



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد  
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed  
-----  
معهد الصيانة والأمن الصناعي  
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

**Département de Maintenance en Electromécanique**

## **MÉMOIRE**

Pour l'obtention du diplôme de Master

**Filière : Electromécanique**  
**Spécialité : Maintenance-Fiabilité-Qualité**

### **Thème**

**Modélisation par éléments finis d'une structure  
à fissures multiples: cas de la flexion**

Présenté et soutenu publiquement par :

NACER Abdelaziz

et

BENDJAOUANE Aymen

Devant le jury composé de :

<b>Nom et Prénom</b>	<b>Grade</b>	<b>Etablissement</b>	<b>Qualité</b>
ADJELOUA Abdelaziz	MAA	Université d'Oran2	<b>Président</b>
YAHIAOUI Reda	MCA	Université d'Oran2	<b>Encadreur</b>
SENHADJI Salima	MCB	Université d'Oran2	<b>Examinatrice</b>

**Année 2020/2021**

## Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.*

- *Mes premiers remerciements vont naturellement à mon promoteur, Monsieur YAHIAOUI Reda pour ses conseils et le partage de ses compétences scientifiques. Ce fut un plaisir de travailler avec lui. J'ai également apprécié la grande liberté qu'il m'a accordée pour finaliser ce mémoire ainsi que sa passion pour la recherche.*

- *Merci également au Président du jury Monsieur ADJELOUA Abdelaziz d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. Je remercie Madame SENHADJI Salima d'avoir accepté d'examiner ce travail et pour sa participation au jury.*

- *Je tiens à remercier mes chers parents pour leur soutien tout au long de mes études.*

# Table des matières

Remerciements

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale .....6

Chapitre I : Généralités sur la mécanique de la rupture .....8

I.1. Aperçu historique sur la mécanique de la rupture.....9

I.2. Mécanismes et modèles de fissuration.....11

I.3. Modes de rupture.....12

I.4. Utilisation de la mécanique de la rupture en conception.....13

I.4.1 Le Critère d'énergie.....14

I.4.2. Critères de rupture et de propagation.....16

I.4.3. Plasticité en front d'entaille.....16

I.5 Contraintes et déformations en front de fissure.....17

I.6 Propagation des fissures.....19

I.7 Conclusion.....20

Chapitre II : La méthode des éléments finis.....21

II.1 Introduction.....22

II.2 Historique.....22

II.3 Modélisation et discrétisation.....23

II.4 Concept de la méthode des éléments finis.....23

II.5 Les Avantages de la M.E.F.....23

II.6 Étapes de la méthode des éléments finis.....24

II.6.1 Classement des éléments finis.....24

II.6.2 Les propriétés d'un élément fini.....25

II.6.3 les nœuds.....25

II.6.4 Les forces nodales.....26

II.6.5 Degrés de liberté.....26

II.6.6 Condition d'équilibre.....26

<b>II.6.7 Condition de compatibilité.....</b>	<b>26</b>
<b>II.7 Présentation du code de calcul Abaqus/CAE™.....</b>	<b>27</b>
<b>II.7.1 Code de calcul Abaqus/CAE™.....</b>	<b>27</b>
<b>II.7.2 Généralité sur le code de calcul Abaqus.....</b>	<b>28</b>
<b>II.7.3 Les éléments utilisés par Abaqus.....</b>	<b>28</b>
<b>II.7.4 Réalisation d'une simulation numérique.....</b>	<b>29</b>
<b>II.7.5 Système d'unités dans le code de calcul Abaqus.....</b>	<b>30</b>
<b>II.8 Conclusion.....</b>	<b>30</b>
<b>Chapitre III : Modélisation numérique.....</b>	<b>31</b>
<b>III.1 Introduction.....</b>	<b>32</b>
<b>III.2 Présentation du problème.....</b>	<b>32</b>
<b>III.3.1 Le maillage utilisé.....</b>	<b>34</b>
<b>III.3.2 Calcul du facteur d'intensité de contrainte.....</b>	<b>35</b>
<b>III.4 Modélisation dans le cas de deux fissures.....</b>	<b>37</b>
<b>III.4.1 Effet de la position de la deuxième fissure.....</b>	<b>38</b>
<b>III.4.2 Effet de la longueur de la deuxième fissure.....</b>	<b>40</b>
<b>III.5 Modélisation dans le cas de trois fissures.....</b>	<b>42</b>
<b>III.5.1 Effet de la position de la deuxième et la troisième fissure.....</b>	<b>43</b>
<b>III.5.2 Effet de la longueur de la deuxième et la troisième fissure sur R.....</b>	<b>44</b>
<b>III.7 Conclusions.....</b>	<b>46</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>47</b>
<b>Références bibliographiques</b>	

## Liste des figures

### Chapitre I : Généralités sur la mécanique de la rupture

Figure I.1. Les trois modes de rupture.....	13
Figure I.2. Comparaison de l'approche classique (a) et de l'approche utilisant la MLR(b).....	14
Figure I.3. Fissure traversant de longueur $2a$ dans une plaque infinie.....	16
Figure I.4. Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR.....	17
Figure I.5. (a) champ de contraintes, (b) Première estimation de la zone plastifiée.....	18
Figure I.6. Les Trois stades de propagation de fissure.....	20

### Chapitre II : La méthode des éléments finis

Figure II.1 Étape de l'analyse d'un problème aux limites.....	24
Figure II.2 Maillage du domaine en éléments triangulaires à trois nœuds.....	25
Figure II.3 Exemple d'éléments finis en 1, 2 et 3 dimensions.....	26
Figure II.4 : Étapes à suivre pour la programmation.....	30

### Chapitre III : Modélisation numérique

Figure III.1. Géométrie et dimensions de la plaque étudiée.....	34
Figure III.2. Présentation la plaque fissurée.....	35
Figure III.3. Maillage utilisé pour la plaque.....	35
Figure III.4. Raffinement du maillage autour de la pointe de la fissure.....	36
Figure III.5. Evolution de KI en fonction des contours.....	37
Figure III.6. Répartition des contraintes au sein de la plaque.....	37
Figure III.7. (a) Représentation de la disposition géométrique des fissures ; (b) Maillage de la plaque dans le cas de deux fissures.....	38
Figure III.8. Distribution des contraintes dans le cas de $c=2\text{mm}$ avec $x=5\text{mm}$ .....	39
Figure III.9. Variation de R en fonction de la distance x dans le cas $c = 2\text{mm}$ .....	40
Figure III.10. Evolution de R en fonction de la distance x dans le cas de $c= 2\text{mm}$ .....	40
Figure III.11. Evolution de R en fonction de la distance x dans le cas de (a) $c= 4\text{mm}$ et (b) $c = 6\text{mm}$ .....	42
Figure III.12. Représentation de la disposition géométrique des fissures.....	43
Figure III.13. Distribution des contraintes dans le cas de $c=2\text{mm}$ avec $x=5\text{mm}$ .....	43
Figure III.14. Variation de R en fonction de la distance x dans le cas $c = 2\text{mm}$ .....	44
Figure III.15. Evolution de R en fonction de la distance x dans le cas de $c= 2\text{mm}$ .....	45
Figure III.16. Evolution de R en fonction de la distance x dans le cas de (a) $c=4\text{mm}$ et (b) $c=6\text{mm}$ .....	46

## Liste des tableaux

### Chapitre II : La méthode des éléments finis

Tableau II.1 : Système d'unités pour la programmation.....	31
--	----

### Chapitre III : Modélisation numérique

Tableau III.1 : Données relatives de la plaque et du chargement appliqué.....	34
Tableau III.2. Valeurs de R (cas de deux fissures, $c=2$ mm) .....	39
Tableau III.3. Valeurs de R (cas de deux fissures, $c= 4$ mm et $c= 6$ mm) .....	41
Tableau III.4. Expression de R en fonction de la distance x pour $c= 2, 4$ et $6$ mm.....	41
Tableau III.5. Valeurs de R (cas de trois fissures, $c=2$ mm) .....	44
Tableau III.6. Valeurs de R (cas de trois fissures, $c=2$ mm et $c=4$ mm) .....	45
Tableau III.7. Expression de R en fonction de la distance x pour $c= 2, 4$ et $6$ mm.....	46

# *Introduction Générale*

## **Introduction générale**

La branche de la mécanique qui permet d'étudier la fissuration s'appelle la mécanique de la rupture. Elle a pour objet essentiel l'étude des fissures macroscopiques : elle s'applique lorsqu'il existe dans le matériau des discontinuités qui viennent modifier l'état de contrainte, de déformation et de déplacement, si bien que l'homogénéisation du milieu n'a plus de sens.

La prévision des phénomènes de fissuration est un enjeu essentiel pour le dimensionnement des pièces mécaniques. L'interaction entre plusieurs fissures a un impact majeur sur les comportements et la durée de vie des structures. L'étude de l'endommagement est devenue nécessaire pour mieux comprendre les mécanismes qui interviennent dans le processus de la multifissuration et de la formation de la fissure principale, responsable de la rupture du matériau. L'endommagement peut être décrit comme une compétition entre l'évolution collective des fissures et la formation de la fissure principale, il dépend principalement de la densité de fissure présente autour des grandes fissures.

L'objectif de notre étude est d'étudier l'effet de l'interaction des fissures sur le facteur d'intensité de contrainte qui est obtenu par modélisation en éléments finis en utilisant le logiciel Abaqus. La modélisation va permettre d'étudier l'influence de la taille des fissures et de leur disposition géométrique sur la valeur du facteur d'intensité de contrainte.

Le présent mémoire s'articule de la manière suivante :

Chapitre 1 : il consiste en une étude bibliographique, afin de rappeler les notions de base de la mécanique de la rupture et de présenter les outils nécessaires à cette étude.

Chapitre 2 : ce chapitre présente la méthode des éléments finis, ses propriétés et son utilisation.

Chapitre 3 : cette partie est consacrée à la modélisation numérique dans laquelle l'effet de la présence des fissures auxiliaires au voisinage d'une fissure centrale est étudié. Cet effet est

quantifié par la mesure du facteur d'intensité de contrainte. D'autre part, l'influence de la taille des fissures et de leurs dispositions géométriques sont considérées dans cette étude.

*Chapitre I: généralités sur la mécanique  
de la rupture*

## I.1 Aperçu historique sur la mécanique de la rupture

Eviter la rupture n'est pas en soi une idée nouvelle. Les concepteurs des structures de l'Égypte des pharaons (pyramides) ou ceux de l'empire romain nous ont laissé des édifices que l'on peut encore contempler ce qui prouve bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structures. Les matériaux utilisés avant la révolution industrielle étaient cependant limités pour l'essentiel au bois de construction, à la pierre ou à la brique et au mortier. La brique et le mortier sont relativement fragiles lorsqu'on les utilise en traction ; les structures anciennes qui ont résisté au temps, étaient chargées en compression (pyramides, ponts romains...) et de façon générale toutes les structures de l'époque qui précède la révolution industrielle étaient conçues pour des chargements en compression. Il a fallu attendre la révolution industrielle au début du 19<sup>e</sup> siècle, avec l'utilisation de l'acier dont les propriétés mécaniques permettaient de concevoir des structures pouvant résister à des charges de traction. La comparaison des anciens ponts romains avec les ponts modernes de structure métallique montre bien que les premiers étaient chargés en compression alors que les seconds le sont plutôt en traction.

L'utilisation de nouveaux matériaux ductiles (acier et autres alliages métalliques) pour des chargements en traction conduisait cependant à quelques problèmes ; des ruptures se produisaient parfois pour des niveaux de charges bien inférieurs à la limite d'élasticité ; on a dans un premier temps essayé d'éviter ces risques de ruptures en surdimensionnant les structures, mais avec les exigences économiques et structurelles actuelles il est devenu nécessaire d'alléger de plus en plus les constructions mécaniques et de réduire les coûts conduisit au développement des recherches sur la mécanique de la rupture.

