 / \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} \|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad (\text{II.4})$$

Cette condition n'est évidemment pas vérifiée au voisinage de la surface de commutation à cause de la discontinuité du champ  $f$ .

Il existe principalement deux méthodes pour la détermination du mode de glissement:

- La méthode de Filippov.
- La méthode de la commande équivalente.

### II.2.3.1 Méthode de Filippov pour la détermination de la dynamique de glissement [13].

Filippov s'est intéressé à la détermination du vecteur  $f_0$  (le champ de vecteurs vitesses sur la surface de glissement) pour des systèmes dont la variable commandée n'apparaît pas d'une manière explicite dans l'expression du champ  $f$ . Selon lui, en tout point  $x^*$  de la surface de discontinuité le vecteur vitesse  $f_0$  appartient au plus petit convexe fermé contenant toutes les valeurs de  $f$  et ceci quand  $x$  balaye tout  $\delta^-$  le voisinage du point  $x^*$  considéré excluant le point lui-même. Ainsi, pour des systèmes avec une seule surface de discontinuité, la méthode de Filippov donne lieu au résultat suivant:

- Le convexe minimal de tous les vecteurs  $f(x)$  du voisinage de la surface de commutation (Figure. II.3) est un segment de droite reliant les deux extrémités de  $f^-$  et  $f^+$ .

Où ( $f_*^-$  et  $f_*^+$ ) sont les limites respectives des champs  $f^-(x)$  et  $f^+(x)$  quand  $x$  tend vers  $x^*$ .

- Puisque le vecteur  $f_0$  prend la direction du plan tangent à la surface de commutation, l'extrémité de ce vecteur est le point d'intersection de ce plan avec le segment de droite reliant les deux extrémités de  $f^-(x)$  et  $f^+(x)$ .

- L'expression du vecteur vitesse  $f_0$  en mode de glissement est donnée par :

$$f_0 = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (\text{II.5})$$

Le paramètre  $\mu$  est déterminé à partir de la résolution de l'équation  $\text{grad } s \cdot f_0 = 0$

( $f_0$  appartient au plan tangent à la surface de commutation vecteur). Il vient alors:

$$\mu = \frac{\text{grad } s \cdot f^-}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} \quad (\text{II.6})$$

L'équation du mode de glissement selon Filippov est alors définie par :

$$\dot{x} = \frac{\text{grad } s \cdot f^-}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad } s \cdot f^+}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} f^- \quad (\text{II.7})$$

Lorsque le système est variant dans le temps  $s(x, t)$  ou  $f(x, t)$ , il faut poser le temps comme

étant la  $(n + 1)^{\text{ème}}$  variable d'état. L'équation ( II.7) sera étendue avec la composante de temps et la relation ( II.7) devient:

$$\dot{x} = \frac{\text{grad } s.f^-}{\text{grad } s(f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad } s.f^+}{\text{grad } s(f^- - f^+)} f^- - \frac{\partial s}{\partial t} \frac{1}{\text{grad } s(f^- - f^+)} (f^- - f^+) \quad (\text{II.8})$$

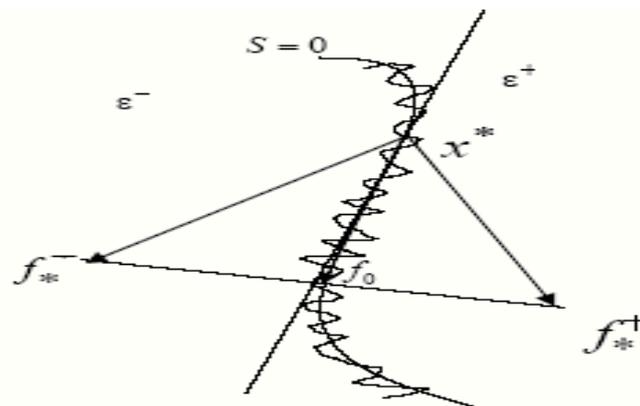


Figure II.4 Construction de Filippov.

### II.2.3.2 Méthode de la commande équivalente [27].

La méthode proposée par Utkin , consiste à admettre qu'en mode de glissement, tout se passe comme si le système était piloté par une commande  $u_{eq}$ , dite commande équivalente qui permet de maintenir l'état du système sur la surface de discontinuité  $s = 0$  .

#### a) Synthèse de la loi de commande

Considérons le système linéaire en commande défini par :

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u \quad (\text{II.9})$$

$$u = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(t) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(t) < 0 \end{cases} \quad u \in \mathfrak{R}$$

où  $s_i(t)$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de la fonction de commutation vectorielle  $s(t)$ .

Supposons que le comportement en mode glissant existe sur la surface de glissement

$s(x,t)$  et essayons de trouver la commande continue telle que, à partir de la position initiale du vecteur d'état sur la région  $s(x(t_0), t_0)$ , la dérivée du vecteur  $s(x,t)$  demeure nulle :

$$\dot{s}(x,t) = \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Supposons que la solution de l'équation ( II.9) respectant  $u$  existe et notée par  $u_{eq}$ .

En remplaçant  $\dot{x}$  par sa valeur, on trouve :

$$\frac{\partial s}{\partial x} (f(x,t) + B(x,t)u) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

En supposant que  $\frac{\partial s}{\partial t} (B(x,t))$  est inversible on a :

$$u_{eq} = -(GB)^{-1} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t) \right) \quad \text{avec} \quad G = \frac{\partial s}{\partial x}$$

La trajectoire d'état en mode de glissement est obtenue par la substitution de  $u_{eq}$  dans l'équation (2.9) on obtient :

$$\dot{x} = f(x,t) - B(x,t)(GB)^{-1} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t) \right) \quad (\text{II.11})$$

De plus , pour ces systèmes affines en commande, Utkin a montré que par rapport à la commande initialement commutante  $u(x,t)$  donnée par ( II.2), la commande équivalente n'est rien d'autre que la composante basse fréquence de la commande commutante réellement appliquée au système physique [26],[27] Globalement le système réagit comme s'il est commandé par la commande équivalente  $u_{eq}$ .

Dans le cas général, où le système n'est pas affine en  $u$  :

$$\dot{x} = f_{eq} = f(x,t,u_{eq})$$

Il n'est pas facile de résoudre analytiquement l'équation d'invariance suivante :

$$\dot{s}(x, t) = \frac{\partial s}{\partial x} f(x, t, u_{eq}) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

Il existe cependant, une méthode graphique pour trouver le vecteur  $f_{eq}$  (figure II.5) pour les systèmes commandés entre  $-u_{max}$  et  $+u_{max}$ . En variant  $u$  entre  $-u_{max}$  et  $+u_{max}$  jusqu'à ce que le vecteur recherché soit tangent à la surface de discontinuité, il suffira ensuite de reprendre la procédure pour différents points de la surface de discontinuité.

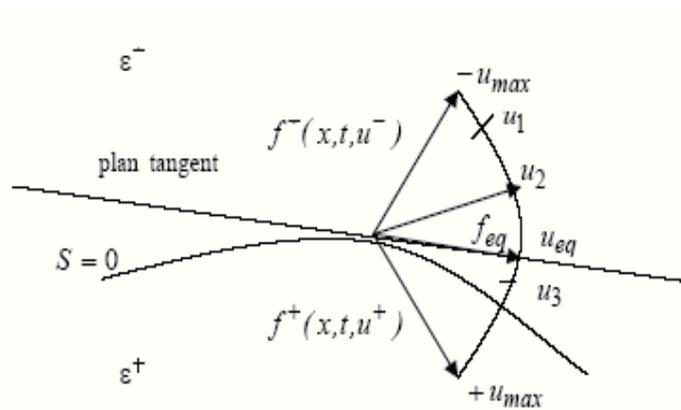


Figure II.5 Construction par la méthode de la commande équivalente.

### b) Robustesse des modes glissants vis à vis des perturbations.

Considérons le système perturbé suivant :

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x)u + \eta(x, t) \quad (\text{II.12})$$

Où  $\eta$  représente l'effet des incertitudes paramétriques sur le modèle ou des perturbations externes.

Sur la surface de glissement la robustesse du régime glissant vis à vis des perturbations est donnée par le théorème suivant qui n'est autre que la généralisation de la condition classique d'invariance vis-à-vis des perturbations externes établie par Drazenovic dans le cas des systèmes linéaires. [2]

**Théorème 1.1 [33] :** Le régime glissant sur  $s$ , du système perturbé ( II.12 ), est invariant vis à vis de  $\eta$ , si et seulement si le vecteur perturbation  $\eta$  est engendré par  $B(x)$ .

Cette condition est appelée condition de recouvrement connue sous le nom « matching Condition ».

Considérons la commande suivante, calculée en utilisant la méthode de commande équivalente pour le système perturbé ( II.12 ) :

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}(G\eta + \frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t))$$

En substituant  $u_{eq}$  dans ( II.12) on a :

$$\dot{x} = f(x,t) - B(x)[(GB)^{-1} \left( G\eta + \frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t) \right)] + \eta(t)$$

Avec

$$\eta(x,t) = B(x,t)\alpha(x,t) \quad \text{on a :}$$

$$\dot{x} = f(x,t) - B(x) \left[ (GB)^{-1} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t) \right) \right] \quad (\text{II.13})$$

La trajectoire  $x(t)$  déterminée par la méthode de commande équivalente est donc invariante vis à vis de  $\eta$ .

## II.2.4 Degré relatif et choix de la surface de glissement.

Le but de ce paragraphe est de montrer le lien entre le degré relatif du système et le choix de la surface de glissement pour la synthèse de la loi de commande.

L'erreur de poursuite est définie comme étant  $e(t) = y(t) - y(t_r)$ , où  $y(t)$  est la sortie du système et  $y(t_r)$  est le signal de référence.

On définit le degré relatif du système par rapport à la sortie  $y(t)$  comme étant le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie  $y(t)$  par rapport au temps, pour avoir apparaître l'entrée de manière explicite [2] [16].

**Théorème 1.2 [20] :** Un régime glissant d'ordre 1 existe sur la surface  $s$  si et seulement si le système ( II.2) est de degré relatif 1 par rapport à  $s(x,t)$ .

La surface de glissement est choisie alors selon la remarque suivante :

### Remarque 1.2 :

Soit  $s(z_0, \dots, z_{l-1}) = z_{l-1} + \alpha_{l-2}z_{l-2} + \dots + z_1\alpha_1 + \alpha_0z_0$  où les coefficients  $\alpha_i$  sont choisis tel que l'équation caractéristique :

$z^{l-1} + \alpha_{l-2}z^{l-2} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0$  possède ses racines strictement dans le demi plan

complexe gauche.

Alors  $s(e, \dot{e}, \dots, e^{l-1}) = 0$  est une équation linéaire ordinaire stable  $e^{l-1} + \alpha_{l-2}e^{l-2} + \dots + \alpha_1\dot{e} + \alpha_0e$ .

L'erreur de poursuite  $e(t) = y(t) - y_r(t)$  tend alors asymptotiquement vers zéro en un temps fini si on peut trouver une loi de commande qui assure que :

$$s(e, \dot{e}, \dots, e^{l-1}) = 0 \quad \forall t \geq t_f .$$

Avec  $t_f > t_0$

ou  $y(t)$  est la sortie du système et  $y_r(t)$  est le signal de référence.

## II.3 Commandes par modes glissants appliquée à un robot à deux articulations

### II.3.1 Introduction.

Le modèle mathématique du système de robot est fortement non linéaire avec des variations de paramètres [10], le choix de la structure de commande exige une robustesse vis-à-vis des perturbations et des variations des paramètres. La commande par mode glissant [29] [33] [27], a été préférée pour soulever cet obstacle grâce à son caractère fortement robuste. Les résultats de simulation montrent les bonnes performances de la technique proposée

Le travail comporte la commande en mode glissant standard composée de la commande équivalente augmentée du terme de robustesse, appliquée à un robot à deux articulations. Faire un choix optimal de la surface de glissement, sur laquelle demeurent et glissent tous les états du système. Puis nous synthétisons la loi de commande en mode glissant d'ordre 1 qui permet de forcer l'équation de glissement à converger vers zéro en un temps fini. Pour la validation de cette technique en simulation, nous avons choisi comme système, le bras d'un robot manipulateur à deux articulations.

### II.3.2 Modélisation du robot à deux articulations.

Le système considéré dans ce chapitre est un robot manipulateur constitué par deux articulations et deux segments rigides comme le montre la figure suivante:

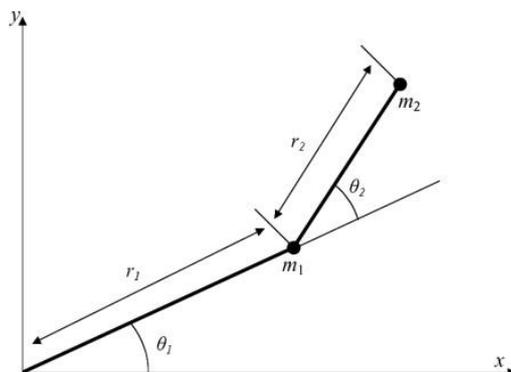


Figure II.6: Schéma du bras manipulateur à deux articulations.

En appliquant le formalisme de Lagrange comme au premier chapitre, nous obtenons l'équation suivante représentant le modèle dynamique du bras manipulateur :

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{II.14})$$

Où  $q$ ,  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$  (vecteurs de dimension 2) représentent respectivement le vecteur des coordonnées généralisées en position, vitesse et accélération.

On met l'équation sous la forme générale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Alors l'équation du robot avec ses actionneurs sera de la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{q} = -M(q)^{-1}[C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau] \\ y = h(q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q} = -M(q)^{-1}[C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)] + M(q)^{-1}\tau \\ y = h(q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q} = f(q, \dot{q}) + B(q, \dot{q})u \\ y = h(q) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Avec :

$M(q)$  : Matrice d'inertie de dimension  $(2 \times 2)$ .

$C(q, \dot{q})$  : Vecteur représentant les forces de Coriolis de dimension  $(2 \times 2)$

$G(q)$  : Vecteur de gravité de dimension  $(2 \times 1)$

$\tau$  : Couples appliqués sur chacune des articulations du bras manipulateur de dimension  $(2 \times 1)$

Pour notre étude nous avons considéré le modèle ( II.15) sous forme d'équation d'état, en prenant comme variables d'état les positions :  $x_1 = q_1$ , et  $x_3 = q_2$ , ce qui conduit à la représentation suivante :

Le modèle du système en représentation d'état [16] [17] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + b_{11}(x_1, x_3)u_1 + b_{12}(x_1, x_3)u_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + b_{21}(x_1, x_3)u_1 + b_{22}(x_1, x_3)u_2 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$$q = [q_1 \ q_2]^T = [x_1 \ x_3]^T, \quad \dot{q} = [x_2 \ x_4]^T, \quad u = [u_1 \ u_2]^T$$

Alors :

$$-M(q)^{-1}(C(q, \dot{q}) + G(q)) = f(x) = [f_1(x) \ f_2(x)]^T$$

Et

$$M(q)^{-1} = B(x_1, x_3) = \begin{bmatrix} b_{11}(x_1, x_3) & b_{12}(x_1, x_3) \\ b_{21}(x_1, x_3) & b_{22}(x_1, x_3) \end{bmatrix}$$

L'erreur de poursuite  $e = [e_1 \ e_3]^T$  avec  $e_1 = x_1 - x_{1d}$ ,  $e_3 = x_3 - x_{3d}$  et  $x_1$  et  $x_3$  sont les sorties commandées,

Ainsi que  $x_{1d}$  et  $x_{3d}$  sont les sorties désirées.

### II.3.3 Commande par modes glissants standard.

L'objectif principal consiste à utiliser l'approche des modes glissants pour chercher une loi de commande robuste vis-à-vis des différentes variations des paramètres, permettant de forcer les positions à suivre les trajectoires désirées.

