



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique



جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Département d'instrumentation

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: Génie industriel

Spécialité: Génie industriel

Thème

Le contrôle optimal en utilisant la paramétrisation de Youla

Présenté et soutenu publiquement par :
BOUHANIA Abderrahmane
Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
AOUIMER Yamina	MAA	IMSI	Présidente
MEKKI Ibrahim el khalil	MAA	IMSI	Encadreur
ZEBIRATE Soraya	Professeur	IMSI	Examinatrice

Juin 2016



REMERCIEMENTS

Avant tous je voudrai remercier Allah qui ma permis d'arriver la ou je suis, et de conclure ce modeste travail, et de remercier mes parents pour leur sacrifice, durant toute ma scolarité et soucieux de mon avenir.

Je voudrai témoigner de ma grande gratitude envers le Docteur I.MEKKI, qui m'a apporté toute l'aide dont j'avais besoin, et pour toutes les connaissances que j'ai pu acquérir sous sa direction, je voudrai tout spécialement le remercier pour sa patience.

Mes vifs remerciements vont aussi aux membres du jury qui ont accepté de juger ce modeste travail.

Et toutes les personnes, qui ont contribué de près ou de loin, directement ou indirectement à ce travail, trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Enfin je ne pourrais terminer ces remerciement sans une pensée à l'ensemble des mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Merci



SOMMAIRE

Introduction générale	1
<i>Chapitre I : la théorie de la commande H_∞/H_2</i>	
I.1 Introduction	3
I.2 Représentation de système	3
I.3 Incertitudes.....	5
I.3.1 Incertitudes structurées.....	5
I.3.2 Incertitudes non structurées.....	5
I.4 Valeurs singulières.....	7
I.5 Conditions de robustesse.....	7
I.5.1 Condition de robustesse sur la stabilité.....	8
I.5.2 Condition de Robustesse sur les performances.....	8
I.5.3. Condition de Robustesse sur la commande	9
I.6 Commande H_∞	9
I.6.1 Définition Norme H_∞	9
I.6.2 Formulation du Problème standard.....	10
I.6.3 Commande robuste par H_∞	11
I.6.4 Problème d'optimisation par H_∞	13
I.6.5 Sensibilité Mixte.....	15
I.6.6 Procédure d'optimisation par H_∞	17
I.7 Commande H_2	18
I.7.1 Problème de performance H_2	18
I.7.2 Calcul de la norme H_2	19
I.7.3 Problème de Synthèse H_2	19
I.8 Conclusion.....	22

Chapitre II : la paramétrisation de Youla

II.1 introduction	24
II.2 Historique.....	24
II.3 Définition.....	25
II.3.1 Théorème 1 : Factorisation première.....	26
II.3.2 Théorème 2 : Paramétrisation de Youla.....	26
II.4 Propriétés.....	27
II.5 Interprétations pour un système stable.....	31
II.5.1 Correcteur à un degré de liberté.....	31
II.5.2 Correcteur à deux degrés de liberté.....	32
II.6. Introduction à l'optimisation convexe	34
II.6.1. Ensemble convexe.....	35
II.6.1.1. Définition.....	35
II.6.1.2. Propriétés.....	35
II.6.2. Fonction convexe.....	35
II.6.2.1. Définition.....	35
II.6.2.2. Interprétation géométrique.....	36

II.6.2.3. Propriétés.....	36
II.6.3. L'optimisation convexe.....	37
II.6.4. Algorithmes de résolution.....	37
II.7. Spécifications en boucle fermée.....	38
II.7.1. Motivations de la formulation des spécifications en boucle fermée.....	38
II.7.2. Ensemble de transfert atteignable par des correcteurs stabilisants.....	38
II.7.3. Contraintes et critères convexes.....	39
II.7.4. Contrainte d'enveloppe temporelle.....	39
II.8 Conclusion.....	40

Chapitre III : observateur/retour d'état

III.1. Introduction.....	41
III.2. La notion de Commandabilité et l'observabilité.....	41
III.2.1. Commandabilité.....	41
III.2.2. Critère de Commandabilité Kalman	41
III.2.3. Observabilité.....	42
III.2.4. Critère d'observabilité Kalman	42
III.3. La commande à retour d'état observé.....	42
III.4. Représentation d'état du système en boucle fermée.....	43
III.5. régulateur/observateur.....	44
III.6. La paramétrisation de youla et régulateur/ observateur.....	45
III.7. Synthèse de Q-paramétrisation de youla et observateur/régulateur.....	46

Chapitre IV : Optimisation LMI

IV.1. Introduction.....	49
IV.2. Inégalités matricielles affines.....	49
IV.2.1. Inégalité matricielle affine ou linéaire.....	49
IV.2.2. Positivité.....	50
IV.3. Problème d'optimisation sous contraintes LMI.....	50
IV.3.1. Problème de Faisabilité.....	52
IV.3.2. Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire.....	53
IV.3.3. Problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale.....	53
IV.4. Les outils techniques pour la formulation LMI.....	53
IV.4.1. Lemme de Schur.....	53
IV.4.2 Lemme d'élimination.....	54
IV.4.3 Lemme S-procedure.....	54
IV.4.4 Lemme corollaire de la S-procédure.....	54
IV.5. formulation de quelque critère.....	55
IV.1. Formulation du nome H_{∞}	55
IV.1.1. Caractérisation matricielle.....	55
IV.1.2. Synthèse H_{∞}	55
IV.1.2.1. Synthèse H_{∞} par retour d'état.....	55
IV.1.2.2. Synthèse H_{∞} par retour de sortie.....	57
IV.2. Formulation du nome H_2	57
IV.2.1. Caractérisation matricielle.....	57
IV.2.2. Synthèse H_2	58

IV.2.2.1. Synthèse H2 par retour de sortie.....	58
IV.2.2.2. Synthèse H2 par retour d'état.....	59
IV.3. α -stabilité.....	60
IV.3.1. Définition.....	60
IV.3.1.1. Cas discret.....	60
IV.3.1.2. Cas continu.....	60
IV.3.2. Caractérisation matricielle.....	60
IV.3.2.1. Cas continu.....	60
IV.3.2.2. Cas discret.....	61
IV.3.3. Synthèse α -stabilité.....	61
IV.3.3.1. Synthèse α -stabilité par retour d'état.....	61
IV.3.3.2. Synthèse α -stabilité par retour de sortie.....	62
IV.6.Conclusion	62

Chapitre V : application sur un bras flexible

V.1.Introduction	63
V.2.Problème multicritère	63
V.3.Linéarisation des inégalités matricielles	64
V.3.1. Problème H_{∞}	65
V.3.2. Problème H2.....	65
V.3.3. Problème α –stabilité.....	65
V.4.Modilisation de système.....	66
V.4.1. Objectif	66
V.4.2. Descriptions de système étudié bras flexible	66
V.5.Synthèse.....	72
V.6.Conclusion.....	76
Conclusion générale.....	78
Reference bibliographiques.....	80
Annex A	
Annex B	

List des figures et tableaux

Liste des figures

Fig. I.1. Configuration de système	3
Fig. I.2. Perturbation additive.....	6
Fig. I.3. Perturbation multiplicative en entrée.....	6
Fig. I.4. Perturbation multiplicative à la sortie.....	7
Fig. I.5. Schéma synoptique du problème standard.....	10
Fig. I.6. Formulation du problème Standard.....	11
Fig. I.7. Problème standard représentation LFT	11
Fig. I.8. problème de sensibilité mixte sous forme standard.....	16
Fig. I.9. Organigramme de procédure d'optimisation par H_∞	18
Fig. I.10. La synthèse optimale H_2	21
Fig. I.11. correcteur H_2 sous optimal.....	22
Fig. II.1. La Paramétrisation de Youla.....	24
Fig. II.2. Le principe de la Paramétrisation de Youla.....	25
Fig. II.3. Boucle fermée classique avec retour positif.....	25
Fig. II.4. Représentation standard Paramétrisation de Youla.....	27
Fig. II.5. Représentation standard sans incertitude.....	28
Fig. II.6. Correcteur sous forme LFT.....	28
Fig. II.7. Correcteur initial modifié.....	29
Fig. II.8. Correcteur initial modifié avec la Paramétrisation de Youla.....	29
Fig. II.9. Paramétrisation de Youla pour un système stable.....	32
Fig. II.10. Paramétrisation de Youla pour un système stable. Structure par modèle interne.	32
Fig. II.11. Correcteur à deux degrés de liberté.....	32
Fig. II.12. Correcteur à deux degrés de liberté sous structure de bouclage standard.....	33
Fig. II.13. Paramétrisation de Youla pour un système stable. Correcteur à deux degrés de liberté.....	34
Fig. II.14. Paramétrisation de Youla pour un système stable. Structure de modèle interne pour le correcteur à deux degrés de liberté.....	34
Fig. II.15. Convexité d'une fonction.....	36
Fig. II.16. Exemple de contraintes temporelles.....	40
Fig. III.1. Structure de commande à retour d'état observé.....	43
Fig. III.2. Représentation du système MIMO.....	44
Fig. III.3. Structure d'état de l'observateur/régulateur.....	44
Fig. III.4. Représentation de la paramétrisation de youla et régulateur/ observateur.....	45
Fig. III.5. Réécriture de la paramétrisation de Youla.....	46
Fig. III.6. Réécriture de la paramétrisation de Youla.....	46
Fig. III.7. Structure dus système J d'interconnexion.....	47
Fig. III.8. Structure d'observateur/régulateur et Q-paramétrisation de Youla.....	48
Fig. V.1. Boucle de correction.....	63
Fig. V.2. La forme générale de la paramétrisation de Youla	64
Fig. V.3. Module de bras flexible.....	66
Fig. V.4. Illustration de bras flexible.....	66
Fig. V.5. Le bras flexible au repos.....	67
Fig. V.6. Le bras flexible déplacement.....	67

List des figures et tableaux

Fig. V.7. le modèle dynamique simplifié de système.....	68
Fig. V.8. Modèle de connaissance du système.....	70
Fig. V.9. bras flexible.....	70
Fig. V.10. la représentation de bras flexible.....	70
Fig. V.11. vue 3D de bras flexible.....	71
Fig. V.12. vue Au dessus de bras flexible.....	71
Fig. V.13. Système augmenté du système.....	72
Fig. V.14. La réponse de la fonction de transfert en boucle ouverte.....	73
Fig. V.15. Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte.....	73
Fig. V.16. Diagramme de Bode des fonctions de pondération.....	74
Fig. V.17. Diagramme de Bode de la fonction du correcteur.....	74
Fig. V.18. Rejet de perturbation.....	74
Fig. V.19. Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée.....	75
Fig. V.20. Diagramme de Bode des valeurs singulières de fonctions sensibilités.....	75
Fig. V.21. Réponse du système en boucle fermée.....	76

Tableaux

Tableau des valeurs des paramètres de bras flexible *annexe B*

LISTE DES SYMBOLES :

\mathbb{R}	corps des nombres réels
\mathbb{C}	corps des nombres complexes
\mathbb{C}^+	demi-plan complexe droit
\mathbb{C}^-	demi-plan complexe gauche
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espace vectoriel de Hilbert des matrices réelles de dimension $n \times m$
$\mathbb{C}^{n \times m}$	espace vectoriel de Hilbert des matrices complexes de dimension $n \times m$
$\ T\ _\infty$	norme H_∞ de la matrice de transfert T
$\ T\ _2$	norme H_2 de la matrice de transfert T
\mathcal{S}^n	sous-espace vectoriel des matrices symétriques de dimension n
s	variable de Laplace
z	Variable complexe de La transformée en Z (domaine discret)
$\lambda_{\max}(G(s))$	Valeur propre maximale d'une matrice de transfert $G(s)$
$\lambda_{\min}(G(s))$	Valeur propre minimale d'une matrice de transfert $G(s)$
$\bar{\sigma}(G(s))$	Valeur singulière maximale d'une matrice de transfert $G(s)$
$\underline{\sigma}(G(s))$	Valeur singulière minimale d'une matrice de transfert $G(s)$
\triangleq	égal par définition
$X_T (X^*)$	transposée (transposée conjuguée) de la matrice
X_\perp	matrice vérifiant $XX_\perp = 0$ et $[X^T X_\perp]$ de rang plein
LMI	inégalité matricielle linéaire (de l'anglais Linear Matrix Inequality)
LFT	représentation linéaire factionnaire (de l'anglais Linear Fractional ransformation)

Introduction générale

Introduction générale :

Un grand nombre de problèmes concernant les systèmes dynamiques peuvent se mettre sous forme de problèmes d'optimisation convexe d'un type particulier nommé des LMIs (Linear Matrix Inequalities). L'intérêt principal des LMIs est la possibilité de calculer le minimum global.

L'histoire des LMIs a plus de 100 ans, elle semble avoir débuté en 1890 quand Lyapunov montra que la stabilité du système autonome $\dot{x} = Ax$ est équivalent à l'existence d'une matrice symétrique définie positive telle que : $A^T P + PA < 0$ il a même montré qu'il est possible de résoudre analytiquement ce problème.

Dans les années 1940, l'école russe menée par Lur'e et Postnikov énonce des critères de stabilités, en particulier pour des systèmes non linéaires, sous forme de LMI celles-ci étaient résolues analytiquement pour des systèmes de petits tailles.

Au début des années 1970, on montre que certaines LMIs peuvent être résolues en terme d'équation algébrique de Riccati, on retiendra à ce propos les travaux de Willems.

La dernière pierre de cette évolution repose sur la formulation des problèmes classique d'automatique en tant que problème d'optimisation convexe. Phatnitskii et Skorodinski réduisent le problème de Lur'e sous la forme d'un problème convexe qu'ils résolvent numériquement en utilisant l'algorithme de l'ellipsoïde en 1982. On assiste alors durant les années 1980-1990 au développement des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation convexe.

Les travaux actuels se concentrent sur les formulations possibles des problèmes d'automatique en tant que problèmes d'optimisation convexe sous contrainte LMI et l'amélioration des méthodes numériques de résolution des LMIs. Ces dernières concernant la minimisation des temps de calcul qui restent encore importants, et les problèmes de convergence lorsque la taille de problème devient grande.

Dans cet mémoire nous allons voir, comment nous pouvons exprimer le problème standard H_∞ / H_2 sous forme d'un problème d'optimisation convexe, et de chercher la loi de commande en utilisant les LMIs Notre mémoire est organisée de la façon suivante :

Dans le chapitre I on synthétise un correcteur initial en utilisant les algorithmes classiques tels qu'optimisation H_∞ ou H_2 . on définit les objectifs de synthèses ainsi que l'introduction des notions utilisées tout le long de ce mémoire.

En donne dans le chapitre II les notions et les propriétés de la paramétrisation de youla qui est un outil intermédiaire pour le chapitre IV a cause de ces propriété qui rendent les

Introduction générale

inégalités linéaires sous problèmes convexes et de paramétrisation permettant de caractériser l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire invariant par l'ensemble des transferts stables.

La notion de paramétrisation de Youla qui permet de caractériser l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire invariant par l'ensemble des transferts stables. mais la mise en œuvre pratique de cette paramétrisation permet aussi de structurer un correcteur dynamique sous forme d'un observateur et d'un retour d'état. Le troisième chapitre est consacré à l'étude illustrative de cette structuration qui utilise la représentation d'état d'un système bouclé par un correcteur de type d'observateur /régulateur, cette représentation permet de définir la représentation d'état du système interconnecté.

Le quatrième chapitre est consacré à l'optimisation LMI, on met sous forme d'optimisation avec des contraintes LMI un problème connu. Présentation des formes de résolutions d'un problème convexe et étude approfondie des trois critères H_2 , H_∞ et α -stabilité sous optimisation LMI comme une base générale illustrative sur l'optimisation convexe sous contrainte LMI.

Finalement on terminera avec une application sur un bras flexible.

Chapitre I

La théorie de la commande H^∞/H^2

I.1 Introduction :

Parmi les objectifs d'un correcteur est de garantir aux systèmes la stabilité en boucle fermée. Il est devenu également important de garantir de bonnes performances, donc d'avoir un fonctionnement optimal.

L'utilisation de techniques de synthèse de contrôleurs garantissant une « robustesse » est une caractéristique importante. Les commandes devront assurer la stabilité d'une gamme de modèles, défini par le modèle nominal et par les incertitudes entre les différents modèles considérés. La stabilité assurée, il faut aussi veiller à satisfaire un fonctionnement optimal, c'est-à-dire, trouver les meilleures performances possibles pour le procédé en boucle fermée.

Un système est dit robuste s'il demeure stable malgré les variations attendues des paramètres. Il faut trouver un contrôleur pour un système donné, de telle sorte à ce que la robustesse en boucle fermée soit toujours garantie.

Depuis la fin des années 80, les théories de la synthèse H_2 et de la synthèse H_∞ sont bien établies. Ce sont principalement les applications de ce type de synthèse dans l'espace d'état à des cas pratiques de plus en plus complexes qui se sont développées ces dernières années. La synthèse H_∞ est essentiellement fondée sur l'analyse de la performance dans le pire des cas alors que la norme H_2 reflète une performance moyenne. Face à ces deux constats, l'idée d'associer ces deux types de performance est donc apparue relativement naturelle d'autant que les approches H_2 et H_∞ partagent le même formalisme fondé sur le problème standard. Pour cette raison, nous avons choisi de focaliser notre attention sur le problème mixte H_2/H_∞ .

