Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

PHYSIQUE I
MECANIQUE DU POINT MATERIEL

R. YAHIAOUI

Licence 1ère année

IMSI – 2016/2017

Avant-Propos

Le cours présenté dans ce polycopié traite la partie de la mécanique du point matériel, qui est destinée aux étudiants de première année du domaine de sciences et technologie du système LMD. La mécanique du point ne concerne pas les systèmes de très petites dimensions, à l'échelle atomique, où il a été montré qu'à cette échelle les notions de la mécanique classique doivent être remplacées par celles de la mécanique quantique. Dans ce cours, on envisage d'étudier que des mobiles dont la vitesse est largement inférieure à celle de la lumière, sinon il faudra faire appel à la mécanique relativiste pour traiter ce genre de problème.

Le premier et le second chapitres de ce cours rappellent les notions élémentaires des grandeurs physiques et de leur représentations dans un espace vectoriel, ainsi que les incertitudes commises sur lors des mesures de ces grandeurs.

Le troisième chapitre est consacré à la cinématique qui permet de décrire le mouvement des objets en termes de position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées. Alors que la partie dynamique qui se penche sur les causes qui produisent le mouvement des objets est abordé dans le quatrième chapitre. Quant au dernier chapitre, il introduit la notion de travail et d'énergie et leur utilité dans l'étude des mouvements des corps.

Table des matières

1 La physique et les mesures

1.1 Mesure des grandeurs

Comme toute science, la physique est basée sur les observations expérimentales et les mesures quantitatives. Cependant, en sciences expérimentales il n'existe pas de mesures exactes, Figure 1.1. La mesure d'une valeur X est toujours accompagnée d'une estimation de l'incertitude ou de l'erreur associée. Cette dernière est aussi importante que la mesure elle-même.

Le but de tout expérimentateur est :

- *de mesurer à la meilleure précision possible.*
- *d'évaluer l'erreur commise sur la mesure.*

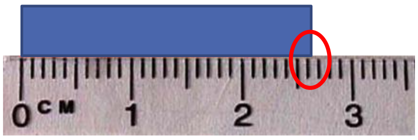


Figure 1.1 Incertitude de lecture de longueur

- *L'erreur de mesure est définie comme la différence entre la valeur annoncée et la valeur vraie qui reste inconnue (puisqu'on la recherche). Cette valeur annoncée sera généralement obtenue par une opération de moyenne de plusieurs mesures.*
- *L'incertitude de mesure est une quantification du doute que l'on a sur la mesure lue ou observée et on l'a décrit par une région autour de la valeur de la mesure dans laquelle on estime que se trouve la vraie valeur.*

1.1.1 Erreurs de mesure

Les erreurs commises lors des mesures ont généralement deux composantes :

a) ***L'erreur aléatoire*** *: Elle provient des variations imprévisibles telles que : la température, la pression et l'humidité. On peut la réduire en répétant plusieurs fois la mesure.*
   __Exemple__ : la mesure du temps avec un chronomètre, qui dépend principalement du temps de réaction de l'expérimentateur.

b) ***L'erreur systématique*** *: Elle provient d'un effet parfaitement identifié et mesurable d'une grandeur d'influence. Il n'est pas nécessaire de savoir avec exactitude la nature de la grandeur d'influence mais il suffit juste de savoir sa valeur. On peut corriger par conséquent le résultat de la mesure.*
   __Exemple__ : mesure d'une longueur avec une règle dont il manque le premier centimètre.

L’erreur est due soit à des erreurs aléatoires, soit à des erreurs systématiques, soit aux deux à la fois, Figure 1.2.

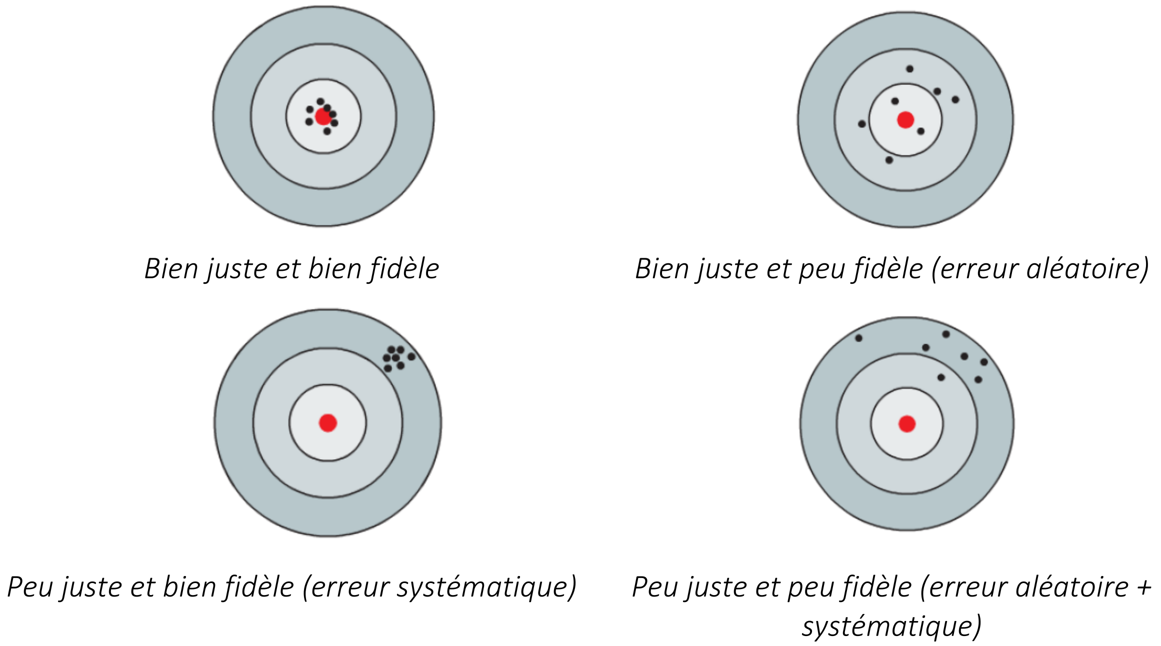


Figure 1.2 Représentation schématique de l'erreur aléatoire et de l'erreur systématique

1.1.2 Incertitude absolue et incertitude relative

L’écriture d’un résultat doit toujours être accompagnée de son incertitude. Pour une grandeur physique on distingue :

a) ***Incertitude absolue** : Elle représente l’erreur maximale que l’expérimentateur est susceptible de commettre lors de la mesure de la grandeur G. Elle est représentée sous la forme :*

$$G = G_0 \pm \Delta G \tag{1-1}$$

Cette écriture signifie que la vraie valeur de G est comprise dans l’intervalle $[G_0 - \Delta G, G_0 + \Delta G]$, avec G_0 est la valeur moyenne, Figure 1.3.

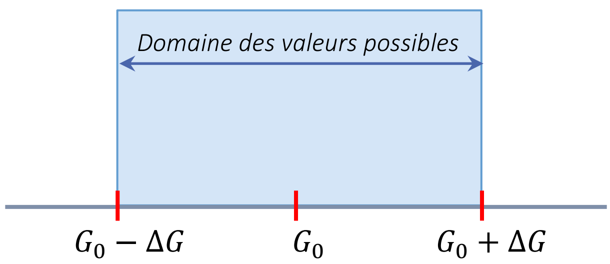


Figure 1.3 Domaine possible des valeurs de la grandeur G

L'incertitude absolue ΔG s'exprime avec la même unité de la grandeur G.

Exemple *: m = 5.5 ± 0.1 kg → 5.4 kg ≤ m ≤ 5.6 kg*

b) ***Incertitude relative*** *: cette incertitude permet d'estimer la précision du résultat obtenu : plus elle est petite plus la mesure est précise. Elle est définie par :*

$$incertitude\ relative = \frac{incertitude\ absolue}{valeur\ moyenne} = \frac{\Delta G}{G_0} \tag{1-2}$$

L'incertitude relative n'a pas d'unité, elle s'exprime en général en %.

Exemple *: si m = 5.5 ± 0.1 kg, alors l'incertitude relative est : Δm/m = 0.1/5.5 = 1.8 %*

1.1.3 Calcul d'incertitude

Si la grandeur G est exprimée par une fonction à plusieurs variables $f(x_1, x_2, x_3)$, l'incertitude absolue de G est obtenue par :

- *On écrit la différentielle de f* → $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$
- *On prend la valeur absolue des dérivées partielles :*

$$df = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| dx_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| dx_2 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| dx_3$$

- *On remplace d par Δ* → $\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| \Delta x_3$

Exemple *: calcul de l'erreur absolue du volume d'un cône $V = \pi r^2 \, {}^{h}/_{3}$.*

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2\pi r h}{3} \\ \dfrac{\partial V}{\partial h} = \dfrac{\pi r^2}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dV = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \left|\frac{2\pi r h}{3}\right| \Delta r + \left|\frac{\pi r^2}{3}\right| \Delta h$$

Remarque *: Lorsque la fonction se présente comme un produit ou un quotient on est conduit à des calculs un peu plus simples :*

- *Somme/différence :* $f = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \quad \rightarrow \quad \Delta f = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots$
- *Produit/quotient :* $f = x_1 .\, x_2 / x_3 \ldots \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3} + \ldots$
- *Produit de puissances :* $f = x_1^{\alpha} .\, x_2^{\beta} .\, x_3^{\gamma} \ldots \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = |\alpha| \frac{\Delta x_1}{x_1} + |\beta| \frac{\Delta x_2}{x_2} + |\gamma| \frac{\Delta x_3}{x_3} + \ldots$

Différentielle totale d'une fonction

Soit une fonction de plusieurs variables $f(x_1, x_2, x_3)$, on écrit la différentielle totale de cette fonction :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

Où, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$ représentent les dérivées partielles de f par rapport aux variables x_1, x_2, x_3

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ *: la dérivée partielle de f par rapport à x_1 quand x_2 et x_3 sont supposées constantes.*

Exemple *:* $f = 2x + 5y - z \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \;, \frac{\partial f}{\partial y} = 5 \;, \frac{\partial f}{\partial z} = -1$

d'où : $df = 2dx + 5dy - dz$

1.2 Grandeurs scalaires et vectorielles

Une grandeur physique est une quantité qui peut se mesurer et qui se rapporte à une propriété physique, chimique ou biologique. On distingue, Figure 1.4 :

- ***Grandeur scalaire*** *: elle est représentée par un nombre suivi d'une unité (la masse d'un corps : m = 2 kg, le volume d'un réservoir V = 3 m^3).*
- ***Grandeur vectorielle*** *: la grandeur est caractérisée par un vecteur (la force, la vitesse, etc.).*

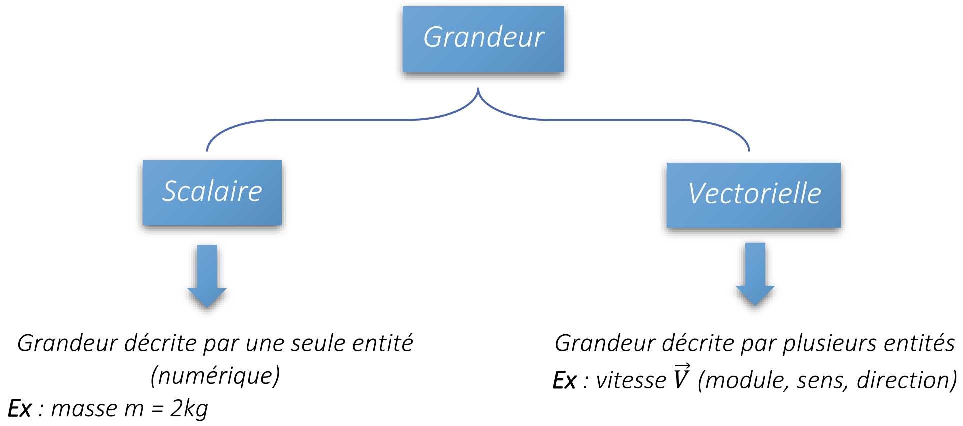


Figure 1.4 Classification des grandeurs physiques

1.2.1 Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées

Il existe 7 grandeurs de base du système international choisi par les physiciens.