Nous pouvons constater que la commande en mode de glissant est divisée en deux étapes, ou deux modes [11] :

- Dans une première phase, le vecteur d'état doit atteindre la surface de glissement, nous parlons alors du mode d'atteinte, ou « reaching mode » en anglais.
- Dans une deuxième phase, et après avoir atteint la surface de glissement  $S=0$ , le vecteur d'état doit glisser sur cette surface jusqu'à atteindre le point d'équilibre, nous

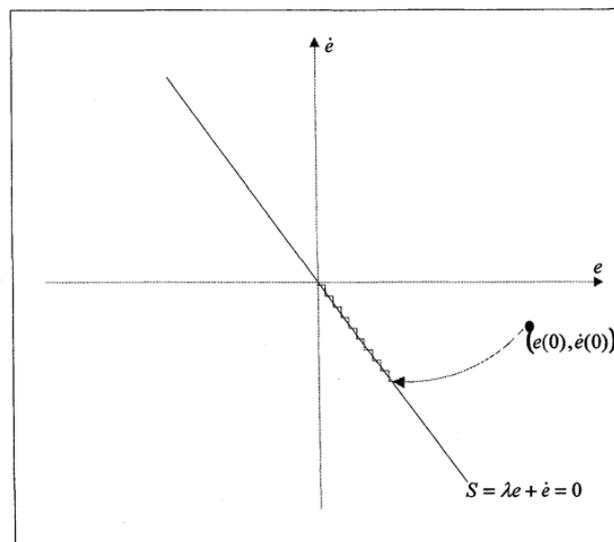


Figure II.7 : Schématisation du mode glissant dans le plan de phase

parlons alors de mode glissant, ou de « sliding mode ». Donc la conception de la commande en mode glissant est divisée en deux parties distinctes [2] [37] :

- Premièrement, il faut choisir adéquatement la surface de glissement pour y assurer la convergence du vecteur d'état vers le point d'équilibre.

- Deuxièmement, il faut concevoir la loi de commande de telle manière que le vecteur d'état puisse atteindre la surface de glissement et y glisser.

Afin de bien comprendre les étapes dans la conception de la commande en mode glissant, considérons le cas particulier d'un système non linéaire, dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle suivante ;

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}) + B(q, \dot{q})u \quad (\text{II.17})$$

Où  $f$  et  $B$  sont des fonctions non linéaires, et  $B$  est supposée inversible,  $u$  est l'entrée du système. Soit  $x_d$  la consigne désirée et soit  $e$  l'erreur de poursuite définie par  $e = x - x_d$

Tout d'abord, il faut commencer par choisir la fonction de glissement  $S$ . Le choix typique de  $S$  est fait tout simplement comme suit :

$$S = \alpha e + \dot{e} \quad (\text{II.18})$$

où  $\alpha$  est un coefficient positif. Ainsi, lorsque la surface de glissement  $S=0$  est atteinte, le système vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\alpha e + \dot{e} = 0 \quad (\text{II.19})$$

D'après ( II.19), l'erreur de poursuite vérifie alors une équation différentielle linéaire du premier ordre et tendra exponentiellement vers 0. Le choix de la fonction de glissement  $S$  étant fait. La deuxième étape consiste à concevoir une loi de commande qui puisse amener le vecteur d'état à glisser sur la surface  $S=0$ . Pour cela, il faut que la loi de commande soit conçue de telle manière à ce que la condition suivante (appelée également condition d'atteinte, ou « reaching condition ») soit vérifiée :

$$S \cdot \dot{S} < 0 \quad \forall t \quad (\text{II.20})$$

Si la condition ( II.20) est vérifiée, alors la fonction de glissement et sa dérivée sont de signe contraire quel que soit le temps. Ceci implique donc que 0 (zéro) est un centre attracteur pour  $S$ ,

### II.3 4 La stabilité de la commande au sens de Lyapunov.

On utilise la méthode directe de Lyapunov [2] [18] [19]. Nous choisissons la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}S^2 ;$$

- $V = \frac{1}{2}S^2$  est définie positive.
- $\dot{V} < 0$  est définie négative.
- Alors système est uniformément asymptotiquement stable

On à :

$\dot{V} = S \cdot \dot{S}$  admet une dérivée temporelle strictement négative condition (II.20)

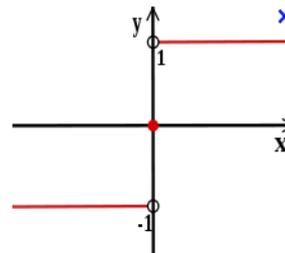
ce qui implique que  $S$  convergera vers 0, et le système est stable au sens de Lyapunov

Généralement, pour que la condition (II.20) soit vérifiée en tout temps,  $S$  est usuellement choisie comme suit :

$$\dot{S} = -k \cdot \text{sign}(S) \quad \forall t \quad (\text{II.21})$$

Avec la fonction  $\text{sign}$  définie par

$$\forall x, \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Le coefficient  $k$  appelé aussi gain discontinu et strictement positif, appelée loi d'atteinte ou loi de convergence ou encore « reaching law ».

Il suffit maintenant de choisir la loi de commande pour que la loi de convergence (II.21) soit vérifiée.

Pour cela, il faudra exprimer  $S$ , (II.18) en fonction de la commande  $u$ .

$$S = \alpha e + \dot{e}$$

$$\dot{S} = \alpha \dot{e} + \ddot{e} = \alpha \dot{e} - \ddot{x}_d + \ddot{x}$$

$$\dot{S} = \alpha \dot{e} - \ddot{x}_d + f(q, \dot{q}) + B(q, \dot{q})u \quad (\text{II.22})$$

On remplace  $\dot{S}$  ( II.21) par sa fonction discontinue

$$-k \cdot \text{sign}(s) = \alpha \dot{e} - \ddot{x}_d + f(q, \dot{q}) + B(q, \dot{q})u \quad (\text{II.23})$$

En isolant alors la commande dans ( II.23 ), nous déduisons la loi de commande suivante qui permettra au vecteur d'état d'atteindre la surface de glissement et de converger vers la trajectoire désirée :

$$u = B^{-1}(\ddot{x}_d - \alpha \dot{e} - f) - B^{-1}k \cdot \text{sign}(s) \quad (\text{II.24})$$

$$u = u_{eq} + u_{disc}$$

Nous voyons directement l'intérêt que la fonction  $b$  soit inversible. De (II.24), nous constatons que la loi de commande est divisée en deux termes de natures différentes. L'un, de nature continue, est appelé contrôle équivalent et correspond à :

$$u_{eq} = B^{-1}(\ddot{x}_d - \alpha \dot{e} - f) \quad (\text{II.25})$$

L'autre, de nature discontinue, est appelé contrôle discontinu et correspond à :

$$u_{disc} = -B^{-1}k \cdot \text{sign}(s) \quad (\text{II.26})$$

L'interprétation du rôle de chacun de ces termes est différente :

Lorsque la surface de glissement  $S=0$  est atteinte, le contrôle discontinu s'annule théoriquement (puisque  $\text{sign}(0)=0$ ) et seul le terme équivalent de la loi de commande subsiste. Nous déduisons alors que le rôle de  $u_{eq}$  est de garder le vecteur d'état sur la surface de glissement lorsque celle ci est atteinte. Le rôle de  $u_{disc}$  peut être également perçu comme un compensateur des non linéarités introduites par la fonction  $f(x)$

Par ailleurs, le rôle du terme discontinu  $u_{disc}$  est principalement de vérifier la condition d'atteinte, et donc de guider le vecteur d'état vers la surface de glissement. Ainsi, comme nous l'avons mentionné précédemment, le rôle de la loi de commande est double, puisqu'en effet, il consiste à guider le vecteur d'état sur la surface de glissement et à le garder sur cette dernière pour qu'il converge vers l'équilibre.

En pratique, la fonction  $sign(s)$  ne s'annule jamais exactement, et la nature discontinue de ce terme engendre en régime permanent le phénomène des commutations haute fréquence, ou « Chattering », caractéristiques de la commande en mode glissant. Quoi qu'il en soit, la robustesse de cette commande reste un atout majeur et c'est également  $u_{disc}$  qui assure cette propriété.

#### **II.4 Conclusion.**

Dans ce chapitre nous avons donné une approche de la commande en mode glissant avec sa dynamique et le de choix de la surface de glissement. Cette approche est appliquée sur un robot à deux articulations. Sous conditions d'un bon choix de surface de glissement la convergence et la stabilité de la commande est assurée au sens de Lyapunov.

Les résultats de simulations montrent de meilleurs résultats concernant les erreurs de poursuite de trajectoire et vitesse .

# **CHAPITRE III**

## **Synthèse d'un observateur à structure variable en mode glissant pour le robot**

### III.1 Introduction

La disponibilité de toutes les variables d'état pour la mesure directe est rarement vérifiée dans la pratique. Il existe dans la plupart des cas un vrai besoin d'une estimation fiable des variables non mesurées, particulièrement quand elles sont employées pour la synthèse de lois de commande ou pour la surveillance des processus. En effet, l'état d'un système peut correspondre à une grandeur physique que l'on ne peut pas toujours mesurer directement ; l'élaboration d'une loi de commande ou la détermination d'une défaillance d'un composant d'un système passent souvent par l'accès à la valeur d'un ou plusieurs de ses états.

Pour cela, il s'avère nécessaire de concevoir un système auxiliaire appelé, observateur, qui se charge de reconstruire les états non mesurables en exploitant les informations disponibles, à savoir le modèle dynamique du système, ses sorties mesurées et éventuellement ses entrées.

Contrairement au problème de synthèse d'observateurs d'état des systèmes linéaires qui a été entièrement résolu. Le cas des systèmes non linéaires est plus difficile et beaucoup moins systématique. C'est la raison pour laquelle, de nombreux travaux ont abordé ce problème, dans la littérature, en se basant sur des classes spécifiques de systèmes non linéaires [2].

Dans cette section nous allons présenter quelques méthodes de synthèse d'observateurs de systèmes linéaires et non linéaires. Mais auparavant, nous allons parler d'un concept important dans le domaine de la reconstruction d'état, qui est celui de l'observabilité.

### III.2 Observabilité

L'observabilité d'un système dynamique est un concept très important dans le domaine d'estimation de l'état. En effet, pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non.

L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrées et de sorties [2].

En général, pour des raisons de réalisation technique, de coût, etc ..., la dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu'à l'instant donné  $t$ , l'état  $x(t)$  ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie  $y(t)$

à cet instant. Par contre, sous des conditions d'observabilité qui seront explicitées plus loin, cet état peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé:  $u([0, t], y([0, t])$  [1].

**Définition 4.1 [2]** : on appelle observateur (ou reconstituteur d'état) d'un système dynamique (S) :

$$(S): \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Un système dynamique auxiliaire  $O$  dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie  $\hat{x}(t)$  est l'état estimé :

$$O: \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Telle que l'erreur entre le vecteur d'état  $x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  tend asymptotiquement vers zéro.

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Le schéma d'un tel observateur est donné sur la figure (4.1).

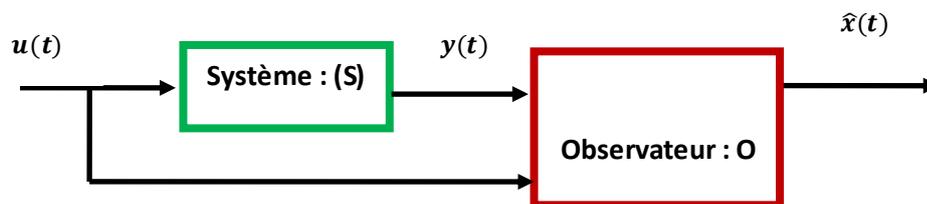


Figure III.1. Schéma d'un observateur

L'observateur est constitué de deux parties [1] :

- Un simulateur ( estimateur ) du système réel caractérisé par les matrices  $(A,B,C)$ , ayant comme entrées  $u$  et  $y$  et comme sortie  $\hat{y}$ .

- Un correcteur réalisant une contre- réaction fonction de l'écart entre la sortie  $y$  et son estimée  $\hat{y}$ . Ce correcteur permet d'assurer la convergence de l'estimation de l'état  $x$  vers l'état  $\hat{x}$ ,  $L$  est appelé le gain de l'observateur [38].

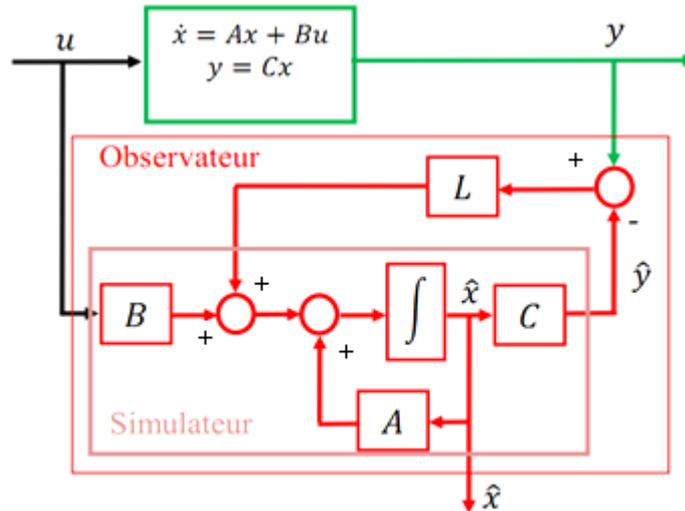


Figure III.2. Schéma de principe d'un observateur

L'existence d'un tel observateur est liée à la notion d'observabilité de  $(S)$ .

L'observabilité caractérise la propriété de pouvoir récupérer (de façon statique ou dynamique) par une combinaison des mesures et de leurs dérivées toutes les grandeurs d'un système

### III.2.1 Observabilité des systèmes linéaires

Soit un système continu décrit par l'équation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Où les vecteurs  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  et  $y(t) \in R^p$  représentent respectivement l'état, la commande et la sortie du système. Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées. L'observabilité du système linéaire (III.3) est garantie si et seulement si :

$$\text{rang}(O) = \text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n \quad (\text{III.4})$$

Par conséquent le système linéaire (III.3) est observable, si le rang de la matrice d'observabilité  $O$  est égal à la dimension  $n$  de ce système [23] [4]. Dans le cas où le rang de la matrice  $O$  est inférieur à  $n$  on parle alors, d'observabilité partielle.

### III.2.2 Observabilité des systèmes non linéaires :

Pour les systèmes non linéaires, étant donné l'espace de l'état  $x \in R^n$  et l'ensemble  $U$  des entrées, la notion d'observabilité est basée sur la possibilité de différencier deux conditions initiales distinctes. On parlera ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales [23] [17].

On considère le système non linéaire donnée par

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Où les vecteurs  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  sont respectivement le vecteur d'état et de commande

**Définition : (Distinguabilité) [ 2 ] :** Deux états initiaux  $x_0^1, x_0^2 \in X$  tel que

$x_0^1 \neq x_0^2$  sont dits distinguables dans  $X$  si  $\exists t \geq 0$  et entrée admissible  $u : [0, t] \rightarrow U$  telle que les trajectoires des sorties  $y(t, x_0^1, u(t))$  et  $y(t, x_0^2, u(t))$  issues, respectivement de  $x_0^1$  et  $x_0^2$ , restent dans  $X$ .

$[0, t]$  et vérifient  $y(t, x_0^1, u(t)) \neq y(t, x_0^2, u(t))$ . Dans ce cas, on dira que  $u$  distingue  $x_0^1, x_0^2$  dans  $X$ .

**Définition : (Observabilité et observabilité locale faible) [ 2 ] :** Un système est observable en  $x_0^1 \in X$ , si tout autre état  $x_0^1 \neq x_0^2$  est distinguable de  $x_0^1$  dans  $X$ .

un système est globalement observable si il est distinguable en tous point de  $X$ . Un système est localement faiblement observable en  $x_0^1 \in X$ , s'il existe un voisinage  $X'(x_0) \subset X$  contenant  $x_0^1$ , tel que pour tout voisinage  $X'' \subset X'(x_0^1)$  de  $x_0^1$ , pour tout point  $x_0^2 \in X''(x_0^2)$ , les couples  $(x_0^1, x_0^2)$  sont distinguables et les trajectoires  $y(t, x_0^1, u(t))$  et  $y(t, x_0^2, u(t))$  évoluent à l'intérieur de  $X''(x_0^1)$ .