Dans ce qui suit, nous présenterons les étapes pour la synthèse de contrôleurs robustes par H_∞ et H_2 . Mais auparavant, on s'intéresse la formulation du problème standard qui constitue un outil de base pour la commande robuste.

I.2 Représentation de système :

Le système en boucle fermée avec perturbations est représenté sur la figure ci-dessous (figure I.1), et en donne par la suite les configurations de système bouclé et les matrices de transfert.

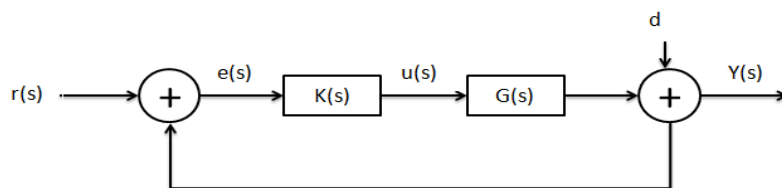


Fig. I.1. Configuration de système

Avec : $y(s)$: sorties ; $r(s)$: entrées (références) ; $u(s)$:commandes ; $e(s)$:erreurs ;
 $d(s)$:perturbations

Le rôle le très important de toute commande $u(s)$ obtenue à partir d'un contrôleur $K(s)$ est d'avoir un signal d'erreurs $e(s)$ le plus faible possible.

On donne les différents expressions des signaux qu'ils seront utiles pour le problème de commande de système.

Le signal de sorties du système en boucle fermée :

$$y(s) = G(s)u(s) + d(s) \quad (1.1)$$

L'expression de signal de commande $u(s)$:

$$u(s) = K(s)e(s) \quad (1.2)$$

Le signal d'erreurs $e(s)$ est donner l'expression suivante :

$$e(s) = r(s) - y(s) \quad (1.3)$$

En substitue $e(s)$ par l'expression (1.3), les commandes $u(s)$ est donnée par (1.4):

$$u(s) = K(s)(r(s) - y(s)) \quad (1.4)$$

On remplaçant le signal de commandes $u(s)$ par l'expression (1.4), le signal de sorties sera :

$$y(s) = G(s) K(s) (r(s) - y(s)) + d(s) \quad (1.5)$$

Après simplification de l'expression du signal de sorties $y(s)$ représenter par (1.6) :

$$y(s) = (I + G(s) K(s))^{-1} G(s) K(s) r(s) + (I + G(s) K(s))^{-1} d(s) \quad (1.6)$$

On définit les matrices de transfert suivantes :

- Boucle ouverte : $L(s) = G(s) K(s) \quad (1.7)$

- Sensibilité : $S(s) = (I + L(s))^{-1} \quad (1.8)$

- Sensibilité complémentaire (Transfert) : $T(s) = L(s) (I + L(s))^{-1} \quad (1.9)$

- Complémentarité Sensibilité - Transfert : $S(s) + T(s) = I \quad (1.10)$

- Transfert par rapport à la commande : $R(s) = K(s) (I + L(s))^{-1} \quad (1.11)$

On considère le signal des perturbations est nul ($d = 0$),on obtient alors :

$$y(s) = (I + G(s) K(s))^{-1} G(s)K(s)r(s) = T(s)r(s) \quad (1.12)$$

$$u(s) = K(s)(r(s) - y(s))= K(s)(I- T(s))r(s) = K(s)S(s)r(s) = R(s) r(s) \quad (1.13)$$

$$e(s) = (r(s) - y(s)) = (I - T(s))r(s) = S(s)r(s) \quad (1.14)$$

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D \quad (1.15)$$

I.3 .Incertitudes :

On vient de voir que les modèles utilisés pour la commande robuste se constituent d'un modèle nominal $G(s)$ et d'un modèle pour les incertitudes $\Delta(s)$. Le modèle mis en place traduit les relations entre les commandes et les sorties. La qualité du modèle dépend du faible écart avec les dynamiques du régime réel.

Il existe deux types des incertitudes : structurées et non structurées [1].

I.3.1 Incertitudes structurées :

En général, un système possède des incertitudes multiples et localisées. Le problème d'analyse de la stabilité robuste avec ce type d'incertitudes peut alors se ramener à une matrice d'incertitudes sous forme diagonale formée de blocs réels ou complexes, parfois répétés.

Les incertitudes structurées concernent les variations paramétriques des dynamiques des procédés et les coefficients des équations différentielles du procédé, elle engendre une forme de structuration dans la matrice des incertitudes Δ [2]

I.3.2 Incertitudes non structurées :

Les perturbations peuvent être rassemblées sous forme d'un seul et unique bloc Δ , qui représente les dynamiques en hautes fréquences. Ceci est dû au fait que des dynamiques sont négligées au cours de la modélisation. Cette représentation des incertitudes est dite « non structurée ».

Dans le cas des systèmes linéaires, le bloc d'incertitudes est symbolisé sous la forme d'une matrice de transfert. On représente cette matrice de transfert en fonction du procédé réel $G_p(s)$ et du modèle nominal $G(s)$. Les différents types d'incertitudes non structurées sont au nombre de trois : additives, multiplicatives en entrée et multiplicatives à la sortie ([3], [1]).

Elles peuvent se représenter à l'aide du schéma bloc suivant :

- Incertitudes additives :

Les formes additives se définissent comme des incertitudes absolues vis à vis du modèle nominal elles peuvent se représenter à l'aide du schéma bloc suivant :

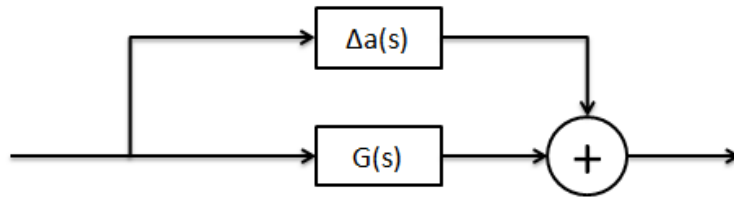


Fig. I.2. Perturbation additive

L'expression des régimes perturbés est :

$$G_p(s) = G(s) + \Delta a(s) \tag{1.17}$$

Telles que : $G(s)$: modèle nominal du système.

$G_p(s)$: modèle réel du système.

$\Delta a(s)$: incertitude additive.

- Incertitudes multiplicatives en entrée :

Les formes multiplicatives en entrée se définissent comme des incertitudes relatives vis à vis de l'entrée du modèle nominal. Elles sont représentées par le schéma bloc ci-dessous :

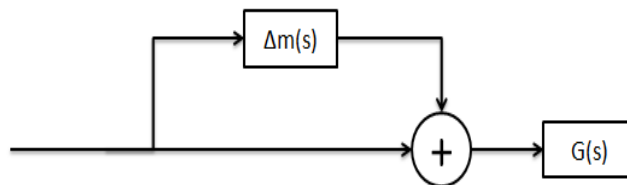


Fig. I.3. Perturbation multiplicative en entrée

L'expression des régimes perturbés est :

$$G_p(s) = G(s)[I + \Delta m(s)] \tag{1.18}$$

Telles que : $G(s)$: modèle nominal du système.

$G_p(s)$: modèle réel du système.

$\Delta m(s)$: incertitude multiplicative

Incertitudes multiplicatives à la sortie :

Les formes multiplicatives en sortie se définissent comme des incertitudes relatives vis à vis de la sortie du modèle nominal. Elles peuvent se représenter à l'aide du schéma bloc suivant :

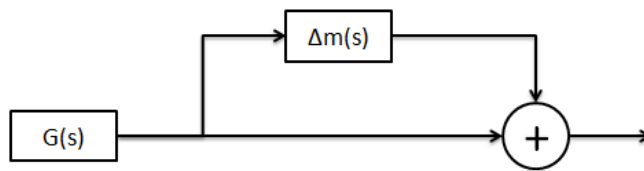


Fig. I.4. Perturbation multiplicative à la sortie

L'expression des régimes perturbés est :

$$G_p(s) = [I + \Delta m(s)] G(s) \quad (1.19)$$

Telles que : $G(s)$: modèle nominal du système.

$G_p(s)$: modèle réel du système.

$\Delta m(s)$: incertitude multiplicative.

I.4. Valeurs singulières :

Les valeurs singulières quantifient les énergies des sorties, elles mesurent les gains principaux dans le plan fréquentiel [3]. Les gains principaux sont définis par les formules suivantes :

Soit A une matrice de transfert, ses gains principaux maximum et minimum sont données par :

$$\bar{\sigma}(A) \triangleq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_{\max} A^* A} \quad (1.20)$$

$$\underline{\sigma}(A) \triangleq \min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_{\min} A^* A} \quad (1.21)$$

Où : $\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne, $\lambda []$ sont les valeurs propres et $[]^*$ est le conjugué.

I.5. Conditions de robustesse :

La stabilité et les bonnes performances de système en boucle fermée sont les priorités pour la commande robuste. Afin de connaître si une loi de commandes est robuste, des contraintes sur la stabilité et sur les performances sont introduites, ceci engendre la vérification de conditions, dites de robustesse sur la stabilité et sur les performances. Pour rappels, les considérations pour la synthèse de commandes robuste sont les suivantes [4] :

- a. poursuite des grandeurs de sorties ;
- b. rejet de l'effet des perturbations ;
- c. sensibilité aux incertitudes de modèles ;

- d. bonnes marges de stabilité ;
- e. sensibilité aux bruits de mesures.

I.5.1. Condition de robustesse sur la stabilité :

Un système est considéré comme stable s'il possède de bonnes marges de stabilité (marges de gain et de phase) : c'est le principal objectif de tout type de commande de système. Toutefois, la synthèse pour l'obtention des contrôleurs s'effectue sur un modèle nominal, il ne décrit pas toujours le procédé réel avec exactitudes et précisions, d'où le recours à la notion d'incertitudes (section 1.4).

Définition : ([3], [5]) Supposons que le modèle nominal $G(s)$ soit stable (avec $\Delta_m(s) = 0$), alors le régime perturbé est également stable si et seulement si :

$$\sigma_{\max} [T(j\omega)] = \frac{1}{\sigma_{\max} [W_t(j\omega)]} \quad \forall \omega \geq 0 \quad (1.22)$$

Telle que : $W_t(s)$ est la matrice des spécifications sur la stabilité.

L'expression (1.22) indique la condition de robustesse sur la stabilité.

Il reste à définir la matrice des spécifications sur la stabilité. Généralement, le choix de cette matrice est effectué de telle sorte à ce que [6] :

$$\sigma_{\max}[A(s)] < \sigma_{\max}[W_t(s)] \quad (1.23)$$

L'interprétation de l'expression (1.23) est la suivante : chaque régime perturbé lui correspond un modèle de perturbations, la stabilisation du système en boucle fermée est satisfaite si les gains principaux du Transfert $T(s)$ sont inférieurs à la valeur singulière maximale de la spécification sur la stabilité $W_t(s)$, son rôle est de prendre en compte tous les régimes perturbés tolérés. Les régimes perturbés seront donc stables et on parlera alors de robustesse du contrôleur $K(s)$.

I.5.2. Condition de Robustesse sur les performances :

Ayant abordé la robustesse sur la stabilité, il est aussi important d'apporter cette propriété sur les performances. Parmi les performances que doit satisfaire le contrôleur $K(s)$, on cite [6] :

- La régulation face aux effets des perturbations : insensibilités des sorties face aux perturbations agissant sur le système.
- le découplage des entrées / sorties des systèmes.

- la limitation des signaux critiques : délivrer aux actionneurs des signaux acceptables et surtout tolérables.

Concrètement, la robustesse sur les performances signifie que les performances désirées sont garanties pour tous les modèles perturbés tenu en compte dans la synthèse. Le raisonnement pour l'obtention de la robustesse sur les performances est similaire à celui pour la robustesse sur la stabilité, où l'on utilise une matrice d'incertitudes fictives (fixée par le cahier des charges).

Avoir de bonnes performances passe par minimiser certains signaux, particulièrement le signal d'erreurs $e(s)$. Sachant que le signal d'erreurs est défini par l'expression (1.14), minimiser le signal d'erreurs revient à minimiser la norme de la matrice de sensibilité $S(s)$.

Définition : ([3], [5]) si la robustesse sur la stabilité est respectée, alors le régime perturbé assure les performances désirées si et seulement si :

$$\sigma_{\max} [S(j\omega)] = \frac{1}{\sigma_{\max} [w_p(j\omega)]} \quad \forall \omega \geq 0 \quad (1.24)$$

Où : $W_p(s)$ désigne la matrice des spécifications sur les performances

L'expression (1.24) représente la condition de robustesse sur les performances.

I.5.3. Condition de Robustesse sur la commande :

On peut contraindre le niveau de commande par le gain principal supérieur de la matrice de transfert R_0 défini par

$$R_0(j\omega) = [I + K(j\omega).P(j\omega)]^{-1}K(j\omega) = Se.K(j\omega)$$

Il faut alors créer une fraction rationnelle (souvent un simple gain) W_a telle que:

$$\sigma_{\max} [R_0(j\omega)] = \frac{1}{\sigma_{\max} [w_a(j\omega)]} \quad \forall \omega \geq 0 \quad (1.25)$$

I.6. Commande H_∞

I.6.1. Définition (Norme H_∞) :

On appelle norme H_∞ du transfert $T(s)$ entre w_1 et z_1 le réel positif définit par :

$$\|T(j\omega)\|_\infty = \sup_{w_1 \neq 0} \frac{\|z_1\|_2}{\|w_1\|_2} \quad (1.26)$$

On peut écrire aussi:

$$\|T(s)\|_\infty = \sup \bar{\sigma} T(j\omega) \quad (1.27)$$

Où $\bar{\sigma}$ représente la valeur singulière maximale.

La norme H_∞ représente la valeur maximale du rapport entre l'énergie du signal de sortie et l'énergie du signal d'entrée. Il est clair que la minimisation de cette norme est nécessaire pour optimiser le rejet de perturbations et le suivi de consignes.

I.6.2. Formulation du Problème standard :

Plusieurs représentations peuvent être employées pour les problèmes de commande de système en boucle fermée, tels que les problèmes d'optimisation par H_2 et H_∞ . Il est donc pratique d'avoir recours à une formulation générale, afin d'avoir un « problème standard » pour ce type de commande. Nous présentons ci-après une formulation du problème standard pour la synthèse H_∞ qui reste également valable pour la synthèse par H_2 .

Sachant qu'une loi de commandes est déterminée pour contrôler les sorties du procédé, qui est soumis aux perturbations, il est logique de prendre dans la synthèse le modèle du procédé bien sûr, mais également les modèles des perturbations et un modèle pour les performances.

Le schéma synoptique de la figure (I.5) montre la configuration du problème standard.

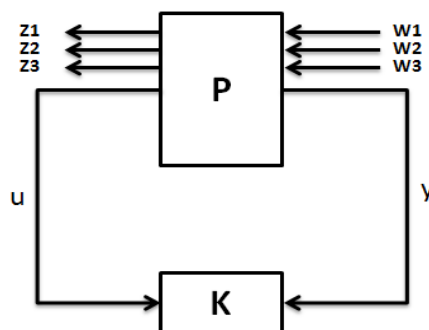


Fig .I.5. Schéma synoptique du problème standard

La configuration du système en boucle fermée avec les différentes spécifications (ou fonctions de pondérations) est illustrée sur la figure (I.6).

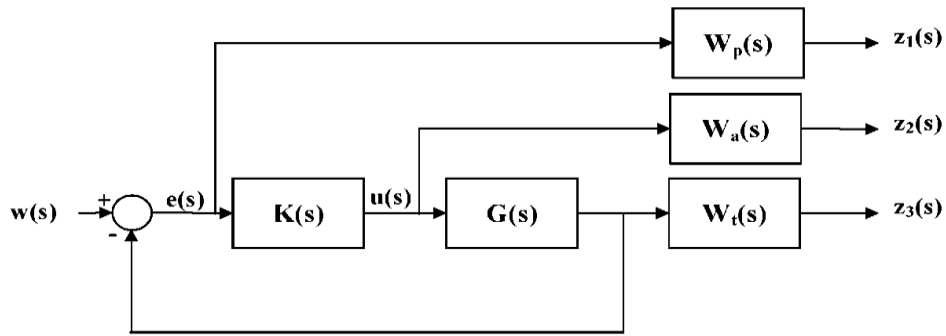


Fig. I.6. Formulation du problème Standard

Où : $W_t(s)$: matrice de transfert de la spécification sur la stabilité.

$W_a(s)$: matrice de transfert relative à l'erreur de type additive.

$W_p(s)$: matrice de transfert de la spécification sur les performances.

La configuration générale du problème standard [7] est présentée sur la figure (2.3) (représentation LFT ou Linear Fractional Transformations ([8], [9])).