Grandeur Physique	Unité S.I.	Symbole S.I.
Longueur	*Mètre*	*m*
Masse	*Kilogramme*	*kg*
Temps	*Seconde*	*s*
Intensité de courant	*Ampère*	*A*
Température	*Kelvin*	*K*
Quantité de matière	*Mole*	*mol*
Intensité lumineuse	*Candela*	*cd*

Tableau 1-1 Grandeurs de base du système international

La plupart des grandeurs physiques utilisées sont liées entre elles et dérivent de ces 7 grandeurs de base. On les appelle « grandeurs dérivées ».

Exemple *: vitesse = distance / temps = longueur / temps*

1.2.2 Notion de dimension

La dimension d'une grandeur représente sa nature physique. C'est une caractéristique beaucoup plus générale que son unité. Pour une grandeur G on a :

- *La dimension de la grandeur G se note $[G]$.*
- *La relation « $[G] = M$ » est appelée* ***équation aux dimensions*** *de la grandeur G.*

- *Pour écrire l'équation aux dimensions de la grandeur G, aucun choix de système d'unités n'est imposé.*
- *Si $[G] = 1$, la grandeur est dite sans dimension ou de dimension 1.*
- *Une équation est dite homogène si ses deux membres ont la même dimension.*

1.2.3 Dimensions du système international d'unités

Dans le domaine des sciences physiques, il existe 7 dimensions, basiques et indépendantes, à partir desquelles on définit toutes les autres. Ces dimensions sont :

Grandeur Physique	Unité S.I.	Dimension
Longueur	Mètre	L
Masse	Kilogramme	M
Temps	Seconde	T
Intensité de courant	Ampère	I
Température	Kelvin	θ
Quantité de matière	Mole	N
Intensité lumineuse	Candela	J

Tableau 1-2 Dimensions des grandeurs physiques de bas

L'équation aux dimensions de toute grandeur G se met sous la forme :

$$[G] = M^a L^b T^c I^d J^e \theta^f N^g \quad (1\text{-}3)$$

*L'opération qui consiste à déterminer les nombres réels $a, b, c, \ldots$ s'appelle **l'analyse dimensionnelle** de la grandeur G.*

Dans le domaine de la mécanique, la dimension de la grandeur G se limite à :

$$[G] = M^a L^b T^c \quad (1\text{-}4)$$

Exemple : *Vitesse :* $v = {}^{x}/_{t} \quad \rightarrow \quad [v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1} \quad \rightarrow \quad a = 0,\ b = 1,\ c = -1$

Accélération : $\gamma = {}^{v}/_{t} \rightarrow [\gamma] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2} \quad \rightarrow \quad a = 0,\ b = 1,\ c = -2$

Force : $F = m\gamma \quad \rightarrow \quad [F] = [m][\gamma] = MLT^{-2} \quad \rightarrow \quad a = 1,\ b = 1,\ c = -2$

1.2.4 Règles sur les équations aux dimensions

Pour manipuler les équations aux dimensions, on utilise les règles suivantes :

- *Les nombres et les angles sont des grandeurs sans dimension.*
  Exemple : $[5] = [\pi] = 1$, $[\alpha] = 1$ *(malgré que l'unité de l'angle α : radian)*

- *On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension.*
  Exemple : $G = A + B \quad \Longrightarrow \quad [G] = [A] = [B]$

- *La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs.*
  Exemple : $[A.B] = [A].[B]$

- *Fonction puissance :* $[A^n] = [A]^n$ *, où* n *est un nombre sans dimension.*
  Exemple : $[g^2] = [g]^2 = (LT^{-2})^2 = L^2T^{-4}$

- *Les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et leur argument sont sans dimension.*
  Exemple : $[e^x] = 1$, $[log\, x] = 1$, $[cos\alpha] = 1$, $[2\pi] = 1$, $[3] = 1$

$$x = x_0\, cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} [x] = [x_0] \\ [\omega t + \varphi] = [\omega t] = [\varphi] = 1 \end{cases}$$

- *Fonction dérivée :*

$$\frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \left[\frac{dy}{dx}\right] = \left[\frac{y}{x}\right] = \frac{[y]}{[x]}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} \quad \rightarrow \quad \left[\frac{d^ny}{dx^n}\right] = \left[\frac{y}{x^n}\right] = \frac{[y]}{[x]^n}$$

- *Intégrale de fonction :* $I = \int y\, dx \quad \rightarrow \quad [I] = \int [y\, dx] = [y\, dx] = [y][dx] = [y]\,[x]$

- $G = A^a + B^b \quad \rightarrow \quad [G] = [A]^a = [B]^b$ *(A et B sont de même nature donc de même dimension)*

1.2.5 L'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est l'étude d'un phénomène physique à travers les dimensions des variables qui le contrôlent. Elle est utile pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui contrôlent l'état d'un système et elle permet de vérifier la validité d'une équation ou du résultat d'un calcul.

Lors de l'établissement d'une expression, l'analyse dimensionnelle permet de vérifier son homogénéité, sachant qu'une expression non homogène ne peut être que fausse.

Exemple *: vérification de l'homogénéité de l'expression de la période d'un pendule simple.*

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad ou \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \quad ?$$

L'expression est dimensionnellement juste si la dimension résultante est celle du temps :

$$[T_0] = [2\pi]\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = 1.\frac{[\sqrt{l}]}{[\sqrt{g}]} = L^{1/2}(LT^{-2})^{-1/2} = T$$

$$[T_0] = [2\pi]\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\right] = 1.\frac{[\sqrt{g}]}{[\sqrt{l}]} = (LT^{-2})^{1/2}L^{-1/2} = T^{-1} \qquad \textit{(Expression fausse)}$$

La première bombe nucléaire explosa au Nouveau Mexique en 1945. Le magazine Life a publié en 1950, Figure 1.5, une série de photos de cette explosion dans lesquelles une échelle de taille et une indication de temps étaient mentionnées dessus. Bien que les données de cette explosion étaient classifiées ultrasecrète, le physicien britannique G.I. Taylor a pu estimer, en se servant des photos publiées, l'énergie libérée par l'explosion.

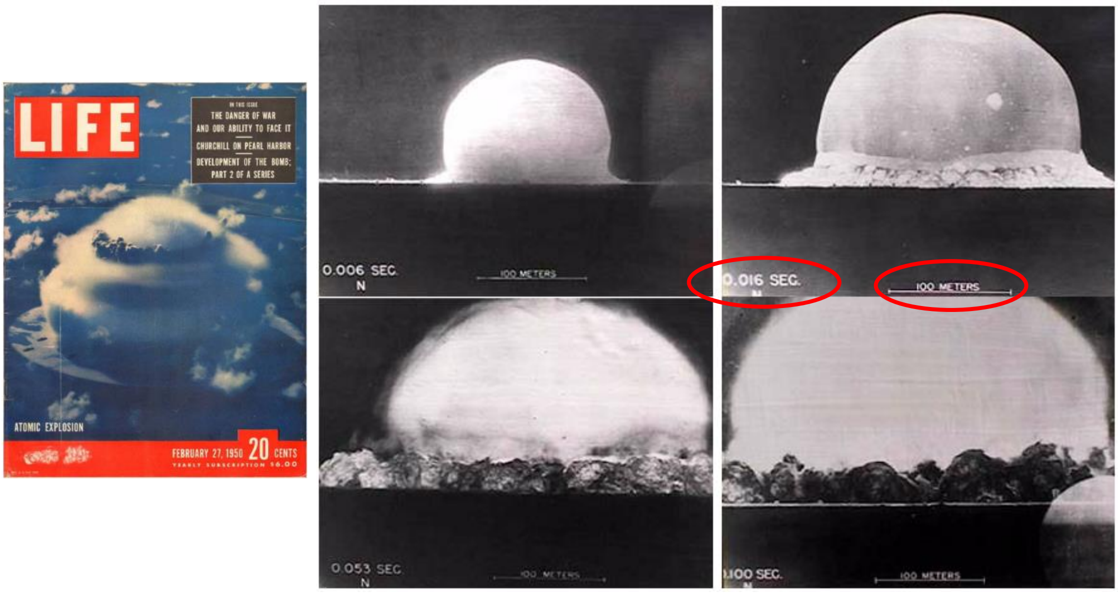


Figure 1.5 Photographies de l'explosion de la bombe atomique publiées dans le magazine Life

G.I. Taylor suggère que le rayon R *du nuage de l'explosion dépend de l'énergie* E *libérée, de la masse volumique de l'air* ρ *et du temps* t*, d'où :*

$$[R] = [E]^a [\rho]^b [t]^c = L$$

Avec : $[R] = L \ , \quad [E] = ML^2T^{-2} \ , \quad [\rho] = ML^{-3} \ , \quad [t] = T$

$$[R] = M^{a+b} L^{2a-3b} T^{-2a+c}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - 3b = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = {}^1/_5 \\ b = -{}^1/_5 \\ c = {}^2/_5 \end{cases}$$

$D'où \quad R \propto \left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{1/5} \quad \Rightarrow \quad R^5 = K\frac{Et^2}{\rho}$ *(K : constante de proportionnalité)La courbe représentant* R^5 *en fonction de* $\left(\frac{t^2}{\rho}\right)$ *est une droite dont la pente représente l'énergie. Taylor put ainsi estimer l'énergie de la bombe à environ 25 kilotonnes de TNT.*

2 Calcul vectoriel

2.1 Les vecteurs

L'étude de la mécanique est fortement facilitée par l'utilisation du calcul vectoriel. On appelle grandeur vectorielle des grandeurs dirigées, qui sont caractérisées par une intensité, une direction et un sens, alors que les grandeurs scalaires sont des grandeurs définies seulement par leur intensité.