Dans la pratique, ces notions sont relativement difficiles à vérifier et souvent on fait recours à la linéarisation du système au tour d'un point d'équilibre pour s'affranchir de l'observabilité du système au voisinage de ce point d'équilibre.

**Définition : (Observabilité au sens du rang) : [ 2]**

Rappelons qu'un champ de vecteurs  $f$  peut être interprété selon les besoins de deux manières:

- 1<sup>eme</sup> - Comme une application qui à tout point  $x$  assigne un vecteur  $f(x)$ . Dans ce cas on l'écrit dans la base canonique sous la forme suivante:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \tag{III.6}$$

On dit que les  $f_i$  sont ses composantes. Sous cette forme on dit aussi qu'il régit un système d'équations différentielles (une dynamique) dont les courbes tangentes  $x(t)$  vérifient :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)). \\ y = h(x) \end{cases} \tag{III.7}$$

On dit que  $x(t)$  est une courbe intégrale de  $f$ .

- 2<sup>eme</sup> - Comme une dérivation qu'il faudra écrire sous la forme suivante:

$$f = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{III.8}$$

Sous cette forme il s'applique à une fonction réelle  $h(x)$  comme suit:

$$L_f h = f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial h}{\partial x_n} \tag{III.9}$$

Cette nouvelle fonction  $L_f h$  s'appelle la dérivée de Lie de  $h$  dans la direction de  $f$ .

Si  $f = \frac{\partial h}{\partial x_i}$ , alors  $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x_i}$  et on reconnaît les dérivations partielles. Il est facile de voir que:

$$L_f h = dh(f) = \nabla h \cdot f = \frac{dy}{dt} := y \quad (\text{III.10})$$

Où  $dh$  est la différentielle de  $h$ , et  $\nabla h \cdot f$  est le produit scalaire du gradient  $\nabla h$  de  $h$  avec  $f$ .

Maintenant, nous sommes en mesure de donner une définition "faible" de la notion d'observabilité.

**Définition 2.2.** Considérons le système dynamique de la forme (III.5). On dit que la paire  $(f, h)$  est observable au sens du rang si la différentielle de la sortie  $h$  avec les différentielles de ses dérivées de Lie successives dans la directions de  $f$  jusqu'à l'ordre  $n - 1$  sont indépendante (sur un voisinage de 0). C'est-à-dire que:

$$\text{Rang}\{dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h\}^T = n \quad (\text{III.11})$$

Où l'écriture de  $dL_f^k h$  ici est donnée par le co-vecteur:

$$dL_f^k h = \left( \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n} \right) \quad (\text{III.12})$$

On remarque que  $L_f^k h = y^{(k)}$  est la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de la sortie  $y$ . Donc, sous la condition du rang (III.9) ci-dessus l'application:

$$x \rightarrow (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{III.13})$$

Est un difféomorphisme local. Plus précisément, ce difféomorphisme est l'inverse de l'application suivante:

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{(n-1)} h(x) \end{pmatrix} = \psi^{-1}(x) \quad (\text{III.14})$$

C'est-à-dire l'état  $x$  s'écrit (localement) en fonction de la sortie  $y$  et de ses dérivés successives.

$$x = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{III.15})$$

Une solution simple et optimale au problème de l'estimation de l'état des systèmes linéaires a été proposée par Luenberger dans le cadre déterministe, et par Kalman dans le cadre stochastique. Dans les deux cas, on considère le modèle dynamique du système linéaire défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lw(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  et  $v(t) \in \mathbb{R}^p$  sont deux bruits blancs gaussiens d'espérance nulle, de covariances respectives  $Q$  et  $R$ . Ces bruits sont supposés non corrélés. Les matrices du système sont de dimensions appropriées, et les conditions initiales sont définies par  $x(0) = x_0$ .

### III. 3 Observateurs des systèmes linéaires

#### III.3.1 Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles. On se place dans le cas déterministe, où les bruits  $w$  et  $v$  sont nuls.

Luenberger propose l'observateur suivant pour le système (III.5) [4] [5]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

La dynamique de l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  a pour expression :

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) \quad (\text{III.18})$$

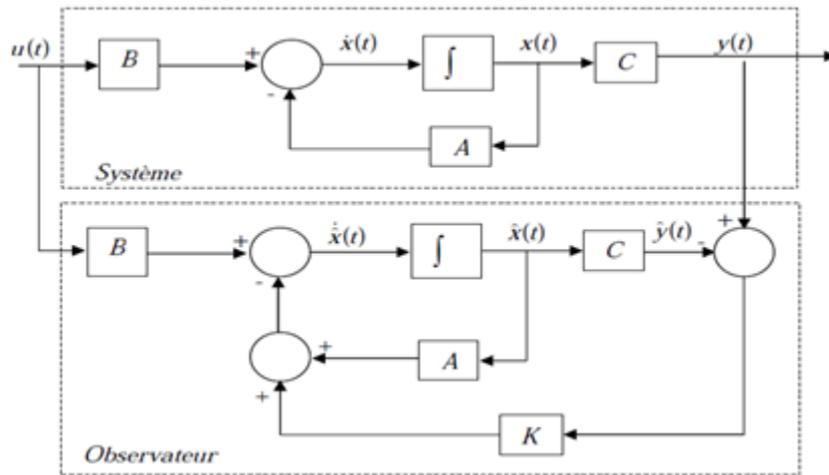


Figure III.3 : Schéma structurel de l'observateur de Luenberger

En utilisant une technique de placement de pôles, il suffit alors de choisir le gain  $K$  de l'observateur de telle sorte que les valeurs propres de la matrice  $A - KC$  soit dans le demi-plan complexe gauche. Pour ce type d'observateur, une grande liberté est laissée au choix des valeurs propres, mais en pratique on choisit une dynamique d'erreur plus rapide que celle du procédé.

Cependant on ne peut les prendre infiniment grandes pour deux raisons essentielles : on ne peut utiliser que des gains réalisables et l'augmentation de la bande passante du reconstituteur ne permet plus de négliger les bruits qui deviennent prépondérants en hautes fréquences [2] [25].

Il faut noter qu'en présence de bruits  $w, v$ , la dynamique de l'erreur est régie par l'équation :

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) + w(t) - Kv(t) \quad (\text{III.19})$$

Cette erreur est donc sensible aux bruits par l'intermédiaire des deux fonctions de transfert

$$(sI - A + KC)^{-1}L \quad \text{et} \quad (sI - A + KC)^{-1}K.$$

L'étude du gain fréquentiel permet de quantifier l'influence des bruits sur l'erreur d'observation.

### III.3.2 Filtre de Kalman

La théorie de l'observation de Kalman nécessite, quant à elle, la résolution d'une équation de Riccati. Kalman utilise les propriétés statistiques des bruits  $w$  et  $v$  et propose la structure d'observateur suivante :

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{y}(t)) \quad (\text{III.20})$$

En minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P = E[e(t)e(t)^T]$ , on obtient l'expression du gain de l'observateur :

$$K = PC^T R^{-1} \quad (\text{III.21})$$

Où  $P$  est solution de l'équation de Riccati :

$$AP + PA - PC^T R^{-1} CP + LQL^T = 0 \quad (\text{III.22})$$

Sous certaines conditions, on peut montrer que la matrice  $P$  tend vers une limite et que le filtre est stable, ce qui permet éventuellement de conserver pour  $K$  sa valeur en régime permanent.

### III.3.3 Observateur à entrée inconnue

La théorie d'observateur à entrée inconnue est applicable à la classe des systèmes linéaires (III.3). Seulement cette fois, les entrées inconnues interviennent dans le modèle du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Où  $d(t) \in R$  est une entrée inconnue et  $E$  est une matrice de rang plein de dimension appropriée.

Pour le système (III.23) on dit qu'un observateur est à entrée inconnue si l'erreur d'estimation tend vers zéro en présence d'entrées inconnues. Sa structure est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + TBu(t) + Ky(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Hy(t) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Où  $z(t) \in R^n$  est le vecteur d'état de l'observateur et  $\hat{x}(t) \in R^n$  est le vecteur d'état estimé du système, les matrices  $F$ ,  $T$ ,  $K$  et  $H$  qui seront déterminées pour stabiliser l'observateur et découpler les entrées inconnues. En posant  $K = K_1 + K_2$ , la dérivée de l'erreur d'estimation par rapport au temps sera donnée par :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = (A - HCA - K_1C)e - [F - (A - HCA - K_1C)]z(t) - [T - (I - HC)]Bu(t) - \\ (I - HC)Ed(t) - [K_2 - (A - HCA - K_1C)H]y(t) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Ainsi les conditions permettant le découplage de l'entrée inconnue sont :

- $(HC - I)E = 0$
- $T = I - HC$
- $F = A - HCA - K_1C$
- $K_2 = FH$
- $K = K_1 + K_2$

Si ces conditions sont satisfaites alors l'erreur dynamique sera :

$$\dot{e}(t) = Fe(t) \quad (\text{III.26})$$

Afin que l'erreur d'estimation tende asymptotiquement vers zéro, les valeurs propres de  $F$  doivent être à partie réelle négative. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel observateur pour un système décrit par l'équation (III.23) sont:

- $\text{Rang}(CE) = \text{Rang}(E)$
- $(C, A_l)$  est stable,  $A_l = A - E[(CE)^T CE]^{-1} (CE)^T CA$ .

La première condition signifie que le nombre de lignes linéairement indépendantes de la matrice  $C$  ne doit pas être inférieur au nombre de colonnes linéairement indépendantes de la

matrice  $E$ , c'est-à-dire, le nombre de mesures indépendantes doit être supérieur ou égal au nombre d'entrées inconnues à découpler.

## **III.4 Observateurs des systèmes non linéaires**

### **III.4.1 Observateur de Luenberger étendu [23]**

L'observateur de Luenberger étendu intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par le biais d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, un modèle linéarisé est nécessaire, et le gain de l'observateur est calculé par placement de pôles. Ce type d'observateur ne peut être utilisé que lorsqu'on est sûr que l'état restera au voisinage de l'état d'équilibre. Pour cette raison, l'utilisation de cet observateur peut être compromise par les instabilités qui peuvent se révéler si l'on s'éloigne du point de fonctionnement.

Dans le deuxième cas, les méthodes de changement de coordonnées ne concernent qu'une classe restreinte de systèmes non linéaires. En effet, beaucoup d'approches utilisant les changements de coordonnées nécessitent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui est souvent très délicat à réaliser. De ce fait, l'utilisation de solutions approchées est envisageable.

### **III.4.2 Filtre de Kalman Étendu (EKF)[23]**

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard au modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre.

Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires. Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires.

### III.4.3 Observateurs à grand gain

Les techniques dites à grand gain peuvent être appliquées sans transformation du système initial. Dans ce cas, la conception de l'observateur se fait directement à partir de la structure du système. Cette technique utilise la théorie de stabilité de Lyapunov pour adapter les techniques développées dans le cas linéaire. Des méthodes sont développées donnent des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel du système, pour la classe des systèmes non linéaires décrits par le modèle suivant [23] [5] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(u(t), x(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

La dynamique de l'état comporte une partie linéaire non commandée et une partie non linéaire commandée, vérifiant en général la condition de Lipschitz par rapport à  $x$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \quad (\text{III.16})$$

L'observateur à grand gain possède la structure suivante:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t), u(t)) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (\text{III.17})$$

L'appellation grand gain provient de la structure de l'observateur : lorsque la fonction non linéaire possède une grande constante de Lipschitz, la moindre erreur entre l'état réel et l'état estimé va se répercuter et croître. Par conséquent, le gain  $K$  de l'observateur (III.17) doit être important pour compenser cette amplification de l'erreur.

La dynamique de l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  se déduit de (III.15) et (III.17) :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) \quad (\text{III.18})$$

Il a été démontré dans [26] que si le gain  $K$  est choisi telle que :

$$k < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (\text{III.19})$$

Où  $k$  est la constante de Lipchitz de  $f(x(t), u(t))$ ,  $\lambda_{\min}(Q)$  et  $\lambda_{\max}(Q)$  sont les valeurs propres maximales et minimales.  $Q$  est une matrice symétrique définie positive et  $P$  est une matrice définie positive, solution de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + (A - KC) = -Q \quad (\text{III.20})$$

Alors (III.17) est un observateur asymptotique du système non linéaire (III.15).

La synthèse de l'observateur consiste à ajuster les matrices  $P$ ,  $Q$  et  $K$  de façon à garantir l'égalité (III.20). Ensuite, on vérifie si la condition (III.19) est satisfaite. Ainsi, et malgré l'intérêt du résultat, cette méthode n'est pas constructive, elle ne donne aucune indication sur le choix d'un gain satisfaisant la condition (III.19). Cette approche a été étendue par plusieurs auteurs.

Pour simplifier le problème on peut remplacer la matrice  $Q$  par une matrice identité ; et cela revient à choisir un gain  $K$  qui satisfait :

$$k < \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \quad (\text{III.21})$$

Ces techniques dites à grand gain sont très répandues dans la littérature. Il s'agit principalement de techniques de vérification, qui permettent d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel. La structure de l'observateur non linéaire est une structure de Luenberger étendue au cas non linéaire.

### III.5 Observateurs à mode glissant

Dans toutes les méthodes vues précédemment, le modèle dynamique du système étudié était supposé parfaitement connu. Ici, il s'agit de développer une certaine robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques. Le principe des observateurs à modes glissants consiste à contraindre, à l'aide de fonctions discontinues, les dynamiques d'un système d'ordre  $n$  à converger vers une variété  $S$  de dimension  $(n - p)$  dite surface de glissement ( $p$  étant la dimension du vecteur de mesure)[23], [17], [21]. L'attractivité de cette surface est assurée par des

conditions appelées conditions de glissement. Si ces conditions sont vérifiées, le système converge vers la surface de glissement et y évolue selon une dynamique d'ordre  $(n - p)$ .

Dans le cas des observateurs à modes glissants, les dynamiques concernées sont celles des erreurs d'observation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . A partir de leurs valeurs initiales  $e(0)$ , ces erreurs convergent vers les valeurs d'équilibre en deux étapes:

Dans une première phase, la trajectoire des erreurs d'observation évolue vers la surface de glissement sur laquelle les erreurs entre la sortie de l'observateur et la sortie du système réel (les mesures)  $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  sont nulles. Cette étape, qui généralement est très dynamique, est appelée mode d'atteinte.

Dans la seconde phase, la trajectoire des erreurs d'observation glisse sur la surface de glissement avec des dynamiques imposées de manière à annuler toutes les erreurs d'observation. Ce dernier mode est appelé mode de glissement. Les différentes étapes de synthèse d'un observateur à mode glissant sont connues et clairement identifiées dans [23]. Ces dernières sont rappelées ci-dessous. Considérons un système d'état non linéaire affiné d'ordre  $n$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & x \in R^n \\ y = h(x), & y \in R^p \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

L'observateur en mode glissant est défini avec la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - K\Gamma_s, \\ \hat{y} = h(\hat{x}), \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Où

$K$  : est la matrice de gain de dimension  $(n \times p)$ .

$\Gamma_s$  : est un vecteur de dimension  $p \times 1$  défini tel que :

$$\Gamma_s = [\text{sign}(\hat{y}_1 - y_1) \dots \text{sign}(\hat{y}_p - y_p)]^T .$$

Nous définissons également les vecteurs relatifs aux erreurs d'observation tel que :

$e = \hat{x} - x$  : est le vecteur d'état des erreurs d'observation.

$S = e_y = \hat{x} - x$  : est la surface de glissement.