Les premiers essais de rupture ont été menés par Léonard de Vinci bien avant la révolution industrielle, qui a montré que la résistance à la traction de fils de fer variait inversement avec leur longueur. Ces résultats suggéraient que les défauts contenus dans le matériau contrôlaient sa résistance ; plus le volume est important (fil de fer long) plus la probabilité de présence de fissure par exemple est importante.

Cette interprétation qualitative fût précisée plus tard en 1920 par Griffith qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux d'Inglis, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure ; il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture. Selon cette théorie, un défaut devient instable et conduit à la rupture lorsque la

variation d'énergie liée à une propagation du défaut atteint l'énergie spécifique du matériau. Cette théorie prédit correctement la relation entre la contrainte de rupture et la taille du défaut dans les matériaux fragiles. Dans les matériaux ductiles et notamment les alliages métalliques, l'avancée d'un défaut s'accompagne d'une importante dissipation d'énergie due à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure et la théorie de Griffith qui ne considère que l'énergie de création de surface ne peut en rendre compte. Il a fallu attendre les travaux d'Irwin en 1948 qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

Irwin considéra que les outils fondamentaux pour étudier la rupture existaient et proposa en 1948, une extension de l'approche de Griffith aux matériaux ductiles en y incluant le terme de dissipation d'énergie due à l'écoulement plastique près des extrémités d'une fissure. Il développa ensuite en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard qui analysa les champs de déplacements et de contraintes élastiques près de l'extrémité d'une fissure sous chargement donné, Irwin montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique qui était relié au taux de restitution d'énergie ; ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est le facteur d'intensité des contraintes (FIC).

Les nouveaux concepts de la mécanique de la rupture furent ensuite utilisés pour montrer que la plupart des ruptures dans les fuselages d'avions étaient dues à des fissures de fatigue qui atteignaient une taille critique. Ces fissures prenaient naissance près des hublots dans les coins qui constituent des zones de forte concentration des contraintes. Les ruptures qui se produisaient dans les essieux d'engins roulants ou encore dans les rotors des turbines à vapeur furent aussi expliquées grâce à l'application de ces nouveaux concepts. Le concept de FIC fut également utilisé par Paris pour décrire la propagation des fissures de fatigue et progressivement les courbes de propagation des fissures de fatigue proposées par ces auteurs remplacèrent les courbes d'endurance pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles qui s'affrontaient. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire

de la rupture et ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. La mécanique linéaire de la rupture cesse d'être valable lorsqu'une plastification importante précède la rupture. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs (Irwin, Dugdale et Barenblatt ...) proposèrent ce qu'on appelle une correction de zone plastique; la taille de la fissure est alors augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC.

Wells, un des représentants de la deuxième école, proposa en 1961 le déplacement à fond de fissure - ou CTOD « Crack Tip Opening Displacement » - comme paramètre alternatif à la mécanique linéaire de la rupture ou plus précisément au concept de FIC, lorsque la plastification devient importante comme c'est le cas dans les matériaux très ductiles. Plus tard, Hutchinson, Rice et Rosengren (HRR) développèrent un nouveau paramètre appelé intégrale J pour mieux décrire la répartition des contraintes dans les zones plastifiées (champ HRR). Begley et Landes caractérisèrent la ténacité à l'aide du paramètre J et développèrent une procédure standard pour l'utilisation de cette intégrale dans des cas pratiques.

Les récents développements de la mécanique de la rupture montrent que si les recherches se sont cristallisées sur l'effet de la plastification dans la période entre 1960 et 1980, on s'intéresse actuellement plus aux comportements viscoplastique et/ou viscoélastique. Les premiers se rencontrent à température élevée lorsque les phénomènes de fluage deviennent importants alors que les seconds caractérisent les matériaux polymères de plus en plus utilisés dans l'industrie. L'apparition des nouveaux matériaux composites nécessita également l'utilisation des concepts de la mécanique linéaire de la rupture pour décrire leur comportement. Plus récemment encore, de nouvelles approches tentent de relier le comportement local à l'échelle microscopique au comportement global lors de la rupture d'un matériau. Ces approches micro-macro deviennent parfois nécessaires lorsqu'on atteint les limites d'utilisation des autres approches plus classiques.[1]

## **I.2 Mécanismes et modèles de fissuration**

Afin de prévoir la rupture des pièces mécaniques sollicitées en fatigue, beaucoup de laboratoires ont tenté, au moins pour des raisons pratiques, d'établir des lois empiriques de fissuration.

Si les mécanismes propres à la fatigue commencent à peine d'être connus, l'influence de certains paramètres sur la vitesse de fissuration est généralement mieux définie. Nous pouvons les classer en deux catégories :

- Les paramètres intrinsèques qui dépendent du matériau lui-même. Module de Young, limite d'élasticité, propriétés cycliques et état métallurgique du matériau.
- Les paramètres extrinsèques qui dépendent des conditions de l'essai, quel que soit le matériau étudié, température, environnement, dimension de l'éprouvette, rapport de charge R, etc.

### I.3 Modes de rupture

Une fissure est définie comme la surface séparant localement un solide en deux parties. Le champ des déplacements est alors discontinu à travers cette surface et les trois composantes vectorielles de cette discontinuité forment les trois modes de rupture (Figure. I.1) : le mode I pour une ouverture et le mode II pour un glissement plan (dans un cas tridimensionnel, le mode III pour un glissement anti-plan). Le cas réel est une superposition de ces modes, on parle alors de mode mixte [2].

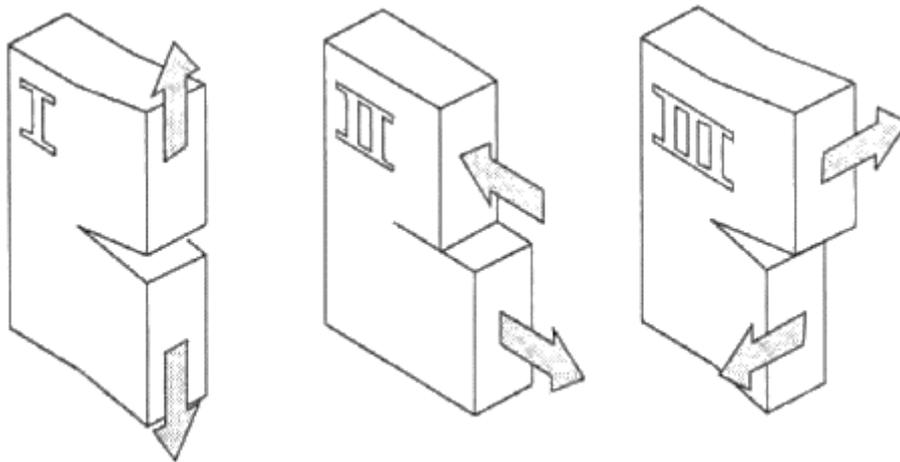


Figure I.1. Les trois modes de rupture

## I.4 Utilisation de la mécanique de la rupture en conception

Le schéma de la figure I.2a compare l'approche classique pour le dimensionnement des structures basée sur la limite d'élasticité du matériau  $\sigma_E$  à l'approche utilisant le concept de ténacité  $K_C$  issu de la mécanique linéaire de la rupture (MLR).

Dans le premier cas, on dimensionne les structures pour que les contraintes appliquées  $\sigma$  restent inférieures à la limite d'élasticité ( $\sigma < \sigma_E$ ). On utilise en général un coefficient de sécurité pour prévenir tout risque de rupture fragile ( $\sigma < \gamma \sigma_E$  avec  $\gamma < 1$ ). Cette approche fait abstraction de l'existence d'éventuels défauts sous forme de microfissures par exemple.

L'approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture est à trois variables : la contrainte appliquée, la ténacité  $K_C$  qui remplace la limite d'élasticité et une variable additionnelle qui est la taille du défaut. Il y a cependant deux approches alternatives de la mécanique de la rupture : l'une utilisant le concept d'intensité des contraintes critique (ténacité du matériau) et l'autre un critère d'énergie. Ces deux approches sont équivalentes dans certaines conditions.

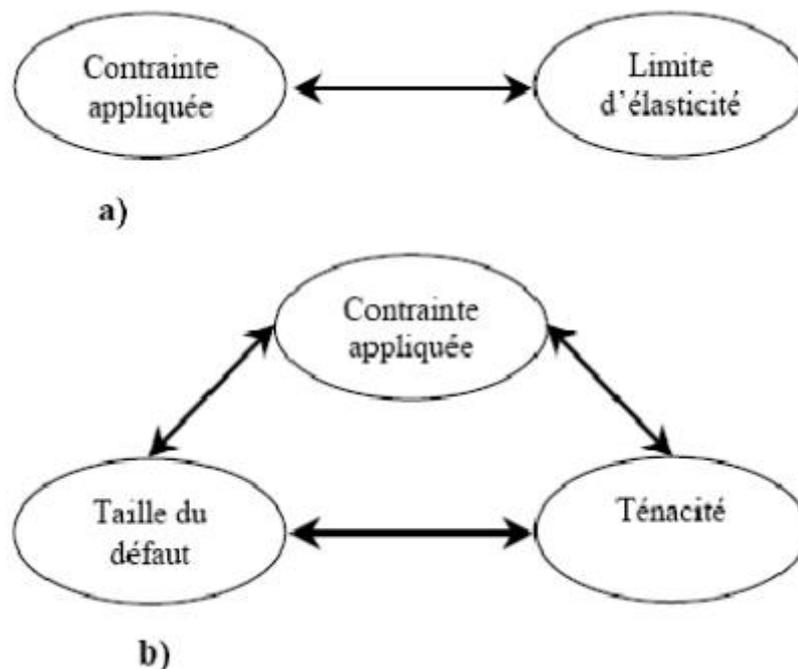


Figure. I.2. Comparaison de l'approche classique (a) et de l'approche utilisant la MLR(b)

### I.4.1 Le critère d'énergie

L'approche énergétique est basée sur le postulat suivant : l'extension d'une fissure qui conduit à la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau : cette résistance se compose de l'énergie de création de surface, de l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure.

Griffith fut le premier à proposer un critère d'énergie pour la rupture des matériaux fragiles, qui fut ensuite étendu aux matériaux ductiles par d'autres auteurs : Irwin et Orowan. L'énergie de Griffith notée  $G$  (qu'on appelle aussi taux de restitution d'énergie) est définie par la variation d'énergie par unité de surface fissurée, associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique. La rupture se produit lorsque  $G$  atteint une valeur critique  $G_C$  ;  $G_C$  est une mesure de la ténacité du matériau.

Pour une fissure de longueur  $2a$  (figure I.3) dans une plaque de dimensions infinies (ce qui équivaut à dire que la longueur de fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque dans le plan de chargement), constituée d'un matériau de module d'Young  $E$  et soumise à une contrainte de traction, l'énergie de Griffith  $G$  par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} \quad (\text{I.1})$$

Si on continue à augmenter la contrainte appliquée  $\sigma^\infty$ , la rupture se produira lorsque l'énergie  $G$  atteint sa valeur critique pour une contrainte appliquée  $\sigma_R$ . On a alors d'après la relation précédente :

$$G_C = \frac{\pi\sigma_R^2 a}{E} \quad (\text{I.2})$$

On peut noter qu'à valeur de  $G_C$  fixée, la contrainte à rupture  $\sigma_R$  varie avec  $a^{-\frac{1}{2}}$  ; de même à  $G_C$  et  $\sigma^\infty$  fixées, la longueur critique de défaut  $a_C$  est donnée par :

$$a_C = \frac{E G_C}{\pi(\sigma^\infty)^2} \quad (\text{I.3})$$

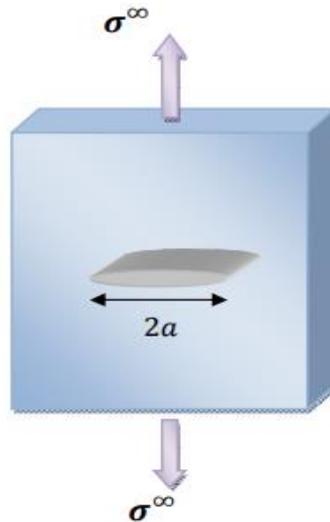


Figure. I.3. Fissure traversant de longueur  $2a$  dans une plaque infinie

La figure I.4 illustre bien la différence entre l'approche classique qui fait abstraction de l'existence d'une fissure (le critère de rupture est  $(\sigma^\infty = \sigma_E)$  ) et l'approche par la MLR qui prend en compte la présence de la fissure ( $\sigma^\infty$  proportionnelle à  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  ). La zone de non rupture située sous les deux courbes représentant les approches précédentes, montre que de part et d'autre de la longueur de défaut  $a_0$ , on utilisera l'une ou l'autre des approches.