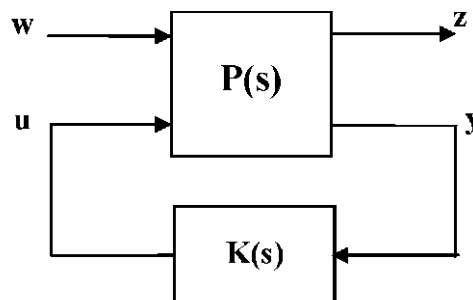


Fig .1.7. Problème standard (représentation LFT)

I.6.3. Commande robuste par H_∞ :

Où : u : commandes du système (dimension « m »)

w : entrées exogènes (consignes) (dimension « l »)

y : mesures sur le système (sorties) (dimension « q »)

z : sorties régulées (dimension « p »)

x : vecteur d'état (dimension « n »)

La résolution du problème standard (ou problème de sensibilité mixte généralisé) passe par trouver une loi de commandes u -délivrée par un contrôleur $K(s)$ - telle que : $u = K(s)y$ en minimisant l'influence du signal des perturbations w sur le signal de sorties z , soit :

$$\begin{cases} \left\| \frac{W_p S}{W_a R} \right\| \\ \left\| \frac{W_t T}{W_a R} \right\| \end{cases} < 1 \quad (1.28)$$

Les différentes matrices sont englobées en un seul système, appelé Système Augmenté $P(s)$. Il est défini par les équations d'état suivantes ([7], [18]) :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases}$$

L'avantage de recourir à ces équations d'état est qu'on a une connaissance complète du système et des fonctions de pondérations ($W_t(s)$, $W_a(s)$ et $W_p(s)$).

Sous la forme d'une représentation LFT :

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Sous forme de matrice de transfert :

$$P(s) = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 0 & W_a \\ 0 & W_t G \\ I & -G \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

On associe au problème standard la fonction coût T_{zw} suivante :

$$T_{zw}(s) = p_{11}(s) + p_{12}(s)K(s) + [I - p_{22}(s)K(s)]^{-1} p_{21}(s)$$

Avec :

$$P(z) = \begin{bmatrix} P(S)_{11} & P(S)_{12} \\ P(S)_{21} & P(S)_{22} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$z(s) = T_{zw}(s)w(s) \quad (1.31)$$

Le problème H_∞ admet deux solutions possibles. La première solution se base sur la résolution d'équations de Riccati ([7], [10]). Elle est jugée plus rapide à mettre en œuvre. Toutefois, la résolution par les équations de Riccati requiert la vérification d'hypothèses, ce qui peut compliquer l'obtention des solutions. La deuxième solution permet de contourner la vérification de ces hypothèses mais introduit une plus grande complexité algorithmique. Cette approche est basée sur la résolution du problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités

linéaires matricielles (Linear Matrix Inequalities) (LMI) [11]. Cette technique de résolution est récente.

On optera pour le développement de la résolution par les équations de Riccati.

La solution du problème H_∞ repose sur la vérification des hypothèses suivantes [8]:

(H1) - la paire (A, B_2) est stabilisable et la paire (A, C_2) est détectable.

(H2) - D_{12} et D_{21} sont de plein rang

$$(H3) - \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m$$

$$(H4) - \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_1 & D_{21} \end{bmatrix} = n + q$$

Sous la vérification des hypothèses (H1) à (H4), nous allons exposer la résolution du problème d'optimisation par la méthode H_∞ .

I.6.4 Problème d'optimisation par H_∞ :

Nous allons illustrer les étapes pour l'obtention du contrôleur $K(s)$. Pour cela, nous présentons la résolution du problème H_∞ . En premier lieu on définit la norme H_∞ d'une matrice de transfert $G(s)$, tel que : $y(s) = G(s)u(s)$

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \max \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (1.32)$$

On désigne par H_∞ l'espace comprenant tous les systèmes linéaires et invariants (LTI), stables et par la norme H_∞ la mesure scalaire que prend le gain d'une matrice de transfert $G(j\omega)$ ([12], [13]). D'un autre point de vue, la norme H_∞ peut s'interpréter comme l'énergie maximale de la sortie du système y pour tous les signaux possibles de la commande u . La norme H_∞ est très populaire et très utilisée en commande robuste du fait qu'elle est pratique pour la représentation des modèles des incertitudes non structurées [14].

Le problème d'optimisation par H_∞ a pour objectif de trouver un contrôleur $K(s)$ stabilisant le procédé, de tel sorte à minimiser le transfert entre les entrées w et les sorties z , soit

$$\|T(j\omega)\|_\infty = \max \bar{\sigma}(T_{ZW}(j\omega)) \quad (1.33)$$

Pour l'obtention de la structure du contrôleur $K(s)$ par la méthode H_∞ , deux problèmes sont considérés ([8], [15]).

- **Problème optimal** : il s'agit de trouver un contrôleur $K(s)$ tel que $\|T(j\omega)\|_\infty$ soit minimale.

Connaître la norme H_∞ minimale atteignable peut être théoriquement utile car on fixe une limite aux performances que l'on peut obtenir. Cela dit, en pratique il n'est pas obligatoire d'aboutir au contrôleur « optimal » pour le problème H_∞ .

C'est pour cela qu'on s'intéresse au problème H_∞ « sous-optimal », où l'on cherche à réduire la norme H_∞ au dessous d'un seuil positif γ .

- **Problème sous-optimal** : soit γ_{\min} le seuil minimum pour la norme $\|T(j\omega)\|_\infty$ de tous les contrôleurs $K(s)$ stabilisant le système. Alors pour γ donné tel que : $\gamma > \gamma_{\min}$ chercher un contrôleur $K(s)$ qui assure la stabilité de manière interne et satisfait la condition suivante :

$$\|T(j\omega)\|_\infty < \gamma \text{ Pour } \gamma > 0 \quad (1.34)$$

Pour le problème standard de la figure (2.3) défini par les équations (2.2) à (2.6) et vérifiant les hypothèses (H1) à (H4), il existe un contrôleur $K(s)$ qui assure la stabilité interne [8] tel que $\|T(j\omega)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si ([7], [18]) :

$$i. H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ et } X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0 \quad (1.35)$$

$$ii. J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ et } Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) > 0 \quad (1.36)$$

$$iii. \max |\lambda(X_\infty Y_\infty)| < \gamma^2 \quad (1.37)$$

Telles que : X_∞ et Y_∞ sont les solutions des Hamiltoniens ci-dessous :

$$H_\infty: \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \\ -C_1C_1^T & -A^T \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$J_\infty: \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1^T B_1 & -A \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Et leurs correspondent les équations de Riccati ci-dessous :

$$A^T X + XA + C_1^T C_1 + X(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X = 0 \quad (1.40)$$

$$AY + YA^T + B_1^T B_1 + Y(\gamma^{-2}C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y = 0 \quad (1.41)$$

Dans ce cas, le contrôleur $K(s)$ satisfaisant la condition : $\|T(j\omega)\|_\infty \leq \gamma$ a pour expression la représentation LFT suivante : $K(s) = F_l(M_\infty, Q)$ avec :

$$M_\infty = \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ L_\infty = -Y_\infty C_2^T \\ Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \\ F_\infty = -B_2 X_\infty \end{cases} \quad (1.43)$$

$Q(s)$ est n'importe quelle fonction de transfert stable de norme H_∞ inférieure à γ , soit : $\|Q\|_\infty < \gamma$.

Un cas particulier est le contrôleur central, il est obtenu si : $Q(s) = 0$. Le contrôleur $K(s)$ s'écrit alors de la sorte :

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

$$\text{Soit :} \quad K(s) = -Z_\infty L_\infty (sI - A_\infty)^{-1} F_\infty \quad (1.45)$$

Le contrôleur obtenu est appelé contrôleur central, il possède un nombre d'états égal à celui du système augmenté $P(s)$. Ce contrôleur est séparé en deux :

$$\cdot \text{ Estimation d'état : } x = A\hat{x} + B_1 \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_2 \hat{x} - y) \quad (1.46)$$

$$\cdot \text{ Retour d'état : } u = F_\infty \hat{x} \quad (1.47)$$

La séparation de la structure du contrôleur rappelle la structure du contrôleur LQG. La différence est dans le terme $\omega = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x}$: ce terme additionnel peut être interprété comme un bruit introduit lors de l'estimation.

I.6.5 Sensibilité Mixte :

Le problème de sensibilité mixte est un cas spécial du problème H_∞ standard. Il consiste à trouver un contrôleur robuste $K(s)$ capable de maintenir la stabilité en boucle fermée et d'assurer les performances requises ([2], [16]) tel que :

$$T_{zw}(j\omega) = \left\| \begin{bmatrix} W_p S \\ W_t T \end{bmatrix} \right\| \quad (1.48)$$

Avec : W_t et W_p sont respectivement les spécifications sur la stabilité et sur les performances.

Plusieurs critères nécessaires doivent être garantis dans la commande des systèmes multivariables en boucle fermée : l'atténuation et le rejet des perturbations, la limitation de l'énergie délivrée au système, et bien sûr la robustesse [17]. En incluant la sensibilité $S(s)$ dans la synthèse, ceci aura pour conséquence l'atténuation de l'effet des perturbations, tandis que la sensibilité complémentaire $T(s)$ aura pour effet d'avoir le problème de poursuite de la sortie z sur l'entrée w [14]. L'association de la fonction de sensibilité $S(s)$ donnera lieu à un contrôleur

qui assure la stabilité en boucle fermée et atténue les pics de résonances sur la valeur singulière maximale de la sensibilité $S(s)$ [18].

Dans ce cas, le problème H_∞ standard devient de la sorte :

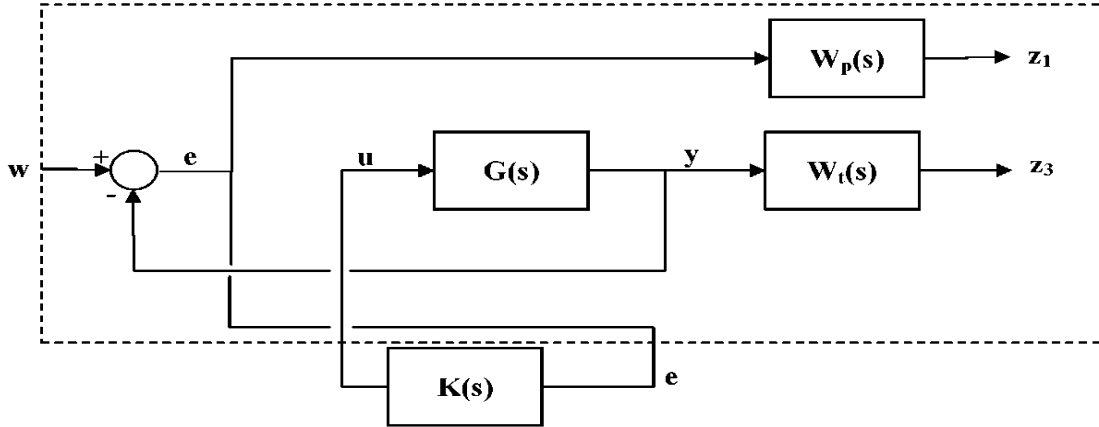


Fig. I.8. problème de sensibilité mixte sous forme standard

D'après la configuration présentée sur la figure (I.8), on note que :

$$e = w - G(s)u \tag{1.49}$$

$$Z_1 = W_p(s)e = w - G(s)u \tag{1.50}$$

$$Z_3 = W_t(s)e \tag{1.51}$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_3 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 0 & W_t G \\ I & -G \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

Le système augmenté P utilisé pour la synthèse du contrôleur a pour expression :

$$P = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 0 & W_t G \\ I & -G \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

Telle que :

$$\begin{aligned} P_{11} &= \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \end{bmatrix} & P_{22} &= \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_t G \end{bmatrix} \\ P_{12} &= & P_{21} &= -G \end{aligned} \tag{1.54}$$

La solution au problème d'optimisation par H_∞ précédemment énoncé sera réalisée par l'itération sur le paramètre γ et le contrôleur robuste $K(s)$ optimal devra satisfaire la

condition: $\|T_{zw}(j\omega)\| < \gamma$. Donc, le paramètre γ permettra de satisfaire le compromis « Stabilité / Performances ».

I.6.6 Procédure d'optimisation par H_∞ :

Nous avons présenté le problème H_∞ avec les étapes pour la détermination des contrôleurs robustes. Toutes ces étapes de calculs peuvent être jugées longues avant l'obtention de la structure du contrôleur, car il faut les effectuer pour chaque valeur du paramètre γ . Il est donc préférable de recourir à un algorithme de calculs, ce qui permettra l'obtention du contrôleur robuste de façon plus rapide et plus précise.

On présente un algorithme de calcul pour la détermination du contrôleur robuste.

- 1.** choix des spécifications W_t , W_p et W_a .
- 2.** réalisation du système augmenté $P(s)$.
- 3.** prendre $\gamma = 1$, faire la synthèse du contrôleur H_∞ .
- 4.** calcul de la fonction coût T_{zw} .
- 5.** Si $\|T_{zw}(j\omega)\| < \gamma$ aller à **7**.
- 6.** sinon ajuster γ et aller à **2**.
- 7.** Evaluation des résultats fréquentiels et temporels.
- 8.** Si les résultats sont satisfaisants aller à **10**.
- 9.** Sinon ajuster γ et aller à **1**.
- 10.** Fin.

La figure (1.2.5) illustre l'algorithme d'optimisation par H_∞ , mis sous la forme d'un organigramme.

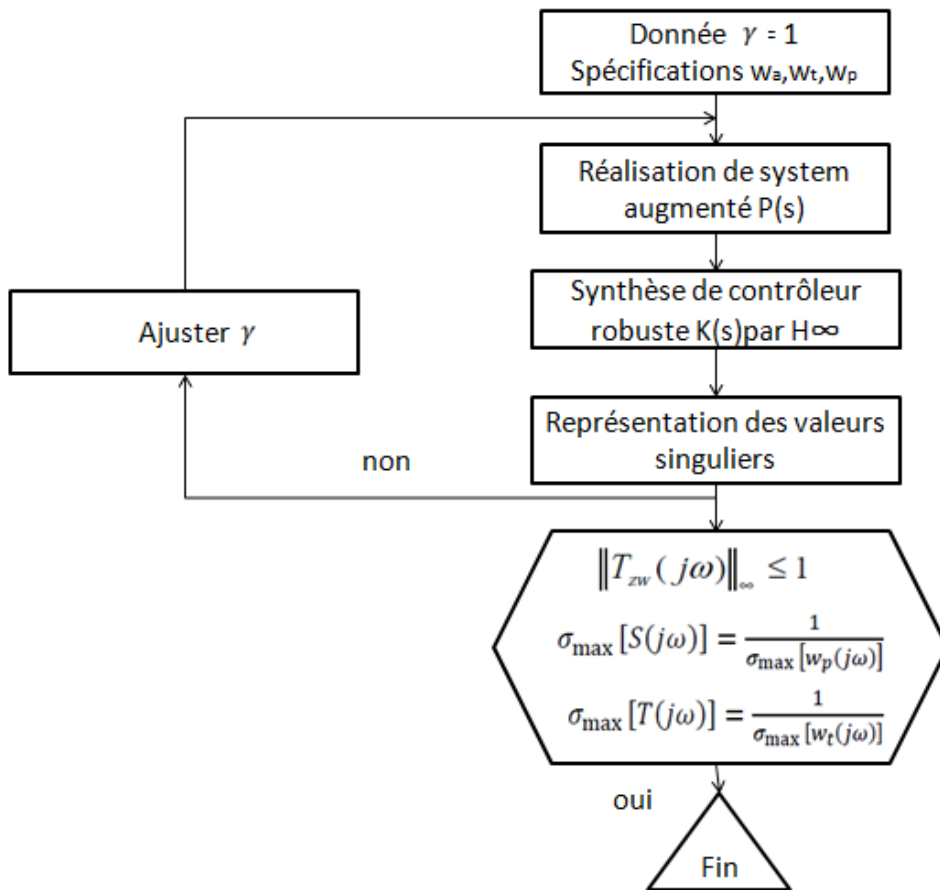


Fig.I.9. Organigramme de procédure d'optimisation par H_∞

Grâce à cet algorithme, il sera plus rapide d'aboutir à la structure des contrôleurs $K(s)$, en plus d'avoir la possibilité d'affiner les résultats de la synthèse avec paramètre d'ajustement γ . L'implémentation sera réalisée par les logiciels présents dans la bibliothèque Robust Control Toolbox de MATLAB [19].

I.7 Commande H_2

I.7 1 Problème de performance H_2 :

Historiquement, l'utilisation de la norme H_2 , est apparue dans les années 1960, la norme H_2 d'un transfert $w_2 \rightarrow z_2$ est une mesure précise de la puissance du signal de sortie z_2 pour un bruit blanc unitaire en entrée. Il s'agit d'un critère qui mesure la performance d'atténuation de la puissance des perturbations.

Définition (Norme H_2) :

on appelle norme H_2 du transfert G entre w et Z le réel positif défini par :

$$\|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G^T(j\omega)G(j\omega))d\omega = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_\infty} \quad (1.55)$$

La norme $\|G(s)\|_2$ est finie si et seulement si $G(s)$ est strictement propre ($D = 0$).