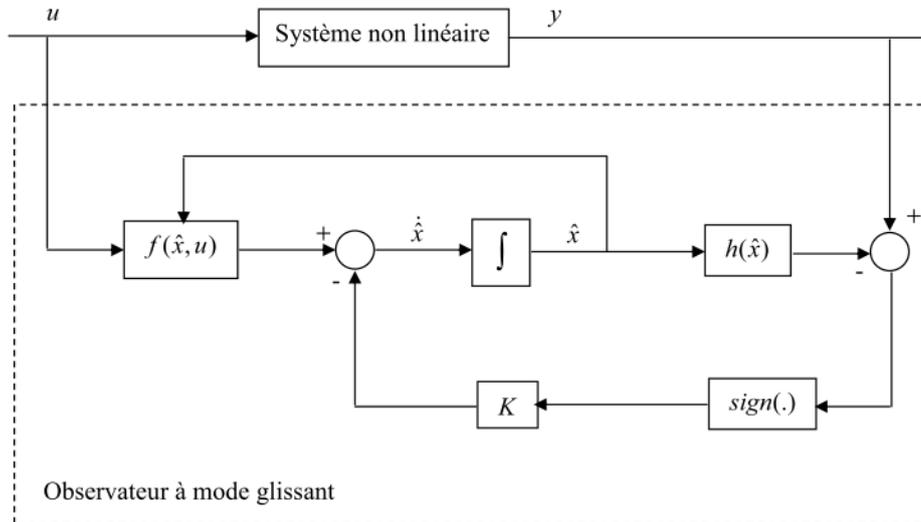


Figure III.4 : Schéma fonctionnel d'un observateur à mode glissant.

Pour que l'état estimé converge vers l'état réel, l'observateur à mode glissant doit respecter deux conditions.

1. La première concerne le mode d'atteinte et garantit l'attractivité de la surface de glissement  $S = 0$  de dimension  $p$ , laquelle est attractive si la fonction de Lyapunov  $V(x) = S^T S$ , vérifie la condition :  $\dot{V}(x) < 0$  si  $S \neq 0$ .

2. La deuxième concerne le mode glissant, durant cette étape, la matrice des gains correctifs agit de manière à satisfaire la condition d'invariance suivante :

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ S = 0 \end{cases}$$

### 3.5.1 Observateurs à mode glissant des systèmes linéaires

Considérons à nouveau le système (III.3), où la paire  $(A,C)$  est supposée observable. La reconstruction des variables d'état est basée sur les sorties mesurées, un changement de coordonnées peut être effectué pour que les sorties apparaissent directement comme des composantes du vecteur d'état. Sans perte de généralité la matrice de sortie peut être réécrite comme suit [23] [38] :

$$C = [C_1 \ C_2]$$

Où  $C_1 \in R^{p \times (n-p)}$ ,  $C_2 \in R^{p \times p}$  et le déterminant de  $C_2$  est non nul. En respectant ces conditions, une matrice de transformation non singulière  $T$  permet de réécrire respectivement les matrices de sortie, d'état et de commande dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\tilde{C} = CT^{-1} = [0 \ I_p] ,$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} ,$$

$$\tilde{B} = BT = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} ,$$

Où

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} ,$$

Le système (III.1) peut donc être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t) \\ \dot{y}(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Tx(t) \quad \text{et} \quad x_1(t) \in R^{n-p}$$

L'observateur à mode glissant proposé pour ce type de système est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{y}(t) + B_1u(t) + Lv(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{y}(t) + B_2u(t) - v(t) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Où  $\hat{y}(t)$  et  $\hat{x}_1(t)$  sont les estimées de  $y(t)$  et  $x_1(t)$   $L \in R^{(n-p) \times p \times}$  est le gain de l'observateur et la fonction discontinue  $v(t)$  est donnée par :

$$v(t) = K \text{sign} (\hat{y}_i(t) - y_i(t)) , \quad \text{avec } K > 0 .$$

$\hat{y}_i(t)$  et  $y_i(t)$  sont respectivement les composantes des vecteurs  $\hat{y}(t)$  et  $y(t)$  . Les erreurs d'estimation d'état et de sortie sont données par :

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \hat{x}_1(t) - x_1(t) \\ e_y(t) &= \hat{y}(t) - x(t) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

A partir des équations (III.24), (III.25) et (III.26) ; la dynamique des erreurs d'estimation s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) + A_{12}e_y(t) + Lv(t) \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}e_1(t) + A_{22}e_y(t) - v(t) \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

La paire  $(A_{11}, A_{21})$  est observable car la paire  $(A, C)$  est observable . Par conséquent, le gain  $L$  peut être choisi tel que les valeurs propres de la matrice  $A_{11} + LA_{21}$  soit dans le demi- plan gauches du plan complexe.

Définissons maintenant un nouveau changement de variables tel que :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = T_L \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

Avec ce changement de variables, la dynamique des erreurs d'estimation s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_1(t) = \tilde{A}_{11}e_1(t) + \tilde{A}_{12}e_y(t) \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}\tilde{e}_1(t) + \tilde{A}_{12}e_y(t) - v(t) \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Ou

$$\tilde{e}_1(t) = e_1(t) + Le_y(t)$$

$$\tilde{A}_{11} = A_{11} + LA_{21}$$

$$\tilde{A}_{12} = A_{12} + LA_{22} - \tilde{A}_{11}L$$

$$\tilde{A}_{22} = A_{22} - A_{21}L$$

Utkin [30] a montré en utilisant la théorie des perturbations singulières que pour un gain  $K$  assez grand, un régime glissant peut être établi sur l'erreur de sortie (III.28). Donc après un temps fini, l'erreur  $e_y(t)$  et sa dérivée seront nulles et on aura à partir l'équation (III.28) :

$$\tilde{e}_1(t) = \tilde{A}_{11} \tilde{e}_1(t) \quad (\text{III.29})$$

Avec un choix correct du gain (un gain qui stabilise  $\tilde{A}_{11}$ ) le système d'équation (III.28) est stable et  $\tilde{e}_1(t) \rightarrow 0$  quant  $t \rightarrow \infty$ , ce qui veut dire que

$\hat{x}_1(t) \rightarrow x_1(t)$  et  $x_2(t)$  peut être reconstruite dans le système de coordonnées original par :

$$\hat{x}_2(t) = C_2^{-1}(y(t) - C_1 \hat{x}_1(t))$$

En pratique la difficulté majeure de cette approche réside dans le choix d'un gain approprié  $K$  pour établir un régime glissant dans un temps fini. Certains auteurs montre la nécessité de modifier le gain  $K$  pendant l'intervalle de temps pour réduire les fortes commutations.

### III.5.2 Observateurs à mode glissant sous forme triangulaire .

L'observateur en mode glissant sous forme triangulaire a été développé pour des systèmes pouvant se mettre sous la forme, appelée forme triangulaire d'observation, suivante [23] [17] [21] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + g_1(x_1, u) \\ \dot{x}_2 = x_3 + g_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (III.30)$$

Où  $f_n$  et  $g_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , sont des fonctions scalaires,  $x_i$  sont les états du système,  $u$  est le vecteur d'entrée et  $y$  est la sortie. La structure de l'observateur proposé est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + g_1(x_1, u) - \lambda_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + g_2(x_1, \bar{x}_2, u) - \lambda_2 \text{sign}_2(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + g_{n-1}(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, u) - \lambda_{n-1} \text{sign}_{n-1}(\bar{x}_n - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{\hat{x}}_n = f_n(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + g_n(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, u) - \lambda_n \text{sign}_n(\bar{x}_n - \hat{x}_n) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (III.31)$$

Où les variables  $\bar{x}_i$  sont données par :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \\ \bar{x}_i = \hat{x}_i + \lambda_{i-1} \text{sign}_{eq, i-1}(\bar{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}) \quad \text{pour } i > 1 \end{cases} \quad (3.32)$$

Avec  $\text{sign}_{eq}$  désigne la fonction  $\text{sign}(\cdot)$  classique filtrée par un filtre passe bas; la fonction  $\text{sign}_i$  est définie de manière à imposer que le terme correctif ne soit actif que si  $\bar{x}_j - \hat{x}_j = 0$  pour  $j = 1, \dots, i$  c'est-à-dire, s'il existe  $j \in \{1, \dots, i-1\}$  tel que  $\bar{x}_j - \hat{x}_j \neq 0$  alors la fonction est mise à zéro sinon elle est égale à la fonction  $\text{sign}(\cdot)$  usuelle.

➤ La convergence des erreurs d'observation se fait par étapes [23] :

**Étape 1** : Dans cette étape on assure la convergence de  $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$  vers zéro dans un temps  $t_1 > t$ . Pour  $i > 1$  toutes les fonctions  $sign_i$  sont égales à zéro, les dynamiques des erreurs d'observation  $e = x - \hat{x}$  sont donc :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 sign_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{e}_2 = e_3 + g_2(x_1, x_2, u) - g_2(x_1, \hat{x}_2, u) \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) - g_{n-1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, u) \\ \dot{e}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \quad - g_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, u) \end{cases} \quad (III. 33)$$

On considère la fonction de Lyapunov  $V_1 = \frac{e_1^2}{2}$  alors :

$$\dot{V}_1 = e_1(e_2 - \lambda_1 sign(e_1))$$

En choisissant  $\lambda_1 > |e_2|_{max}$ , l'erreur d'observation  $e_1$  converge vers zéro en un temps fini  $t_1$ .

Après cet instant,  $e_1$  reste égale à zéro et on obtient alors  $e_2 = \lambda_1 sign(x_1 - \hat{x}_1)$  ce qui implique que  $e_2 = 0$  alors  $x_2 = \hat{x}_2$

Remplace dans (3.32) on trouve  $\bar{x}_2 = x_2$ .

**Étape 2** : L'objectif dans cette étape est d'atteindre la surface de glissement

$e_2 = x_2 - \hat{x}_2 = 0$ . Pour rester sur la surface  $e_1 = 0$ , il faut que  $\lambda_1 > |e_2|_{max}$ , mais cela est vérifié de part le fait que  $e_2$  est strictement décroissante après  $t_1$ . Les dynamiques des erreurs d'observation sont alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 sign(x_1 - \hat{x}_1) = 0 \\ \dot{e}_2 = e_3 + g_2(x_1, x_2, u) - g_2(x_1, \hat{x}_2, u) - \lambda_2 sign(x_1 - \hat{x}_1) = e_3 - \lambda_2 sign(e_2) \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) - g_{n-1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, u) \\ \dot{e}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \quad - g_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, u) \end{cases} \quad (III. 34)$$

En choisissant la fonction de Lyapunov  $V_2 = \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2}$  on aura :

$$\dot{V}_2 = e_1(e_2 - \lambda_1 sign(e_1)) + e_2(e_3 - \lambda_2 sign(e_2))$$

$$\dot{V}_2 = e_2(e_3 - \lambda_1 \text{sign}(e_2))$$

Si  $\lambda_2 > |e_3|_{\max}$  alors  $e_2$  converge vers zéro après un temps fini  $t_2 > t_1$ . L'erreur d'observation est strictement décroissante durant la période  $[t_1, t_2]$  ce qui implique que après un temps fini  $t_2$ ,  $\bar{x}_3 = x_3$ .

Ainsi, étape par étape nous obtenons la convergence de toutes les composantes de l'erreur d'observation vers zéro et celles de  $\hat{x}$  vers  $x$  pour tous  $i < n$ , sous conditions, que  $\lambda_i > |e_{i+1}|_{\max}$ .

**Étape n :** Cette étape commence à l'instant  $t_{n-1}$ , à cet instant  $e_k = 0$  pour tous  $k < n$ .

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) = 0 \\ \dot{e}_2 = e_3 - \lambda_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) = 0 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - \lambda_{n-1} \text{sign}(x_n - \hat{x}_n) = 0 \\ \dot{e}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \quad - g_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, u) - \lambda_n \text{sign}(\bar{x}_n - \hat{x}_n) = -\lambda_n \text{sign}_n(e_n) \end{cases} \quad (\text{III. 35})$$

**De la même façon,** on choisit la fonction de Lyapunov  $V_n = \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2} + \dots + \frac{e_n^2}{2}$

On obtient donc

$$\dot{V}_n = e_n(-\lambda_n \text{sign}(e_n)).$$

Ainsi,  $e_n$  converge vers zéro en un temps fini  $t_n > t_{n-1}$  pour toutes valeurs de  $\lambda_n > 0$ ,

Alors la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_2 = 0 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = 0 \\ \dot{e}_n = -\lambda_n \text{sign}_n(e_n) \end{cases}$$

### III.6 - Application de l'Observateur à un robot à deux articulations.

L'observateur que nous venons d'étudier s'applique parfaitement au modèle d'un bras manipulateur à deux articulations qui s'écrit sous forme triangulaire. Il a été retenu pour la mise de ces propriétés de robustesses discutées précédemment qui nous permet d'utiliser la commande par modes glissants développée précédemment. Rappelons que le modèle du robot.

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{III.36})$$

peut être représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{q} = f(q, \dot{q}) + B(q)u \\ y = h(q) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

Avec :

$$\begin{aligned} f(q, \dot{q}) &= -M(q)^{-1}(C(q, \dot{q}) + G(q)) \\ B(q) &= M(q)^{-1} \quad \text{et} \quad y = q \end{aligned}$$

#### III.6.1- Mise sous forme triangulaire du modèle dynamique.

Pour écrire l'observateur sous forme triangulaire, il faut choisir pour cela le vecteur d'état

$$x = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T \quad \text{et comme vecteur de commande} \quad u = [u_1 \ u_2]^T$$

En posant  $x_1 = q_1$  ,  $x_2 = \dot{q}_1$  ,  $x_3 = q_2$  ,  $x_4 = \dot{q}_2$

modèle dynamique sous forme triangulaire [2] .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + B_{11}(x_1, x_3)u_1 + B_{12}(x_1, x_3)u_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + B_{21}(x_1, x_3)u_1 + B_{22}(x_1, x_3)u_2 \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

### III.6.2- Observation en mode glissant sous forme triangulaire

Dans ce chapitre, un observateur non linéaire en mode glissant est proposé en vue de la commande d'un robot manipulateur à deux articulations. Il donne une erreur d'observation asymptotique linéaire et stable. La classe des systèmes pour lesquels il est conçu peut-être considérée comme une forme triangulaire d'observation. Le but est d'assurer la stabilité du robot dans la perspective d'une commande robuste et rapide.

L'observateur sous forme triangulaire associé au système (III.38) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = x_2 + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = f_1(x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4) + B_{11}(x_1, x_3)u_1 + B_{12}(x_1, x_3)u_2 + \lambda_2 \text{sign}(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = x_4 + \lambda_3 \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{\hat{x}}_4 = f_2(x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4) + B_{11}(x_1, x_3)u_1 + B_{12}(x_1, x_3)u_2 + \lambda_4 \text{sign}(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) \end{cases} \quad (\text{III. 39})$$

Avec :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \\ \bar{x}_2 = \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}_1(\bar{x}_1 - \hat{x}_1) \\ \bar{x}_3 = x_3 \\ \bar{x}_4 = \hat{x}_4 + \lambda_3 \text{sign}_3(\bar{x}_3 - \hat{x}_3) \end{cases}$$

### III.6.3- Convergence de l'observateur.

La dynamique de l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$  s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{e}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) - f_1(x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4) - \lambda_2 \text{sign}(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{e}_3 = e_4 + \lambda_3 \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{e}_4 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) - f_2(x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4) - \lambda_4 \text{sign}(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) \end{cases} \quad (\text{III. 40})$$

Appliquons l'algorithme de convergence par étape au système (III.35) et à l'observateur (III.36) pour prouver la convergence de l'observateur en temps fini. [2].

**Première étape :**

Nous avons  $sign(.) = 0$  pour  $i > 1$ .