L'énergie de Griffith  $G$  est la force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est donnée par  $G_C$ . Par analogie avec l'approche basée sur la limite d'élasticité où c'est la contrainte qui joue le rôle de force motrice dans un matériau dont la résistance à la déformation plastique est donnée par la limite d'élasticité  $\sigma_E$ .

Cette analogie est utilisée aussi pour illustrer le concept de similitude. La limite d'élasticité d'un matériau mesurée à partir d'essais sur des éprouvettes de laboratoire est indépendante de la taille des éprouvettes et peut donc être utilisée pour des structures de tailles différentes dès lors que le matériau est raisonnablement homogène. Ce principe de similitude est une des hypothèses fondamentales de la mécanique de la rupture : la ténacité d'un matériau (mesurée par  $G_C$ ) est indépendante de la taille et de la géométrie de la structure fissurée. Cette hypothèse de similitude reste valable tant que le comportement du matériau demeure linéaire élastique [2].

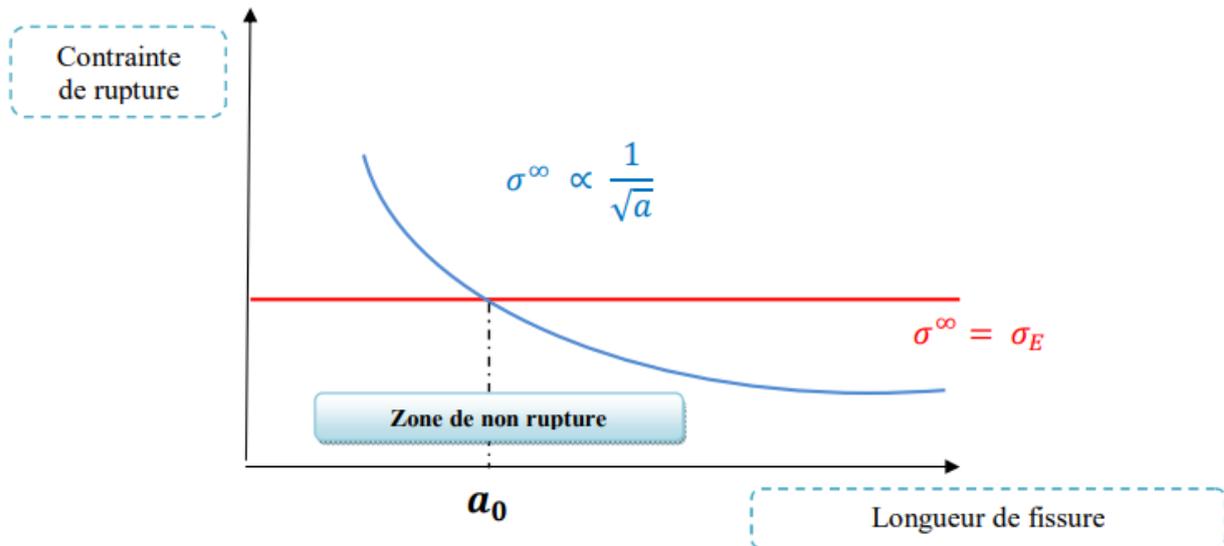


Figure I.4. Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR

## I.4.2 Critères de rupture et de propagation

La définition des grandeurs facteurs d'intensité des contraintes  $K$  et taux de restitution d'énergie  $G$  suppose que ces grandeurs : propriété de structure (dynamique), gouvernent les mécanismes de rupture, à partir de critères sur les grandeurs caractéristiques ( $G_C$  ;  $K_C$ ) : propriété strictement de matériau (pas de notion de dynamique). Ces critères sont donc indispensables pour connaître les conditions d'évolution de la fissure et pour le dimensionnement en calcul des structures. Il existe différents types de critères sur les fissures. On distingue, entre autres, les critères [2] :

- d'amorçage,
- de propagation,
- d'arrêt,
- de bifurcation,
- de branchement.

## I.4.3 Plasticité en front d'entaille

A l'aide d'approches théoriques, on a cherché depuis longtemps à exprimer la vitesse de fissuration par fatigue en explicitant l'influence de certains paramètres mécaniques. A l'heure actuelle, les approches les plus prometteuses s'appuient sur :

- L'ouverture de fissure (COD) ;
- L'écroutissage cyclique à fond de fissure.

Dans les deux cas, la connaissance de la forme et de la taille de la zone plastifiée à fond de fissure est utile.

## I.5 Contraintes et déformations en front de fissure

Avant d'aborder la question de la plasticité en fond de fissure, il convient de rappeler brièvement les résultats issus de la mécanique de la rupture, sur la formation de la zone plastifiée au bout d'une fissure.

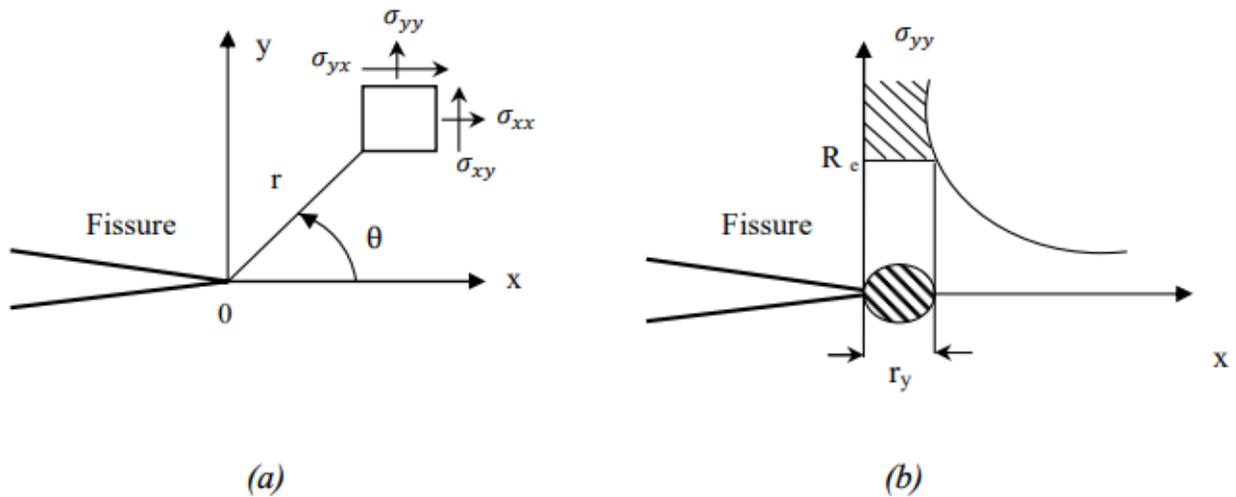


Figure I.5. (a) champ de contraintes, (b) Première estimation de la zone plastifiée

Dans ce mode de sollicitation (mode I), l'état de contraintes et de déformations en fond de fissure est donné dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture par les relations suivantes

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{\alpha}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{\alpha}(\theta), \text{ avec } (i, j = x, y) \quad (I.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_{\alpha}}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^{\alpha}(\theta), \quad \alpha = I, II, III \quad (I.5)$$

$$\sigma_{ij} = 0, \text{ en contraintes planes} \quad (I.6)$$

$$\sigma_{zz} = u (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \text{ en déformations planes} \quad (I.7)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [ \sigma_{zz} - \nu ( \sigma_{xx} + \sigma_{yy} ) ] \quad (I.8)$$

Avec,

$$K_I = \sigma \alpha \sqrt{\pi a} \quad (I.9)$$

$K_I$  : facteur d'intensité de contrainte et  $\alpha$  facteur de correction

$R, \theta$  : coordonnées polaires d'un point en avant de pointe de la fissure

$E$  : module d'Young

$f_{ij}(\theta)$  : fonction de l'angle  $\theta$

$g_{ij}(\theta, \nu)$  : fonction de l'angle  $\theta$  et du coefficient de poisson  $\nu$

En contrainte planes, la composante  $\sigma_{zz}$  est nulle. De plus si l'on fait l'hypothèse simplificatrice que les composantes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  n'interviennent pas dans la plastification en fond de fissure, la seule composante active est donc  $\sigma_1 = \sigma_{yy}$ , pour  $\theta = 0$ ,  $f_{ij}(\theta = 0) = 1$  et on a :

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (I.10)$$

Au cours du chargement, la contrainte  $\sigma_1$  atteint localement la limite d'élasticité  $R_e$ , il y aura alors plastification à la pointe de la fissure dans une zone telle que :

$$\sigma_1 = R_e = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_y}} \quad (I.11)$$

Soit :

$$r_y = \frac{K_I^2}{2 \pi R_e^2} \quad (I.12)$$

Ce modèle simple défini par Irwin, en contraintes planes, fait l'hypothèse que la forme de la zone plastique est circulaire (Figure I.6.b), et que le matériau est élastique parfaitement plastique. En réalité, la taille de cette zone dépend de nombreux paramètres tels que le coefficient d'écroutissage, l'état de contraintes, le mode de rupture, etc [3].

Le facteur d'intensité des contraintes (FIC), noté  $K_I$  en mode I, est proportionnellement attaché à l'amplitude de la zone de singularité : autrement dit, le FIC et les contraintes augmentent proportionnellement. Il s'agit donc d'un procédé de caractérisation des conditions à l'extrémité

de la fissure : lorsque le FIC est connu, les champs des contraintes, des déformations et des déplacements le sont aussi. Le facteur d'intensité des contraintes est un des concepts les plus importants de la mécanique linéaire de la rupture [4].

## I.6 Propagation des fissures

L'application d'un chargement cyclique (d'amplitude constante ou variable) à une pièce se traduit par l'apparition d'un dommage qui comprend à trois stades.

- **Stade I** : si le chargement est en dessous d'un certain seuil, la fissure ne se propage pas au niveau macroscopique. On réalise dans ce cas l'essai de détermination du seuil de propagation de fissure. La grandeur considérée est en quelque sorte l'équivalent de la limite de fatigue déterminée sur éprouvette lisse.
- **Stade II** : la fissure se propage « le plus souvent » dans un plan perpendiculaire à la direction de l'effort appliqué. L'essai de mesure de vitesse de propagation de fissure se rapporte principalement au régime correspondant au stade II.
- **Stade III** : il correspond au cas de chargements élevés pour lesquels une déchirure se produit dans le matériau. Les vitesses de propagation très élevées observées dans ce domaine conduisent rapidement à la rupture de la pièce. Les mesures de vitesses relatives à ce domaine ne sont mises en œuvre que dans le cas de problèmes bien spécifiques.