2.1.1 Vecteurs et représentation graphique

On appelle vecteur, Figure 2.1, un segment orienté qui est caractérisé par :

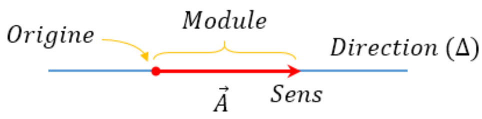


Figure 2.1 Représentation d'un vecteur

- *son point origine ou point d'application,*
- *sa direction qui correspond à celle de son support (Δ),*
- *son sens,*
- *son module : c'est la longueur du segment de droite. Le module du vecteur est un nombre positif ou nul. Le module du vecteur $\vec{A}$ se note $|\vec{A}|$ ou A.*

❖ ***Remarque*** *: On appelle vecteur lié un vecteur dont l'origine est fixe, alors qu'un vecteur libre et celui dont le sens, la longueur et la direction sont déterminés, mais pas l'origine.*

On peut également définir le vecteur à partir de ses composantes dans une base donnée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, Figure 2.2, tel que :

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} \qquad (2\text{-}1)$$

Dans le cas d'un plan avec une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a:

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} \qquad (2\text{-}2)$$

Avec : $A_x = A\cos\theta$ *et* $A_y = A\sin\theta$

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2} \quad et \quad \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

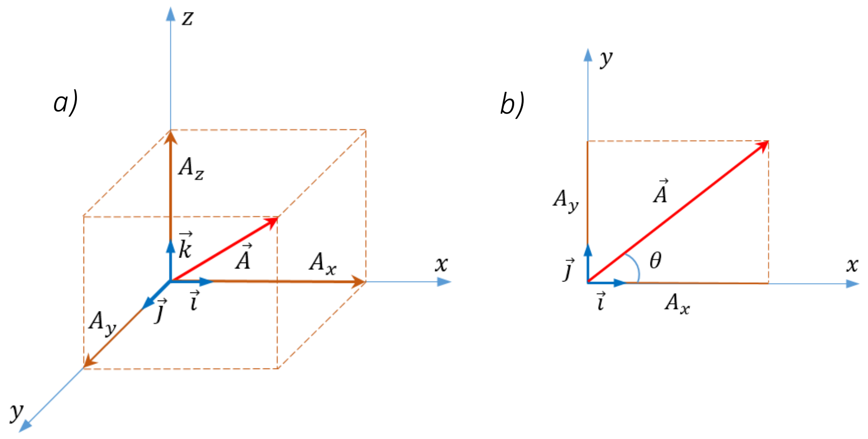


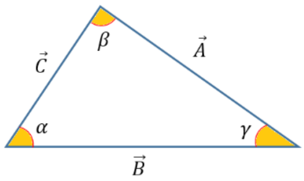
Figure 2.2 Représentation géométrique d'un vecteur : a) dans l'espace, b) dans le plan

2.1.2 Propriétés et opérations sur les vecteurs

- *Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont même longueur, même sens et même direction.*
- *Le vecteur $\vec{e}$ dont le module est égal à 1 est appelé vecteur unité, et on a :* $\vec{e} = \frac{\vec{A}}{A}$
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{A} + \vec{B} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}\right) + \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}\right) = (A_x + B_x)\,\vec{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\vec{\jmath}$
- $\vec{V} = \alpha\vec{U} \rightarrow V = |\alpha|\,U$ *et* $\left(\vec{V},\vec{U}\right)$ *sont des vecteurs colinéaires et de même sens si* $\alpha > 0$ *et de sens opposé si* $\alpha < 0$.
- $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad \rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}$

Pour un triangle quelconque, on a :

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$ *(Loi des sinus)*



- *La dérivée d'une fonction vectorielle vérifie :*

$$\frac{d(\vec{A} + \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d(\alpha\vec{A})}{dt} = \alpha\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\vec{A}$$

- *Si le vecteur $\vec{A}$ est indépendant du temps alors Les vecteurs $\vec{A}$ et $\dfrac{d(\alpha\vec{A})}{dt}$ sont colinéaires.*

2.2 Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ est un nombre réel positif ou négatif. Il représente le produit de la projection de $\vec{B}$ sur $\vec{A}$ par le module de $\vec{A}$, Figure 2.3.

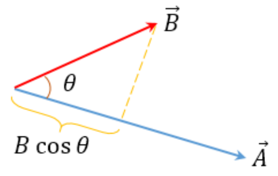


Figure 2.3 Produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos\theta \qquad (2\text{-}3)$$

Si $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est une base orthonormée, on a :

$$\begin{cases}\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\\ \vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\end{cases} \rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (2\text{-}4)$$

A partir de ces deux définitions du produit scalaire on peut écrire :

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ .\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \qquad (2\text{-}5)$$

Application *: Calculer le produit scalaire des deux vecteurs suivants et l'angle entre eux.*

$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 5\vec{k}$ et $\vec{B} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$\vec{A}.\vec{B} = (2\times 3) + (0\times 1) + (5\times 0) = 6$

L'angle entre les deux vecteurs :

$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{3^2+1^2}} = 0.35 \quad \rightarrow \quad \theta \sim 70°$$

2.2.1 Propriétés du produit scalaire

- *Carré scalaire :* $\vec{A}.\vec{A} = A^2$

  Exemple *:* $\vec{\imath}^2 = \vec{\jmath}^2 = \vec{k}^2 = 1$
- *Symétrie :* $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- *Distributivité :* $\vec{A}(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

- *Cas de nullité :* $\vec{A}.\vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{A} \perp \vec{B} \qquad (\vec{A}, \vec{B} \neq \vec{0})$

  Exemple : $\vec{\imath}\,.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\,.\vec{k} = \vec{\imath}\,.\vec{k} = 0$

2.3 Produit vectoriel de deux vecteurs

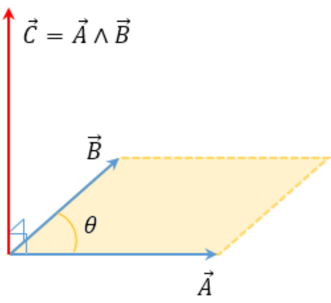


Figure 2.4 Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$, *Figure 2.4, formant un angle* α *entre eux est un vecteur noté* $\vec{A} \wedge \vec{B}$ *défini par :*

$$\begin{cases} \text{une direction : } \vec{A} \wedge \vec{B} \perp (\vec{A}, \vec{B}) \\ \text{un sens : obtenu suivant la règle de la main droite, Figure 2.5} \\ \text{un module : } |\vec{A} \wedge \vec{B}| = A.B.\sin\alpha \end{cases}$$

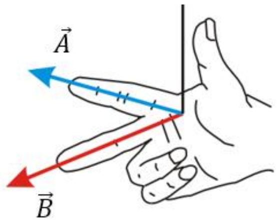


Figure 2.5 Règle de la main droite

Sachant que : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, *On peut écrire aussi :*

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \wedge (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) = (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{k} \qquad (2\text{-}6)$$

2.3.1 Propriétés du produit scalaire

- $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$
- $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
- $(\lambda\,\vec{A}) \wedge \vec{B} = \lambda(\vec{A} \wedge \vec{B})$
- $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$

2.4 Double produit vectoriel et le produit mixte

- *Le double produit vectoriel de trois vecteurs* $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ *est un vecteur défini par :*

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}.(\vec{A}.\vec{B}) \qquad (2\text{-}7)$$

Remarque : $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} \neq \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

- *On appelle produit mixte des trois vecteurs* $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ *le produit :* $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$ *donné par :*

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y) C_x + (A_x B_z - A_z B_x) C_y + (A_x B_y - A_y B_x) C_z \qquad (2\text{-}8)$$

Remarque : *Ce produit peut être écrit sous la forme :*

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

- *Dérivée d'un vecteur*

Si les vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ *ne sont pas constants et varient au cours du temps on a :*

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{A} \wedge \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Résumé

	Produit Scalaire	Produit Vectoriel
Notation	$\vec{A}\,.\,\vec{B}$	$\vec{A} \wedge \vec{B}$
Résultat du produit	Scalaire	Vecteur
Valeur	$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A\,B\,cos\theta$	$\lvert\vec{A}\,.\,\vec{B}\rvert = A\,B\,sin\theta$
Commutativité	$\vec{A}\,.\,\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$	$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
Distributivité	$\vec{A}.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$	$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
Vecteur avec lui-même	$\vec{A}.\vec{A} = A^2$	$\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$
Produit nul	$\vec{A}.\vec{B} = 0 \quad \begin{cases} \vec{A}\ ou\ \vec{B} = \vec{0} \\ \vec{A} \perp \vec{B} \end{cases}$	$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \begin{cases} \vec{A}\ ou\ \vec{B} = \vec{0} \\ \vec{A} \parallel \vec{B} \end{cases}$
Valeur maximale du produit	$max\left(\vec{A}.\vec{B}\right) \rightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$ $\vec{A}.\vec{B} = A\,B$	$max\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$ $\lvert\vec{A} \wedge \vec{B}\rvert = A\,B$
Résultat du produit en coordonnées cartésiennes	$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$

3 Cinématique

3.1 Cinématique

La cinématique permet de décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace au cours du temps (à savoir : sa position, sa vitesse et son accélération) sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement.

3.2 Notions et définitions

Point matériel *: Si le corps est de faible dimension par rapport à ses variations de position, on peut assimiler le mouvement du corps au mouvement d'un seul de ses points, par exemple son centre. Cela revient à négliger tout effet de rotation du corps sur lui-même ou son extension spatiale.*

Repère *: C'est un outil mathématique (système d'axes) permettant de repérer les points de l'espace à l'aide de leurs coordonnées.*

Référentiel *: L'ensemble constitué d'un repère de temps et d'un repère d'espace est appelé un référentiel, on le notera* (R)*.*

Déplacement *: C'est une grandeur vectorielle, Figure 3.1, qui caractérise un changement de position. Si une particule se déplace d'un point* M *à un point* M'*, le déplacement est le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$*. Le déplacement est indépendant du chemin parcouru pour aller de* M *à* M'*.*

Trajectoire *: on entend par trajectoire d'un point mobile, Figure 3.1, la ligne qui joint, d'une manière continue, les différentes positions successives prise par le mobile au cours de son mouvement.*

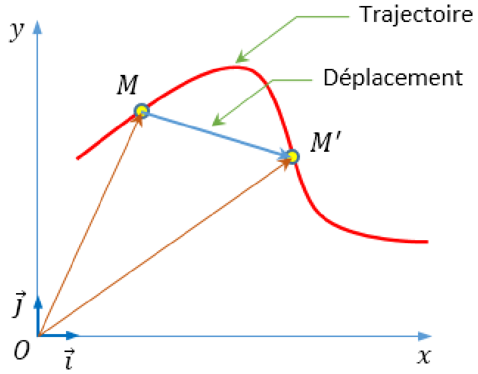


Figure 3.1 Représentation du vecteur déplacement et de la trajectoire

3.3 Position d'un mobile et systèmes usuels de coordonnées

Pour pouvoir étudier le mouvement d'un point matériel dans l'espace, il faut être capable de le repérer dans cet espace. Il est donc nécessaire de définir des repères de coordonnées.