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 sign(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{e}_2 = \Delta f_1(x_{1,3}, \bar{x}_{2,4}) \\ \dot{e}_3 = e_4 + \lambda_3 sign(x_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{e}_4 = \Delta f_2(x_{1,3}, \bar{x}_{2,4}) \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

Pour la convergence de  $e_1$  en temps fini (respectivement de  $e_3$ ) considérons la fonction de Lyapunov :

➤  $V_1 = \frac{e_1^2}{2}$  respectivement  $V_3 = \frac{e_3^2}{2}$  alors :

➤  $\dot{V}_1 = e_1(e_2 - \lambda_1 sign(e_1))$  respectivement  $\dot{V}_3 = e_3(e_4 - \lambda_1 sign(e_3))$

En choisissant  $\lambda_1 > |e_2|_{max}$  (respectivement  $\lambda_3 > |e_4|_{max}$ ) on obtient la convergence de  $e_1$  (respectivement de  $e_3$ ) après un temps fini vers zéro .

- l'état atteint la surface de glissement et sur cette surface, nous avons  $e_1 = \dot{e}_1 = 0$  (respectivement  $e_3 = \dot{e}_3 = 0$ )  
d'où :  $\bar{x}_2 = x_2$  respectivement  $\bar{x}_4 = x_4$

**Deuxième étape :**

Tout en respectant la condition de convergence de la première étape ; montrons la convergence de  $e_2$  en temps fini (respectivement de  $e_4$ ).

En remplaçant  $\bar{x}_2$  par  $x_2$  (respectivement  $\bar{x}_4$  par  $x_4$ ) on obtient :

$$\dot{e}_2 = -\lambda_2 sign(e_2) \quad (\text{respectivement}) \quad \dot{e}_4 = -\lambda_4 sign(e_4)$$

La dynamique de l'erreur devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 - \lambda_1 sign(x_1 - \hat{x}_1) \\ -\lambda_2 sign(x_2 - \hat{x}_2) \\ e_4 + \lambda_3 sign(x_3 - \hat{x}_3) \\ -\lambda_4 sign(x_4 - \hat{x}_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{e}_2 = -\lambda_2 sign(e_2) \\ 0 \\ \dot{e}_4 = -\lambda_4 sign(e_4) \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

considérons la fonction de Lyapunov :

$$V_2 = \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2} \text{ respectivement } V_4 = \frac{e_3^2}{2} + \frac{e_4^2}{2} \text{ alors}$$

$$\triangleright \dot{V}_2 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 = e_2 (-\lambda_2 \text{sign}(e_2)) \text{ avec } (e_1 = \dot{e}_1 = 0 \text{ Première étape})$$

$$\triangleright \dot{V}_4 = e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 = e_4 (-\lambda_4 \text{sign}(e_4)) \text{ avec } (e_3 = \dot{e}_3 = 0 \text{ Première étape})$$

En choisissant  $\lambda_2$  (respectivement  $\lambda_4$ ) au voisinage de zéro on obtient la convergence de  $e_2$  (respectivement de  $e_4$ ) après un temps fini vers zéro

### III.7- Conclusion

Dans ce troisième chapitre nous avons proposé un observateur non linéaire par mode glissant qui présente l'avantage d'être robuste aux incertitudes sur les paramètres du modèle. Cette étude sur les observateurs a été faite pour l'implémentation des commandes étudiées vu la nécessité des vitesses et accélérations articulaires.

L'observateur en mode glissant sous forme triangulaire à laquelle se prête parfaitement le modèle du robot manipulateur à deux articulations. Cet observateur non linéaire est robuste par rapport aux incertitudes dans le modèle et présente l'avantage de la convergence en temps fini.

Les résultats de simulations montrent l'efficacité d'un tel observateur. Nous avons montré l'utilité de l'observateur non linéaire en mode glissant pour le cas de commande en position et vitesse du bras manipulateur.

# **CHAPITRE IV**

**Application de la commande  
dynamique à un bras  
manipulateur à 2 ddl  
De type SCARA**

## IV. 1 Application de la commande dynamique à un bras manipulateur à 2 ddl

Dans ce chapitre on va appliquer la loi de commande au modèle d'un bras manipulateur SCARA à deux degrés de liberté (2ddl),

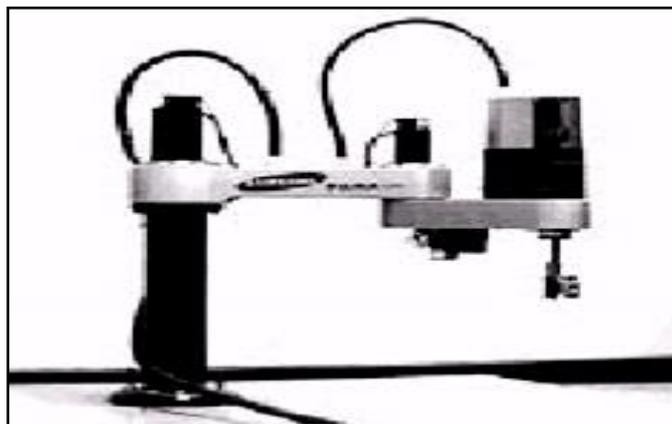


Figure (IV.1) : Robot SCARA

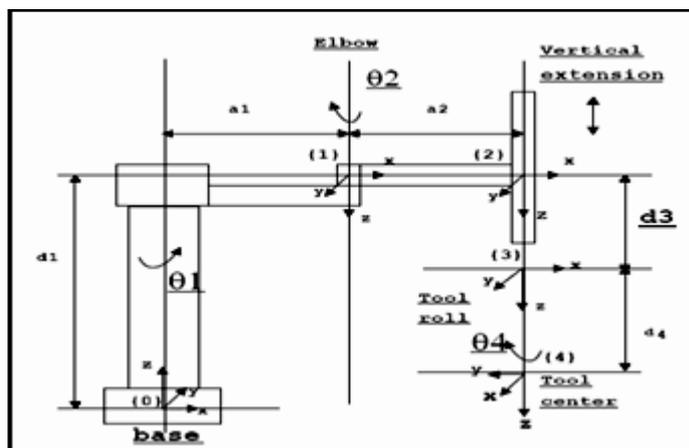


Figure (IV.2) Configuration Robot SCARA

Le robot SCARA est l'acronyme de selective-assembly-robot-arm est un bras manipulateur d'assemblage à complaisance sélective. Il a été développé au Japon grâce à une étroite collaboration université industrie. La figure (IV.1) représente un modèle de robot SCARA travaillant sur table. Son bras est articulé autour de deux axes verticaux, son poignet

possède un axe de rotation et un axe de translation verticale. Le bras manipulateur prélève des composants posés sur le plan de travail et les dépose sur le circuit imprimé.

En appliquant la modélisation de Lagrange-Euler étudiée au premier chapitre, on aboutit à un modèle dynamique explicite écrit sous forme matricielle facile à implémenter. Les actionneurs utilisés sont des moteurs à courant continu;

Articulation	Paramètres d'articulations			
i	$\theta_j$	$\alpha_j$	$r_j$	$d_j$
1	$\theta_1$	$\alpha_1$	$a_1$	$d_1$
2	$\theta_2$	$\alpha_2$	$a_2$	$d_2$

Tableau (IV.1) : Les paramètres des articulations du bras manipulateur SCARA

## IV.2. Modélisation du robot SCARA à deux degrés de liberté :

Cette partie consiste à calculer le modèle dynamique du bras manipulateur SCARA par la méthode L-E et ceci revient à calculer la matrice d'inertie de Coriolis afin de le simuler.

L'équation du modèle dynamique sous une forme matricielle d'un robot rigide en tenant en compte des actionneurs ainsi que les frottements visqueux et secs, est donnée par :

$$\Gamma = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + f(\dot{q}) + g(q)$$

Où J est la matrice diagonale regroupant les inerties des actionneurs vues du côté la charge. les deux segments du robot sont supposés et uniformes, dont le centre de gravité se situe au milieu d'un bras.

### IV.2.1 Application de la méthode de Lagrange-Euler :

En suivant les instructions de la convention de Denavit-Hartenberg, on représente les paramètres des articulations du bras de robot SCARA suivant des référentiels inertiels comme le montre la figure (IV.2).

Les différents paramètres du bras manipulateur SCARA sont donnés par le tableau (IV.1). en utilisant la configuration de Denavit-Hartenberg, on établit le tableau (IV.2) où chaque segment est assimilé à une tige.

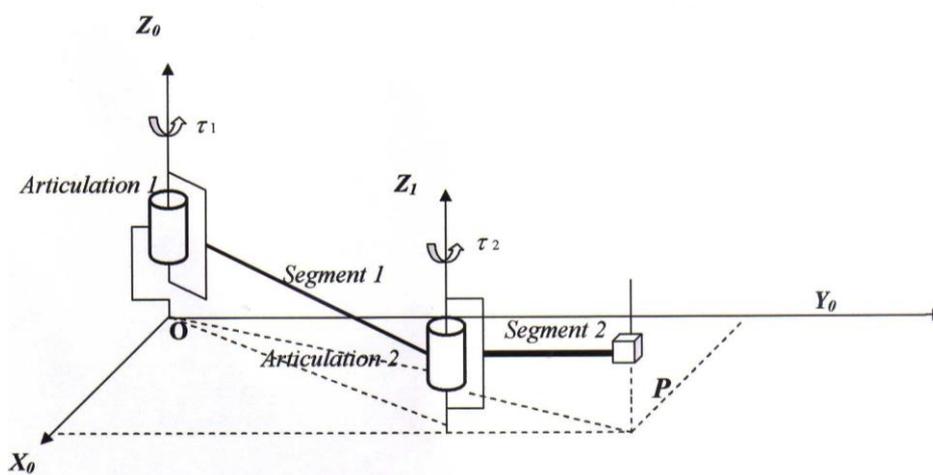


Figure. (IV.3) : Schéma du robot SCARA à 2ddl

Articulation	Paramètres d'articulation			
	$\theta_j$	$\alpha_j$	$r_j$	$d_j$
1	$\theta_1$	0	$L_1 = 0.5 \text{ m}$	0
2	$\theta_2$	0	$L_2 = 0.5 \text{ m}$	0

Tableau (IV.2) : la configuration de D-H du bras manipulateur SCARA

➤ **L'énergie Cinétique et Potentielle :**

Pour le 1<sup>ème</sup> bras l'énergie cinétique et potentielle est :

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$P_1 = m_1 g r_1 \sin \theta_1$$

Pour le 2<sup>ème</sup> bras les énergies cinétique et potentielles sont

$$x_2 = r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{x}_2 = -r_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{y}_2 = r_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

la vitesse au carré est

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

$$v_2^2 = r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2r_1 r_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2$$

L'énergie cinétique pour le 2<sup>ème</sup> bras

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 r_1 r_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2$$

L'énergie potentielle pour le 2<sup>ème</sup> bras

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g [r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$

Equation des mouvements du robot manipulateur : est donnée par

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

L'équation Lagrange :

$$L = K - P = K_1 + K_2 - P_1 - P_2$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2r_1r_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\cos\theta_2 - (m_1 + m_2)gr_1\sin\theta_1 - m_2gr_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

### *Dynamique Lagrange-Euler*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta}_1 + m_2r_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2r_1r_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2r_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2r_1r_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 - m_2r_1r_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)\sin\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2)gr_1\cos\theta_1 - m_2gr_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2r_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2r_1r_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2r_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2r_1r_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 - m_2r_1r_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2r_1r_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\sin\theta_2 - m_2gr_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Enfin, selon l'équation de Lagrange, la dynamique du bras est proposé par le deux équations différentielles non linéaires couplées :

$$\tau_1 = [(m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + 2m_2r_1r_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 + [m_2r_2^2 + m_2r_1r_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_2 - m_2r_1r_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)\sin\theta_2 + (m_1 + m_2)gr_1\cos\theta_1 + m_2gr_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\tau_2 = [m_2r_2^2 + m_2r_1r_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 + m_2r_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2r_1r_2\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2 + m_2gr_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

## IV.2.2 Dynamique du manipulateur 2ddl

la dynamique de bras sous forme vectorielle

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = M(q) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 r_1 r_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 \\ m_2 r_1 r_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g r_1 \cos \theta_1 + m_2 g r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \theta_2 & m_2 r_2^2 + m_2 r_1 r_2 \cos \theta_2 \\ m_2 r_2^2 + m_2 r_1 r_2 \cos \theta_2 & m_2 r_2^2 \end{bmatrix}$$

La forme standard de la dynamique du manipulateur de type SCARA à 2ddl

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau$$

### Vecteur de la pesanteur :

Le terme de la pesanteur est nul, du fait que le manipulateur se déplace sur un plan horizontal :

$$G(q) = \begin{bmatrix} g(q_1) \\ g(q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) = \tau$$

Ainsi nous avons défini tous les paramètres du modèle dynamique du bras manipulateur SCARA.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 r_1 r_2 \cos \theta_2 & m_2 r_2^2 + m_2 r_1 r_2 \cos \theta_2 \\ m_2 r_2^2 + m_2 r_1 r_2 \cos \theta_2 & m_2 r_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -m_2 r_1 r_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 \\ m_2 r_1 r_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

### IV.2.3 Les Paramètres du robot 2ddl

Pour un robot à deux articulations décrites par le modèle du système,

On considère les paramètres numériques du modèle :

La constante de gravité terrestre :  $g = 9.81(ms^{-2})$ ,

Les longueurs des deux segments :  $l_1 = 0,50 m$ ,  $l_2 = 0,50 m$

Les masses des deux segments :  $m_1 = 1,50 kg$ ,  $m_2 = 1,50 kg$

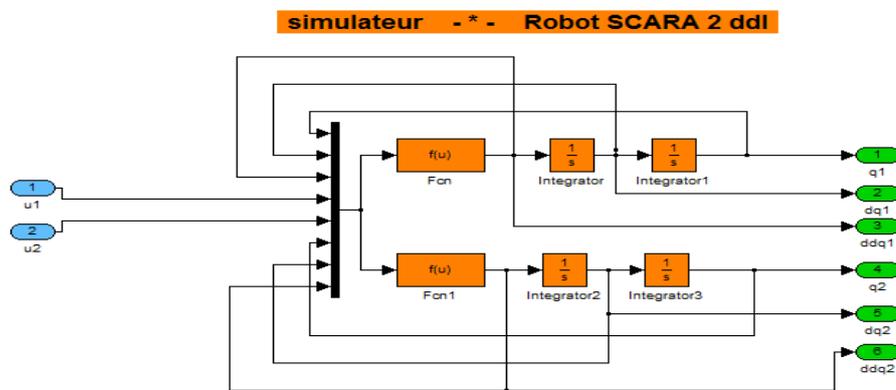


Figure IV.4 Schéma de bloc robot 2ddl avec simulink

### IV.3 Simulation de la commande en mode glissant appliquée à un robot 2ddl :

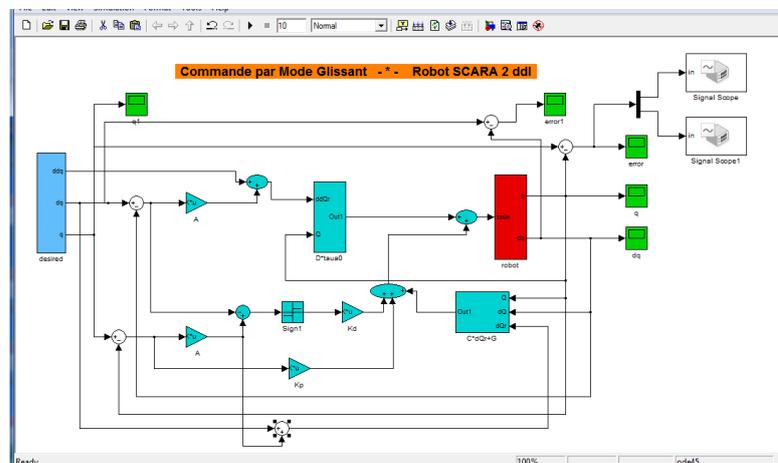


Figure IV.5 Schéma de la commande par mode glissant

### IV.3.1 Les Courbes de simulation de la commande en mode glissant

Les figures suivantes montrent les résultats de simulation :