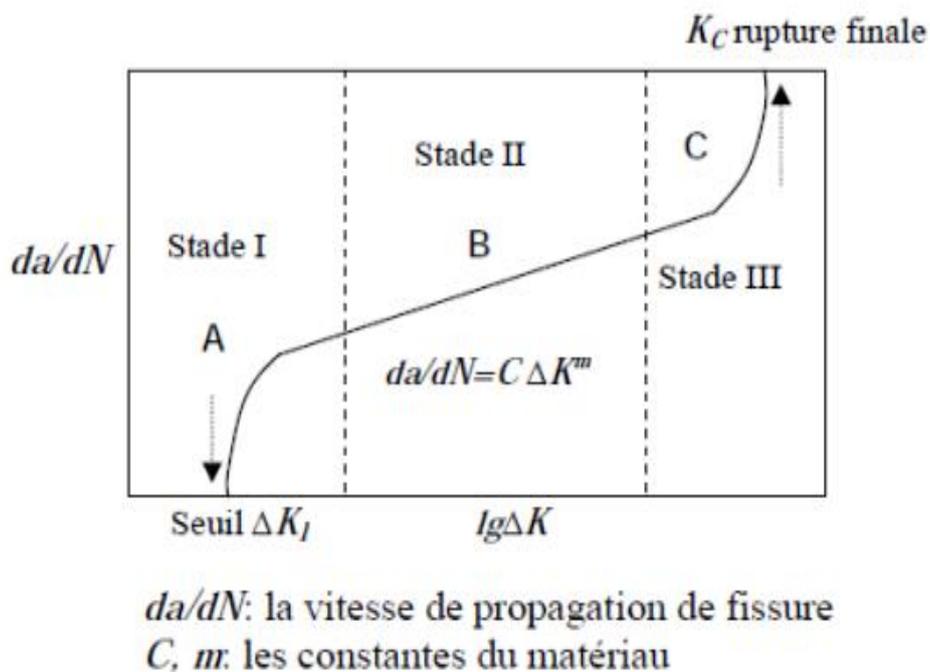


Figure I.6. Les Trois stades de propagation de fissure [1]

## **I.7 Conclusion**

Ce premier chapitre permet de fixer le cadre dans lequel s'inscrit notre travail. D'un point de vue théorique, l'analyse asymptotique en mécanique de la rupture a défini les paramètres décrivant la rupture. Nous avons rappelé aussi les principaux travaux relatifs à la détermination du champ de contraintes au voisinage d'une entaille et le facteur de concentration contraintes dans le cas élastique.

## *Chapitre II : La méthode des éléments finis*

## **II.1 Introduction**

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées dans une large variété de problèmes d'ingénieries, qui initialement a été développée pour étudier les structures complexes.

## **II.2 Historique**

Les bases théoriques de la MEF reposent d'une part sur la mécanique des structures de la formulation énergétique et d'autre part sur les méthodes d'approximations.

La MEF est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'ailes d'avion) ; On y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956). Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites par exemple celui de la torsion de Saint Venant en divisant la section en triangles, mais elles restèrent sans suite.

L'expression élément finie a été inventée par Clough en 1960, la MEF s'attaque à tous les domaines du calcul de structures. On trouve des programmes de la MEF principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures, Conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs tels que : ABAQUS, SAP2000, CATIA, etc. C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement gigantesque et les possibilités d'application augmentent sans cesse.

### II.3 Modélisation et discrétisation

La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Donc pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, il faut effectuer deux opérations essentielles : la modélisation et la discrétisation. Ces opérations se font en deux temps comme indiqué sur la figure II.1.

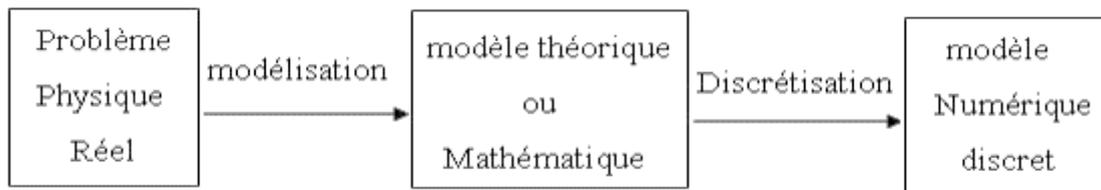


Figure II.1 Étape de l'analyse d'un problème aux limites

### II.4 Concept de la méthode des éléments finis

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (éléments finis). D'après le comportement de chaque élément est exprimé en termes d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage de ces éléments.

### II.5 Les Avantages de la M.E.F

La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa souplesse. Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécaniques ou bien physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de natures quelconques. Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. Toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites). La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.

## II.6 Étapes de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est considérée comme un outil de mathématiques appliquées destiné à résoudre les équations différentielles. Néanmoins, les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes, on peut les résumer en sept étapes :

1. Découpage du domaine en un maillage d'éléments finis, figure (II.2) ;
2. Interpolation en respectant les critères de convergence ;
3. Calcul des caractéristiques de chaque élément ;
4. Assemblage ;
5. introduction des conditions aux limites essentielles et résolution ;
6. Évaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, déplacements...) ;
7. Jugement de manière critique des résultats obtenus.

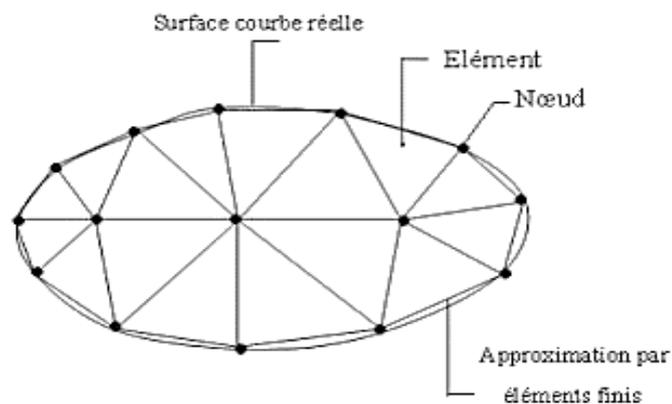


Figure II.2 Maillage du domaine en éléments triangulaires à trois nœuds

### II.6.1 Classement des éléments finis

Les différents types d'éléments finis sont classés suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments finis peuvent être distinguées, figure II.3 :

- Les éléments 1D : barres, poutres rectilignes ou courbes.
- Les éléments 2D : élasticité plane, plaque en flexion, coques courbes.
- Les éléments 3D : éléments de volume ou coques épaisses.

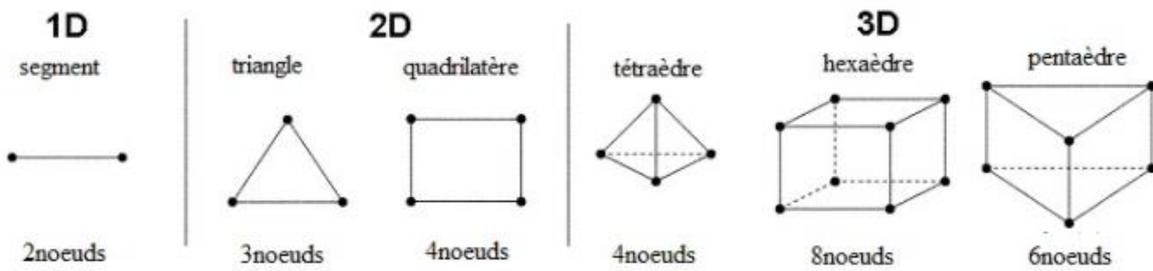


Figure II.3 Exemple d'éléments finis en 1, 2 et 3 dimensions [5]

## II.6.2 Les propriétés d'un élément fini

Le découpage en éléments finis permet d'isoler un élément fini pour l'étudier tout en établissant son état de contrainte, de déformation ou de déplacement.

Un élément fini peut être 1D, 2D ou 3D, avec des formes qui peuvent être simples, comme :

- segment d'une droite ou de courbe (plan ou courbe)
- triangle ou quadrilatère
- tétraèdre, prisme ou hexaèdre

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke dans le cas de l'élasticité), avec des propriétés mécaniques qui dans le cas d'un matériau isotrope se réduisent à deux paramètres :  $E$  et  $\nu$ .

## II.6.3 les nœuds

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres, ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces.

## II.6.4 Les forces nodales

À travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, selon les unes sont les réactions internes, les autres les forces  $F$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...).

## II.6.5 Degrés de liberté

Pour tout élément fini, on doit faire le choix d'une ou de plusieurs fonctions (en général le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds. Ces valeurs deviennent les inconnues nodales, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents et qui permettent de reconstituer la solution complète (ASSEMBLAGE), tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

## II.6.6 Condition d'équilibre

Pour chaque élément on doit établir :

- sa matrice de rigidité  $K$
- son vecteur force  $F$

Ainsi, pour chaque élément on a une relation entre la force et les déplacements :

$$F = K U \quad (\text{II.1})$$

Les forces agissant sur toute la structure ou sur chacun des éléments doivent être en équilibre.

## II.6.7 Condition de compatibilité

Les déplacements de l'ensemble de la structure ou de chacun de ses éléments doivent être compatibles, en d'autres termes, les déplacements des extrémités des éléments qui sont connectés être identiques. On peut encore dire que si on effectue une section sur un élément, les déplacements d'élément à gauche et à droite de cette section doivent être égaux. Pour que cette cohésion soit respectée (c.à.d. pour que les volumes élémentaires ; auxquels ont été

appliquées les déformations, continuent de rester accolés), il faut que le champ de déformation dérive d'un champ de déplacement, continûment dérivable, tel que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \quad (\text{II.2})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) \quad (\text{II.3})$$

Les équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle sont données par :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varepsilon_{ii} = \frac{\partial^3}{\partial x_j^2 \partial x_i} u_i \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varepsilon_{jj} = \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_j \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varepsilon_{jj} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varepsilon_{ii} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (\text{II.7})$$

## II.7 Présentation du code de calcul Abaqus/CAE™

### II.7.1 Code de calcul Abaqus/CAE™

ABAQUS est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978. Il est avant tout un logiciel de simulation de problèmes très variés en mécanique. Simuler la réponse physique des structures soumises à des chargements, des températures, des impacts ou autres conditions extérieures, Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants de problèmes non-linéaires. D'un point de vue technique, les résultats obtenus grâce à ABAQUS sont le bilan des énergies, des forces nodales, des déformations, des déplacements, des contraintes, des vitesses, des accélérations et de toutes les grandeurs physiques nécessaires à la conception d'un modèle.[6]

## II.7.2 Généralité sur le code de calcul ABAQUS :

ABAQUS se compose de trois produits : ABAQUS/Standard, ABAQUS/Explicit et ABAQUS/CAE

**ABAQUS/Standard** : est un solveur généraliste qui a recours à un schéma traditionnel d'intégration implicite. Il est caractérisé par :

- Résolution basée sur l'algorithme de Newton-Raphson et la méthode de Riks;
- Problèmes linéaires et non linéaires ;
- Géométrie diversifiée ; 1D, 2D, 3D et Axisymétrique ;
- Nombreuses procédures d'analyse dans le domaine temporel et fréquentiel.

**ABAQUS/ Explicit**, un schéma d'intégration explicite pour résoudre des problèmes dynamiques ou quasi-statiques non-linéaires, caractérisé par :

- Analyse non linéaire (discrétisation spatiale et temporelle) ;
- Problème transitoire et dynamique des structures ;
- Résolution basée sur la méthode explicite d'intégration en temps.