3.3.1 Vecteur position et coordonnées cartésiennes :

Cette représentation est la plus simple du point de vue mathématique, Figure 3.2, mais pas forcément du point de vue physique. Si on se donne un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, un point M de l'espace est repéré par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (3\text{-}1)$$

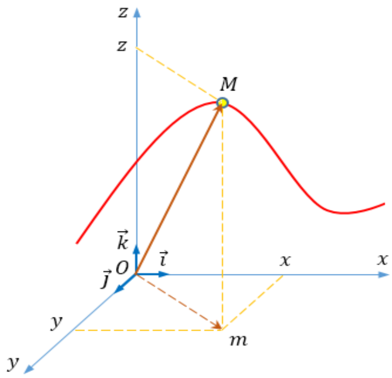


Figure 3.2 Vecteur position en coordonnées cartésienne

3.3.2 Vecteur position et Coordonnées polaires :

Les coordonnées polaires sont utilisées dans les problèmes à 2 dimensions, Figure 3.3. Dans un plan $\mathcal{P}$, on définit un point origine O et un demi-axe OX appelé axe polaire. Les coordonnées d'un point M sont :

- *Sa distance à l'origine* $r = |\overrightarrow{OM}|$
- *L'angle orienté θ appelé angle polaire*

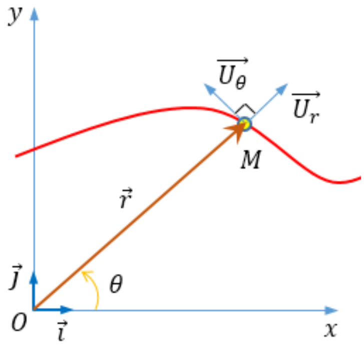


Figure 3.3 Vecteur position en coordonnées polaires

Dans ce système le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_r} \qquad (3\text{-}2)$$

La base polaire $(\overrightarrow{U_r},\overrightarrow{U_\theta})$ est une base locale : elle varie avec la position du point

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U_r} &= \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\\ \overrightarrow{U_\theta} &= -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\end{aligned} \qquad (3\text{-}3)$$

On a :

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}$$

❖ *Remarque :*

$$\frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \overrightarrow{U_\theta} \qquad \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} = -\overrightarrow{U_r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} = \overrightarrow{U_\theta} \qquad \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{U_r} \qquad \text{(3-4)}$$

3.3.3 Vecteur position et coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques peut être déduit à partir de celui des coordonnées polaires. Il est plus adapté pour les problèmes ayant une symétrie axiale. On rajoute au plan décrit par $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta})$ *un axe perpendiculaire orienté selon le vecteur* $\vec{k}$*, Figure 3.4. Le vecteur position s'écrit dans ce cas :*

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_r} + z\vec{k} \qquad \text{(3-5)}$$

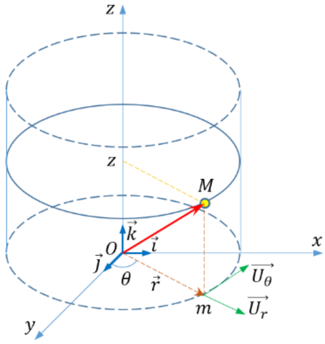


Figure 3.4 Représentation du vecteur position en coordonnées cylindriques

3.3.4 Vecteur position et coordonnées sphériques

L'emploi des coordonnées sphérique s'impose lorsqu'on est dans une situation de symétrie de rotation autour d'un point fixe, Figure 3.5. Les coordonnées sphériques du point M *sont :*

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| & \textit{Le rayon vecteur} \\ \theta = \left(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}\right) & \textit{La colatitude} \\ \varphi = \left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}\right) & \textit{La longitude ou azimut} \end{cases}$$

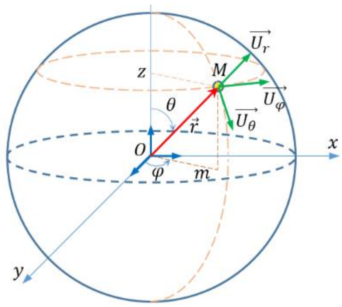


Figure 3.5 Représentation du vecteur position en coordonnées sphériques

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_r}$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

3.3.5 Coordonnées curvilignes : Repère de Frenet

Si la trajectoire d'un mobile M est connue, on peut l'orienter et choisir un point origine O, Figure 3.6. La position du mobile M est repérée par son abscisse curviligne s (valeur algébrique de l'arc $\widehat{OM}$).

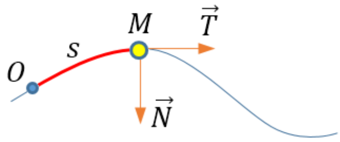


Figure 3.6 Représentation de l'abscisse curviligne

Le repère de Frenet est lié au point M. Il comporte deux vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$:

- $\vec{T}$ *: est tangent à la trajectoire au point M et orienté dans le sens de l'orientation de la trajectoire.*
- $\vec{N}$ *: est perpendiculaire à $\vec{T}$ et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.*

3.4 Vitesse d'un point

La rapidité avec laquelle un mobile change de position est indiquée par sa vitesse. Elle doit toujours être calculée par rapport à un référentiel R. On distingue vitesse moyenne et vitesse instantanée.

3.4.1 Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est définie comme le rapport entre la distance parcourue par le temps écoulé, et on a :

$$V_m = \frac{\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse moyenne, Figure 3.7, est défini par :

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

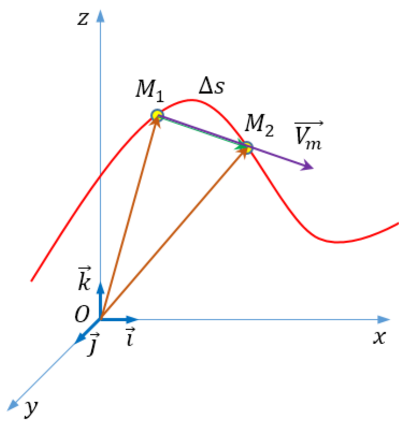


Figure 3.7 Représentation du vecteur vitesse moyenne

❖ ***Remarque :***

Le déplacement $\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\overrightarrow{OM}$ est inférieur à la distance parcourue $\widehat{M_1M_2} = \Delta s$ par la particule qui est la longueur du chemin parcourue entre deux instants t_1 et t_2.

3.4.2 Vitesse instantanée

La vitesse moyenne ne nous donne qu'une idée grossière du mouvement. Pour connaitre la vitesse du mobile à un instant donné, on définit alors la vitesse instantanée qui est obtenue lorsque l'intervalle de temps $\Delta t \to 0$, *Figure 3.8, d'où :*

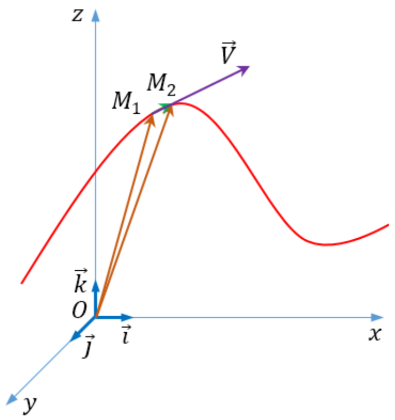


Figure 3.8 Représentation du vecteur vitesse instantanée

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{V_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

❖ ***Remarque :*** *Le vecteur vitesse* $\vec{V}$ *est toujours tangent à la trajectoire.*

3.4.2.1 Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

Lorsque le point matériel M *se déplace d'une quantité infinitésimale dans l'espace, Figure 3.9, les coordonnées du point* M *varient de* dx, dy *et* dz *:*

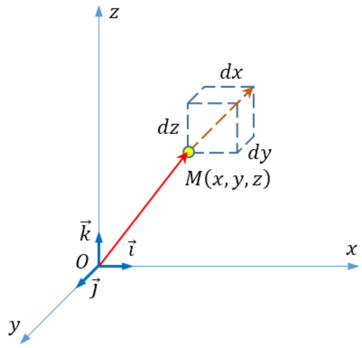


Figure 3.9 Variation du vecteur position en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM}(x+dx, y+dy, z+dz) - \overrightarrow{OM}(x, y, z) \\ &= dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k} \end{aligned}$$

D'où la vitesse s'écrit :

d'où :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} \qquad (3\text{-}6)$$

☞

$$\boxed{\begin{cases} V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \\ V_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

3.4.2.2 Expression de la vitesse en coordonnées polaires

Lorsque le point matériel M se déplace d'une quantité infinitésimale dans le plan, Figure 3.10, les coordonnées du point M varient de dr et $rd\theta$:

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta) - \overrightarrow{OM}(r,\theta) = dr\,\overrightarrow{U_r} + rd\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$$

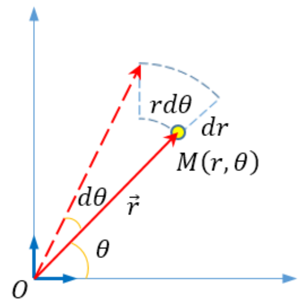


Figure 3.10 Variation du vecteur position en coordonnées polaires

d'où :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{U_\theta} \qquad \text{(3-7)}$$

$$\boxed{\begin{cases} V_r = \dot{r} = \dfrac{dr}{dt} \\ V_\theta = r\dot{\theta} = r\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}}$$

3.4.2.3 Expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

Lorsque les coordonnées d'un point M varient de quantités infinitésimales $dr, d\theta$ et dz, Figure 3.11, le point M se déplace d'une quantité :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta,z+dz) - \overrightarrow{OM}(r,\theta,z)$$
$$= dr\,\overrightarrow{U_r} + rd\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + dz\,\vec{k}$$