#### IV.3.1.1 les trajectoires réelles $x_1$ , $x_3$ et désirées des positions $x_{1d}$ , $x_{3d}$

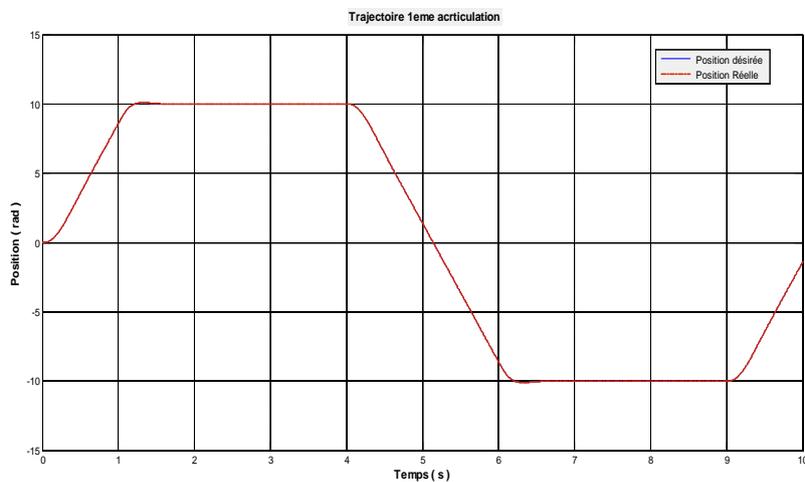


Figure IV.6 Trajectoire 1<sup>eme</sup> bras (réelle  $x_1$  et désirée  $x_{1d}$ )

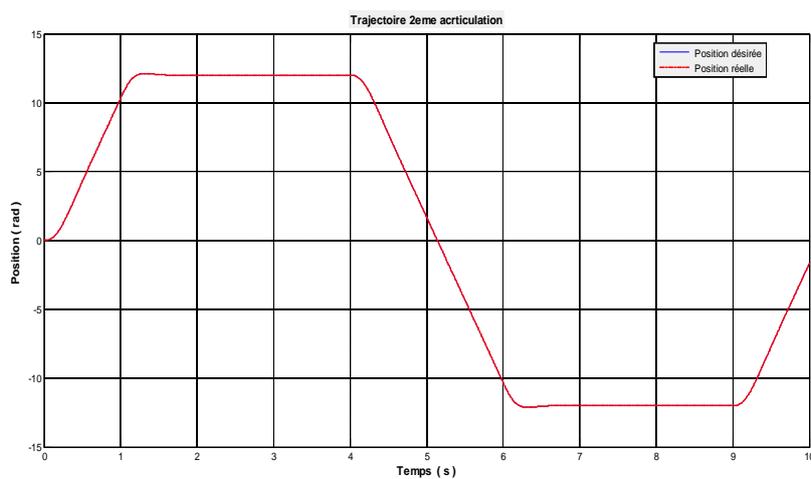
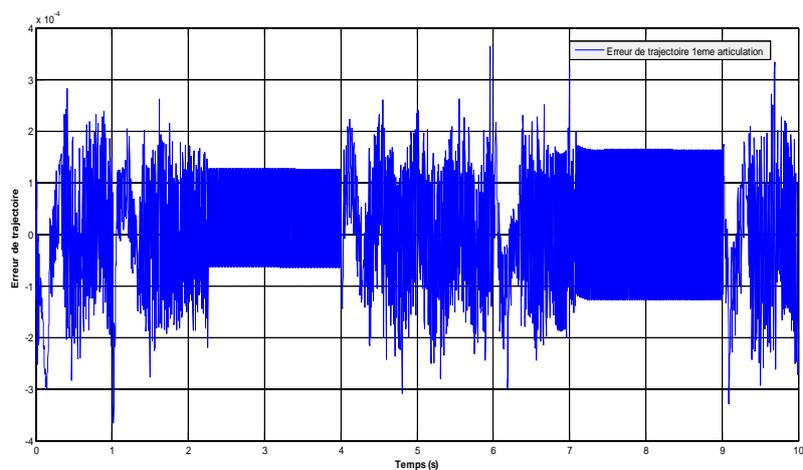
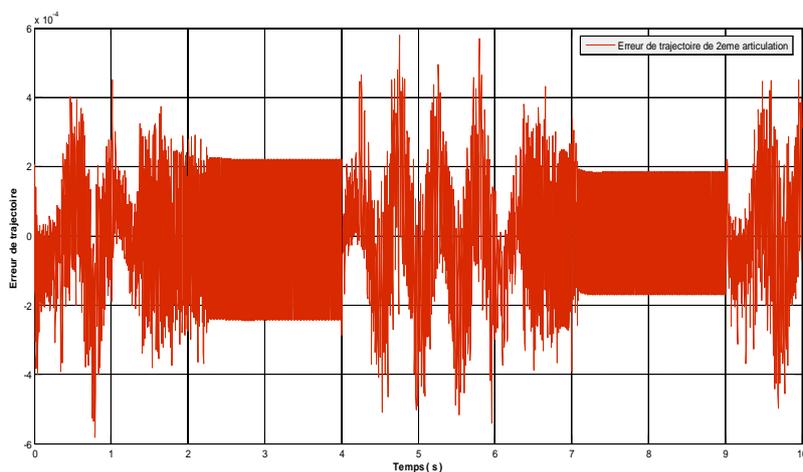


Figure IV.7 Trajectoire 2<sup>eme</sup> bras (réelle  $x_3$  et désirée  $x_{3d}$ )

IV.3.1.2 Courbes des erreurs des trajectoires  $e_1 = x_1 - x_{1d}$  et  $e_3 = x_3 - x_{3d}$ Figure IV.8 Erreur de trajectoire  $e_1 = x_1 - x_{1d}$ Figure IV. 9 Erreur de trajectoire  $e_3 = x_3 - x_{3d}$

IV.3.1.3 Les courbes des vitesses réelles  $\dot{x}_1, \dot{x}_3$ , et désirées  $\dot{x}_{1d}, \dot{x}_{3d}$

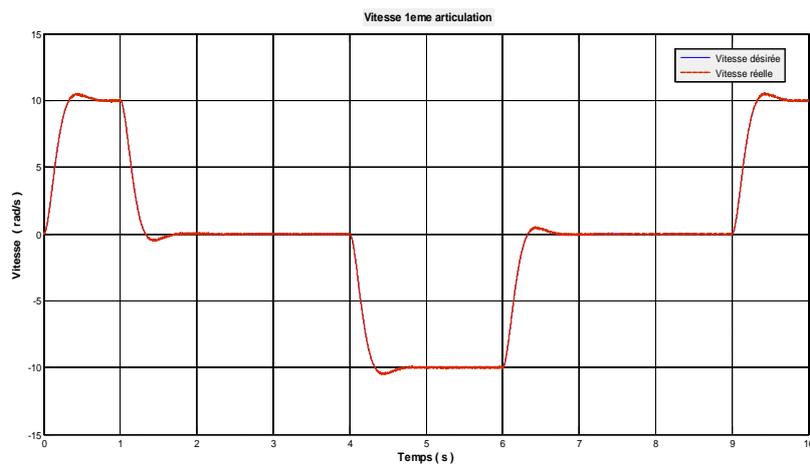


Figure IV.10 vitesse réelle  $\dot{x}_1$  et désirée  $\dot{x}_{1d}$

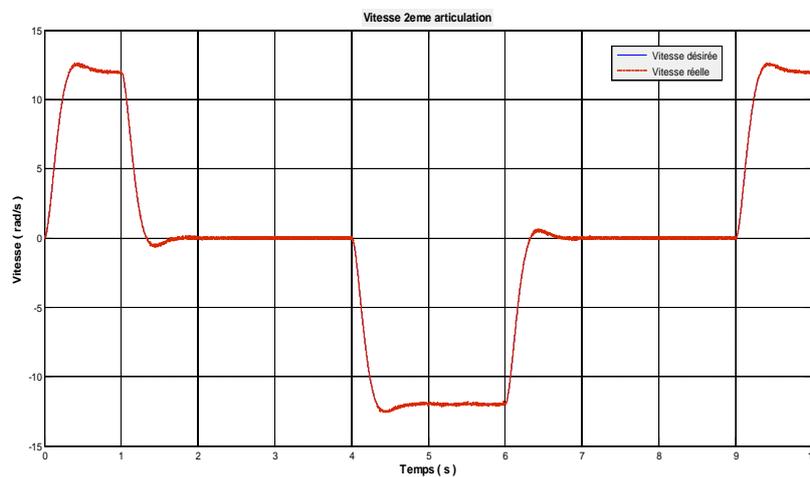
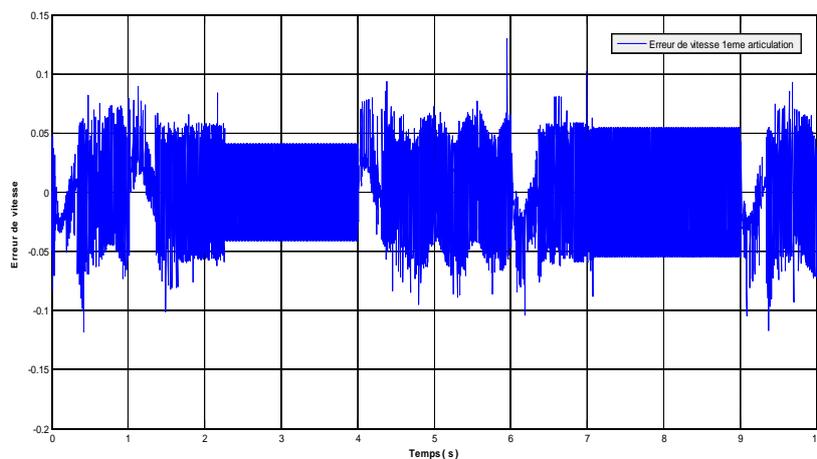
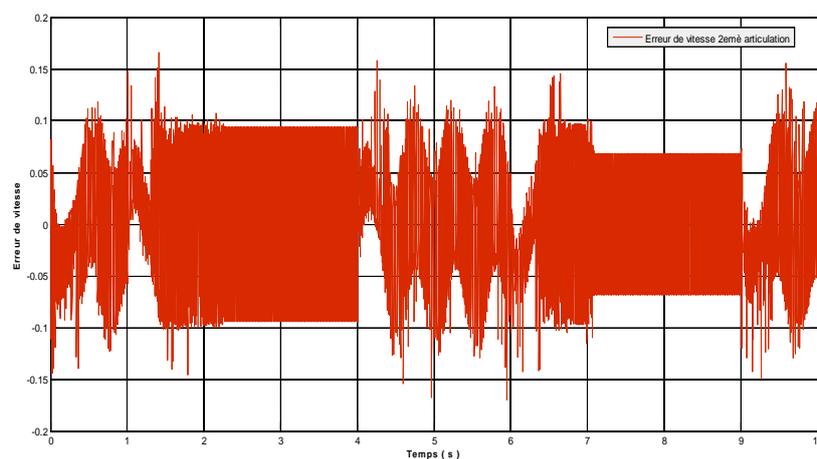


Figure IV.11 vitesse réelle  $\dot{x}_3$  et désirée  $\dot{x}_{3d}$

IV.3.1.4 Les courbes des erreurs des vitesses  $\dot{e}_1$  et  $\dot{e}_3$ Figure IV. 12 erreurs des vitesses  $\dot{e}_1$ Figure IV. 13 erreurs des vitesses  $\dot{e}_3$