**ABAQUS /CAE**, constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour les dits solveurs. [6]

## II.7.3 Les éléments utilisés par ABAQUS

On distingue différentes grandes classes d'éléments :

- **Les éléments unidimensionnels (1D)** : barre ; poutre, rectiligne ou courbe
- **Les éléments bidimensionnels (2D)** : élasticité plane (contrainte ou déformation plane), plaques en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou rectangulaire.
- **les éléments tridimensionnels (3D)** : de forme tétraédrique, hexaédrique...etc.
- **les éléments axisymétriques** : (pour les pièces présentant une symétrie de révolution au niveau de la géométrie et du chargement).
- **les autres éléments** : ressorts, amortisseurs, rigides. [7]

## II.7.4 Réalisation d'une simulation numérique

La réalisation complète d'un jeu de données s'effectue après un passage successif dans les Modules :

- Part
- Property
- Assembly
- Step
- Interaction
- Load
- Mesh
- Job (pour lancer le calcul)

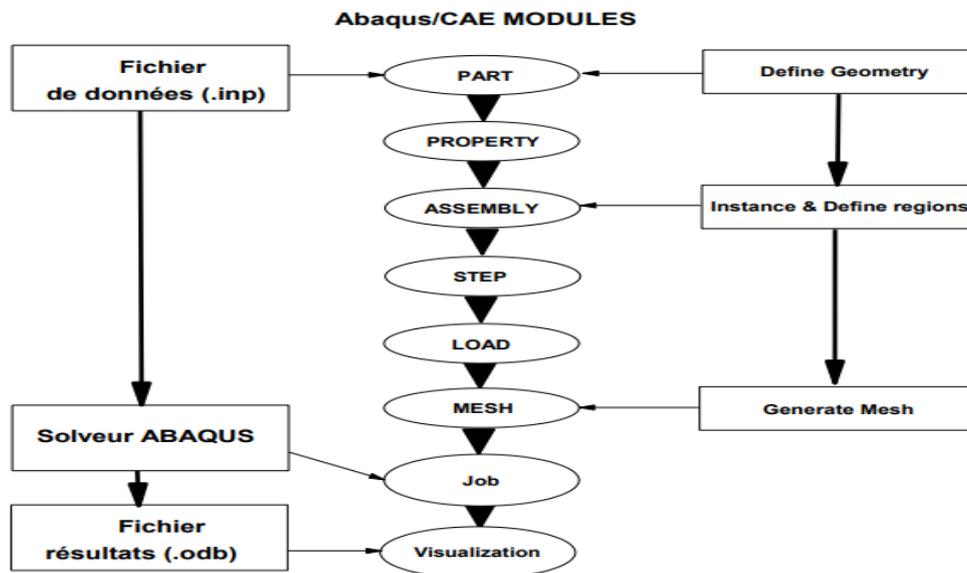


Figure II.4 : Étapes à suivre pour la programmation [8]

Dans le code de calcul Abaqus le fichier de données décrit les géométries, les matériaux, les conditions aux limites avec une extension (.inp) et le fichier de résultats décrit les contours et les courbes résultats avec l'extension (.odb).

### II.7.5 Système d'unités dans le code de calcul Abaqus

Comme dans beaucoup de logiciels, il n'y a pas de système d'unités fixé. C'est à l'utilisateur de définir son propre système (tableau III.1).

Masse	Longueur	Temps	Force	Pression	Energie
M	L	T	$MLT^{-2}$	$ML^{-1}T^{-2}$	$ML^2T^{-2}$
kg	m	s	N	Pa	J
g	mm	ms	N	MPa	mJ
Tonne	mm	s	N	MPa	mJ

Tableau II.1 : Système d'unités pour la modélisation

Le tableau III.1 présente les différentes unités pour la résolution d'un problème mécanique avec le code Abaqus.

### II.8 Conclusion

La MEF est une méthode approchée de calcul numérique permettant de déterminer l'état d'équilibre d'un milieu continu élastique à deux ou trois dimensions. Elle consiste à déterminer de manière approximative les déplacements d'un certain nombre de points du milieu appelés « nœuds ».

Le modèle de déformation présente une interpolation directe sur les déformations et permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration), contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour déplacements.

## ***Chapitre III: Modélisation numérique***

### **III.1 Introduction**

Une défaillance globale peut se produire dans de nombreuses structures d'ingénierie en raison de l'initiation et de la propagation des fissures. Le facteur d'intensité de contrainte est largement utilisé pour étudier l'avancée cyclique d'une fissure dans un solide élastique, ce facteur réside dans la caractérisation du champ de contrainte et de déformation près de la pointe de fissure obtenus à partir des fonctions de contraintes.

Dans de nombreuses applications d'ingénierie, les études expérimentales sur les structures fissurées sont souvent très coûteuses et difficiles en raison de la géométrie compliquée et des conditions aux limites. Par conséquent, l'analyse numérique utilisant la méthode des éléments finis est souvent utilisée pour étudier les paramètres de rupture de ces structures. La détermination analytique du facteur d'intensité de contraintes est extrêmement difficile. En conséquence, la modélisation numérique semble être une bonne alternative. Pour les problèmes de mécanique du solide, la méthode de modélisation numérique la plus fréquente est celle basée sur l'utilisation des éléments finis.

Dans notre étude, on va essayer de mettre en évidence l'influence de la présence d'une ou de deux fissures au voisinage d'une fissure centrale et de déterminer à quelle distance l'influence de celle-ci devient négligeable. Cette influence est quantifiée par le calcul du facteur d'intensité de contrainte, qui est obtenu par modélisation par éléments finis en utilisant le logiciel Abaqus.

### **III.2 Présentation du problème**

L'étude de l'interaction des fissures est menée sur une plaque métallique de forme rectangulaire de dimensions 10 mm X 55 mm contenant une fissure centrale d'une longueur  $a=2$  mm.

On considère que le matériau de la plaque est isotrope avec un module de Young  $E$  et un coefficient de poisson  $\nu$ . Un moment de flexion constant  $M$  est appliqué le long des deux bords gauche et droit de la plaque (Figure III.1).

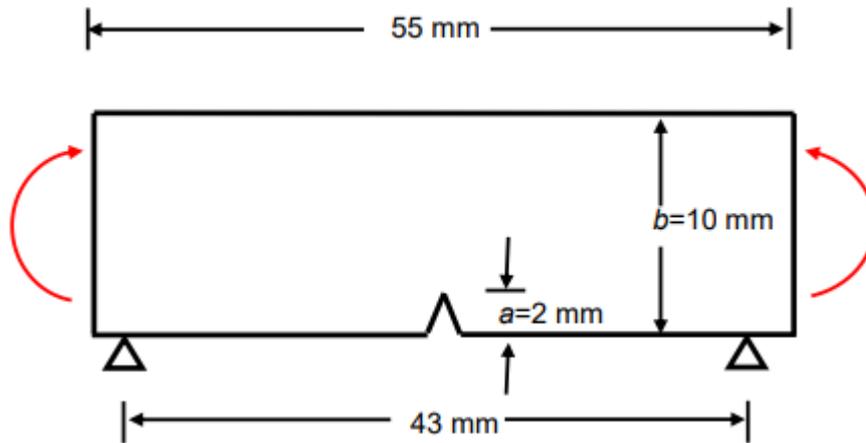


Figure III.1. Géométrie et dimensions de la plaque étudiée

Les données utilisées dans la modélisation sont résumées dans le tableau III.1.

Grandeur	Valeur	Unité
Longueur de la plaque	55	mm
Largeur de la plaque	10	mm
Longueur de fissure $a$	2	mm
Module de Young $E$	2E05	MPa
Coefficient de Poisson $\nu$	0.3	—
Moment de flexion $M$	1075	N.mm

Tableau III.1 : Données relatives de la plaque et du chargement appliqué

### III.3.1 Le maillage utilisé

La modélisation numérique est réalisée en deux dimensions en état de contraintes planes (Figure III.2), et en supposant que le matériau a un comportement linéaire élastique.

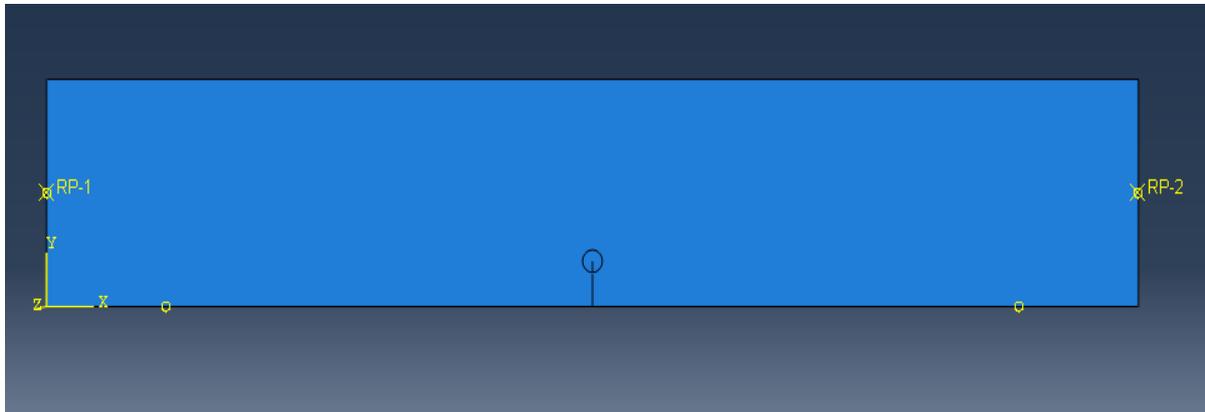


Figure III.2. Présentation la plaque fissurée.

Un ensemble de 1018 éléments est utilisé pour discrétiser la plaque. Des éléments à quatre nœuds bilinéaires quadrilatère sont utilisés (figure III.3). A la pointe de la fissure une zone d'éléments à quatre nœuds bilinéaires quadrilatère est utilisés, et qui est centrée autour de la pointe de la fissure (figure III.5).

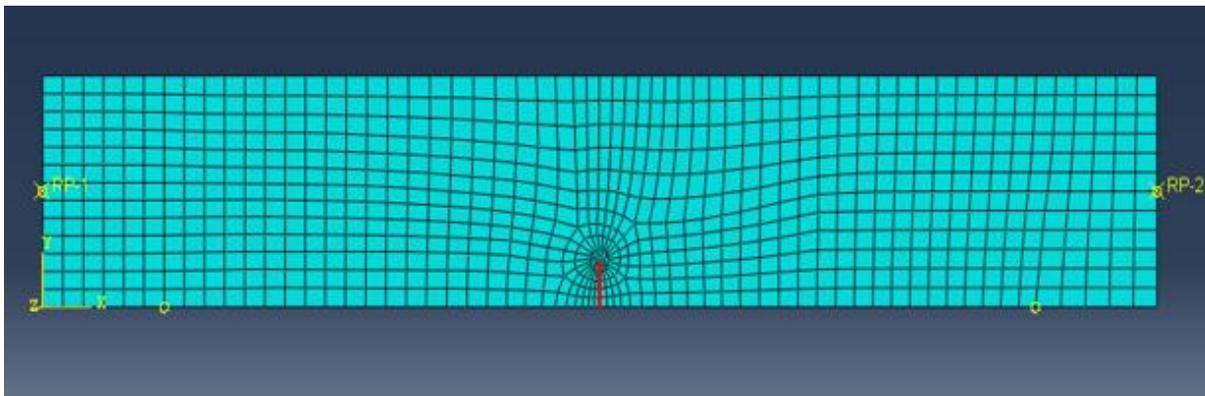


Figure III.3. Maillage utilisé pour la plaque

Un maillage plus fin est utilisé autour de la pointe de la fissure pour avoir une meilleure évaluation du facteur d'intensité de contrainte (figure III.4).

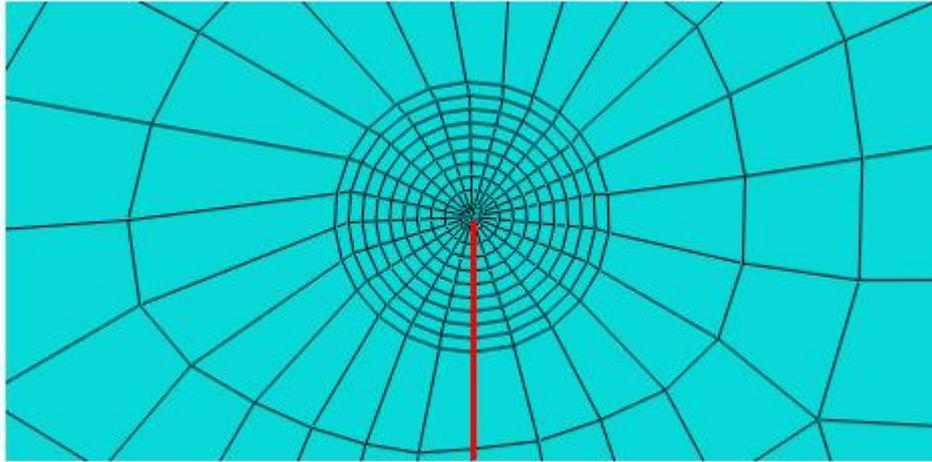


Figure.III.4. Raffinement du maillage autour de la pointe de la fissure

### III.3.2 Calcul du facteur d'intensité de contrainte

La modélisation de la plaque fissurée est effectuée selon trois étapes. La première étape est consacrée à la détermination du facteur d'intensité de contraintes de la plaque ne contenant que la fissure centrale. La deuxième étape considère la présence d'une deuxième fissure à proximité de la fissure centrale. Quant à la troisième étape, deux fissures sont considérées cette fois-ci au voisinage de la fissure centrale. Le facteur d'intensité de contraintes est principalement lié à la longueur de la fissure, de la contrainte appliquée et de la géométrie de la plaque. Rappelons que dans ce cas, la valeur de  $K_I$  est de  $170.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , obtenue grâce à la relation :

$$K_I = \sqrt{\pi a} \cdot \sigma \cdot \alpha \quad (\text{III.1})$$

Avec un facteur de correction géométrique  $\alpha$  de 1.05, obtenu selon la relation suivante :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ 1.99 - 2.47 \left( \frac{a}{h} \right) + 12.97 \left( \frac{a}{h} \right)^2 - 23.17 \left( \frac{a}{h} \right)^3 + 24.80 \left( \frac{a}{h} \right)^4 \right] \quad (\text{III.2})$$

a : La taille de la fissure ; h: La largeur de la plaque

La modélisation par éléments finis permet d'obtenir une valeur de  $K_I$  de  $172.9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , qui est proche de la valeur calculée à partir de la relation III-2. L'indépendance du contour utilisé pour l'obtention du facteur d'intensité de contrainte a tout d'abord été vérifiée. Pour cela, nous avons effectué un calcul sur les 5 premiers contours, de telle sorte que chaque contour présente

une couche d'éléments autour de la fissure. Les valeurs trouvées sont stables à partir du 2<sup>ème</sup> contour (Figure III.5). La documentation d'ABAQUS suggère de prendre la moyenne des calculs issue des différents contours sans prendre en compte la valeur du premier contour.