I.7.2 Calcul de la norme H_2 :

Pour calculer la norme H_2 d'une fonction de transfert : $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, avec $D = 0$.

on supposera que : A est stable. En remarquant que $G(j\omega)$ est la transformée de Fourier de : $Ce^{At}B$, l'identité de Parseval donne :

$$\int_0^{+\infty} B^T e^{tA^T} C^T C e^{tA} B dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} G^T(-j\omega) G(j\omega) d\omega \tag{1.56}$$

On peut obtenir une expression algébrique précise de la norme H_2 . Pour son calcul on emploie les grammians d'observabilité X et de commandabilité Y , qui sont solutions des inégalités de Lyapunov suivantes:

$$\begin{cases} A^T X + XA + C^T C < 0 \\ AY + YA^T + B^T B < 0 \end{cases} \tag{1.57}$$

Si le système $G(s)$ est strictement propre ($D = 0$) on écrit:

$$\|G(s)\|_2^2 = trace\left[B^T \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt B\right] = trace(BYB^T) \tag{1.58}$$

Avec : $X = \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt$

et :

$$\|G(s)\|_2^2 = trace\left[C^T \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt C\right] = trace(CYC^T) \tag{1.59}$$

Avec : $Y = \int_0^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^t t} dt$

Donc [27] :

$$\|G(s)\|_2^2 = trace(CYC^T) = trace(BYB^T) \tag{1.60}$$

Le critère de performance H_2 assure que pour un bruit blanc Gaussien w , la variance de réponse Z est bornée par γ , que pour une entrée scalaire w du type impulsion, l'énergie de la sortie Z est inférieure à γ , et que pour une sortie scalaire la déviation de z est bornée en amplitude par γ quelque soit une entrée w d'énergie unitaire .

I.7.3 Problème de Synthèse H_2 :

Le but est celui de trouver des matrices A_K, B_K, C_K et D_K du contrôleur K telles que la norme H_2 de la boucle fermée $T_{zw}(s)$ est inférieure à γ_2 :

$$\|T(s)\|_2 < \gamma$$

Proposition: Supposons que le système LTI de fonction de transfert $G(s)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases}$$

Ce système est asymptotiquement stable et strictement propre ($D = 0$), les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\|G(s)\|_2 < \gamma_2$

2. il existe $X = X^T > 0$

Avec : $trace(BYB^T) < \gamma_2^2$

$$A^T X + XA + C^T C < 0$$

3. il existe $Y = Y^T > 0$

avec : $trace(CYC^T) < \gamma_2^2$

$$AY + YA^T + B^T B < 0$$

4. il existe $P_2 = P_2^T > 0$ et

Z où les LMIs suivantes sont faisables : $trace(Z) < \gamma_2^2$

$$\begin{bmatrix} A^T P_2 + P_2 A & P_2 B \\ B^T P_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.61}$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} < 0$$

5. il existe $P_2 = P_2^T > 0$ et Z avec les LMIs suivantes sont faisables :

$trace(Z) < \gamma_2^2$

$$\begin{bmatrix} A^T P_2 + P_2 A & P_2 C \\ C^T P_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.62}$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & B^T \\ B & Z \end{bmatrix} < 0$$

On peut écrire le problème de contrôle H_2 en boucle fermé comme suit :

$trace(Z) < \gamma_2^2$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P_2 + P_2 A_{cl} & P_2 B_{cl} \\ B_{cl}^T P_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.63}$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & c_{cl}^T \\ C_{cl} & Z \end{bmatrix} < 0$$

Théorème 3 : La norme H₂ d'un système G, est obtenue par le problème d'optimisation suivant:

$$\text{Min } \text{trace}(Z) < \gamma^2$$

$$A^T P_2 + P_2 A + C C^T < 0$$

$$B^T P_2 B < Z$$

$$P_2 > 0$$

Soit la boucle de synthèse optimale H₂ suivante :

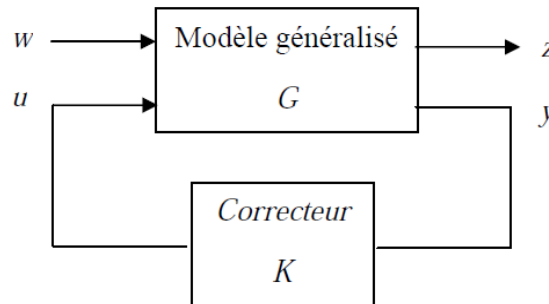


Fig. I.10. Système en boucle fermée avec correcteur H₂

G(s) est donnée par la représentation suivante:

$$G(S) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

La synthèse optimale H₂ consiste à déterminer le correcteur K minimisant une norme H₂ du transfert entre les sorties exogènes Z et les entrées exogènes w :

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|T(s)_{zw}\|_2$$

- $\gamma > 0$ et G(s) étant donnés, déterminer un correcteur K tel que : $\|T(s)_{zw}\|_2 < \gamma$

\mathcal{K} : est l'ensemble des compensateurs K stabilisant l'interconnexion de manière interne ou ensemble des compensateurs admissibles.

Hypothèses 2:

1- (A, B₁) et (A, B₂) stabilisables, (C₁, A) et (C₂, A) détectables.

2- $D_2^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$ et $[B^T \quad D_{21}^T] D_{21}^T = [0 \quad I]^T$.

3- soit G et K rationnelles, réelles et propres.

4- $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_1 & D_{21} \end{bmatrix}$ sont de rang plein $\forall \omega$

Définissant les deux équations de Riccati algébriques duales :

$$A'X_2 + X_2A - X_2B_2B_2'X_2 + C - C_1 = 0 \quad (1.64)$$

$$Y_2 + Y_2A' - Y_2C_2C_2'Y_2 + B_1B_1' = 0 \quad (1.65)$$

Avec : $F_2 = -B_2'X_2$, $L_2 = -Y_2C_2'$ et $\hat{A}_2 = A + B_2F_2 + L_2C_2$

Théorème 3: L'unique compensateur H_2 optimal est donné par:

$$K_{H_2}^* \sim \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Où :

$$\gamma^* = \min_{k \in \mathcal{K}} 5$$

Théorème 4: Si les hypothèses 2 sont vérifiées, $\gamma > 0$ et G étant données, l'ensemble de tous les correcteurs H_2 sous-optimaux i.e. $\|T(s)_{zw}\|_2 < \gamma$ sont données par :

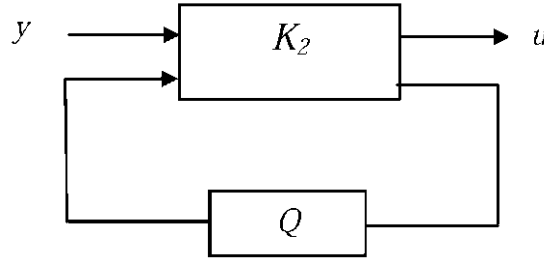


Fig. I.11. correcteur H_2 sous optimal.

$$K_{H_2} = LFT(Q, K_2), \text{ avec : } Q \in \mathcal{RH}^{m_2 \times p_2}$$

Le compensateur H_2 sous optimal est donné par

$$K_2 = \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & -L_2 & B_2 \\ F_2 & 0 & I_{m_2} \\ -C_2 & I_{p_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

I.8 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la commande H_2/H_∞ . L'un des atouts majeurs de la méthode H_2/H_∞ est d'offrir la possibilité de construire de façon systématique un critère adapté au cahier des charges considéré. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation du système en boucle fermée, des performances H_2 ainsi que des performances H_∞ .

Nous avons dans le chapitre 4 proposé une approche LMI qui et une méthode intéressante peut résoudre numériquement avec lui le problème d'optimisation (les correcteurs stabilisant le système en boucle fermée et assurant des niveaux de réjection de perturbations). Pour cela la

synthèse de commande robuste passe des étapes telle que, définition d'incertitudes (liées au processus d'identification) et Contraintes sur la commande (saturation d'actionneurs, ...), contraintes de stabilité robuste et finalement Spécification des performances.

Chapitre II

La paramétrisation de Youla

II.1. introduction :

La paramétrisation de Youla est connue pour être l'outil fondamental pour représenter l'ensemble des systèmes stables. Elle permet d'établir un lien entre l'ensemble de correcteurs stabilisant un système et l'ensemble de transferts stables, voir Figure II.1.

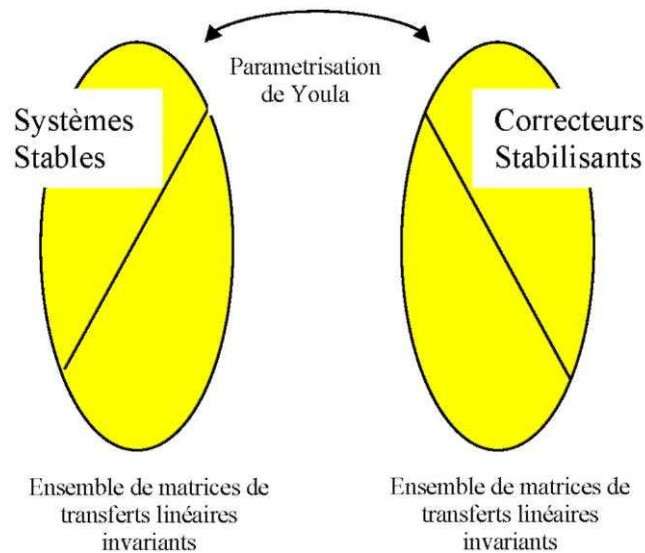


Fig.II.1. La Paramétrisation de Youla

Cette paramétrisation définit une bijection entre l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné et l'ensemble des transferts stables. A chaque transfert stable on peut donc faire correspondre un correcteur stabilisant le système et à chaque correcteur stabilisant on peut faire correspondre un transfert stable. Le transfert stable associé à chaque correcteur stabilisant, représenté par une matrice de transfert stable dans le cas d'un correcteur à plusieurs entrées/sorties, est appelé paramètre de Youla. Il est normalement représenté par la lettre Q . Pour certains auteurs, cette paramétrisation est aussi appelée Q -paramétrisation.

II.2. Historique :

L'idée générale de paramétrisation de l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire est née de la constatation suivante : pour un système P stable, l'interconnexion de la figure II.2 reste stable pour tout système Q stable.

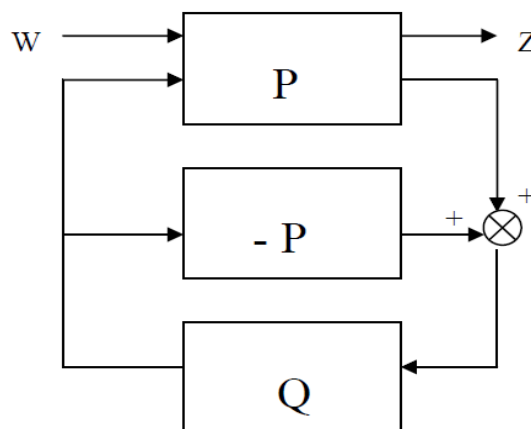


Fig. II.2. Le principe de la Paramétrisation de Youla

Cette paramétrisation est en fait déjà utilisée dans les années 50 en commande optimale mais les implications fondamentales qui nous intéressent n'avaient pas encore été relevées. Ce n'est que dans les années 70 que ces travaux ont été repris par Kucera dans le cas discret et par Youla et co-auteurs [20] pour le filtrage de Wiener-Holf, c'est le nom de Youla que l'histoire a retenu. On peut aussi remarquer que les premières utilisations ont été faites dans le cadre de la synthèse H_2 dans les années 50 alors que Zames [22] a repris cette paramétrisation pour la commande H_∞ .

La forme générale de la paramétrisation a été finalement énoncée par Desoer et co-auteurs, en utilisant les représentations fractionnaires copremières. Des interprétations avec représentation d'état ont été mises en place en 1984 par Doyle [21].

La définition de la paramétrisation de Youla correspond au théorème suivant dont on trouve une démonstration dans [23].

II.3. Définition :

Il s'agit de paramétrer de manière complète la famille de correcteurs stabilisants pour un système donné. On considère le système en boucle fermée de la Figure II.3. (Il convient de noter que le bouclage est positif, en reprenant la convention adoptée par [23]). L'hypothèse de départ est que G est stabilisable par u et détectable par y , et que G est strictement propre.

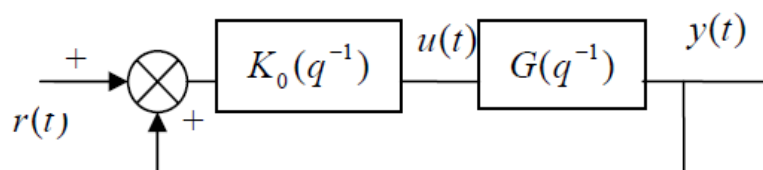


Fig. II.3 : Boucle fermée classique avec retour positif

II.3.1. Théorème 1 : Factorisation première

Pour une matrice de transfert G stable, il existe 8 matrices de transfert stables telles que :

$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (2.1)$$

Est une factorisation fractionnelle co-premières de G à gauche et à droite où N, M, \tilde{N} et \tilde{M} sont des matrices des transferts stables

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & Y \\ N & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{C'est l'équation de Bézout.}$$

$$K_0 = U_0 V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1} \tilde{U}_0 \quad (2.2)$$

Est une factorisation fractionnelle co-premières de K_0 à gauche et à droite où \tilde{U}_0, V_0, U_0 et \tilde{V}_0 sont des matrices des transferts stables.

Si K_0 est un correcteur stabilisant, alors $N, M, U_0, V_0, \tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{U}_0$ et \tilde{V}_0 peuvent être choisies comme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

II.3.2. Théorème 2 : Paramétrisation de Youla

En considérant (2.1) et (2.2) telles que (2.3) soit vérifiée, pour toute matrice de transfert stable Q de dimensions adéquates, on définit :

$$U = U_0 + MQ \quad V = V_0 + NQ \quad (2.4)$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + Q\tilde{M} \quad \tilde{V} = \tilde{V}_0 + Q\tilde{N} \quad (2.5)$$

Alors :

1. Tout correcteur $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$ est un correcteur stabilisant pour $G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$.
2. Tout correcteur stabilisant a une représentation fractionnelle donnée par (2.4) et (2.5).
3. Réciproquement, pour tout correcteur K stabilisant, il existe un système Q stable qui vérifie les égalités précédentes.
4. La paramétrisation de Youla n'est pas unique. Il existe en réalité une infinité de possibilités, en fonction du correcteur stabilisant initial K_0 choisi, et des représentations fractionnelles choisies pour le système G et le correcteur initial K_0 .

Remarque

- Ces représentations peuvent aussi s'exprimer par un formalisme d'espace d'état, voir [21,23].

- Dans ce chapitre on ne fera pas différence entre le cas discret et le cas continu, les concepts exposés sont parfaitement identiques [24].

II.4. Propriétés :

On supposera dans ce paragraphe et dans toute la suite du chapitre que les interconnexions sont bien posées. Les propriétés de la paramétrisation de Youla présentées ici correspondent aux propriétés utilisées usuellement dans la littérature [23, 25]. On remarquera tout de même que le formalisme par transfert est largement plus utilisé que les représentations d'état. On peut justifier cette remarque par la facilité de présentation et d'interprétation que procure la représentation par transferts.

Propriété1

Par définition, il existe une bijection entre l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné et l'ensemble des systèmes stables.

Propriété2

Pour énoncer cette propriété, il nous faut donner une représentation standard du système. Cette représentation standard est donnée sous forme générale par la Figure 2.4. Si l'on ne considère pas le bloc d'incertitude ou perturbation, la boucle fermée de la Figure II.2 peut se reformuler sous la forme standard de la Figure II.4.