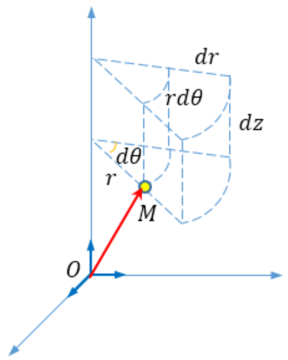


Figure 3.11 Variation du vecteur position en coordonnées cylindriques

d'où :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{U_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad \text{(3-8)}$$

$$\boxed{\begin{cases} V_r = \dot{r} = \dfrac{dr}{dt} \\ V_\theta = r\dot{\theta} = r\dfrac{d\theta}{dt} \\ V_z = \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}}$$

3.4.2.4 Expression de la vitesse en coordonnées sphériques

Lorsque les coordonnées d'un point M varient de quantités infinitésimales : $dr, d\theta$ et $d\varphi$, Figure 3.12, le point M se déplace d'une quantité :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi) - \overrightarrow{OM}(r, \theta, \varphi)$$
$$= dr\,\overrightarrow{U_r} + rd\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\overrightarrow{U_\varphi}$$

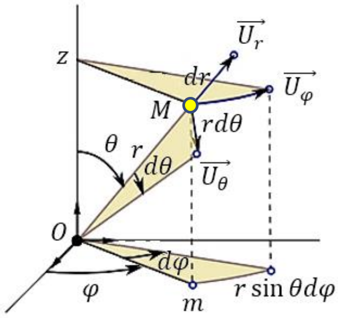


Figure 3.12 Variation du vecteur position en coordonnées sphériques

d'où : $$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{U_\varphi} \qquad (3\text{-}9)$$

$$\boxed{\begin{cases} V_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt} \\ V_\theta = r\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt} \\ V_\varphi = r\sin\theta\,\dot{\varphi} = r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad V = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + (r\sin\theta\,\dot{\varphi})^2}}$$

3.4.2.5 Expression de la vitesse en coordonnées curvilignes

Puisque la vitesse instantanée $\vec{V}$ est toujours tangente à la trajectoire, on peut écrire alors dans la base de Frenet $\left(\vec{T}, \vec{N}\right)$ que :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = V.\vec{T} \qquad (3\text{-}10)$$

3.5 Accélération d'un point

La rapidité avec laquelle la vitesse du mobile varie au cours de son mouvement s'exprime par l'accélération. On distingue accélération moyenne $\overrightarrow{a_m}$ au cours d'intervalle de temps Δt et accélération instantanée $\vec{a}$ à un instant donné.

3.5.1 Accélération moyenne

L'accélération moyenne est définie comme le rapport entre la variation de la vitesse durant l'intervalle de temps Δt, Figure 3.13 :

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \qquad (3\text{-}11)$$

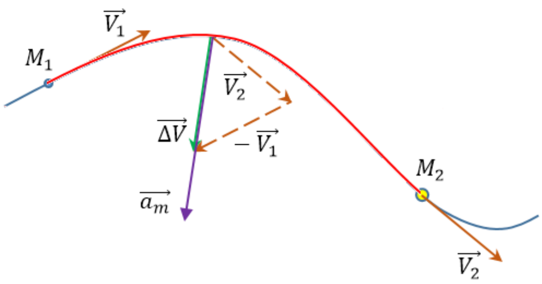


Figure 3.13 Représentation de l'accélération moyenne

3.5.2 Accélération instantanée

L'accélération instantanée permet de connaitre l'accélération du mobile à un instant bien donné. Elle est obtenue en réduisant l'intervalle de temps Δt $(\Delta t \to 0)$.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (3\text{-}12)$$

3.5.2.1 Expression de l'accélération en coordonnées cartésiennes

L'accélération est définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (3\text{-}13)$$

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \ddot{z} = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

3.5.2.2 Expression de l'accélération en coordonnées polaires

L'accélération est définie en coordonnées polaires par :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}\right)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + \dot{\theta}\frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}$$

La dérivée des vecteurs $\overrightarrow{U_r}$ *et* $\overrightarrow{U_\theta}$ *par rapport au temps est obtenue en utilisant la relation* **(3-4)** *:*

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} \\ \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r} \end{cases} \qquad (3\text{-}14)$$

d'où :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{U_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{U_\theta} \qquad (3\text{-}15)$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases} \quad \text{et} \quad a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)^2}$$

3.5.2.3 Expression de l'accélération en coordonnées cylindriques

L'accélération est définie en coordonnées cylindriques par :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\vec{k}\right)}{dt}$$
$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + \dot{\theta}\frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

En utilisant la relation **(3-14)** *on obtient :*

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{U_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{U_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k} \tag{3-16}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \qquad et \qquad a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2}$$

3.5.2.4 Expression de l'accélération en coordonnées sphériques

Le calcul de l'accélération en coordonnées sphériques est très compliqué et rarement effectué. Son expression n'est pas démontrée dans ce cours.

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\overrightarrow{U_\varphi}\right)}{dt}$$

Le développement de cette dérivée nous donne :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\overrightarrow{U_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{U_\theta}$$
$$+ \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\overrightarrow{U_\varphi} \tag{3-17}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ a_z = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$$

3.5.2.5 Expression de l'accélération en coordonnées curvilignes

Dans le repère de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$ *l'accélération est donnée par :*

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV\vec{T}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{dt}$$

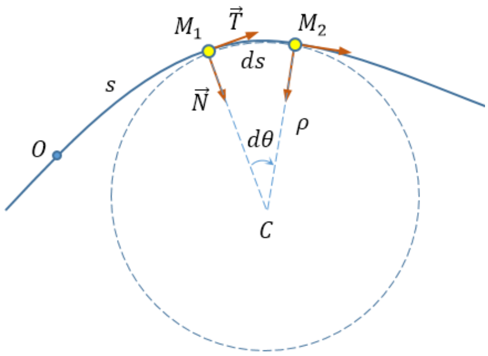


Figure 3.14 Représentation du rayon de courbure

En sachant que, Figure 3.14:

- $V = \frac{ds}{dt}$
- $ds = \rho d\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho}$
- $\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \vec{N}$

Avec ρ *le rayon de courbure et* C *le centre de courbure*

L'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$
$$= \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}V = \frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{\rho}\vec{N}$$

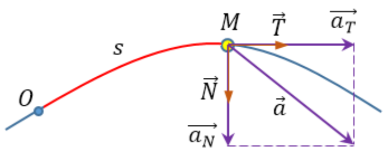


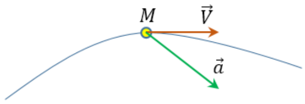
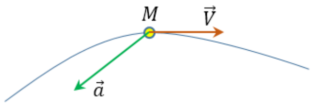
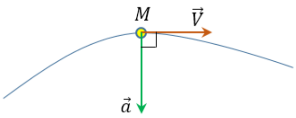
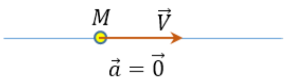
Figure 3.15 Représentation des composantes de l'accélération

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_T : \text{ accélération tangentielle} \\ a_N : \text{ accélération normale} \end{cases}$$

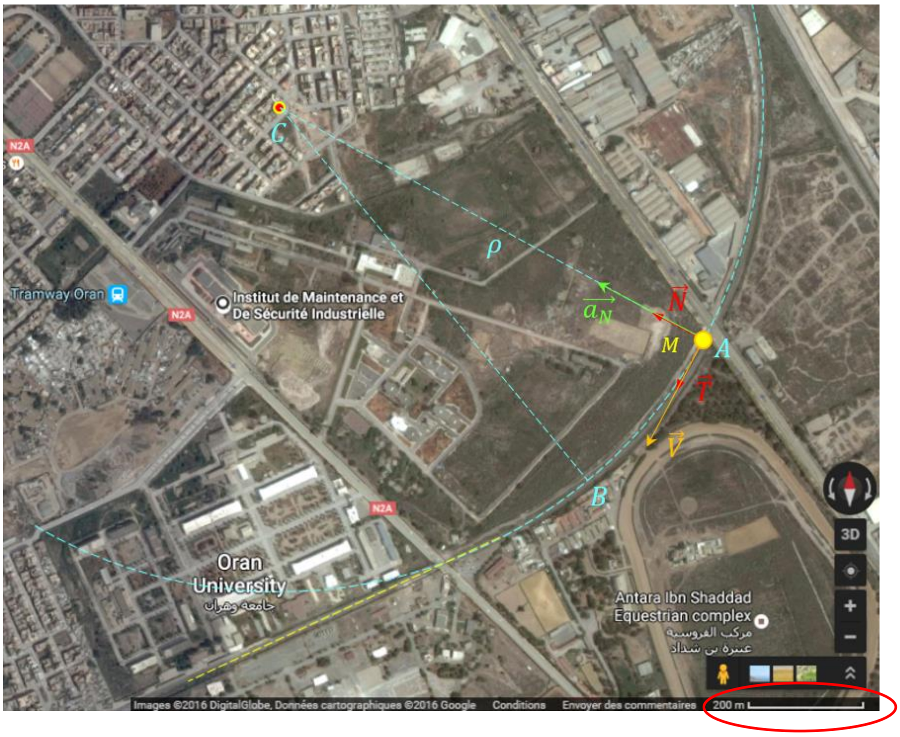
$$\boxed{\begin{cases} a_T = \frac{dV}{dt} \\ a_N = \frac{V^2}{\rho} \end{cases} \quad et \quad a = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}}$$

❖ ***Remarque** :*

- *Le rayon de courbure* ρ *de la trajectoire peut varier durant le mouvement. Ce n'est que dans le cas d'un mouvement circulaire que* $\rho = R = \text{Cte}$.
- *Le produit scalaire entre la vitesse et l'accélération permet de savoir la nature du mouvement :*

	$\vec{V}.\vec{a}>0 \quad \Rightarrow$ *Mouvement accéléré* $\left(\vec{V},\vec{a}\right)<\frac{\pi}{2}$
	$\vec{V}.\vec{a}<0 \quad \Rightarrow$ *Mouvement décéléré* $\left(\vec{V},\vec{a}\right)>\frac{\pi}{2}$
	$\vec{V}.\vec{a}=0 \quad \Rightarrow$ *Mouvement uniforme* $\left(\vec{V},\vec{a}\right)=\frac{\pi}{2}$
	$\vec{V}.\vec{a}=0 \quad et \quad \vec{a}=\vec{0} \quad \Rightarrow$ *Mouvement rectiligne uniforme*

***Application** : Un train représenté par un point matériel M roule à une vitesse constante de 60 km/h. calculer son accélération entre le point A et B.*



L'accélération peut être obtenue en utilisant le repert de Frenet, telle que :

$$a = \sqrt{a_T + a_N}$$

Puisque la vitesse V demeure constante $\rightarrow \quad a_T = \frac{dV}{dt} = 0\ m/s^2$

d'où, $a = a_N = \frac{v^2}{\rho}$

Le rayon de courbure ρ du chemin de fer entre les points A et B peut etre obtenu à partir de la figure ($\rho = 842\ m$).

$$a = \left(\frac{70.1000}{3600}\right)^2 \times \frac{1}{842} = 0.45\ m/s^2$$

4 Dynamique

4.1 Introduction

La dynamique est essentiellement une science expérimentale qui permet d'étudier la relation existante entre les mouvements des corps et les actions mécaniques extérieures qui donnent naissance à ces mouvements. Elle permet d'expliquer pourquoi la vitesse d'un corps se modifie en module et/ou en direction. La dynamique ajoute au cadre de la cinématique deux notions fondamentales : la masse et la force.