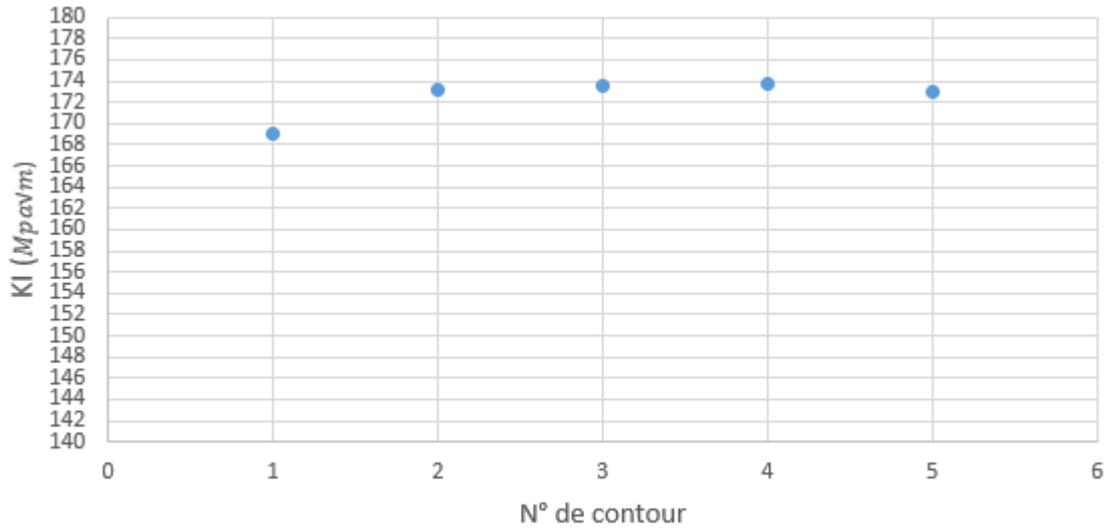


Figure III.5. Evolution de  $K_I$  en fonction des contours

La Figure III.6 montre la distribution des contraintes au sein la plaque. On distingue deux zones, celle près de la pointe de fissure présente une forte concentration de contrainte, avec une contrainte maximale  $\sigma_{\max} = 494$  MPa. Loin de la fissure les contraintes sont pratiquement du même ordre de grandeur que celle de la contrainte appliquée.

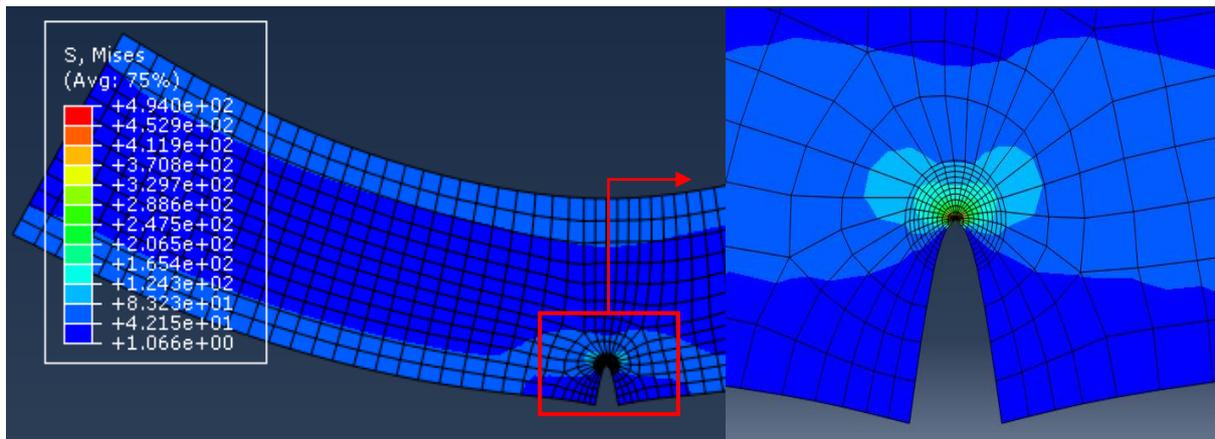
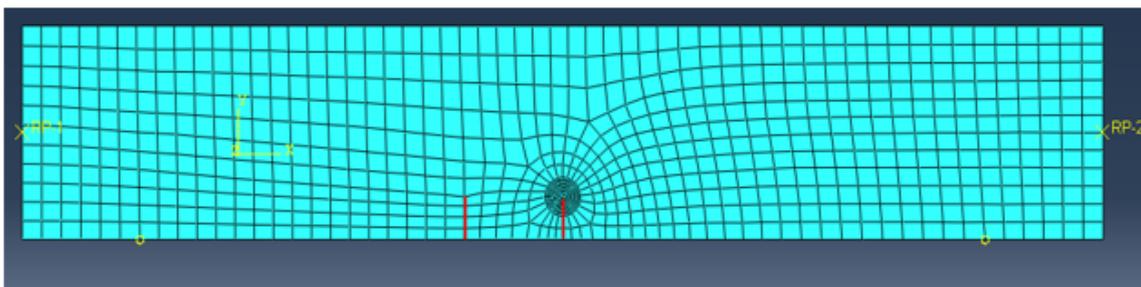
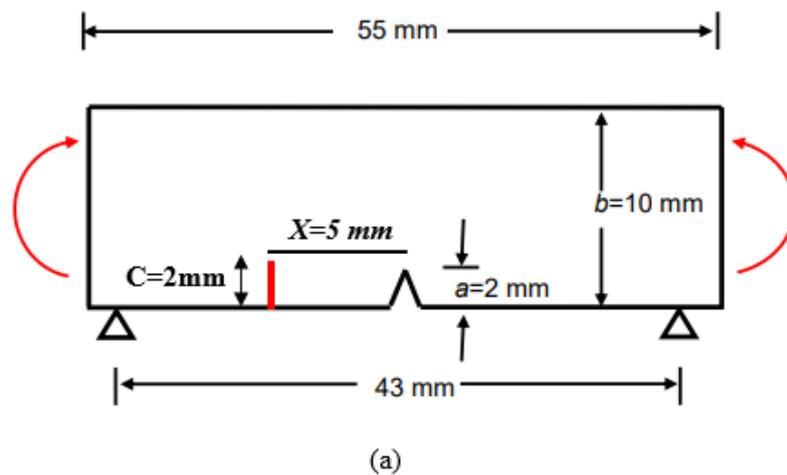


Figure III.6. Répartition des contraintes au sein de la plaque

### III.4 Modélisation dans le cas de deux fissures :

Pour mettre en évidence l'effet de la présence d'une deuxième fissure sur le facteur d'intensité de contrainte, la modélisation sera effectuée pour différentes taille de celle-ci et en faisant varier la distance  $x$  la séparent de la fissure centrale (figure III.7 (a)). La deuxième fissure sera introduite à proximité de la première et le facteur d'intensité de contraintes sera calculé de nouveau. L'effet de la présence de cette deuxième fissure sera décrit par le rapport des deux facteurs d'intensité de contraintes obtenus  $R$ .

$$R = \frac{K_I \text{ de la fissure centrale (fissures multiples)}}{K_I \text{ de la fissure centrale (initial)}} \quad (\text{III.3})$$



(b)

Figure III.7. (a) Représentation de la disposition géométrique des fissures ;  
(b) Maillage de la plaque dans le cas de deux fissures

La figure III.8 présente la distribution de contrainte au sein de la plaque dans le cas de la présence de deux fissures avec  $c = 2$  mm et  $x = 5$  mm. Une forte concentration de contrainte est observée dans les pointes des deux fissures, avec une contrainte maximale  $\sigma_{\max} = 456.1$  MPa.

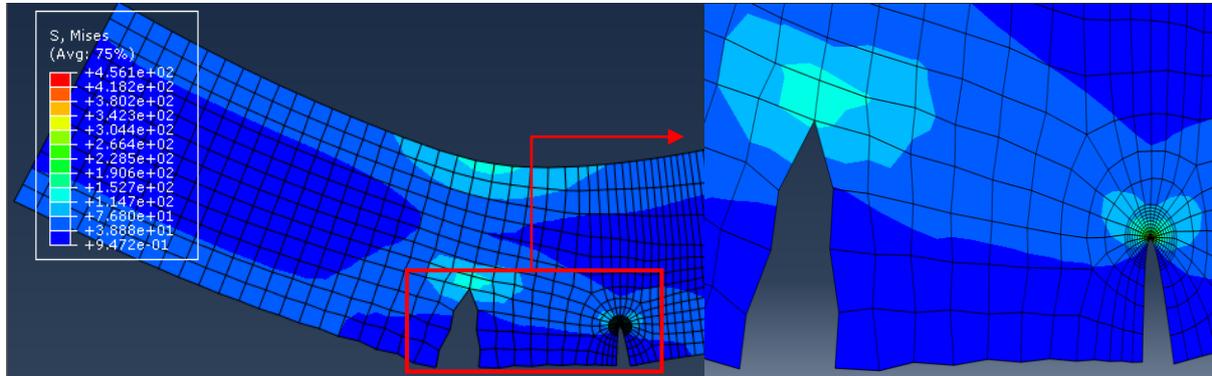


Figure III.8. Distribution des contraintes dans le cas de  $c=2$ mm avec  $x=5$ mm

#### III.4.1 Effet de la position de la deuxième fissure :

Le rapport des facteurs d'intensité de contrainte est calculé pour différentes positions de la deuxième fissure tout en fixant la taille de celle-ci. La position de la deuxième fissure varie de 5mm à 15mm avec un pas de 2mm. La figure III.9 montre la variation du rapport R pour différents distances de  $x$ , dans le cas de  $c = 2$ mm.

Les résultats obtenus (tableau III.2) montrent que la distance  $x$  affecte la valeur du rapport R. Lorsque la valeur de la distance  $x$  augmente, le rapport R augmente à son tour. Il varie de 0.90 pour  $x = 5$ mm à 0.99 pour  $x = 15$ mm.