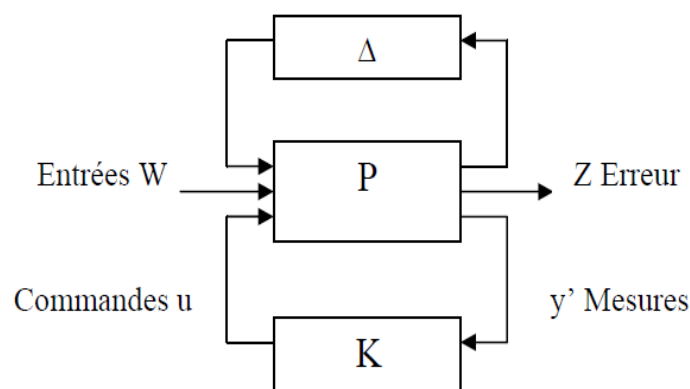


Fig. II.4 : Représentation standard paramétrisation de Youla

La Figure II.5 est obtenue en considérant les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} z \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & G \\ I & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \text{ et } w = r \quad z = y' = y + r, P = \begin{pmatrix} I & G \\ I & G \end{pmatrix}$$

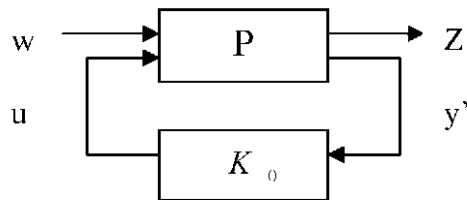


Fig. II.5 : Représentation standard sans incertitude

Tout correcteur K stabilisant P peut être représenté sous la forme LFT de la figure II.6, où le système J admet la représentation suivante, d'ordre au plus $n + n_0$

$$J = \begin{pmatrix} K_0 & \tilde{V}_0^{-1} \\ V_0^{-1} & -\tilde{V}_0^{-1} \end{pmatrix}$$

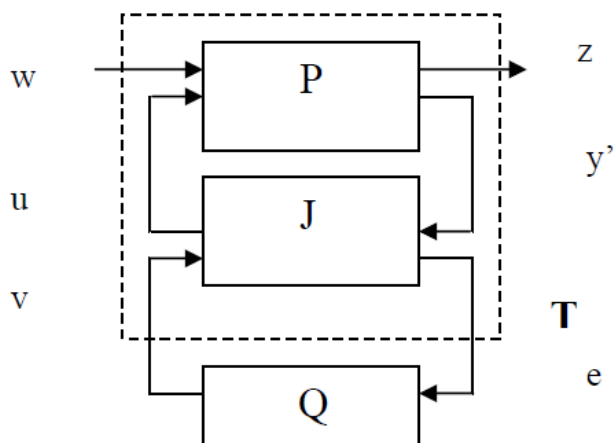


Fig. II.6 : Correcteur sous forme LFT

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Preuve : Voir [23, 27] ;

Cette propriété exprime que le système T , formé par l'interconnexion de P et de J , Figure 2.6, a un transfert rigoureusement nul entre l'entrée e et la sortie v . Le transfert en boucle fermée entre l'entrée w et la sortie z peut s'écrire :

$$H_{zw} = T_{11} + T_{11}Q(I - T_{22}Q)^{-1}T_{21} \tag{2.7}$$

Cette propriété nous donne une interprétation intéressante de la paramétrisation de Youla, présentée dans [25] est appelée «Modified controller paradigm, On la résume brièvement : Soit K_0 , Figure II.5, un correcteur stabilisant le système. A partir de ce correcteur, nous pouvons construire un ensemble de correcteurs stabilisant le système en procédant en deux étapes :

Nous modifions K_0 de telle sorte qu'il génère un signal auxiliaire de sortie e (de même dimension que y') et accepte un signal d'entrée v (de même dimension que u), comme indiqué Figure II.7. Ceci est effectué de façon à assurer une matrice de transfert en boucle fermée nulle entre v et e , tout en conservant le transfert K_0 en boucle ouverte entre u et y' .

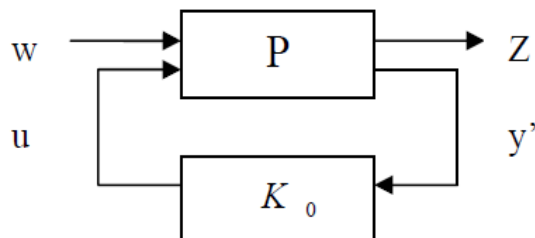


Fig. II.7 : Correcteur initial modifié

Nous connectons une matrice Q stable entre e et v , comme indiqué dans la Figure II.8. Le correcteur K ainsi construit correspond au correcteur initial modifié par Q . Ce correcteur stabilise le système, car Q est stable et, comme $H_{ev} = 0$, on n'introduit pas de nouveau bouclage.

On arrive à la figure II.8, où l'on voit le système d'interconnexion J , qui correspond au correcteur K_0 modifié.

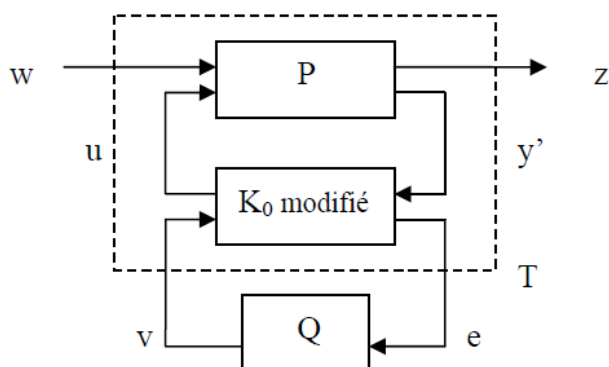


Fig. II.8 : Correcteur initial modifié avec la paramétrisation de Youla

Du fait que le transfert entre v et e est nul, le système se réécrit comme indiqué en (2.7). On obtient alors la même expression affine de la paramétrisation de Youla. Toutefois, pour que cette paramétrisation obtenue à partir du correcteur modifié soit équivalente à la paramétrisation de Youla, il faut qu'elle permette d'atteindre tous les transferts stables possibles. Dans [26] est présentée une méthode de modification du correcteur initial pour garantir la correspondance avec la paramétrisation de Youla.

Propriété 3

Cette propriété nous donne une interprétation de la paramétrisation dans une représentation par espace d'état. Tout correcteur stabilisant G peut être représenté par un retour d'état avec un observateur et un paramètre de Youla. Pour la démonstration, voir [23, 27]. Cette propriété est intéressante dans le sens où plusieurs correcteurs stabilisants pour le système G avec des structures très différentes peuvent se mettre sous une même représentation grâce au paramètre de Youla.

Interprétation dans l'espace d'état :

Soit une répréhension d'état d'un système G défini sur la figure II.8

$$T = \begin{bmatrix} A_T & B_T & B_V \\ C_T & D_T & D_{Tu} \\ C_e & D_{eT} & D_{ve} \end{bmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

Chaque transfert entre w_i et z_i peut être représenté par la fonction de transfert suivante (LFT)

$$T = C_j(sI - A^T)^{-1} B_j + D_{ji}$$

Alors puisque $G_{22} = 0$, la propriété suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} C_e(zI - A_T)^{-1} B_v = 0 \\ D_{ve} = 0 \end{cases}$$

Cette propriété exprime le fait que les sous-espaces non-commandable et non observables de T sont supplémentaires dans l'espace d'état. Ainsi, elle permet d'obtenir une représentation d'état qui soit simultanément sous forme commandable et observable. Le changement de base correspondant permet d'obtenir le partitionnement suivant avec une matrice d'état sous forme triangulaire par blocs:

$$T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & B_{11} & B_{21} & B_v \\ 0 & A_3 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} & D_{1v} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} & D_{2v} \\ 0 & D_e & D_{e1} & D_{e2} & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque :

Les matrices D_{11} de T sont les mêmes que celles du système initial P pour deux raisons :

- La structure particulière du transfert direct de J ne génère aucune transmission directe de w vers z .
- Le changement de base triangulisant n'affecte pas non plus ces transmissions directes.

Corollaire : Tout correcteur stabilisant peut être représenté par un retour d'état avec un

observateur et un paramètre de Youla (l'objectif du chapitre suivant).

Cette propriété est intéressante dans le sens où plusieurs correcteurs stabilisants pour le système G avec des structures très différentes peuvent se mettre sous une même représentation grâce au paramètre de Youla.

Propriété 4

Cette propriété fait référence à la convexité obtenue avec la paramétrisation de Youla. On a les deux propriétés suivantes :

- L'ensemble de matrices de transfert stables est convexe.
- Le transfert de la boucle fermée est linéaire en Q .

Cette propriété nous permet de transformer le problème de synthèse de correcteur ou de robustification d'un correcteur initial en un problème de synthèse convexe.

Voyons maintenant le cas particulier de la paramétrisation de Youla quand le système G est stable. Dans ce cas, on peut simplifier la paramétrisation et obtenir une représentation par modèle interne où le paramètre de Youla a un sens « physique ».

II.5. Interprétations pour un système stable :

On considère ici le cas d'un système stable, mono-entrée/mono-sortie G .

II.5.1. Correcteur à un degré de liberté :

Si le système G est stable, on peut choisir [23] :

$$\begin{aligned} K_0 &= 0 \\ N &= \tilde{N} = G & M &= \tilde{M} = 1 \\ U_0 &= \tilde{U}_0 = 0 & V_0 &= \tilde{V}_0 = 1 \end{aligned}$$

(2.3) est vérifiée et on obtient :

$$\begin{aligned} U &= U_0 + MQ = Q \\ V &= V_0 + NQ = 1 + GQ \end{aligned}$$

A partir de $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$ le correcteur stabilisant s'exprime par :

$$K = Q (I + GQ)^{-1} \tag{2.8}$$

Qui peut être représenté comme indiqué Figure II.9. Dans cette figure, on a ajouté le signal extérieur d , qui représente un bruit de mesure ou une incertitude sur le modèle du système.

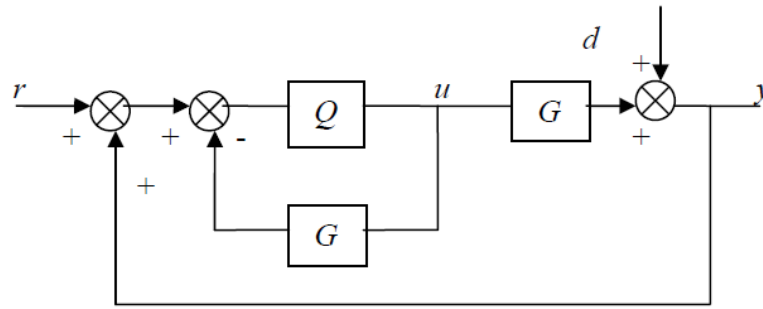


Fig. II.9 : Paramétrisation de Youla pour un système stable

Cette figure peut être modifiée pour obtenir la Figure 2.10, où l'on voit apparaître la structure d'un correcteur à modèle interne.

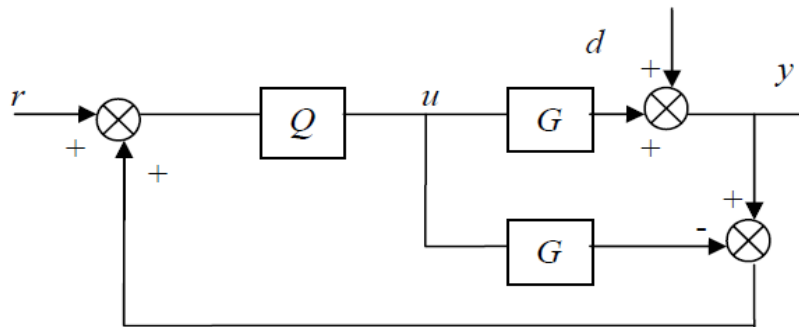


Fig. II.10 : Paramétrisation de Youla pour un système stable.

Structure par modèle interne

En cas d'absence d'incertitude ($d=0$), la sortie du système est annulée par la mise en parallèle du modèle ($-G$), et donc le retour est nul. Le tout fonctionne en boucle ouverte telle que $u = Q r$. Dans ce cas le paramètre de Youla représente le transfert du signal de référence au signal de commande. Comme Q est stable, pour un signal r stable on aura toujours un signal de commande u stable.

5.2. Correcteur à deux degrés de liberté :

Un correcteur à deux degrés de liberté peut être représenté comme indiqué par la Figure II.11.

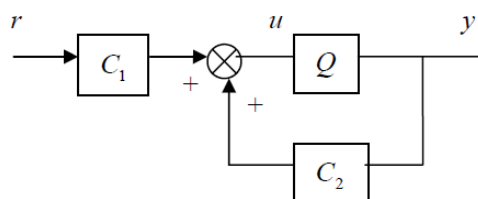


Fig. II.11 : Correcteur à deux degrés de liberté

On peut transformer cette représentation pour arriver à la Figure II.12, équivalent à la Figure II.11, mais avec la même structure que la Figure 2.3, avec :

$$K = (C_1 \quad C_2) \quad \text{Et} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$$

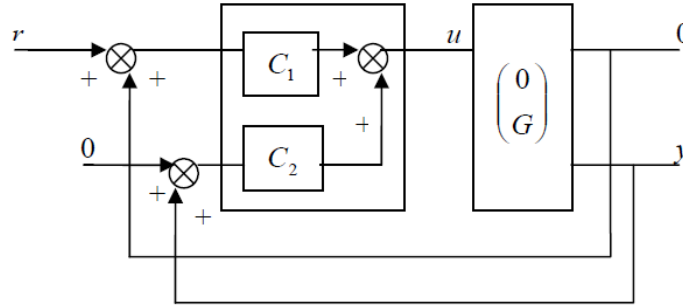


Fig. II.12 : Correcteur à deux degrés de liberté sous structure de bouclage standard

Si le système G est stable, on peut alors choisir :

$$N = \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}, M = 1, \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_0 = (0 \quad 0), U_0 = \tilde{U}_0 = (0 \quad 0) \quad V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{V}_0 = 1$$

Qui vérifiant (2.1), (2.2) et (2.3). Avec $Q = (Q_1 \quad Q_2)$, on obtient la famille de correcteurs suivante :

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + Q\tilde{M} = (Q_1 \quad Q_2)$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 + Q\tilde{N} = 1 + Q_1G$$

A partir de la relation $K = UV = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$, il vient :

$$K = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 1+Q_2G & 1+Q_1G \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Ce correcteur, représenté Figure II.12, peut aussi être formulé selon le schéma de la Figure II.13. Les deux figures sont équivalentes.

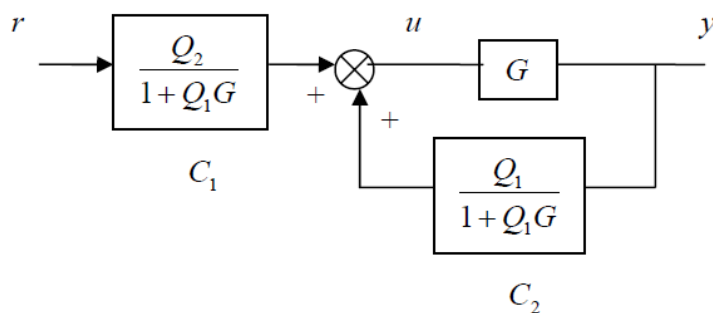


Fig. II.13. Paramétrisation de Youla pour un système stable. Correcteur à deux degrés de liberté

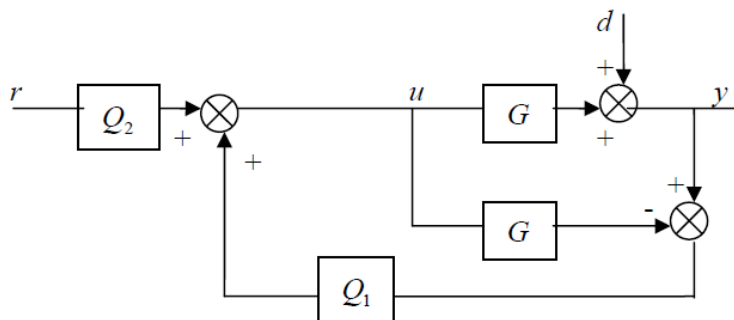


Fig. II.14. Paramétrisation de Youla pour un système stable.
Structure de modèle interne pour le correcteur à deux degrés de liberté

La Figure II.14. correspond à la paramétrisation de tous les correcteurs stabilisants à deux degrés de liberté avec une structure à modèle interne, présentée dans [28]. On constate au travers de cette représentation, Figure II.14, que la paramétrisation d'un régulateur à deux degrés de liberté implique un paramètre de Youla à deux composantes : Q_2 , qui a un rôle de préfiltrage, et Q_1 , qui modifie la dynamique de la boucle fermée. On remarque également que Q_1 a une influence uniquement sur la partie non modélisée par G , à savoir les perturbations qui agissent sur le système, représentées ici par le signal d .

L'intérêt de ce type de régulateur réside tout particulièrement en une séparation des dynamiques de poursuite et de régulation. Le paramètre Q_2 modifie la dynamique de poursuite sans changer la dynamique de la boucle fermée (ou de régulation), et le paramètre Q modifie la dynamique de régulation sans changer la dynamique de poursuite.

II.6. Introduction à l'optimisation convexe :

La notion de convexité tient dans ce manuscrit une place importante étant donnée les orientations choisies. En effet les problèmes de synthèse dont il est question sont formulés en termes d'optimisation si possible. La convexité d'un problème d'optimisation à un double avantage :

- Les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables.
- Il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser ; le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

Cette approche allie donc vitesse et efficacité. Ce qui semble évidemment très séduisant. Il faut cependant faire attention aux idées reçues : si un problème n'est convexe peut parfois entraîner des conséquences non désirables.

Si la transformation non convexe /convexe se fait par des équivalences, c'est le meilleur des cas et les seuls problèmes qui peuvent en découler proviennent d'un mauvais conditionnement numérique qui empêcherait une résolution algorithmique simple. Pour mieux comprendre ce problème, on discerne deux méthodes pour transformer le problème initial :

- Le champ de variation des variables d'optimisation est réduit ; c'est-à-dire que la recherche se fait sur un ensemble plus petit que le domaine de définition initial.
- Les contraintes sont modifiées afin de rendre convexes mais elles deviennent alors plus contraignantes.

La solution ainsi obtenue par optimisation convexe est optimale au sens du nouveau problème mais pas nécessairement au sens de problème initial. Il est donc fort possible qu'elle ne soit pas optimale pour le problème posé ! Cette mise en garde est fondamentale pour l'interprétation des résultats obtenus en synthèse par des méthodes d'optimisation. La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas.