4.2 Notion de masse et d'inertie

La masse *: c'est une grandeur algébrique qui définit la quantité de matière que l'objet renferme, elle est invariable dans la mécanique Newtonienne.*

L'inertie *: elle exprime la tendance naturelle d'un objet à rester dans son état actuel de mouvement (ou de repos) et elle est directement liée à la masse de l'objet. Plus la masse de ce dernier est grande plus son inertie le devient aussi.*

Dans la mécanique relativiste, la masse dépend de la vitesse :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \begin{cases} m_0 : \text{ masse du corps au repos} \\ v : \text{ vitesse du corps} \\ c : \text{ célérité de la lumière } 3.10^8 m/s \end{cases}$$

4.3 Quantité de mouvement

L'utilisation de la vitesse seule pour expliquer les caractéristiques du mouvement reste insuffisante. En effet, un corps de faible masse animé d'une certaine vitesse, lorsqu'il percute un mur les conséquences ne seront pas pareil si le corps était d'une masse beaucoup plus importante bien qu'il soit animé de la même vitesse. Ainsi, il est nécessaire d'introduire une nouvelle grandeur qui est la quantité de mouvement pour pouvoir quantifier ce phénomène.

Tout objet de masse m animé d'une vitesse $\vec{V}$ possède une quantité de mouvement $\vec{P}$ qui caractérise son état dynamique, c'est une grandeur vectorielle définie par, Figure 4.1 :

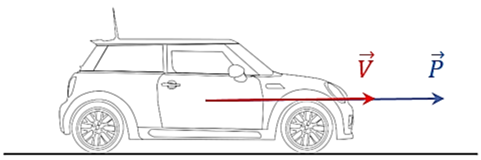


Figure 4.1 Représentation du vecteur quantité de mouvement

$$\vec{P} = m\,\vec{V} \qquad (4\text{-}1)$$

4.4 Théorème de conservation de la quantité de mouvement

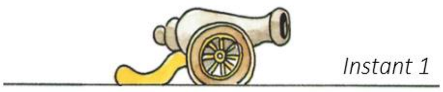
La quantité de mouvement d'un système matériel isolé est nulle ou demeure constante si les forces extérieures qui lui sont appliquées ont une résultante nulle.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{P_i} = \overrightarrow{Cte} \qquad (4\text{-}2)$$

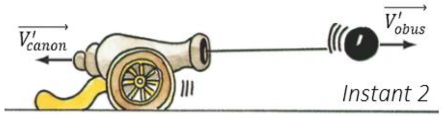
Application : *Un canon de 500 kg, initialement au repos, lance un obus de 5 kg avec une vitesse de 500 m/s.*

- *Quelle est la vitesse de recul du canon après le lancement de l'obus ?*

Instant 1 : $P_1 = m_{canon}V_{canon} + m_{obus}V_{obus} = 0$



Instant 2 : $P_2 = m_{canon}V'_{canon} + m_{obus}V'_{obus}$



Le système formé par le canon et l'obus est un système isolé, dans ce cas, la quantité de mouvement est conservée, d'où :

$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad m_{canon}V'_{canon} + m_{obus}V'_{obus} = 0$$

$$V'_{canon} = -\frac{m_{obus}V'_{obus}}{m_{canon}} = -5m/s$$

4.5 La force

La force représente toute forme d'influence qui agit sur un corps et qui a pour effet soit de modifier son mouvement naturel soit de le déformer. Cette influence qui s'exerce sur le corps est décrite par, Figure 4.2 :

- *Le point d'application*
- *La droite d'action*
- *Le sens*
- *Son intensité :* $|\vec{F}|$ *en* $[N]$

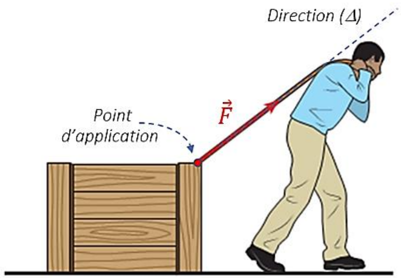


Figure 4.2 Représentation de la force

Cette description permet d'exprimer la force en terme de vecteur $\vec{F}$.

4.5.1 Les forces fondamentales

Il est possible de ranger la plupart des forces en quatre grandes familles :

a) Forces à distance :

Ce sont les forces qui agissent par l'intermédiaire de champs vectoriels comme par exemple : le champ électrique, le champ magnétique, le champ gravitationnel, etc. Elles sont du type :

$$\vec{F} = \alpha\,\vec{G} \qquad \begin{cases} \alpha : \text{paramètre dépendant du point } M \\ \vec{G} : \text{champ créant la force} \end{cases}$$

Exemples *: force de gravitation :*

$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Avec $G = 6.67.10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} (constante de gravitation)

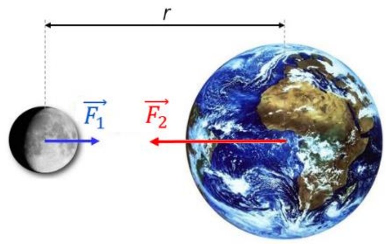


Figure 4.3 Représentation de la force de gravitation

b) Forces de réaction :

Chaque corps exerce une force sur l'autre corps qui est en contact avec lui, Figure 4.4. Cette force est toujours à la verticale du plan de contact.

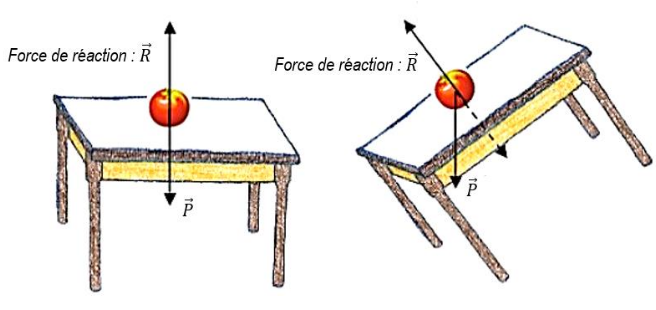


Figure 4.4 Représentation de la force de contact

c) Forces de tension ou de rappel

C'est une force qui tire sur un élément d'un corps comme par exemple, la force de rappel d'un ressort, Figure 4.5, ou la tension de tension d'un fil, Figure 4.6.

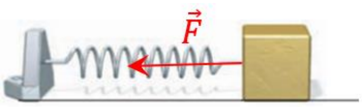


Figure 4.5 Représentation de la force de rappel d'un ressort

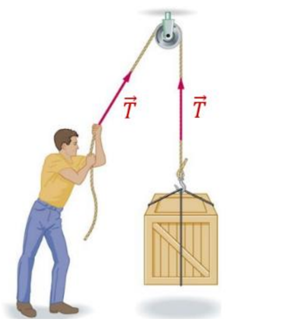


Figure 4.6 Représentation de la force de tension d'un fil

d) Forces de frottement

La force de frottement existe lorsque deux corps sont en contact, Figure 4.7. Elle s'oppose toujours au mouvement.

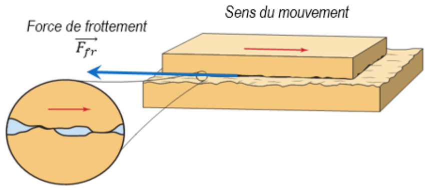


Figure 4.7 Représentation de la force de frottement

Dans un frottement de glissement, Figure 4.8, on définit :

– ***Frottement statique*** *(repos) :*

C'est la force de frottement qui empêche le corps, qui est au repos, de bouger.

$$f_{frot} = \mu_s N \qquad (4.3)$$

μ_s : *Coefficient de frottement statique*

Plus la force appliquée augmente, plus la force de frottement augmente à son tour, jusqu'à une valeur maximale $f_{frot} = \mu_s N$.

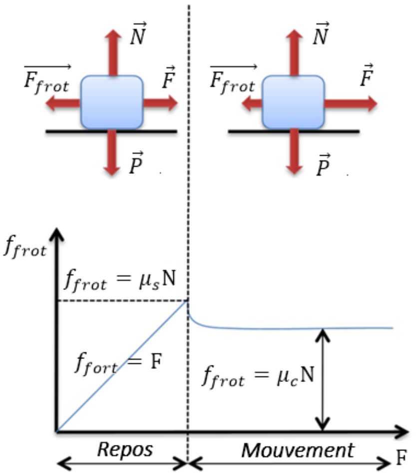


Figure 4.8 Représentation de la force de frottement statique et cinétique

– ***Frottement cinétique*** *(mouvement) :*

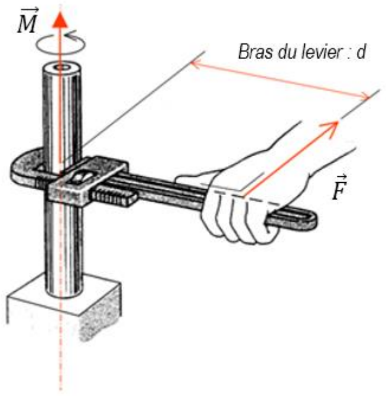
C'est la force de frottement qui s'exerce sur le corps lorsque ce dernier est en mouvement.

$$f_{frot} = \mu_c N \qquad (4.4)$$

μ_c : *Coefficient de frottement cinétique*

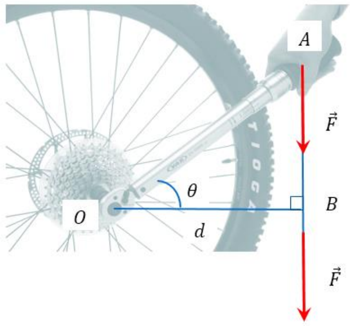
❖ *Remarque : on a $\mu_c < \mu_s$*

Moment d'une force



Le moment d'une force $\vec{F}$ est la grandeur physique décrivant la capacité d'une force à mettre en rotation un objet. Il est définit comme le produit de la force par le bras du levier. Ce dernier est pris comme la distance perpendiculaire à la force depuis l'axe de rotation.

$$M_O = F.d$$

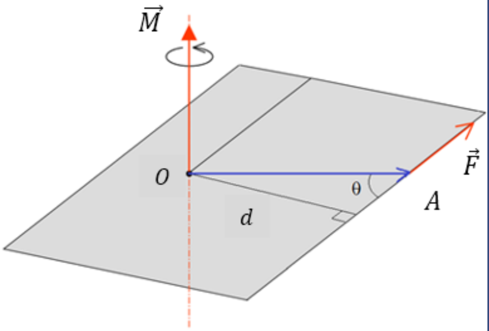


Remarque *: Le moment de la force ne change pas si la force glisse sur sa direction.*

$$M_O = F.OA\ \cos\theta = F.d$$

Le moment peut être représenté par un vecteur $\vec{M}$:

- *Perpendiculaire au plan formé par $(\overrightarrow{OA}, \vec{F})$*
- *Orienté selon la règle de la main droite*
- *De module : $M_O = F.OA\ \cos\theta$*



Ce qui peut s'écrire sous la forme : $\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$

Remarque : *Le moment d'une force est une grandeur additive*

$$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_2})$$

4.6 Principes de la dynamique

La dynamique du point matériel repose sur trois principes non démontrables, appelés aussi "lois de Newton", qui sont la base de tout le développement de la mécanique classique.