X (mm)	5	7	9	11	13	15
R	0.90	0.96	0.98	1	1.01	0.99

Tableau III.2. Valeurs de R (cas de deux fissures,  $c=2$  mm)

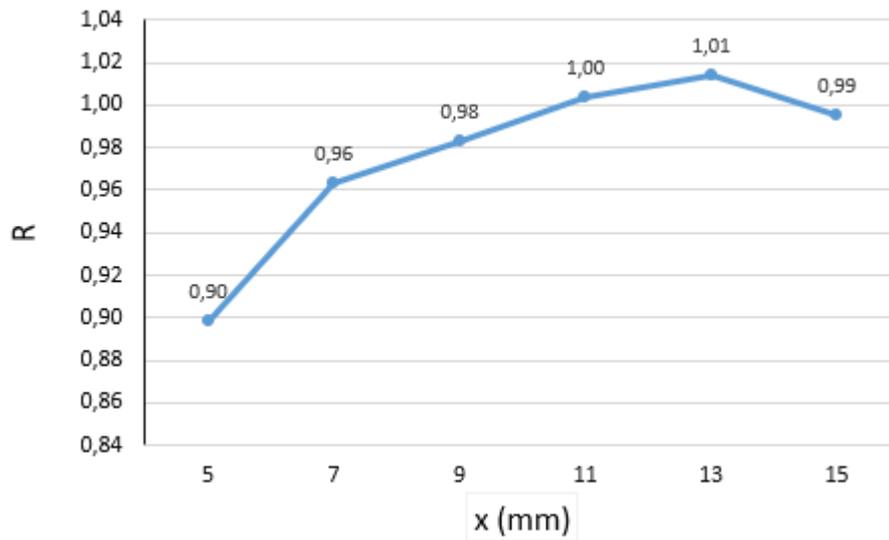


Figure III.9. Variation de R en fonction de la distance x dans le cas  $c = 2\text{mm}$

La relation liant le rapport R à la distance x peut être décrite par une fonction obtenue par régression non linéaire, figure.III.10, sous la forme :

$$R = 1 - 1,06182 * \exp(-0,47151 * x)$$

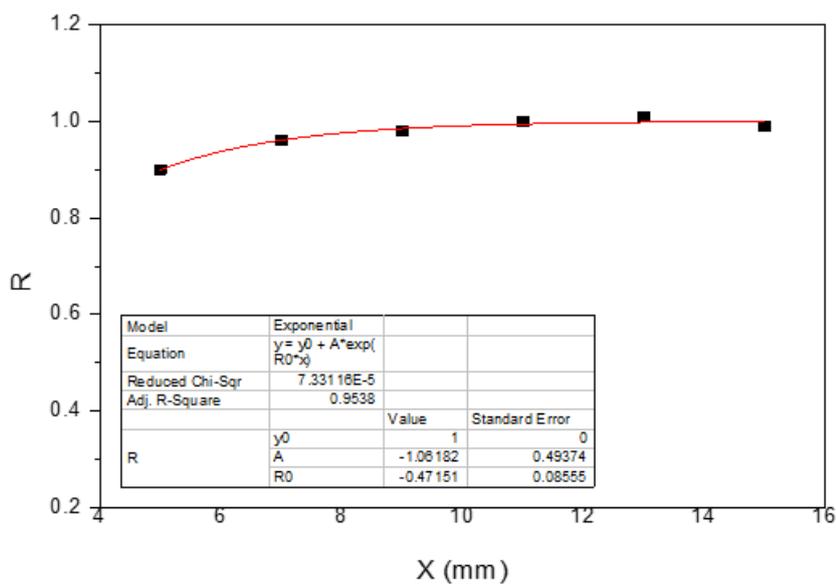


Figure.III.10. Evolution de R en fonction de la distance x dans le cas de  $c = 2\text{mm}$

La figure III.10 montre la variation du rapport R en fonction de la distance x qui sépare les deux fissures, dans le cas de  $c = 2\text{mm}$ .

On remarque que le rapport R tend vers une limite asymptotique au fur et à mesure de l'augmentation de la distance x, et à partir de  $x = 7\text{ mm}$  l'influence de la présence de la deuxième fissure sur le facteur d'intensité de contrainte devient négligeable.

### III.4.2 Effet de la longueur de la deuxième fissure :

Le rapport R des facteurs d'intensité de contrainte est obtenu en faisant varier cette fois-ci la longueur de la deuxième fissure (tableau III.3). Le tableau III.4 présente l'expression du rapport R en fonction de la distance x obtenue pour les différentes valeurs de la longueur de la deuxième fissure c.

X (mm)	5	7	9	11	13	15
R (pour $c = 4\text{ mm}$ )	0.74	0.90	0.96	1	1.01	1
R (pour $c = 6\text{ mm}$ )	0.66	0.88	0.95	0.99	1.04	1

Tableau III.3. Valeurs de R (cas de deux fissures,  $c = 4\text{ mm}$  et  $c = 6\text{ mm}$ )

c (mm)	x (mm)	Expression de R
2	de 5 à 15	$R = 1 - 1,06182 \cdot \exp(-0,47151 \cdot x)$
4	de 5 à 15	$R = 1 - 3,23488 \cdot \exp(-0,50314 \cdot x)$
6	de 5 à 15	$R = 1 - 4,88664 \cdot \exp(-0,53240 \cdot x)$

Tableau III.4. Expression de R en fonction de la distance x pour  $c = 2, 4$  et  $6\text{mm}$

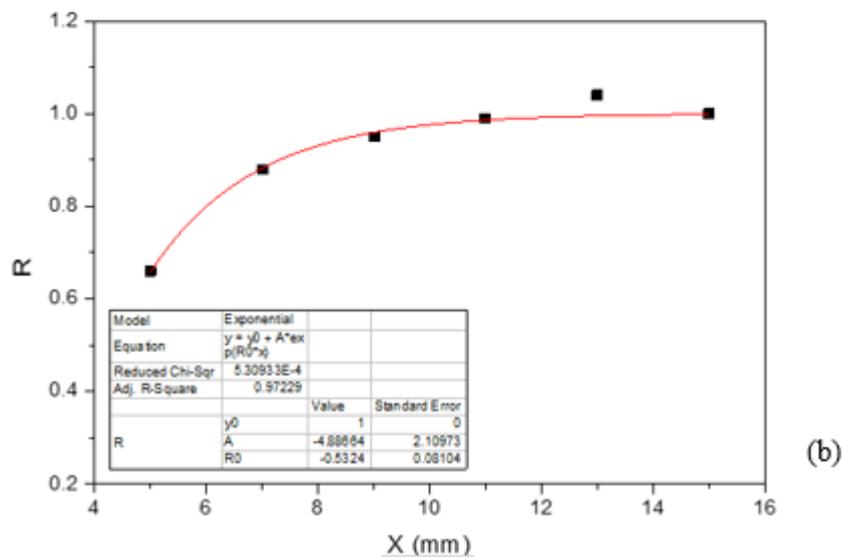
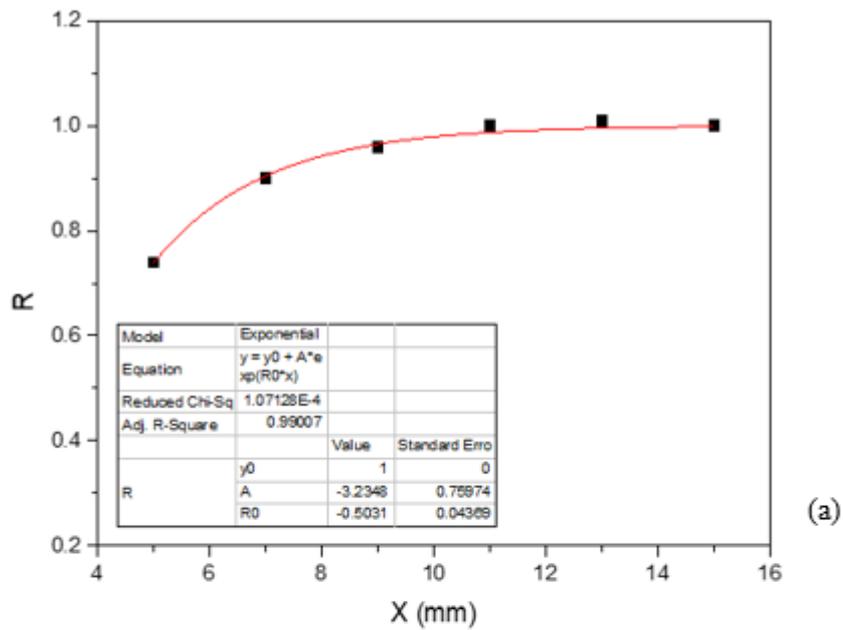


Figure.III.11. Evolution de R en fonction de la distance x dans le cas de  
 (a)  $c = 4\text{mm}$  et (b)  $c = 6\text{mm}$

La figure III.11- a et b montre que pour une taille de  $c = 4\text{mm}$  à une distance  $x = 5\text{mm}$ , l'effet de la présence de la deuxième fissure ne devient négligeable qu'à partir de  $x = 9\text{mm}$ , alors qu'elle ne l'est qu'à partir de  $x = 11\text{mm}$  pour la taille de fissure  $c = 6\text{mm}$ .

### III.5 Modélisation dans le cas de trois fissures :

L'effet de la présence de deux fissures au voisinage de la fissure centrale est étudié cette fois-ci pour différentes tailles des fissures et de la distance les séparant de la fissure centrale, (figure III.12). L'interaction des fissures est exprimée toujours par le rapport R des deux facteurs d'intensité de contrainte calculés.

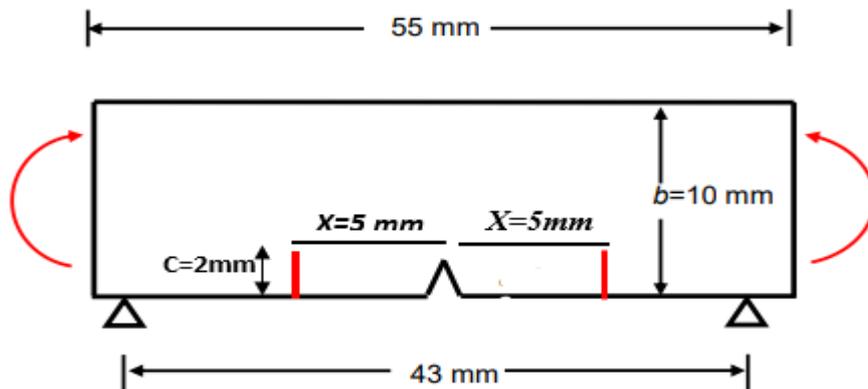


Figure III.12. Représentation de la disposition géométrique des fissures.

La figure III.13 présente la distribution des contraintes au sein de la plaque dans le cas de la présence de trois fissures avec  $c = 2 \text{ mm}$  et  $x = 5 \text{ mm}$ . Une forte concentration de contrainte est observée autour des pointes des trois fissures, avec une contrainte maximale  $\sigma_{\max}=406.5 \text{ MPa}$

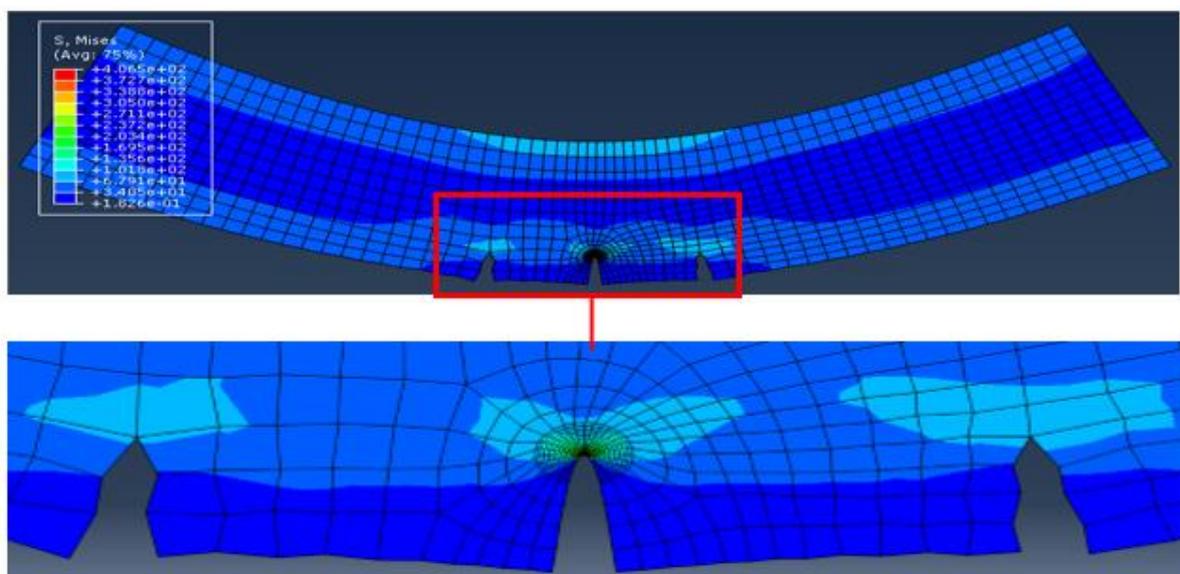


Figure III.13. Distribution des contraintes dans le cas de  $c=2\text{mm}$  avec  $x=5\text{mm}$

### III.5.1 Effet de la position de la deuxième et la troisième fissure :

Le rapport R est calculé pour différentes positions de la deuxième fissure et la troisième fissure tout en fixant la taille celles-ci. La position de la deuxième fissure et la troisième fissure varie de 5mm à 15mm de la fissure centrale avec un pas de 2mm. La figure III.14 montre la variation du rapport R pour différents distances de x, dans le cas de  $c = 2\text{mm}$  et  $x = 5\text{mm}$ .