II.6.1. Ensemble convexe

II.6.1.1. Définition :

Soit un ensemble $C \subset R^n$, C est convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall (x_1, x_2) \in C^2, (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in C \quad (2.10)$$

II.6.1.2. Propriétés :

- Tout ensemble affine est convexe.
- L'intersection finie d'une famille d'ensembles convexes est convexe.

II.6.2. Fonction convexe

II.6.2.1. Définition : Soit un ensemble C convexe et f une fonction définie de C dans R . On dit que la fonction f est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall (x_1, x_2) \in C^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (2.11)$$

II.6.2.2. Interprétation géométrique :

La Figure II.15 présente une fonction f convexe de \mathfrak{R} vers \mathfrak{R} . La convexité de f se traduit géométriquement par le fait que le segment $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ est au-dessus de la courbe $y = f(x)$ pour tout $(a, b) \in \mathfrak{R}^2$

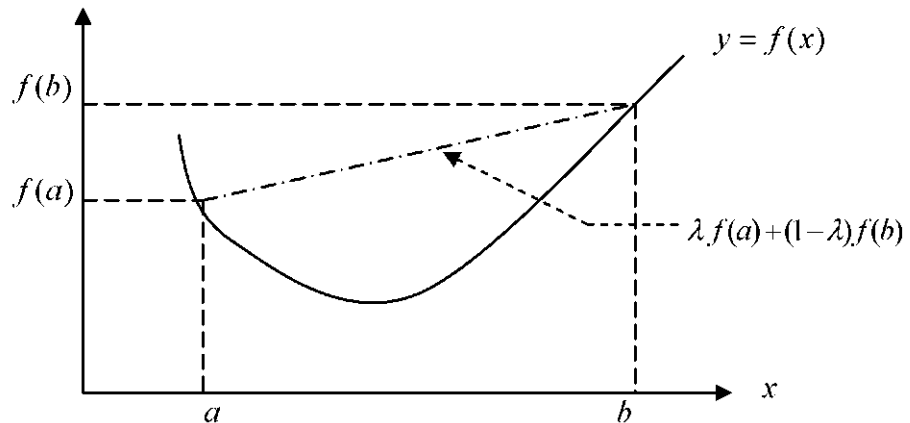


Fig 2.15. Convexité d'une fonction

II.6.2.3. Propriétés :

- Le produit d'une fonction convexe par un réel positif est convexe.
- La somme pondérée à coefficients positifs de plusieurs fonctions convexes est convexe :
- Si ϕ_1, \dots, ϕ_n sont des fonctions convexes et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n réels positifs donnés, alors $(\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n)$ est convexe.
- Le maximum de plusieurs fonctions convexes est convexe.
- Si ϕ_1, \dots, ϕ_n sont des fonctions convexes et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n réels positifs donnés, alors $\max\{\lambda_1\phi_1, \dots, \lambda_n\phi_n\}$ est convexe.
- Si λ est une fonction convexe et α un réel donné, alors l'ensemble $\{x / \phi(x) \leq \alpha\}$ est convexe.
- Notons que la réciproque est fautive : la propriété $(\forall \alpha \in \mathfrak{R} \text{ on a } \{x / \phi(x) < \alpha\} \text{ est Convexe})$ n'implique pas que ϕ soit convexe. On dit dans ce cas que ϕ est quasi-convexe.
- Toute norme est une fonction convexe de son argument (conséquence de l'inégalité triangulaire).
- Si f est convexe et g linéaire, alors $(f \circ g)$ est convexe.
- Si f est croissante et g convexe, alors $(f \circ g)$ est convexe.

II.6.3. L'optimisation convexe :

Soit un ensemble convexe $C \subset R^n$ et $f : C \rightarrow R$ une fonction convexe. Un problème d'optimisation convexe s'énonce simplement :

$$\hat{J} = (f(x)/x \in C_i)_{i=1,m} \quad (2.12)$$

Il s'agit de minimiser un critère f dépend d'un vecteur de paramètre x vérifiant une ou plusieurs contraintes ($x \in C$). Ce type de problème présente des fortes propriétés de convergence. Par exemple, la convexité de du problème garantie que le critère n'admet pas de minimums locaux. De plus, si l'ensemble C est fermé et non vide, le minimum est atteint. En ce qui concerne la mise en œuvre, sous réserve d'un bon conditionnement numérique, l'exploitation de ces propriétés permet d'obtenir la convergence d'algorithmes vers un minimum global.

Notons aussi que l'intersection de plusieurs contraintes convexe est une contrainte convexe et que les critères définis par le maximum ou par la combinaison linéaire à pondérations positives de plusieurs critères convexes sont convexes. Ainsi, un problème de commande où toutes les contraintes et tous les critères élémentaires sont convexes peut se formuler simplement en un problème d'optimisation convexe global regroupant toutes les spécifications exprimées sous forme convexe.

II.6.4. Algorithmes de résolution :

Outre les garanties théoriques qui découlent de la convexité du problème, il est intéressant dans la pratique d'exploiter la géométrie du problème pour :

- obtenir un meilleur comportement numérique.
- diminuer les temps de calcul et la place mémoire nécessaire pour la résolution.

Plusieurs algorithmes ont été développés pour des structures particulières. Ils prennent en compte la nature du critère à optimiser ainsi que celle des contraintes à respecter.

Considérons, par exemple, le cas d'un problème avec un critère linéaire et/ou des contraintes formulées par des égalités et inégalités linéaires de type :

$$\begin{aligned} \min(c^T x) & \quad (2.13) \\ \{a_i x \leq b_i\} & \quad i = 1, 2 \dots m \\ Fx & = g \end{aligned}$$

où x est le vecteur d'optimisation et a_i, b_i, c, F, g sont les paramètres du problème

La méthode dite du simplexe a été introduite par Dantzig pour résoudre ce type de problème.

Ensuite, en 1984, Karmarkar a introduit l'algorithme du point intérieur pour la programmation

linéaire. Plusieurs algorithmes basés sur cette technique du point intérieur pour la résolution de problèmes linéaires ont été ainsi développés et ont prouvé leur efficacité.

II.7. Spécifications en boucle fermée :

II.7.1. Motivations de la formulation des spécifications en boucle fermée :

Une spécification implicite que doit vérifier tout correcteur solution du problème est d'être stabilisant. Cependant, la combinaison de deux correcteurs stabilisants n'est pas forcément stabilisante, d'où la non convexité de l'ensemble de ces correcteurs. Ce résultat nous amène ainsi à travailler non plus en boucle ouverte, mais en boucle fermée, sur l'ensemble des transferts stables, que peut présenter un système. Dans ce cas, nous avons bien défini un espace convexe : le barycentre de transferts stables est un transfert stable.

Par exemple, considérons une contrainte qui correspond au respect d'un certain gabarit pour un-transfert en boucle fermée, que l'on appellera H_{yd} , pour laquelle deux correcteurs (K_1 et K_2) valident le gabarit. La boucle fermée associée au correcteur $K_3 = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_2$ (où λ est un réel compris entre 0 et 1) peut alors dépasser ce gabarit. En revanche si H_{yd1} et H_{yd2} sont les transferts en boucle fermée correspondant aux deux correcteurs, le transfert $H_{yd3} = \lambda H_{yd1} + (1 - \lambda) H_{yd2}$ (où λ est un réel compris entre 0 et 1) va satisfaire aussi le gabarit.

Si on exprime le problème en fonction du correcteur K , on arrive normalement à un problème d'optimisation non linéaire. Dans le prochain paragraphe, nous allons examiner certains critères et contraintes convexes en boucle fermée qui seront utilisés par la suite, et le fait que cette convexité soit conservée par l'ensemble de transferts stables atteignables.

Cet ensemble est paramétré par la paramétrisation de Youla. On arrive finalement à exprimer le problème par un problème d'optimisation convexe.

II.7.2 Ensemble de transfert atteignable par des correcteurs stabilisants :

Considérons une structure standard comme celle de la figure II.4 et étudions l'ensemble des matrices de transfert atteignables entre l'entrée w et la sortie z (w et z étant des vecteurs). Cet ensemble des matrices de transfert atteignables est convexe. De cet ensemble de matrices de transfert, seule nous intéresse la partie pour laquelle le système satisfait la propriété de stabilité interne. Ce sous-ensemble est obtenu par la paramétrisation de Youla, et il est convexe. En effet, le transfert entre l'entrée w et la sortie z peut être écrit sous une forme linéaire

$$\text{en } Q : \quad H_{zw} = G_{11} + G_{12} Q G_{21} \quad (2.14)$$

et Q appartient à l'ensemble des matrices de transfert stables, qui est d'ailleurs convexe, pour deux transferts H_{zw1} et H_{zw2} , la matrice de transfert définie par :

$$H_{zw3} = \lambda H_{zw1} + (1 - \lambda) H_{zw2} \quad (\text{où } \lambda \in] 0, 1[)$$

$$H_{zw3} = \lambda (G_{11} + G_{12} Q_1 G_{21}) + (1 - \lambda) (G_{11} + G_{12} Q_2 G_{21})$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda G_{11} + \lambda G_{12} Q_1 G_{21} + G_{11} + G_{12} Q_2 G_{21} - \lambda G_{11} - \lambda G_{12} Q_2 G_{21} \\
&= \lambda G_{12} Q_1 G_{21} + G_{11} + G_{12} Q_2 G_{21} - \lambda G_{12} Q_2 G_{21} \\
&= G_{11} + G_{12} [\lambda Q_1 + (1 - \lambda) Q_2] G_{21} \\
&= G_{11} + G_{12} Q_3 G_{21}
\end{aligned}$$

$Q_3 = \lambda Q_1 + (1 - \lambda) Q_2$ appartient à l'ensemble des matrices de transfert stables, car cet ensemble est convexe. On en déduit que H_{zw3} est stable. L'ensemble des matrices de transfert atteignables par des correcteurs stabilisants est donc convexe.

II.7.3. Contraintes et critères convexes

Il est important de distinguer, parmi les spécifications d'un problème de commande, les deux notions de contrainte et de critère [29]. La première est une notion ensembliste : satisfaire une contrainte équivaut à appartenir à l'ensemble des solutions vérifiant une propriété donnée telle que « temps de réponse inférieur à une valeur fixée » ou « réponse à une entrée donnée à l'intérieur d'un gabarit imposé ». Une contrainte sera dite convexe si l'ensemble associé est convexe (cf. paragraphe II.6.1).

La deuxième est une notion fonctionnelle : le critère est une fonction à valeurs réelles, définie sur un ensemble de correcteurs. Par exemple, un critère d'énergie de commande peut être défini par la fonction qui à tout correcteur associe la norme H_2 de la commande en réponse à un signal donné. Un critère sur la plus grande incertitude permise peut être défini par la fonction qui à tout correcteur associe la norme H_∞ d'un certain transfert bouclé avec l'incertitude. Un critère sera dit convexe si la fonction associée, définie sur l'ensemble des correcteurs, est convexe.

Il s'agit, alors, de chercher un correcteur permettant de minimiser un critère donné (lui-même étant éventuellement le résultat de la combinaison de plusieurs critères) et de satisfaire les contraintes imposées par le cahier des charges.

II.7.4. Contrainte d'enveloppe temporelle :

Il s'agit de contraindre un signal du système bouclé, en réponse à une certaine excitation extérieure, à rester à l'intérieur d'une enveloppe temporelle. Par exemple, contraindre la réponse à un échelon de référence ou le rejet de perturbation à rester à l'intérieur d'un gabarit fixé au préalable.

Une enveloppe temporelle imposée à un signal z_i consiste à le contraindre à être compris entre deux valeurs, maximale $z_{i \max}(t)$ et minimale $z_{i \min}(t)$, voir Figure II.16. L'ensemble des signaux vérifiant cette contrainte s'écrit donc :

$$\{Z_i(t) / z_{i \min}(t) < Z_i(t) < z_{i \max}(t) \quad \forall t\}$$

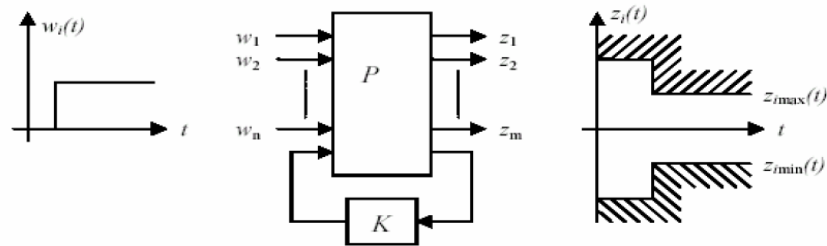


Fig. II.16.Exemple de contraintes temporelles

Cet ensemble de signaux est un ensemble convexe, car pour deux signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$ à l'intérieur du gabarit, la combinaison $z_3(t) = \lambda z_1(t) + (1 - \lambda) z_2(t)$ (où λ est un réel compris entre 0 et 1) reste à l'intérieur du gabarit.

Pour montrer que cette contrainte est convexe, il nous faut conformer la propriété de transformation linéaire des ensembles et sous-ensembles convexes.

II.8 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié la paramétrisation de Youla et ses propriétés, qui permettront de mettre le problème de robustification de d'un correcteur initial sous forme convexe (qui était a priori non convexe). Les propriétés fondamentales de cette paramétrisation des correcteurs stabilisant sont:

- Lorsque l'on exprime les fonctions de transfert en boucle fermée en fonction du paramètre Q , on obtient des fonctions qui dépendent affinement de Q .
- Tout correcteur stabilisant s'écrit comme une transformation linéaire fractionnaire bien déterminée (c'est-à-dire ici une fonction rationnelle) en Q .
- L'expression des spécifications fréquentielles et temporelles en boucle fermée de façon convexe sous le paramètre de Youla [30]. La mauvaise nouvelle est qu'il est convexe mais de dimension infinie : la variable d'optimisation Q appartient à un ensemble de dimension infinie (ensemble des fonctions de transfert) et le nombre de contraintes d'optimisation est infini. Un autre défaut est que le correcteur obtenu peut être d'ordre important. L'idéal serait de trouver une solution sous la forme d'un problème d'optimisation convexe de dimension finie.

On abordera aux chapitres suivants la problématique liée à la résolution de ce type de problème et la façon de le résoudre numériquement, conduisant cependant à une solution optimale.

Chapitre III

Observateur/retour d'état

III.1. Introduction :

La notion de paramétrisation de Youla qui permet de caractériser l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire invariant par l'ensemble des transferts stables. Cette propriété très forte est exposée ici pour définir un outil intermédiaire pour le chapitre suivant. Mais la mise en œuvre pratique de cette paramétrisation permet aussi de structurer un correcteur dynamique sous forme d'un observateur et d'un retour d'état. Cette structuration tire son intérêt de la facilité d'implantation qu'elle confère et des interprétations physiques qu'elle facilite.

III.2. La notion de Commandabilité et l'observabilité :

La commandabilité et l'observabilité sont deux concepts développés pour la représentation d'état des systèmes qui permettent de caractériser respectivement la possibilité que la commande exerce une influence sur un des états et la possibilité d'obtenir une certaine information d'un des états. Cependant leur concept peut être utilisé dans d'autres représentations.

III.2.1. Commandabilité :

La commandabilité est une caractéristique d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui nous indique si une ou plusieurs de ces dynamiques peuvent être modifiées par les entrées.

Définition :

Un état $x(t)$ est commandable en t_0 s'il est possible de déterminer $u(t)/[t_0 t_f]$ conduisant tout état initial $x_t(t_0)$ vers 0 en $t_0 < t_t < t_f$.

Si cette propriété est vraie $\forall t_0$ et $\forall i = 1, \dots, n$, alors le système est complètement commandable.

Remarques :

Si un système n'est pas complètement commandable alors pour certaines conditions initiales il n'existe pas d'entrée de commande pouvant ramener le système à l'origine.

La commandabilité est une notion importante puisqu'elle établit le fait que l'on puisse commander le système afin de modifier son comportement (stabilisation d'un système instable, modification des dynamiques propres). Cette notion joue donc un rôle très important dans la théorie de la synthèse de systèmes de commande dans l'espace d'état.

III.2.2. Critère de Commandabilité (Kalman) :

C'est un critère qui permet de définir la commandabilité d'un système LTI avec l'information des matrices A et B.

Un système LTI représenté par l'équation dynamique d'état,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, C est de rang n ,

$$\text{rang}(C) = \text{rang}[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = n$$

III.2.3. Observabilité :

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui nous indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.

Définition :

Un état $x(t)$ est observable en t_0 s'il est possible de déterminer $x(t_0)$ connaissant $y(t)/[t_0, t_f]$.

Si cette propriété est vraie $\forall t_0$ et $\forall i = 1, \dots, n$ alors le système est complètement observable.

Remarques : La notion d'observabilité est cruciale pour les systèmes où il est impossible de mesurer tout le vecteur d'état, et doit être estimé à partir des données fournies par la sortie.

III.2.4. Critère D'observabilité (Kalman) :

La notion d'observabilité fait intervenir la matrice dynamique A et la matrice de sortie C .