4.6.1 Première loi de Newton ou « principe de l'inertie »

Si aucune force n'agit sur un corps, ce dernier demeure au repos s'il est déjà au repos, sinon il se déplace en ligne droite avec une vitesse constante (mouvement rectiligne uniforme), Figure 4.9.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{V} = \overrightarrow{Cte} \tag{4.5}$$

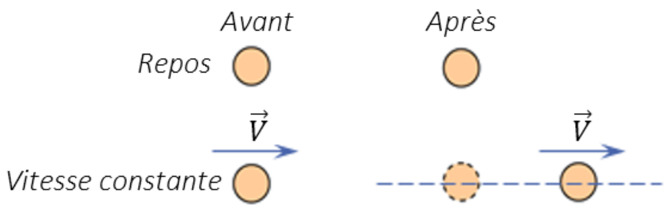


Figure 4.9 Le principe de l'inertie

Cette première loi de Newton ne s'applique que dans un référentiel d'inertie et elle n'est pas valable pour un observateur soumis à une accélération.

> *Référentiels d'inertie ou galiléens :*
>
> - *On appelle référentiel d'inertie ou galiléen, un repère dans lequel un point matériel qui n'est soumis à aucune force suit un mouvement rectiligne uniforme (ou bien demeure au repos si sa vitesse était nulle).*
> - *Pour la plupart des expériences que l'on peut réaliser sur terre, le repère au sol constitue un bon repère d'inertie.*

4.6.2 Deuxième loi de Newton «Principe fondamental de la Dynamique»

La deuxième loi de Newton constitue le principe fondamental de la dynamique. Elle annonce que les changements dans le mouvement d'un corps sont proportionnels à la force et se font dans la direction de la force.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm\vec{V}}{dt} = m\vec{a} \tag{4.6}$$

> $\vec{F}dt$ *est souvent appelée* ***impulsion élémentaire*** *du point matériel, et on a :*
>
> $$d\vec{P} = \vec{F}dt \qquad \rightarrow \qquad m\vec{v_1} - m\vec{v_0} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt$$

4.6.3 Troisième loi de Newton «Principe d'action-réaction»

A chaque action, il y a toujours une réaction égale et opposée. Si un corps exerce une force sur un autre corps, ce dernier réagit sur le premier avec une force égale et opposée, Figure 4.10.

Si la particule (1) exerce une force $\overrightarrow{F_{12}}$ sur la particule (2), alors d'après le 3ème principe de la dynamique la particule (2) exerce à son tour une force $\overrightarrow{F_{21}}$, tel que :

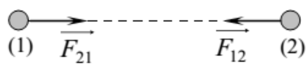


Figure 4.10 Représentation de la force d'action et de réaction

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$

4.7 Théorème du moment cinétique :

La deuxième loi de la dynamique ne permet pas à elle seule de décrire tous les mouvements des corps, puisque cette loi ne permet de décrire que les mouvements de translation. La Figure 4.11 montre un exemple typique où la somme des forces est nulle ce qui signifie que le volant n'est pas en mouvement de translation, alors que ce dernier peut tourner autour de son axe.

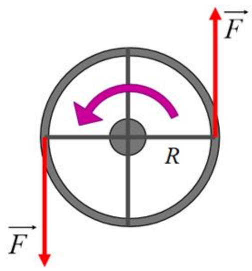


Figure 4.11 Couple de force appliqué sur un volant

Le moment cinétique est l'équivalent pour la rotation de ce qu'est la quantité de mouvement pour les mouvements de translation. Il mesure la quantité de mouvement dans le plan qui est en rotation autour d'un point de référence.

Le moment cinétique est définit par le moment de sa quantité de mouvement par rapport au point de référence O, Figure 4.12.

$$\overrightarrow{L_o}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \qquad (4.7)$$

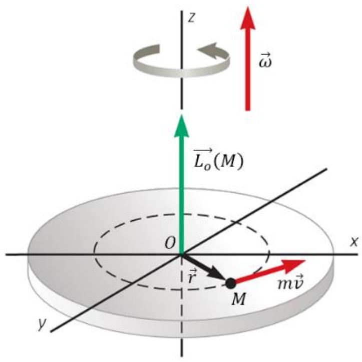


Figure 4.12 Représentation du vecteur moment cinétique

Dans le cas où le mouvement est circulaire, on a :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = r\,.P \quad \rightarrow \quad L_o = r\,m\,v = r\,m\,(\omega\, r) = m\,r^2\,\omega \;= I\,\omega$$

La quantité $I = m\,r^2$ est appelée moment d'inertie.

La dérivée du moment cinétique par rapport au temps nous donne :

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}(M)}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{r} \wedge m\,\vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

D'où :

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}(M)}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{M_o}(\vec{F}) \tag{4.8}$$

Cas particuliers :

- *Si* $\vec{F} = \vec{0}$ *on a :*

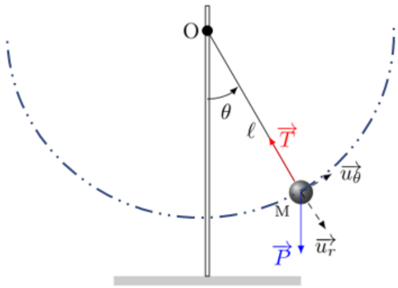
$$\frac{d\overrightarrow{L_o}(M)}{dt} = \overrightarrow{M_o}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{L_o}(M) = \overrightarrow{Cte}$$

En l'absence d'une force agissant sur la particule, le moment cinétique est conservé.

- *Dans le cas d'un mouvement circulaire :*

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}(M)}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{M_o}(\vec{F}) = I\frac{d\omega}{dt}$$

***Application** : Etablir l'équation de mouvement d'un pendule simple.*



$\overrightarrow{OM} = l\,\overrightarrow{u_r}\,,\; I = m\,l^2\,, v = l\,\dot{\theta}$

$$\sum M_o(\vec{F}) = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\overrightarrow{L_o}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\,\overrightarrow{u_r} \wedge ml\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \vec{k} \\ l & 0 & 0 \\ 0 & ml\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = ml^2\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}(M)}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_o}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\,\overrightarrow{u_r} \wedge ml\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \vec{k} \\ l & 0 & 0 \\ mg\,cos\theta & -mg\,sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -mgl\,sin\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_o}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{O} \qquad (\overrightarrow{OM} \parallel \vec{T})$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}(M)}{dt} = \overrightarrow{M_o}(\vec{P}) + \overrightarrow{M_o}(\vec{T})$$

$$ml^2\ddot{\theta}\,\vec{k} = -mgl\,sin\theta\,\vec{k} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,sin\theta = 0$$

5 Travail et énergie

5.1 Introduction

Les lois de Newton nous permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique à condition de connaitre les principaux paramètres qui contrôlent le mouvement des corps, tels que : la vitesse, l'accélération, la force. Dans la pratique, il n'est pas toujours aisé de déterminer avec exactitude la valeur de ces paramètres, et des fois les relations qui en découlent sont trop complexes et difficiles à résoudre.

Afin de pouvoir traiter plus aisément certains problèmes de la dynamique il est nécessaire d'introduire de nouvelles entités physiques, telles que : le travail, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

5.2 Le travail d'une force

La notion de travail est liée à la force et au déplacement, elle rend compte de l'effort nécessaire pour déplacer les objets. En effet, dès qu'il y a déplacement de la force, celle-ci effectue un travail, à condition que la force et le déplacement ne soient pas perpendiculaires entre eux.

On définit le travail W *d'une force* $\vec{F}$ *appliquée sur un corps, Figure 5.1, par :*

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\alpha \qquad (5.1)$$

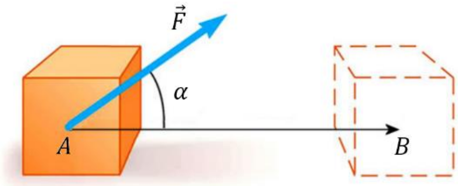


Figure 5.1 Le travail d'une force

Il existe trois types de travaux selon la valeur de $W_{AB}(\vec{F})$ *:*

- *Travail moteur si* $W_{AB}(\vec{F}) > 0$
- *Travail résistant si* $W_{AB}(\vec{F}) < 0$
- *Travail nul si* $W_{AB}(\vec{F}) = 0$

On peut aussi définir le travail d'une force sur un parcours quelconque AB*, Figure 5.2.*

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} \qquad (5.2)$$

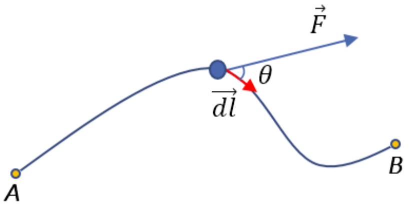


Figure 5.2 Travail d'une force sur un parcours quelconque

5.2.1 Travail d'une force constante

Le travail d'une force constante le long d'un parcours AB peut être décomposé en des travaux élémentaires le long de petits segments $\Delta\vec{l_i}$, Figure 5.3. Le travail total peut s'écrire alors :

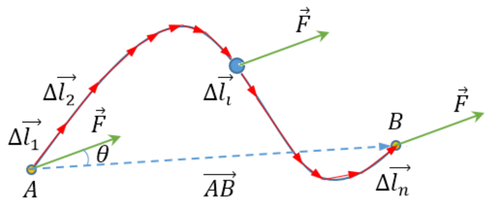


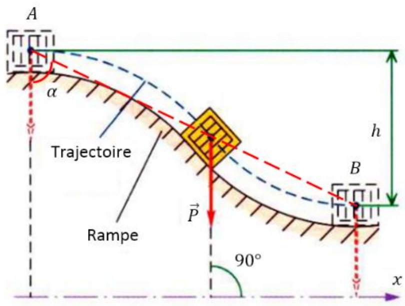
Figure 5.3 Travail d'une force constante

$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}.\Delta\vec{l_i} = \vec{F}\sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{l_i} = \vec{F}.\vec{AB} = F.AB\cos\theta$$

- *Le travail d'une force constante en direction et en module est indépendant de la trajectoire parcourue, mais uniquement de sa position initiale et finale.*
- *On appelle **force conservative** toute force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi.*

Application : *Travail de la force de gravité*

Une caisse de poids $\vec{P}$ (50 kg) glisse sur une rampe de dénivellation h (1,5 m). Quel est le travail effectué durant le glissement de la caisse.