## IV.4 Simulation de l'observateur en mode glissant appliquée à un robot 2ddl

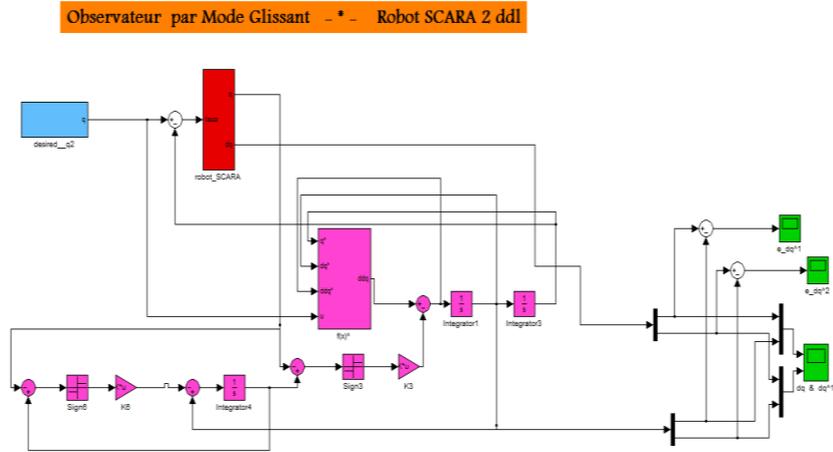


Figure IV.14 schéma de l'observateur par mode glissant

### IV.4.1 Les Courbes de simulation de l'Observateur en mode glissant

#### IV.4.1.1 Les courbes des vitesses réelles $\dot{x}_1, \dot{x}_3$ , et estimée $\hat{\dot{x}}_1, \hat{\dot{x}}_3$

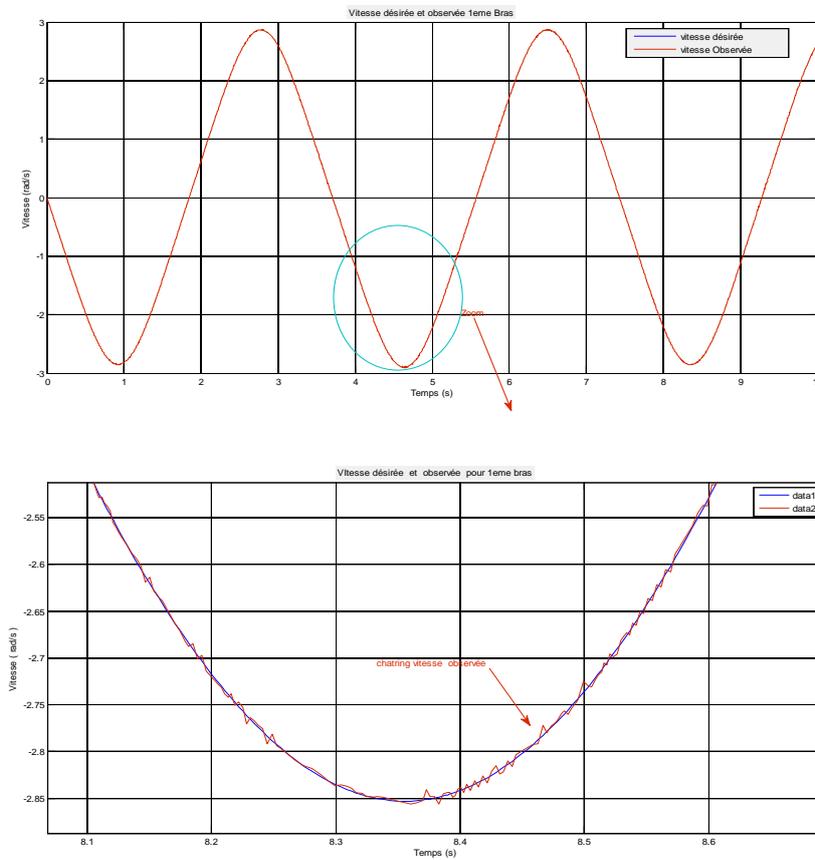


Figure IV.15 vitesses réelles  $\dot{x}_1$ , et estimée  $\hat{\dot{x}}_1$ ,

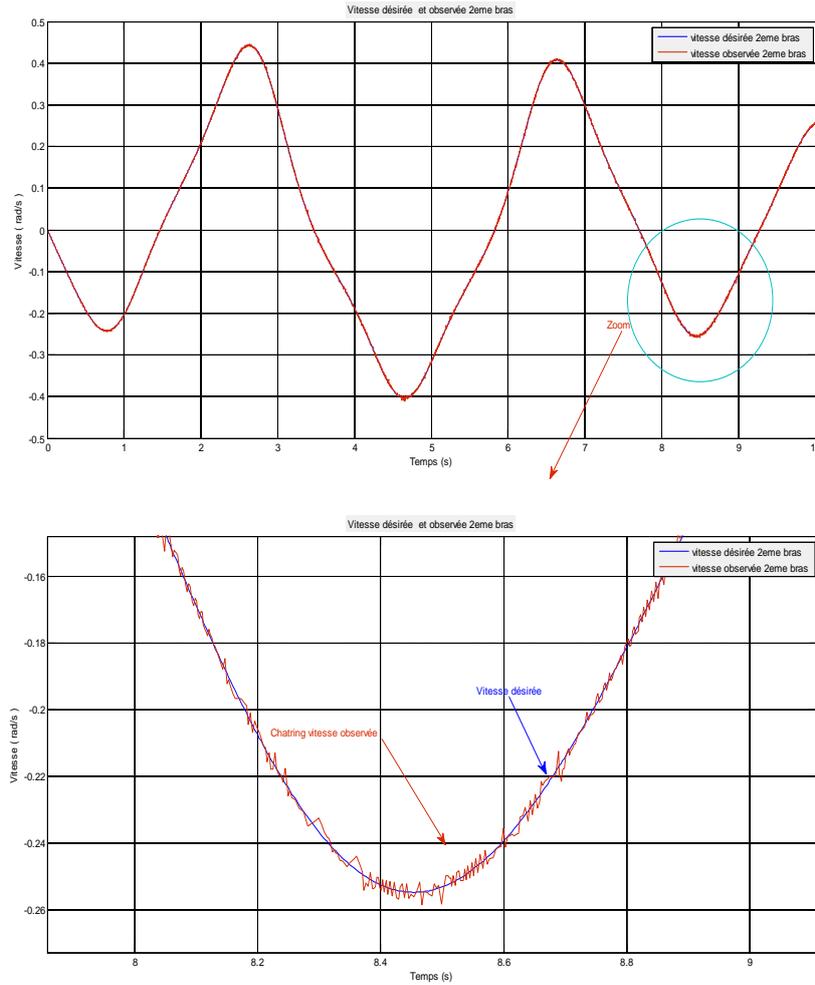


Figure IV.16 vitesses réelles  $\dot{x}_3$ , et estimée  $\hat{\dot{x}}_3$

**IV.4.1.2 Les courbes des erreurs estimations des vitesses  $\dot{e}_1$  et  $\dot{e}_3$**

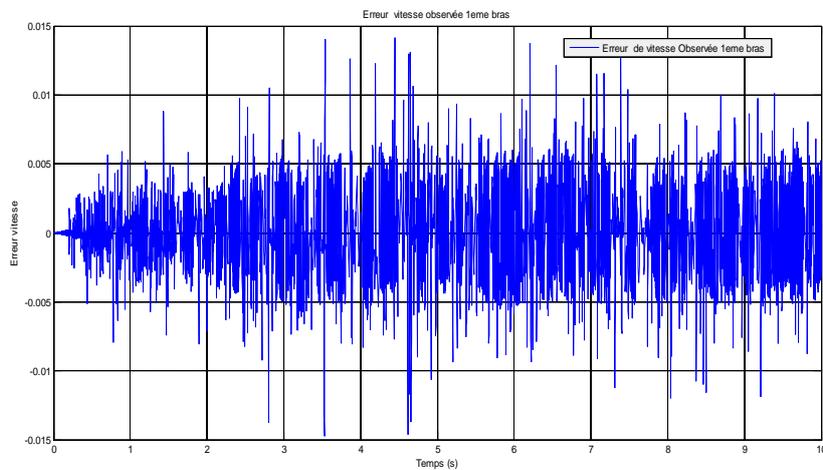


Figure IV.17 erreurs estimations des vitesses  $\dot{e}_1$

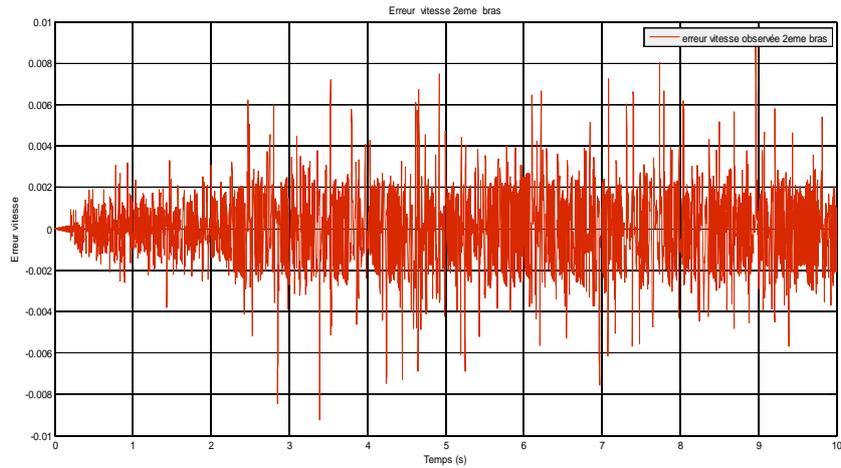


Figure IV.18 erreurs estimations des vitesses  $\dot{e}_1$

### IV.5 Simulation de la commande M.G avec Observateur M.G appliquée à un robot 2ddl

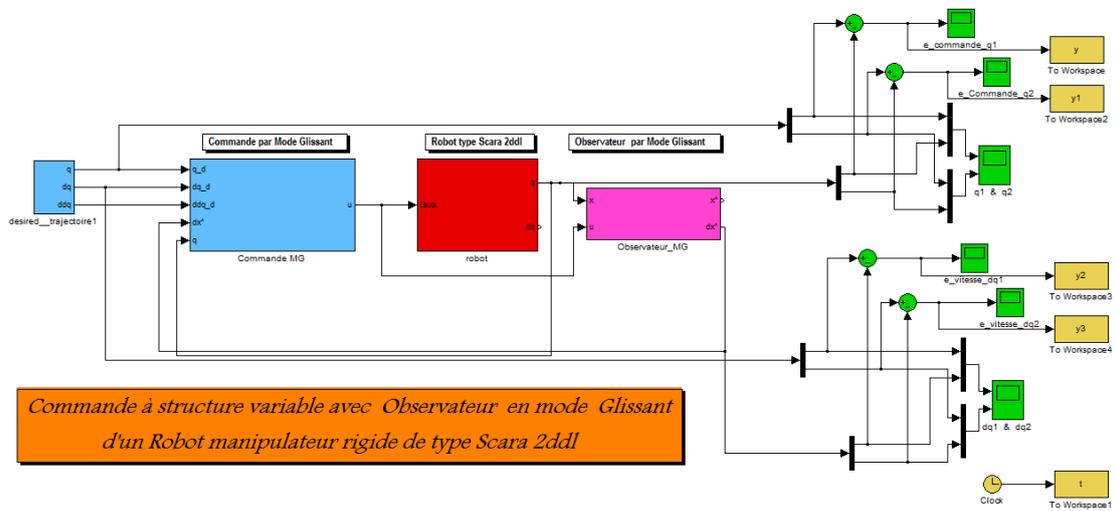


Figure IV.19 schéma de la Commande MG avec Observateur MG

IV.5.1 Les Courbes de la simulation :

IV.5.1.1 Les trajectoires réelles de Commande  $x_1, x_3$  et désirées  $x_{1d}, x_{3d}$

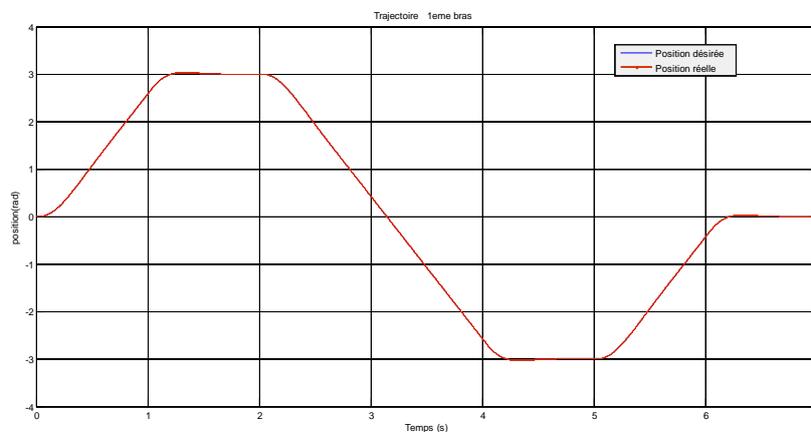


Figure IV.20 Trajectoire réelle  $x_1$  (jaune) et désirée  $x_{1d}$  (violet).

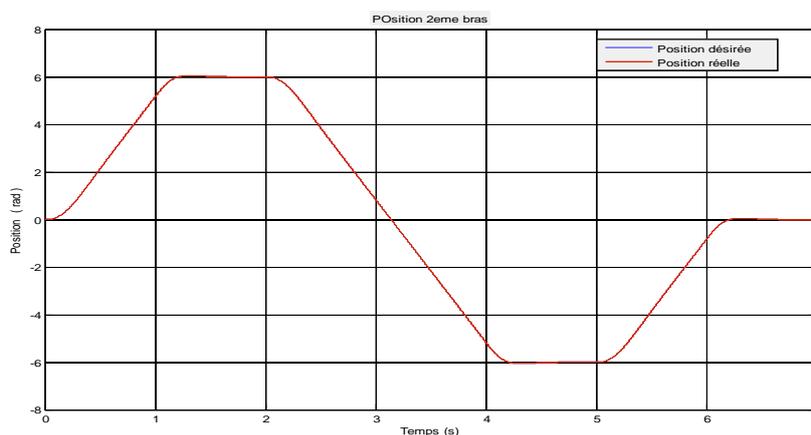
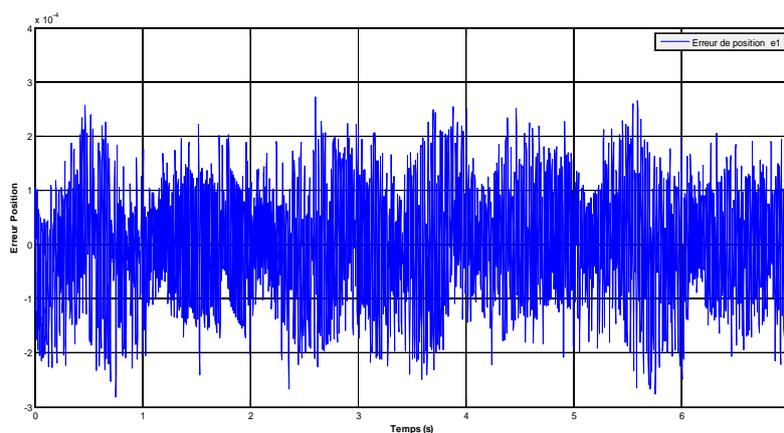
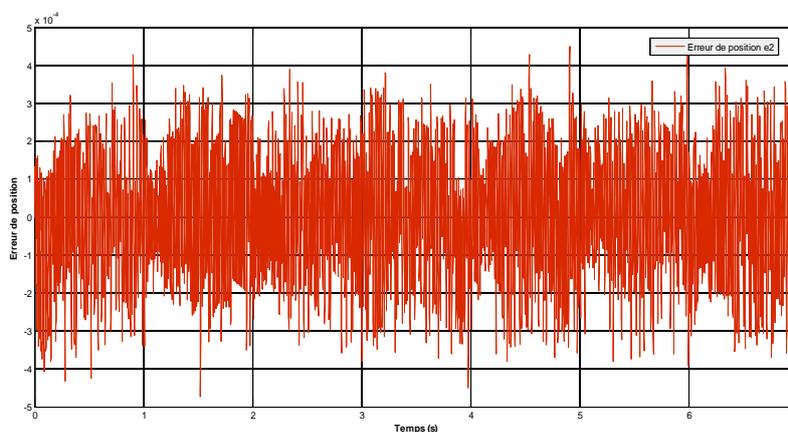


Figure IV.21 Trajectoire réelle  $x_3$  et désirée  $x_{3d}$

IV.5.1.2 Les courbes des erreurs de trajectoire (  $e_1 = x_1 - x_{1d}$  et  $e_3 = x_3 - x_{3d}$  )Figure IV.22 erreurs de trajectoire  $e_1$  1<sup>eme</sup> brasFigure IV.23 erreurs de trajectoire  $e_3$  2<sup>eme</sup> bras

IV.5.1.3 Les courbes des vitesses réelles de commande  $\dot{x}_1, \dot{x}_3$ , et désirées  $\dot{x}_{1d}, \dot{x}_{3d}$

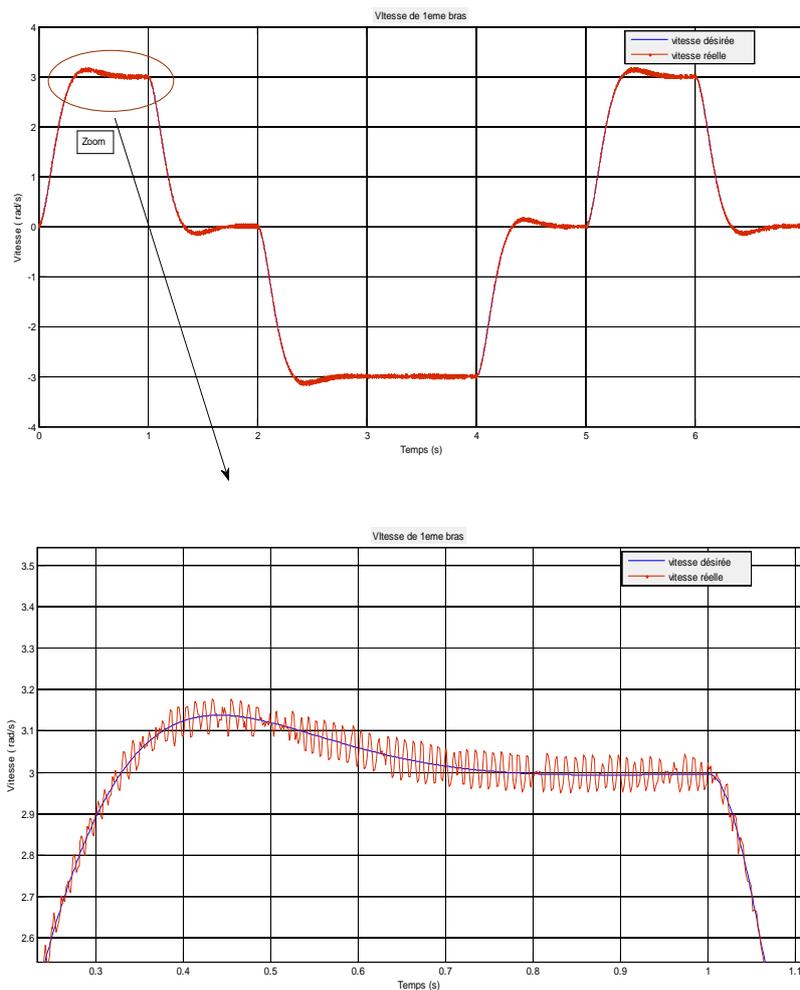


Figure IV.24 Vitesse réelle  $\dot{x}_1$  et désirée  $\dot{x}_{1d}$ .