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité, \mathcal{O} est de rang n :

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

III.3. Structure de la commande à retour d'état observé :

Pour réaliser une commande à retour de sortie, on peut donc utiliser un observateur d'état et d'effectuer une commande à retour d'état en utilisant l'état observé (état de l'observateur) figure .13 : [31,37] $u(t) = Gv(t) - Kx(t)$; K : gain de retour d'état

G : gain pré bouclage qui est calculé en général en fonction du gain statique désiré On peut

écrire les équations d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$u(t) = Gv(t) - Kx^{\wedge}(t)$$

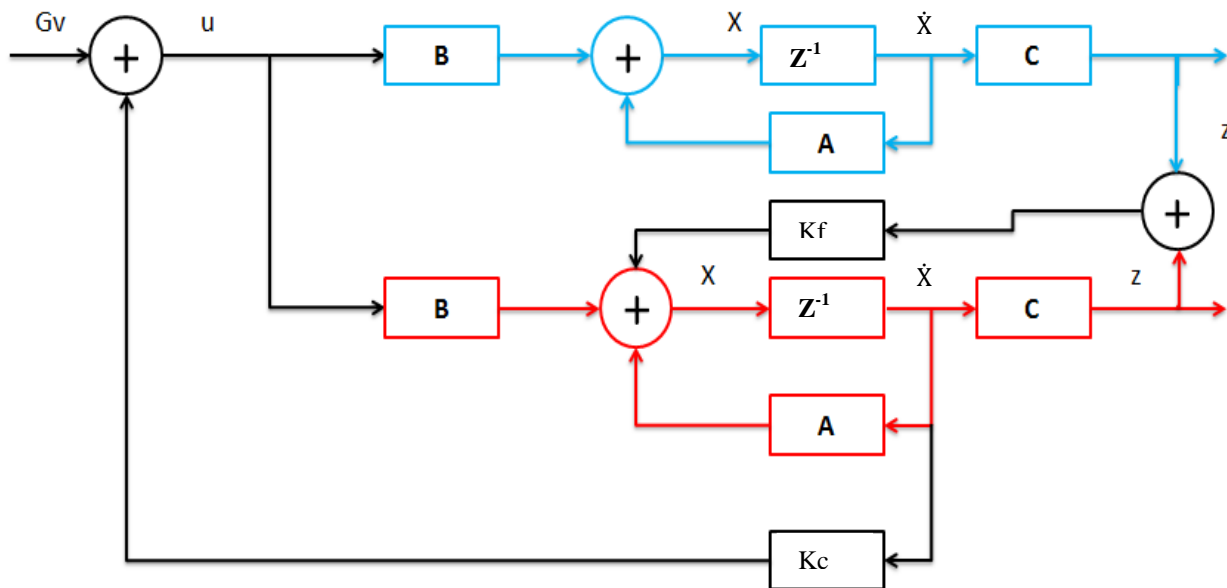


Fig.III.1. Structure de commande à retour d'état observé

En éliminant u(t) on obtient:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BG \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \tag{3.1}$$

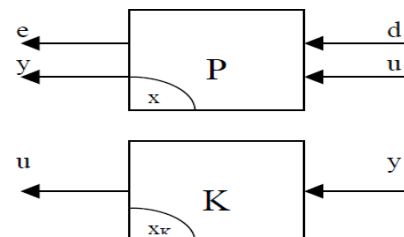
$$z(t) = [A - DK_c \quad DK_c] \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + DGv(t)$$

Cette matrice est triangulaire par blocs, et par conséquent le spectre du système bouclé est constitué de la réunion disjointe des spectres des blocs diagonaux, c'est-à-dire l'union des spectres du système initial commandé, et du système initial observé. Ainsi la synthèse d'un système commandé par un retour d'état reconstruit par un observateur est particulièrement simple pour les systèmes linéaires invariants, puisqu'on peut synthétiser les deux fonctions séparément (c'est le principe de séparation).

III.4. Représentation d'état du système en boucle fermée :

Soit :

$$P = \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 d + B_2 u \\ e = C_1 x + D_{11} d + D_{12} u \\ y = C_2 x + B_{21} d \end{cases}$$



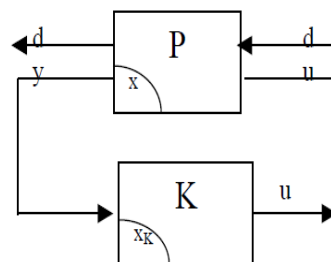
Et K cherché dynamique est donnée par

$$K: \begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \\ x_K = C_K x_K + D_K y \end{cases} \text{ d'ordre } n_k$$

Le système en boucle fermée est donnée par :

En assemblant les deux équations et en éliminant u on aura :

$$T: \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K & B_1 + B_2 D_K B_{21} \\ B_K C_2 & A_K & B_K D_{21} \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 & D_{12} C_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \\ e \end{bmatrix}$$



D'ordre $n_+ n_k$

Fig.III.2. Représentation du système MIMO

III.5. régulateur/observateur:

Considérons maintenant, ce système P présenté sur la figure suivante :

$$P = \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 d + B_2 u \\ e = C_1 x + D_{11} d + D_{12} u \\ y = C_2 x + B_{21} d \end{cases}$$

u : commande ; d : perturbation ; e : erreur ; y : sortie

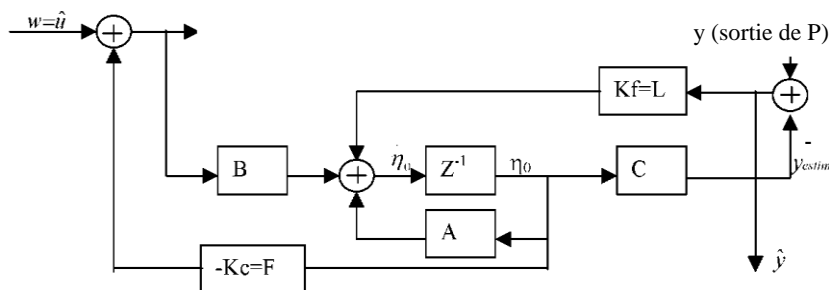
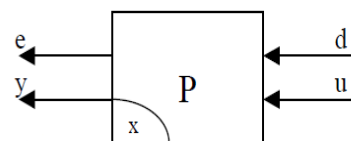
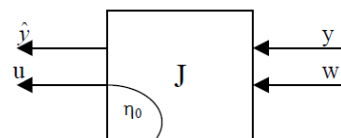


Fig.III.3. Structure d'état d observateur /régulateur

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} + F\eta_0 \\ \hat{y} &= -y + C_2\eta_0 && \text{; erreur de prédiction} \\ \dot{\eta}_0 &= A\eta_0 + B_2u + L\hat{y} \end{aligned}$$



En éliminant u on obtient :

$$J: \begin{cases} \dot{\eta}_0 = (A + B_2 K_c + K_f C_2)\eta_0 - K_f y + B_2 \hat{u} \\ u = K_c \eta_0 + \hat{u} \\ \hat{y} = C_2 \eta_0 - y \end{cases}$$

La matrice de J est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} (A + B_2 + K_f C_2) & (-K_f & B_2) \\ (K_c) & (0 & I) \\ (C_2) & (-I & 0) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

l'ordre de J $n_j = l$ l'ordre du système P : $n = n_j$ (ordre nominal)

Si on pose $u = \hat{u} - (-K_c)\eta_0$ et $z = y - y_{estimée}$ (changement de signe)

$$J \text{ est donne par : } J = \begin{bmatrix} (A - B_2 - K_f C_2) & (K_f & B_2) \\ (-K_c) & (0 & I) \\ (-C_2) & (I & 0) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

III.6. La paramétrisation de Youla et régulateur/ observateur :

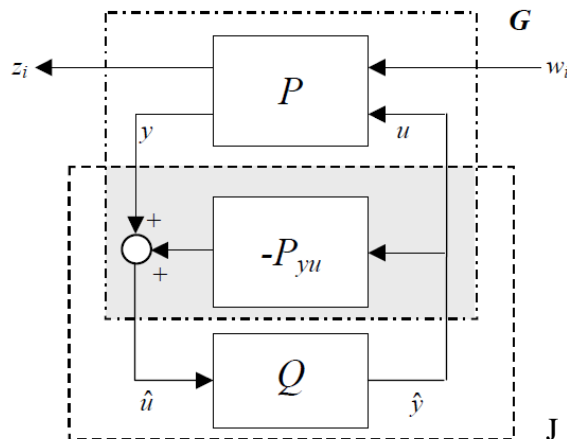


Fig.III.4 Représentation de la paramétrisation de Youla et régulateur/ observateur

En éliminant u et en obtient l'équation correspondantes aux l'interconnexion de deux systèmes P et J et:

$$G = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A & B_2 K_f \\ -K_f C_2 & A + B_2 K_f + K_f C_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ K_f D_{21} & B_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C_1 & D_{21} K_c \\ -C_2 & C_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

On utilise la 3^{ème} propriété de Youla ou $G_{22}(p)=0$:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow G_{22} = \begin{bmatrix} A & B_2 K_c & B_2 \\ -K_f C_2 & A + B_2 K_c + K_f C_2 & B_2 \\ -C_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + K_f C_2 & 0) & (0) \\ (-K_f C_2 & A + B_2 K_c) & (B_2) \\ (-C_2 & 0) & (0) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G_{22}=0$$

Le transfert en boucle fermée entre $T_{d \rightarrow e}$ est une fonction affine en paramètre libre Q

Selon la propriété de Hurwitz et prend $V = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}$ Et on aura

$$:VGV^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A - B_2 K_c & B_2 K_c \\ 0 & A - K_f C_2 B_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -K_f D_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C_1 - D_{12} K_c & D_{12} K_c \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{\hat{u}} \\ B_{12} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{\hat{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

III.7. Synthèse de Q-paramétrisation de Youla et observateur/régulateur :

La propriété de Youla est vérifiée $G_{22}=0$, si on cherche à établir les relations entre G_{11} et G_{12} et G_{21} et la dynamique de la boucle fermée ; alors le transfert en boucle fermée est linéaire en Q : $T=G_{cl}=G_{11}+G_{12}QG_{21}$

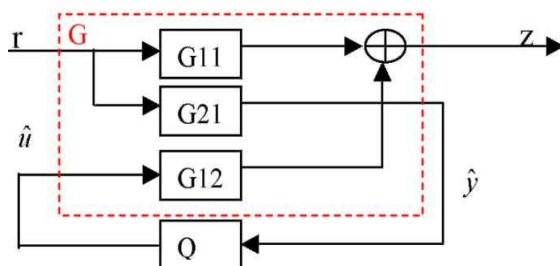


Fig.III.5. Réécriture de la paramétrisation de Youla

Si on considère le correcteur initial ($J=K_{ini}$) sous la forme « retour d'état+observateur), on a montré qu'il est possible de le paramétrer à l'aide de Q . [36]

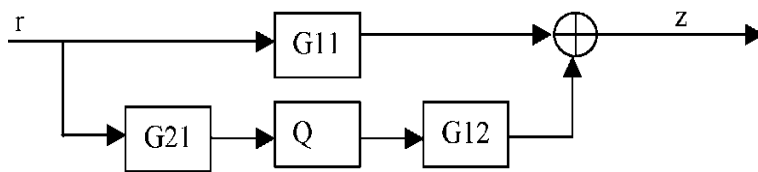


Fig.III.6. Réécriture de la paramétrisation de Youla

En donne P de la façon suivante :

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}, \text{ supposant que } P \text{ est stable, et } D_{22}=0, \text{ on écrit la représentation d'état du}$$

correcteur initial

$$K_{ini} : \begin{cases} \dot{x} = (A - B_2 K_c - K_f C_2) \hat{x} + K_f y \\ u = -K_c \hat{x} \end{cases} \text{ d'ou } K_{ini} = J = -K_c (zI - A + B_2 K_c + C_2)^{-1} K_f$$

Il s'agit maintenant de modifier le correcteur "retour et observateur" afin de faire apparaître les signaux \hat{u} et \hat{y} , et en assurant $T_{\hat{y} \rightarrow \hat{u}}$ nul. Une solution de prendre pour e erreur de prédiction $y - y_{estimée}$ et en ajoutant u à la commande $-K_c \hat{x}$, cette modification du correcteur est représentée par la figure suivante :

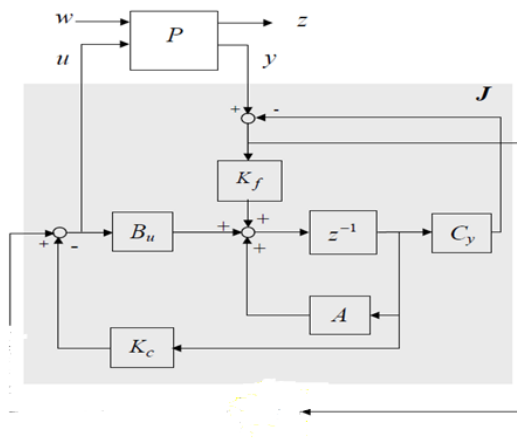


Fig. III.7. Structure du système J d'interconnexion

Nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = (A - B_2K_c - K_fC_2)\hat{x}_0 - K_fy + B_2\hat{u} \\ u = -K_c\hat{x}_0 + \hat{u} \\ \hat{y} = -C_2\hat{x}_0 + y \end{cases}$$

Il ne reste qu'à connecter le paramètre de synthèse Q permettant de paramétrer l'ensemble des boucles fermées stables.

L'approche présentée et utilisée est une méthode directe se basant sur une structure de correcteur de type retour d'état estimé. Il suffit d'écrire la représentation d'état de la boucle fermée avant de la connections de Q :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_2K_c \\ K_fC_2 & A - K_fC_2 - B_2K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ K_fD_{21} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \hat{u} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 & D_{12}K_c \\ C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \hat{u} \end{bmatrix} \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

Avec et donnée par $T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A & -B_2K_c \\ K_fC_2 & A - K_fC_2 - B_2K_c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ K_fD_{21} & B_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C_1 & -D_{12}K_c \\ C_2 & -C_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ (3.6)

on établit les transferts G_{11}, G_{21} et G_{12} , on est donc capable d'exprimer l'ensemble des transferts en boucle fermée $T_{w \rightarrow z}$ en fonction de Q puisque $T_{w \rightarrow z} = G_{11} + G_{12}QG_{21}$.

Une fois que l'on a obtenu Q par optimisation convexe, il s'agit de revenir à K ; pour cela on cherche $K(Q)$. D'ou on distingue deux cas de la Q-paramétrisation Q Statique et Q Dynamique, notre travail est basé sur le premier cas.

Q: STATIQUE :

La structure de l'observateur / régulateur et Q-paramétrisation de Youla est donnée sur le schéma suivant :

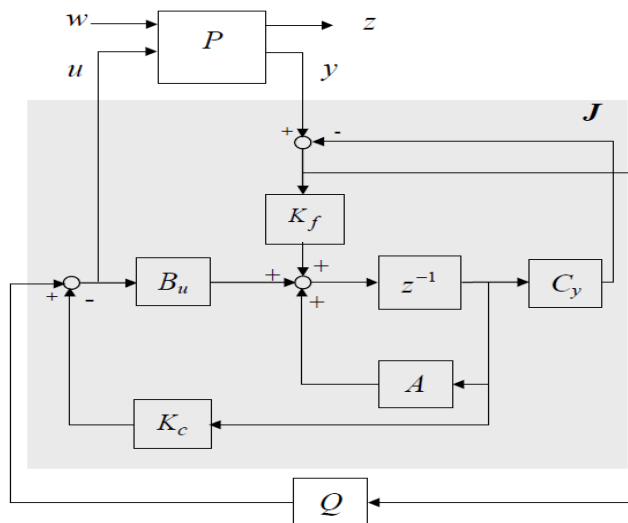


Fig.III.8.structure d'observateur/régulateur et Q-paramétrisation de youla

D'ou la représentation d'état en boucle fermée est donnée par :

$$T = G_{cl} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 + B_2QC_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_{11} + B_2QD_{21} & B_{11} + B_{\hat{u}}QD_{\hat{y}2} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} + D_{12}QC_2 \\ C_{12} & C_{22} + D_{2\hat{u}}QC_{\hat{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_{11} + D_{12}QC_2 & D_{12} + D_{1\hat{u}}QC_{\hat{y}2} \\ D_{21} + D_{2\hat{u}}QC_{\hat{y}1} & D_{22} + D_{2\hat{u}}QC_{\hat{y}2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Chapitre IV

optimisation LMI

IV.1. Introduction

En automatique, un problème d'optimisation peut correspondre à rechercher un correcteur qui satisfasse les spécifications d'un cahier des charges.

Dans le cas général, la résolution par un algorithme est un problème "compliqué". Pourquoi ? Très grossièrement, à partir d'un point initial, les algorithmes efficaces disponibles recherchent un minimum local. Si la fonction admet plusieurs minima, le résultat va dépendre du point initial. Un cas très intéressant est celui où il n'existe qu'un seul minimum local (minimum local = minimum global) : indépendamment du point initial, le minimum global sera alors atteint. Cette propriété est obtenue dans le cas où la fonction est convexe et où l'ensemble des contraintes est convexe: on parle alors d'optimisation convexe. Un certain nombre de classes de problèmes d'optimisation convexe de dimension finie admettent des algorithmes de résolution efficaces. Parmi ceux-ci, se trouve l'optimisation LMI.