Le poids étant constant tout le long de la trajectoire de la caisse, le travail s'écrit alors :

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AB} = P.AB\cos\alpha = P.h = 50 \times 1.5 = 75\,J$$

5.2.2 Le travail d'une force variable

Dans le cas où la force n'est pas constante et varie en sens et/ou module, l'utilisation de la relation (5.1) n'est plus possible et même l'utilisation de la relation (5.2) nécessite la connaissance de la variation de la force, ce qui n'est pas toujours possible en pratique.

L'approche graphique par contre peut être une bonne alternative pour la mesure du travail effectué, puisque celui-ci n'est autre que l'aire sous la courbe de la variation de la composante $\vec{F_x}$ de la force $\vec{F}$ en fonction du déplacement, Figure 5.4.

Le travail s'écrit alors :

$$W \approx \sum F_x \, \Delta x$$

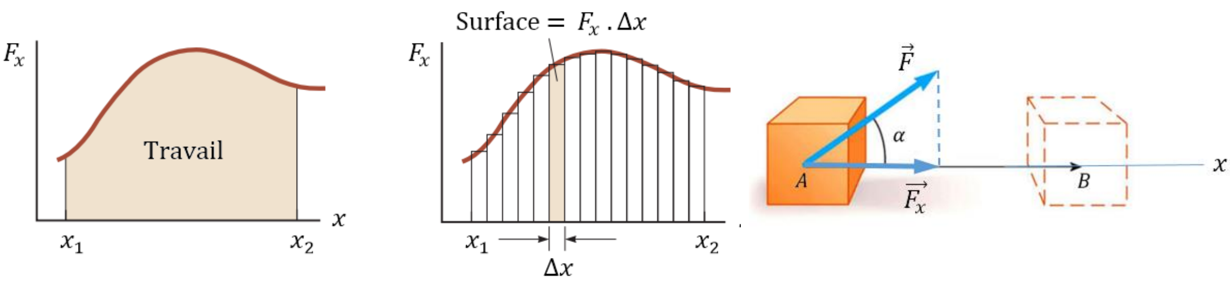


Figure 5.4 Représentation graphique du travail

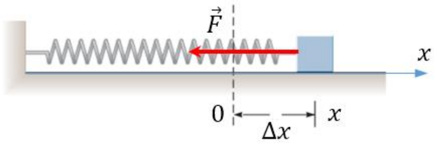
***Travail d'une force élastique** :*

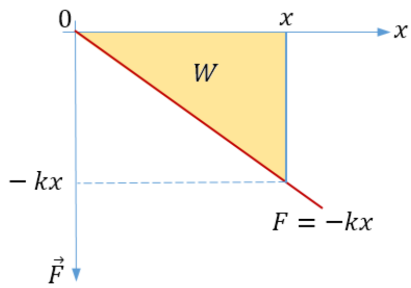
La force de rappel du ressort dépend de l'allongement Δx et de la constante de raideur du ressort k.

$F = -kx$ *(la force de rappel est de sens opposé à celui de l'allongement)*

L'aire sous la droite $(-kx)$ représente le travail de la force de rappel du ressort, ainsi :

$$W = -\frac{1}{2}kx.x = -\frac{1}{2}kx^2$$





5.3 La puissance

Le travail effectué durant le déplacement du corps n'est pas forcement constant mais peut varier au cours du temps. Afin de mesurer le rythme auquel s'effectue le travail on introduit la notion de puissance. Si ΔW est le travail effectué durant l'intervalle de temps Δt, la puissance moyenne P_{moy} durant cet intervalle de temps est définie par :

$$P_{moy} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{5.3}$$

La puissance moyenne P_{moy} nous donne une indication sur la variation du travail fourni durant tout le parcours du corps mobile. Si $\Delta W < 0$ alors $P_{moy} < 0$, mais généralement on ne s'intéresse qu'à la valeur absolue de la puissance.

Si on veut connaître la puissance à chaque instant t, on définit alors la puissance instantanée P qui est obtenue en réduisant l'intervalle de temps tel que $\Delta t \to 0$:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \tag{5.4}$$

Sachant que : $d\vec{l} = \vec{v}.dt$

La relation **(5.4)** *peut s'écrire sous la forme :*

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \tag{5.5}$$

5.4 L'énergie

L'énergie est un concept difficile à définir de manière générale. En mécanique elle exprime la capacité des corps à accomplir un travail W et elle est liée, à la fois, au mouvement des corps (énergie cinétique E_c) et à leur position (énergie potentielle E_p).

5.4.1 L'énergie cinétique

Tout corps en mouvement possède une énergie appelée énergie cinétique. Cette énergie caractérise le travail nécessaire pour faire passer un corps du repos au mouvement, ou bien de changer sa vitesse s'il est en mouvement.

$$\begin{cases} dW = \vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}.\vec{v}\,dt \\ \vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \end{cases} \quad \to \quad dW = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}.dt = m\,\vec{v}.d\vec{v}$$

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B m\,\vec{v}.d\vec{v} = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Le terme $\frac{1}{2}mv^2$ est désigné par E_c et est appelé « énergie cinétique ».

La variation de l'énergie cinétique d'un corps solide en translation entre deux points AB est égale à la somme des travaux des forces extérieures appliquées sur lui.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}) \tag{5.6}$$

5.4.2 L'énergie potentielle

Contrairement à l'énergie cinétique qui est liée au mouvement, l'énergie potentielle est liée à la position du corps. Elle est emmagasinée dans le corps et se manifeste quand elle se transforme en énergie cinétique. Cette énergie est intimement liée à la notion de force conservative.

Si $\vec{F}$ *est une force conservative, alors on peut définir une fonction scalaire* E_p *(énergie potentiel) telle que :*

$$dE_p = -\vec{F}.d\vec{l} \tag{5.7}$$

On dit que la force $\vec{F}$ *dérive d'un potentielle et on peut l'écrire en utilisant l'opérateur* $\overrightarrow{grad}$ *sous la forme ;*

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p \tag{5.8}$$

L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près qui dépend du niveau de référence choisi, d'où :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p = -\overrightarrow{grad}\,(E_p + C)$$

On note que l'expression (5.7) n'est autre que celle du travail, ce qui permet d'écrire :

$$dE_p = -dW \tag{5.9}$$

$$W_{AB} = -\int_A^B dE_p = E_{pA} - E_{pB} \tag{5.10}$$

On ne peut définir d'énergie potentielle que pour les forces conservatives dont le travail est indépendant du chemin parcouru.

5.4.2.1 Energie potentielle de pesanteur

La force de pesanteur $\vec{P}$ est une force conservative, puisque le travail du poids ne dépend pas du parcours. En prenant l'axe z orienté vers le haut, Figure 5.5, on peut écrire :

$$-mg = -\frac{dE_p}{dz} \quad \rightarrow \quad E_p = mgz + C^{te}$$

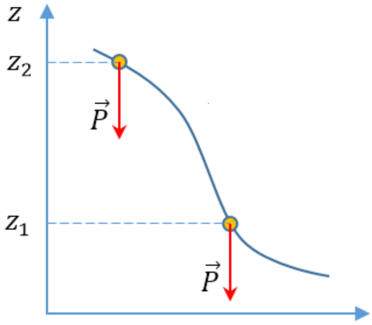


Figure 5.5 Energie potentielle de gravitation

On choisit généralement une origine des énergies potentielles telle que $E_p = 0$ pour $z = 0$. Dans ce cas, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$E_p = mgz \tag{5.11}$$

5.4.2.2 Energie potentielle élastique

L'énergie emmagasinée dans le ressort suite à un allongement, Figure 5.6, peut être obtenue en utilisant la relation (5.7) :

$$F = -kx$$

$$dE_p = -\vec{F}.d\vec{x} = -Fdx = -(-kx)dx = kxdx$$

D'où : $E_p = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + E_{p0}$

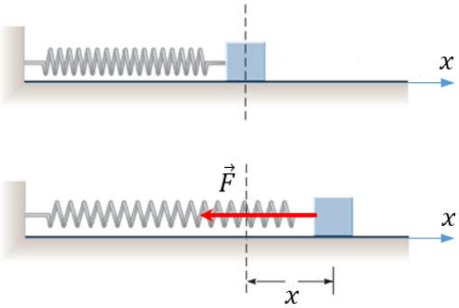


Figure 5.6 Energie potentielle élastique

En prenant $E_{p0} = 0$ pour $x = 0$ (ressort libre), alors :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.12}$$

5.4.3 Energie mécanique

On définit l'énergie totale E_m d'un corps comme étant la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

$$E_m = E_c + E_p \tag{5.13}$$

Si dans un système, on est en présence que de forces conservatives, alors :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + \frac{dE_p}{dl}\frac{dl}{dt} = mva - Fv$$

$$= v(ma - F) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dE_m}{dt} = 0$$

On constate que l'énergie mécanique est constante et on dit qu'il y a conservation de l'énergie mécanique dans le cas de forces conservatives.

$$E_m = E_c + E_p = C^{te} \tag{5.14}$$

$$dE_m = dE_c + dE_p = 0 \qquad \rightarrow \qquad dE_c = -dE_p$$

Bibliographie

- *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, 9 ed, R. A. Serway & J. W. Jewett, 2014 , Brooks/Cole*
- *Physics for scientists and engineers, 6 ed, P.l A. Tipler & G. Mosca, 2008, W. H. Freeman and Company*
- *Mécanique générale cours et exercices corrigés, S. Pommier & Y. Berthaud, 2010, Dunod*
- *Mini manuel de mécanique du point, M. Henry & N. Delorme, 2008, Dunod*
- *Mécanique MPSI, C. Clerc & P. Clerc, 2003, Bréal*
- *Fundamentals of physics, Halliday & Resnick, 2011, John Wiley & Sons, Inc.*