Les résultats obtenus (tableau III.5) montrent que la distance x affecte la valeur du rapport R. Lorsque la valeur de la distance x augmente, le rapport R augmente à son tour. Il varie de 0.82 pour  $x = 5\text{mm}$  à 1.01 pour  $x = 15\text{mm}$ .

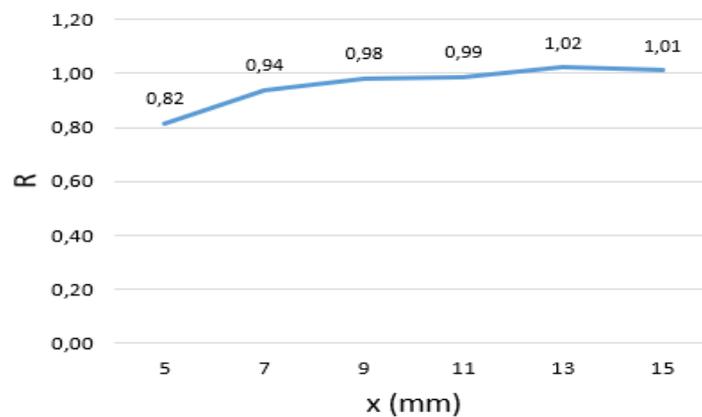


Figure III.14. Variation de R en fonction de la distance x dans le cas  $c = 2\text{mm}$

La relation liant le rapport R à la distance x peut être décrite par une fonction obtenue par régression non linéaire, figure III.15, sous la forme :

$$R = 1 - 3,03294 \cdot \exp(-0,56432 \cdot x)$$

X (mm)	5	7	9	11	13	15
R	0.82	0.94	0.98	0.99	1.02	1.01

Tableau III.5. Valeurs de R (cas de trois fissures,  $c=2\text{ mm}$ )

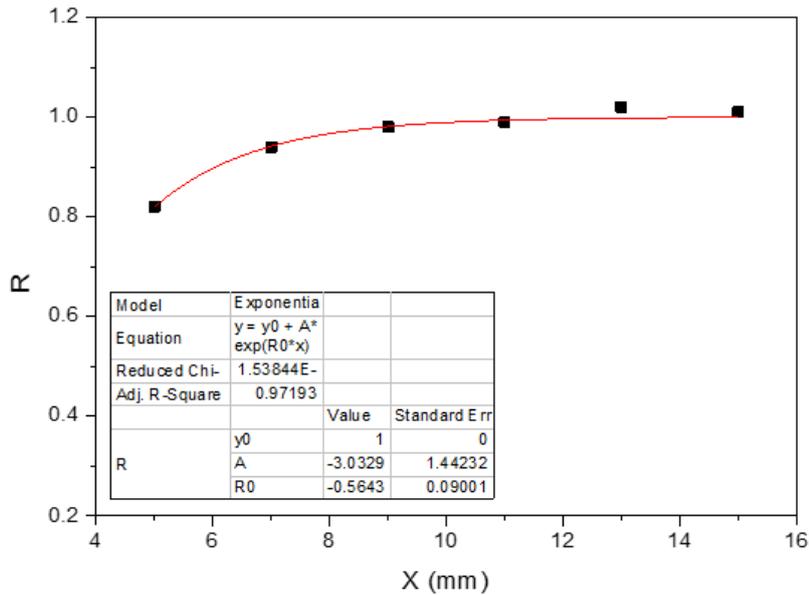


Figure.III.15. Evolution de R en fonction de la distance x dans le cas de  $c=2\text{mm}$

La figure III.15 montre la variation du rapport R en fonction de la distance x qui sépare les deux fissures de la fissure centrale dans le cas de  $c=2\text{mm}$ .

On remarque que le rapport R tend vers une limite asymptotique au fur et à mesure de l'augmentation de la distance x, et qu'à partir de  $x=9\text{mm}$  la présence de des deux fissures n'affecte pratiquement pas la valeur de  $K_I$  de la fissure centrale.

### III.5.2 Effet de la longueur de la deuxième et la troisième fissure sur R :

Le rapport R des facteurs d'intensité de contrainte est obtenu (tableau III.6) en faisant varier la longueur de des deux fissures.

X (mm)	5	7	9	11	13	15
R (pour $c=4\text{ mm}$ )	0.49	0.80	0.95	0.99	1	1.02
R (pour $c=6\text{ mm}$ )	0.29	0.72	0.94	0.98	1.01	1.01

Tableau III.6. Valeurs de R (cas de trois fissures,  $c=2\text{ mm}$  et  $c=4\text{ mm}$ )

Le tableau III.7 présente l'expression du rapport R en fonction de la distance x obtenue pour les différentes valeurs de la taille des deux fissures c.

c (mm)	x (mm)	Expression de R
2	de 5 à 15	$R = 1 - 3,03294 \cdot \exp(-0,56432 \cdot x)$
4	de 5 à 15	$R = 1 - 6,8971 \cdot \exp(-0,5194 \cdot x)$
6	de 5 à 15	$R = 1 - 9,78887 \cdot \exp(-0,52315 \cdot x)$

Tableau III.7. Expression de R en fonction de la distance x pour c= 2, 4 et 6mm

La figure III.16- a et b montre que pour une taille de c =4mm, l'effet de la présence de deux fissures au voisinage de la fissure centrale ne devient négligeable qu'à partir de x = 11 mm, alors qu'elle ne l'est qu'à partir de x = 11 mm pour la taille de fissure c = 6 mm.

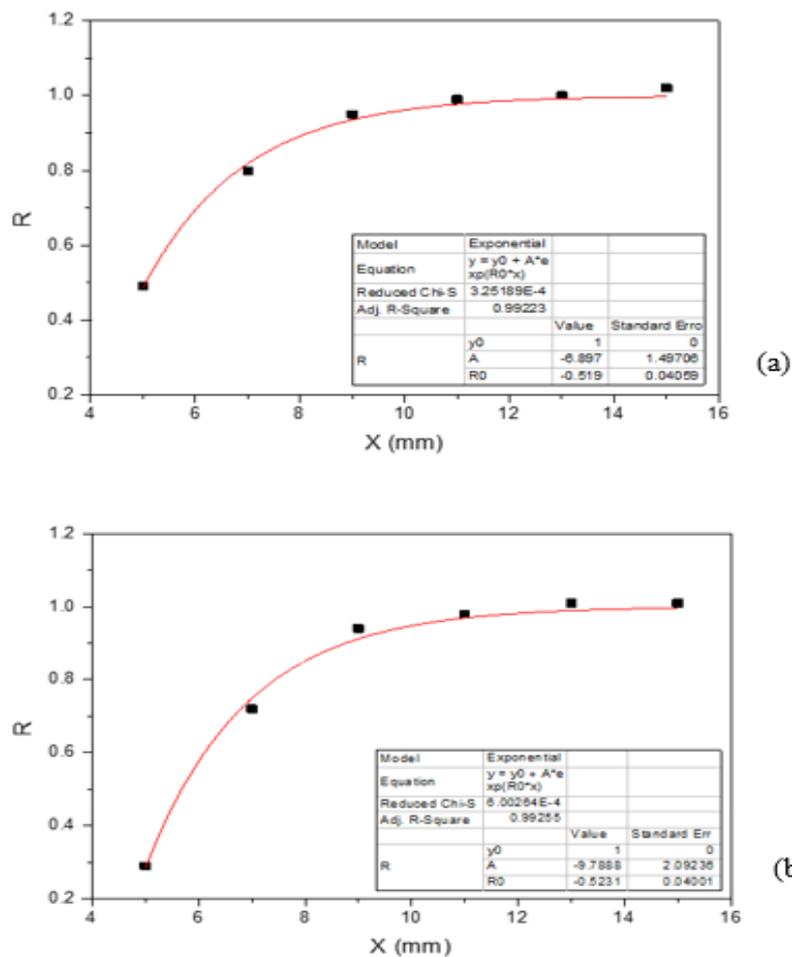


Figure III.16. Evolution de R en fonction de la distance x dans le cas de (a) c= 4mm et

(b) c=6mm

### **III.7 Conclusion**

La modélisation par éléments finis de l'interaction des fissures montrent que la variation du facteur d'intensité de contraintes de la fissure centrale dépend de sa distance des fissures avoisinantes ainsi que de leur taille. L'effet de la présence de ces fissures est très important sur le FIC de la fissure centrale lorsqu'elles sont très proches de celle-ci.

## *Conclusion générale*

## **Conclusion générale**

Le travail présenté dans ce mémoire est consacré à la modélisation par éléments finis, en utilisant le logiciel Abaqus, pour étudier l'influence de l'interaction des fissures sur le facteur d'intensité de contrainte. Cette analyse se base sur l'utilisation du rapport R, défini comme étant le rapport des facteurs d'intensité de contraintes obtenu pour la plaque ne contenant que la fissure centrale et celle contenant une ou deux autres fissures à son voisinage. Les résultats obtenus montrent que la présence d'autres fissures dans une plaque contenant déjà une fissure affecte la distribution des contraintes au sein de la plaque. D'autre part, selon sa disposition géométrique et la taille de ces fissures, le facteur d'intensité de contraintes de la fissure centrale peut être affecté considérablement. Plus la distance de ces fissures augmente, plus leur influence diminue jusqu'à ce qu'elle devient négligeable.

## Références bibliographiques

- [1] Ahmed BENHAMOUDA (ETUDE DU COMPORTEMENT DES FISSURES DANS LES TUBES SOUS PRESSION INTERNE), Université Mentouri Constantine, 2010.
- [2] Zoumana SOUMAHORO, « ETUDE DU COUPLAGE THERMOMECHANIQUE DANS LA PROPAGATION DYNAMIQUE DE FISSURE », thèse de Doctorat.l'Ecole Polytechnique ,2005.
- [3] Taoufik Boukharouba « ETUDE DU COMPORTEMENT EN FATIGUE DES FISSURES SEMI-ELLIPTIQUES, APPLICATION AUX PLAQUES EN FLEXION ET AUX TUBES SOUS PRESSION INTERNE », thèse Doctorat, Université de Metz, 1995.
- [4] Zaghoul A, "Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture", Université de Lorraine, 2016.
- [5] Bounejmate Sarah & Bouyahya Salma (Résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis), Université Mohammed V, 2015.
- [6] MEFTEH KAMEL, Cours : Introduction général au logiciel Abaqus université de Biskra. 2013.
- [7] M. SARTOR, « Eléments finis », Notes de cours, Chapitre 01.
- [8] Tahar Nateche (Réhabilitation et Renforcement des Canalisations sous pression en présence des défauts de surfaces), Université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf, 2008.