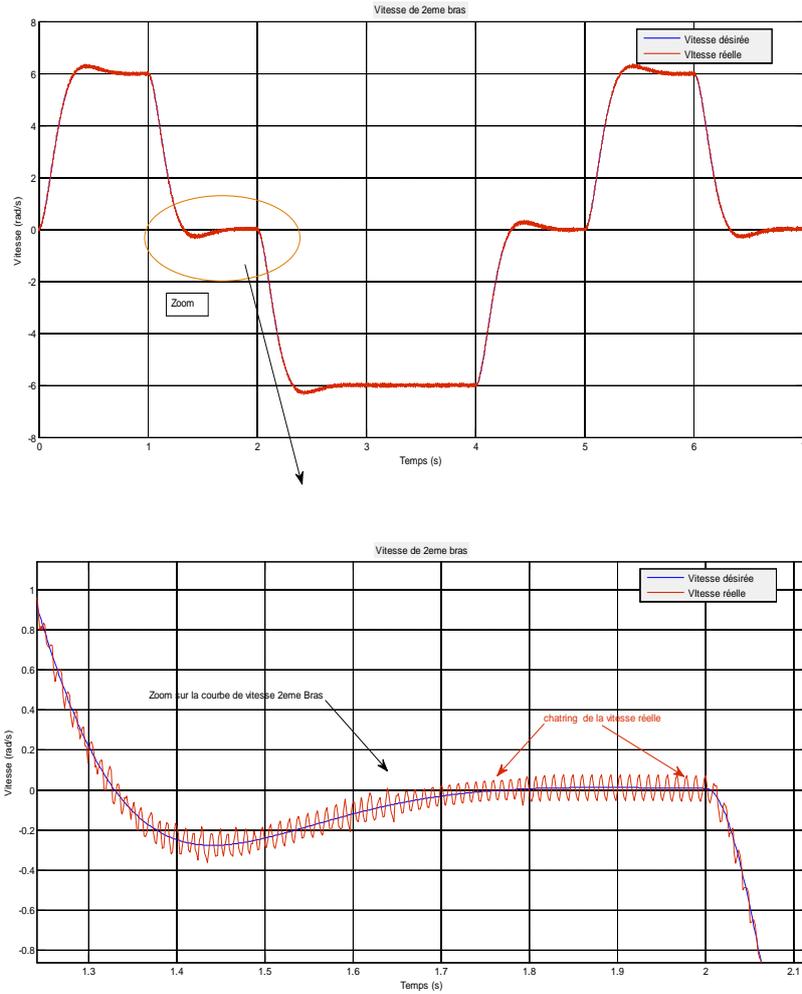


Figure IV.25 Vitesse réelle  $\dot{x}_3$  (jaune) et désirée  $\dot{x}_{3d}$  (violet).

**IV.5.1.4 Les courbes des erreurs de Vitesse  $\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}$  et  $\dot{e}_3 = \dot{x}_3 - \dot{x}_{3d}$**

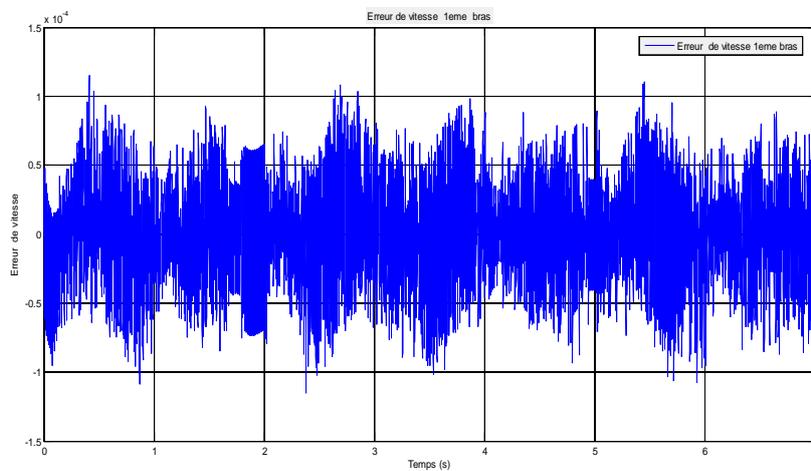


Figure IV.26 erreurs de Vitesse  $\dot{e}_1$  1<sup>eme</sup> bras

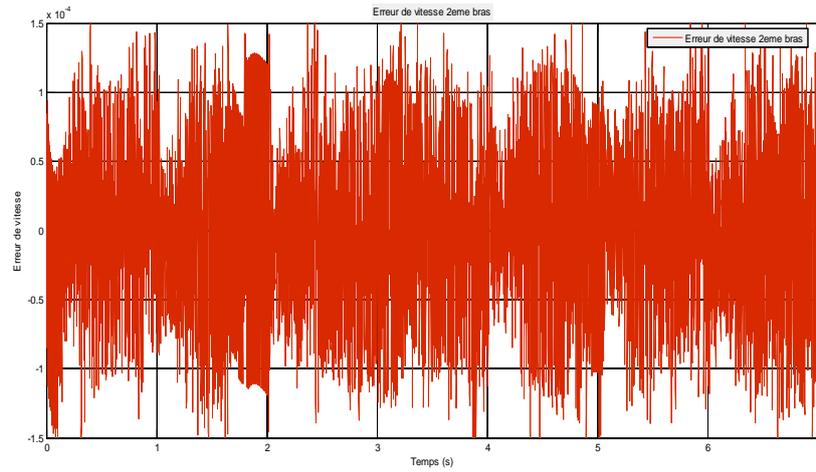


Figure IV.27 erreurs de Vitesse  $\dot{e}_3$  2<sup>eme</sup> bras

## Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté est une contribution à la commande en mode glissant pour des systèmes non linéaires appliquée à un robot manipulateur rigide sans capteur de vitesse, utilisant des techniques modernes de commande par observateurs.

Au **premier chapitre** on a essayé de donner une vision générale sur le monde de la robotique, en particulier les robots de type bras manipulateur rigide de structure mécanique en série, leurs caractéristiques ainsi que leurs classifications. Une deuxième partie la plus importante est la modélisation mathématique de la dynamique d'un bras manipulateur, ce modèle dynamique est très utile pour la conception de la structure mécanique, pour le choix des actionneurs, et la détermination de la stratégie de commande.

Sous certain condition (frottement et bruit nulle), nous sommes arrivés à exprimer le mouvement des bras manipulateur par un système d'équation différentielle fortement couplée.

Dans le **deuxième chapitre** la technique en mode glissant à été appliquée pour commander le mouvement en rotation et vitesse d'un bras manipulateur à deux articulations.

Les résultats de simulations ont montré une meilleure performance que ce soit en poursuite de trajectoires ou en robustesse, la commande à structures variables en mode glissant nécessite un temps de calcul important et la disponibilité des interrupteurs à fréquence de commutation élevée, le phénomène de "*Chattering*" constitue un inconvénient majeur de cette commande.

Dans le **troisième chapitre** nous avons proposé un observateur afin d'estimer avec la plus grande robustesse possible l'état du système, notre choix s'est porté sur un observateur triangulaire en mode glissant, ce dernier est utilisé pour estimer la vitesse de mouvement du bras manipulateur, Les résultats de simulations ont montrés une meilleure performance que ce soit en poursuite de trajectoire ou en robustesse, ainsi que la dynamique de l'erreur qui converge au voisinage de zéro montre la stabilité du l'observateur, ce qui favorise largement la possibilité de réaliser une expérimentation implémentant les différentes commandes proposées.

**Au terme de ce mémoire**, on a fait un couplage entre un observateur et une commande en mode glissant triangulaire dans le but de commander un bras manipulateur sans capteurs de vitesses qui est remplacé par un estimateur.

Les résultats théoriques obtenus sont illustrés par des résultats de simulation qui ont permis de tester la robustesse vis-à-vis des erreurs paramétriques, L'avantage de loi de commande et d'observateur utilisée dans ce chapitre est Qu'elles ne nécessitent pas la connaissance du modèle des systèmes étudiés. Cependant l'inconvénient est l'apparition d'un phénomène de réticence qui se manifeste sur le comportement des grandeurs asservies. Pour pallier ce problème et avoir une commande lisse nous proposons à l'avenir de remplacer en simulation, la fonction signe par la fonction de saturation.

**Les perspectives** proposées pour la suite de ce travail sont multiples, en particulier une réalisation expérimentale à laquelle il faut ajouter l'étude des problèmes suivants :

- Au premier lieu démontrer la stabilité globale commande avec observateur.
- Définir un modèle plus précis du bras manipulateur prenant en compte les trois bras (3 ddl).
- Prendre en compte les frottements de même pour le phénomène de réticence.

## Références bibliographiques

- [1] AKHENAK. A « Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle application au diagnostic » thèse Doctorat. Centre de recherche en automatique de NANCY. 16 Décembre 2004
- [2] ALAOUI Mohamed C.S. « commande et observateur par mode glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur » thèse de doctorat université de Fès. 2009
- [3] BENYEKHEF. D « Modélisation et commande d'un bras manipulateur à trois degrés de liberté » thèse magister. ENP d'ORAN
- [4] BOUKHOBZA. T « Observateur à mode glissant et forme d'observabilité et analyse et synthèse des commandes par ordres supérieurs » thèse PhD, Laboratoire des Signaux et Systèmes. Université de Paris-Sud Orsay, 1997.
- [5] CHABRAOUI. S. « Observateur à modes glissants dédiés aux systèmes possédant des singularités d'observation ». Article ENSEA. Pontoise. France.
- [6] CHARLES .F. « Etude de la commande par mode de glissement sur les systèmes mono et multivariables » thèse de maîtrise en G.Elec .Québec .2007
- [7] CHENAFI .M « Modélisation et commande adaptative des robots rigides et rapides » thèse de magister. USTO 1999
- [8] CHERRID .H « Commande et observateur par modes glissants d'ordre un et deux application au système robotisés » thèse Doctorat. Versailles Saint Quentin 2001
- [9] EMEL'YANOV. S.V. « Variable structure control systems ». Moscow Nauka, 1967.
- [10] EDOUARD .L, et PHILIPPE .C. « Identifiabilité des dynamiques d'un manipulateur flexible par vision ». Journées Identification et Modélisation Expérimentale. Poitiers. 2006.
- [11] EDWARDS .C and SPURGEON. S « Robust output tracking using a sliding mode controller observer scheme » Int. Jour. Of Cont , 1996
- [12] ETIENNE. D « Analyse et modélisation des robots manipulateurs : Système automatique ». Hermes Science. Paris 2002
- [13] FILLIPOV .A.F « Differential equations with discontinuous right-hand side ». Amer. Math. Soc. Trans. 1960.
- [14] FISETTE.P, BUYSE. H, SAMIN.J.C, “ Introduction à la robotique “ MECA 2732 : 2004
- [15] FOSSARD. A.J, NORMAND.C D, « Système non linéaire » tome 1 : modélisation - estimation. Masson, Paris, 1993.
- [16] FREDERIC. N. « Loi de commande par modes glissants du moteur pas à pas » thèse doctorat. UST de Lille. 7 décembre 2006.

- [17] HAKIKI. K, MAZARI. B, DJABER. S, « Observation par mode glissant sous forme triangulaire à injection de sortie d'un robot pneumatique » (L.A.AS) ENSET-Oran.
- [18] HUSSAIN. A. « Contribution a la commande adaptative robuste par modes glissants » thèse doctorat. Université de Reims.02 décembre 2009.
- [19] ISIDORI. A. « Nonlinear control system ». Springer Verlag, Berlin, 3<sup>rd</sup> edition. 1995.
- [20] ITKIS.U. « Control systems of variable structure ». J. Wiley: New York, 1976.
- [21] KERBOUA. A, « Commandes et observateurs par mode glissant: Application a une machine asynchrone alimentée en tension » Thèse de magister, ENP 1999
- [22] MABROUK. M « Transformation des systèmes d'Euler-Langrange observabilité et systèmes discrets » thèse Doctorat CNRS Université METZ. 24 Octobre 2006.
- [23] NAIT SLIMANI. B, « Synthèse d'observateur non linéaire : application au diagnostic des défauts » thèse magister. Université Tizi Ouzou.
- [24] OUARHLENT. S. « Diagnostic de pannes dans les systèmes robotisés » thèse magister. Université de Batna. 29 juin 2009.
- [25] PIERRE. R et Françoise L. « Commande non linéaires : Système automatique » Hermes Science. Paris 2002.
- [26] UTKIN. V.I. « Sliding mode and their application in variable structure systems » Mir, Moscow, 1978.
- [27] UTKIN. V.I. « Sliding modes in control optimization ». Springer-Verlag, 1992.
- [28] UTKIN. V.I. « Sliding mode control design principles ». IEEE Trans. on Industr. Electron. 1993.
- [29] SLOTINE J.J, and SASTRY .S.S « Tracking control of nonlinear system using sliding surface, with application to robotic manipulators » .Int. Jour. of Cont., 1983.
- [30] SLOTINE J.J. « Sliding controller design for nonlinear systems ». Int. Jour. of Cont., 1984.
- [31] SLOTINE .J.J, HEDRIK J.K, and MISAWA E.A « Nonlinear state estimation using sliding observers ». In Proc. of 25th IEEE Conf. on Dec. and Cont., Greece.1986.
- [32] SLOTINE J.J and LI. W . « On the adaptive control of robot manipulators » .Int. Jour.of Robot. Research, 1987.
- [33] SIRA-Ramirez. H. « Differential geometric methods in variable structure control » .Int.J of control., 1988.
- [34] SIRA-Ramirez. H « On the dynamical sliding-mode control of nonlinear Systems » .Int. Jour. of Cont.1993

- [35] SOMIN.J.C, BUYSE .H , FISETTE .P « Introduction à la robotique » MECA 2732 . 2004
  
- [36] WISAMA. K « Commande des robots manipulateur : Système automatique ». Hermes Science, Paris 2002
  
- [37] YANG. J.M and KIM. J.H « Sliding mode control for trajectory tracking of nonholomic wheeled mobile robots » . IEEE Trans. on Robot. and Auto. 1999.
  
- [38] XU. A. « Observateurs adaptatifs non – linéaires et diagnostic de pannes » thèse de doctorat. Université de Rennes1. 26 septembre 2002.

## FONCTION DE LYAPUNOV

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système dissipe continûment (c'est à dire décroît avec le temps) alors ce système qu'il soit (linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). la méthode cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

### Définitions :

➤ **Fonction définie positive :**

Une fonction scalaire  $V(x)$  continûment différentiable (par rapport à  $X$ ) est dite définie positive dans une région  $U$  autour de l'origine si :

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(X) > 0, \forall X \in U \mid X \neq 0$$

➤ **Fonction définie semi-positive si :**

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(X) \geq 0, \forall X \in U \mid X \neq 0.$$

➤ **Fonction quadratique définie positive :**

La fonction quadratique définie  $v(X) = X^T Q X$ , ou  $Q$  une matrice  $n \times n$  réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice sont strictement positives.

### Fonction de Lyapunov.

Soit  $f \in C^1(U)$ ,  $X^* \in U$  telque  $F(X^*) = 0$

Alors, la fonction  $V : R^n \rightarrow R \in C^1(U)$ ,  $U$  ouvert  $R^n$

Telle que :

$$v(X^*) = 0 \quad \text{et} \quad v(X) > 0, \forall X \in U \mid X \neq X^*$$

est appelée fonction de Lyapunov de  $F$  au point  $X$

### théorème :

soit  $U$  un ouvert de  $R^n$  contenant  $X^*$  supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov  $v(X^*)$  de  $F$  en  $X^*$  alors ,

- ✓ si  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U$   $X^*$  est stable
- ✓ si  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U$   $X^*$  est asymptotique stable.
- ✓ si  $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in U$   $X^*$  est instable

## ***Résumé***

Dans ce mémoire, nous avons approfondi notre étude sur la commande non linéaire en mode glissant appliquée à un robot manipulateur rigide de type SCARA. La difficulté de la mesure des variables d'état a été surmontée par l'utilisation d'un observateur d'état, un observateur à mode glissant propose des solutions du problème de l'observabilité de la vitesse de rotation de notre système non linéaire. Nous avons prouvé qu'avec un observateur à mode glissant en forme triangulaire «étape par étape» donne une meilleure estimation de la vitesse. Finalement l'utilisation de la commande avec l'observateur non linéaire a été exécutée théoriquement et en simulation sous Matlab.

## ***Mots clés :***

Modélisation; Modélisation Du Rebot; Système Linéaire; Système Non Linéaire; Commande En Mode Glissant; Observabilité; Observateur; Méthode Lyapunov; Observateur A Modes Glissant; Robot SCARA.