IV.2. Inégalités matricielles affines

IV.2.1. Inégalité matricielle affine ou linéaire

On appelle inégalité matricielle affine (linear matrix inequality) noté LMI le problème suivant : étant donné des matrices réelles, carrées symétriques F_i , $i = 0 \dots n$, existe-t-il un jeu de réels x_i , $i = 1 \dots n$ tels que $F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n > 0$

$$\text{Ou} \quad F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0 \quad (4.1)$$

Avec $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ appelé vecteur de décision ou vecteur d'optimisation

F_i : sont n matrices symétriques données de $R^{n \times n}$.

Le succès des LMI vient du développement des méthodes dites du point intérieur (interior point methods) qui permettent de résoudre de manière efficace ces problèmes [32]. La mise en évidence de cette « démarche LMI » a ouvert des possibilités telles qu'il est devenu possible d'aborder des problèmes d'analyse et/ou de commande jusque là non envisageables. La mise en oeuvre de la « démarche LMI » sur ces nouveaux problèmes amène à des formulations sous forme de problèmes d'optimisation sous contraintes LMI dépendant des paramètres : dans l'expression (4.2), les matrices F_i et les variables de décision x sont maintenant des fonctions rationnelles de paramètres réels, que l'on notera θ et qui appartiennent à un ensemble compact P :

$$\{x(\theta): P \rightarrow R | F_0(\theta) + \sum_{i=1}^n x_i(\theta) F_i(\theta)\} \quad (4.2)$$

Sous cette forme, malheureusement, on ne retrouve pas l'un des grands intérêts de l'optimisation LMI qui est l'existence d'algorithmes de résolution efficaces. Face à ce problème, l'approche généralement adoptée pour le problème d'automatique particulier considéré consiste à essayer de définir l'ensemble des fonctions (4.2) ou un sous ensemble de (4.2) par une contrainte LMI.

IV.2.2. Positivité

On dit d'une matrice $A \in \mathbb{R}^n$ qu'elle est positive et on note $A > 0$ si et seulement si la forme quadratique $x^T A x$ est positive pour tout vecteur x .

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x > 0 \Rightarrow A > 0 \quad (4.3)$$

Cette définition se transpose évidemment au cas négatif. On peut toujours écrire une forme quadratique à partir d'une matrice symétrique. Ces matrices ont la particularité de n'avoir que des valeurs propres réelles. En optimisation, on utilise souvent le résultat suivant que, pour A symétrique, $x^T A x$ est positif pour tout x si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives et on note $A > 0$.

On définit aussi la positivité stricte et on dit qu'une matrice est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. C'est équivalent à dire que la forme quadratique correspondante $x^T A x$ est strictement positive dès que x est non nul.

Quelques propriétés :

- Soit λ un scalaire, $A - \lambda I > 0$ si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement supérieures à λ .
- $P > 0 \Leftrightarrow -P < 0$; on peut donc toujours se ramener à un problème de positivité ou de négativité.

IV.3. Problème d'optimisation sous contraintes LMI

Un problème d'optimisation est défini de la manière suivante.

Définition (Problème d'optimisation de dimension finie)

$$\text{Soit : } \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\zeta \rightarrow f(\zeta)$$

Alors un problème d'optimisation s'écrit :

$$\text{Min } f(\zeta) \quad (4.4)$$

$$\zeta \in \mathcal{C}$$

où

$C \subset \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des contraintes;

$\zeta = [\zeta_N \dots \zeta_M]^T$ est le vecteur de variables de décision ou variables d'optimisation; la valeur de Z pour laquelle le minimum est atteint est appelée ζ^* Notation :

$$\zeta^* = \underset{\zeta \in C}{\operatorname{argmin}} f(\zeta) \quad (4.5)$$

la fonction f est l'objectif ou la fonction de coût;

Quand $C = \mathbb{R}^m$, on parle de problème d'optimisation sans contrainte sinon de problème d'optimisation sous contraintes.

On dit que :

- $\zeta^* \in C$ est un optimum local s'il existe un voisinage ouvert U de ζ^* tel que, pour tout $\zeta \in U \cap C$, on a $f(\zeta^*) < f(\zeta)$;
- $\zeta^* \in C$ est un optimum global si, pour tout $\zeta \in C$, on a $f(\zeta^*) < f(\zeta)$.

Résoudre ce problème signifie trouver un optimum global (et la valeur de f en ce point). On distingue des classes de problèmes d'optimisation en fonction des propriétés de f et de C . Deux classes de problèmes importantes sont celle des problèmes d'optimisation convexes et celle des problèmes d'optimisation quasi-convexes.

Définition

Un problème d'optimisation est dit convexe si

– C est un ensemble convexe: pour tout $\zeta_1 \in C$, pour tout $\zeta_2 \in C$, pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a $f(\lambda \zeta_1 + (1 - \lambda) \zeta_2) \leq \lambda f(\zeta_1) + (1 - \lambda) f(\zeta_2)$.

Un problème d'optimisation est dit quasi convexe si

– C est un ensemble convexe: pour tout $\zeta_1 \in C$, pour tout $\zeta_2 \in C$, pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a $(\lambda \zeta_1 + (1 - \lambda) \zeta_2) \in C$;

– F est une fonction quasi convexe: pour tout $\zeta_1 \in C$, pour tout $\zeta_2 \in C$, pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a $f(\lambda \zeta_1 + (1 - \lambda) \zeta_2) \leq \operatorname{Max} \{f(\zeta_1), f(\zeta_2)\}$.

Pour ces deux classes de problèmes d'optimisation, la fonction de coût a la propriété que tout minimum local est un minimum global sur l'ensemble de définition de la fonction. Ceci implique que tout optimum local est un optimum global. Cette propriété est importante car, pour résoudre les problèmes d'optimisation, des algorithmes de résolution numérique sont généralement utilisés.

Ces algorithmes nécessitent un point d'initialisation dans C et permettent, à partir de ce point d'initialisation, de trouver un optimum local. Pour les problèmes d'optimisation convexes et quasi-convexes, ces algorithmes permettent donc de trouver un optimum global et donc de les résoudre.

Du fait qu'ils peuvent être résolus efficacement, les problèmes d'optimisation convexes et quasi-convexes sont donc intéressants.

Des sous-problèmes importants sont les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI. Un problème d'optimisation sous contrainte s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Min } f(\zeta) \\ \zeta \in C \end{aligned}$$

Où

$$C = \{ \zeta \in R^m \mid \forall x \in R^n, x^T F(\zeta) x \geq 0 \} \text{ ou } C = \{ \zeta \in R^m \mid \forall x \in R^n \setminus \{0\}, x^T F(\zeta) x > 0 \}$$

$$\text{Avec : } F(\zeta) \triangleq F_0 + \sum_{i=0}^m \zeta_i F_i,$$

Le vecteur $\zeta \in R^m$ est le vecteur des variables de décision de la contrainte, et où les F_i sont m matrices symétriques données de $R^{n \times n}$, $i=0 \dots m$.

Propriété :

Soit les deux ensembles :

$$C_1 = \{ \zeta \in R^m \mid F_1(\zeta) > 0 \} \text{ et } C_2 = \{ \zeta \in R^m \mid F_2(\zeta) > 0 \}$$

Alors l'intersection est définie par :

$$C_1 \cap C_2 = \left\{ \zeta \in R^m \mid \begin{bmatrix} F_1(\zeta) & 0 \\ 0 & F_2(\zeta) \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (4.6)$$

Cette propriété découle du fait que les valeurs propres d'une matrice diagonale par blocs sont constituées par les valeurs propres des matrices sur la diagonale.

Afin de rendre les solveurs de LMI facilement utilisables pour les problèmes de l'automatique, des interfaces ont été développées permettant d'écrire les problèmes sous des formes matricielles simples [33,38].

Les trois problèmes classiques que ces outils résolvent sont :

- la faisabilité (ou l'existence),
- la minimisation d'une fonction linéaire,
- le problème de valeur propre généralisée : minimiser λ sous les contraintes.

IV.3.1. Problème de Faisabilité [34]

Tester s'il existe $\zeta \in C \subset R^m$ tel que $F(\zeta) > 0$, et si oui, déterminer un tel $\zeta \in R^m$:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \zeta \in R^m \\ \text{tel que } F(\zeta) > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Le problème est faisable si $C \neq 0$, existe un ensemble non vide des ζ vérifiant $F(\zeta) > 0$.

Sous Matlab, la recherche d'une solution globale (à une tolérance bien déterminée) est assurée par la fonction **feasp**.

IV.3.2. Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire [34]

Tester s'il existe $\zeta \in \mathbb{R}^m$ tel que $F(\zeta) > 0$, et si oui, déterminer $\zeta \in \mathbb{R}^m$ tel que $F(\zeta) > 0$ et qui minimise $c^T \zeta$ où $c \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur donné :

$$\begin{aligned} \min c^T \zeta \\ \zeta \in \mathbb{R}^m \\ \text{tel que } F(\zeta) > 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sous Matlab, la recherche d'une solution globale (à une tolérance bien déterminée) est assurée par la fonction **mincx**

IV.3.3. Problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale [34,32]

Tester s'il existe $\zeta \in \mathbb{R}^m$ tel que $F(\zeta) > 0$ et $H(\zeta) > 0$ où $H(\zeta)$ est de la forme (4.2), et si oui, déterminer $\zeta \in \mathbb{R}^m$ tel que $F(\zeta) > 0$ et $H(\zeta) > 0$ et qui minimise la valeur propre généralisée maximale $\lambda_{\max}(G(\zeta), F(\zeta))$ de $F(\zeta)$ et $G(\zeta)$ où $G(\zeta)$ est de la forme (4.2) et où $\lambda_{\max}(G(\zeta), F(\zeta))$ est la valeur minimale de λ pour laquelle $\lambda F(\zeta) - G(\zeta)$ est définie positive :

$$\begin{aligned} \min \lambda_{\max}(G(\zeta), F(\zeta)) \\ \zeta \in \mathbb{R}^m \\ \text{tel que } F(\zeta) > 0 \text{ et } H(\zeta) > 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Autre écriture du problème :

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \zeta \in \mathbb{R}^m \\ \text{tel que } \lambda F(\zeta) - G(\zeta) > 0 \\ F(\zeta) > 0 \text{ et } H(\zeta) > 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sous Matlab, la recherche d'une solution globale est assurée par la fonction **gevp**.

IV.4. Les outils techniques pour la formulation LMI:

Ces outils permettent d'exprimer des problèmes d'analyse ou de commande de système d'optimisation sous contraintes LMI. En effet la mise sous forme LMI d'un problème d'optimisation consiste dans un premier temps à traduire les contraintes par des inégalités matricielles que l'on tente en suite de rendre affine en fonction des variables d'optimisations. [29]

IV.4.1 Lemme de Schur :

Le complément de Schur ou le Lemme de Schur est un outil fondamental dans le maniement

des inégalités matricielles ; en effet, il permet dans certain cas de mettre sous forme LMI des contraintes non linéaires.

Définition :

Soient les matrices symétriques $(Q, S) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ et $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Alors les deux propositions sont équivalentes :

$$\begin{aligned} &\checkmark \quad Q > 0 \text{ et } S(x) - R(x)TA(x) - R(x) > 0 \\ &\checkmark \quad \begin{bmatrix} Q(x) & R(x) \\ R^T(x) & S(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.11}$$

IV.4.2 Lemme d'élimination :

Définition :

Soient trois matrices $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times q}$ alors les trois problèmes suivants sont équivalant :

$$\begin{aligned} &\checkmark \quad \exists K \in \mathbb{R}^{p \times q}, G + UKVT + VKTUT < 0 \\ &\checkmark \quad \begin{cases} U_{\perp}^T G U_{\perp} < 0 \\ V_{\perp}^T G V_{\perp} < 0 \end{cases} \\ &\checkmark \quad \exists \sigma \in \mathbb{R}, \begin{cases} G - \sigma UU^T < 0 \\ G - \sigma VV^T < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.12}$$

$\checkmark \quad U_{\perp}$ et V_{\perp} sont les compléments orthogonaux des matrices U et V respectivement,

{ Rappel : le complément orthogonal d'une matrice U est la matrice $U_{\perp} \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$ tel que $U_{\perp}^T U = 0$ et $\text{rang}[U \ U_{\perp}] = n$ }

IV.4.3 Lemme S-procedure :

Définition :

Considérons les matrices $T_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $i = 0 \dots k$ et les formes quadratiques associés :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, F_i(u) = u^T T_i u$$

alors la proposition (i) implique la proposition (ii) :

$$\begin{aligned} &(i) \quad \exists \tau_i \in \mathbb{R}_+ / F_0(u) - \sum \tau_i F_i(u) \\ &(ii) \quad F_0(u) > 0 \text{ pour tout } u \neq 0 \text{ tel que } \forall i \in I, F_i(u) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Quand $k=1$, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes s'il existe un u_0 tel que : $F_1(u) > 0$

il est de plus possible d'obtenir l'équivalence des deux propositions lorsque les formes quadratiques F_i sont des intégrales quadratiques.

IV.4.4 Lemme corollaire de la S-procédure :

C'est la version matricielle de la S-procédure :

Soient $A=A^T, B, C, D, U=U^T, V, W=W^T$ des matrices réelles de taille compatibles telles que :

$$\checkmark \quad C \text{ est de rang plein}$$

✓ La matrice $\begin{bmatrix} U & V \\ V^T & W \end{bmatrix}$ possède une valeur propre positive.

Alors les propositions (i) et (ii) sont équivalentes :

$$(i) \begin{bmatrix} A - C^T W C & B - C^T V - C^T W D \\ B^T - V^T C - D^T W C & -U - D^T V - V^T D - D^T W D \end{bmatrix} > 0$$

$$(ii) \forall \Delta / \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U & V \\ V^T & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \begin{cases} \det(I - \Delta D) \neq 0 \\ A - B(I - \Delta D)^{-1} C + C^T (I - \Delta D)^{-1} \Delta^T C^T \end{cases} \quad (4.14)$$

IV.5. formulation de quelque critère : [27,33,34]

IV.1. Formulation du nome H_∞

IV.1.1. Caractérisation matricielle :

Un système discret (A, B, C, D) est stable et admet une norme H_∞ inférieure à un niveau

$\gamma > 0$ ssi

$\exists P = P^T > 0$ telle que :

$$\|C(zI - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -P & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -\gamma I & D^T \\ 0 & C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

Il y a d'autres façons de le formuler :

Structure 1:

$P = P^T > 0$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D + \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

Structure 2:

$P = P^T > 0$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

Structure 3:

$P = P^T > 0$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & B & PC^T \\ B^T & -\gamma I & D^T \\ PC & D & \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

IV.1.2. Synthèse H_∞ :

IV.1.2.1. Synthèse H_∞ par retour d'état :

Soit le système suivant:

{ Pour des raisons de simplification des calculs on $C_y = I, D_{yw} = D_{yu} = 0$ }

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Question : on recherche une loi de commande par retour d'état ($K \in \mathbb{R}^{m \times n}$) telle que $u=Kx(t)$ et assure :

1. Le système en boucle fermé est stable
2. La norme H_∞ du système en boucle fermé $\|T_{w \rightarrow z}\|_\infty < \gamma$

Le système en BF admet pour équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A + B_u K x(t) + B_w w(t) = A_{cl} x(t) + B_{cl} w(t) \\ z(t) &= (C_z + D_{zu} K)x(t) + D_{zw} w(t) = C_{cl} x(t) + D_{cl} w(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ce système est stable ssi $\exists P$ telle que (on utilise la structure 01):

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} + C_{cl}^T C_{cl} & P B_{cl} + C_{cl}^T D_{cl} \\ B_{cl}^T P + D_{cl}^T C_{cl} & D_{cl}^T D_{cl} + \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

Alors il existe un correcteur par retour d'état s'il existe une matrice K et une matrice $P=P^T > 0$ telle que :

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K)^T P + P(A + B_u K) + (C_z + D_{zu} K)^T (C_z + D_{zu} K) & P B_w (C_z + D_{zu} K)^T D_{zw} \\ B_w^T P + D_{zw}^T (C_z + D_{zu} K) & D_{zw}^T D_{zw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

Les variables d'optimisation sont P et K . Cette inégalité n'étant pas affine en P et en K , elle ne définit pas une LMI. Par une série de transformations, on va montrer que l'on peut obtenir une contrainte LMI équivalente après un changement de variables adéquat, on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + K^T B_u^T P + P B_u K & P B_w \\ B_w^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_z + D_{zu} K)^T \\ D_{zw}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} K & D_{zw}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.22)$$

En appliquant le lemme de Schur ($C-B^T A^{-1} B$) on obtient :

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + K^T B_u^T P & P B_w & (C_z + D_{zu} K)^T \\ B_w^T P & -\gamma I & D_{zw}^T \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

Dans cette inégalité il nous reste plus que $P B_u K$ et $K^T B_w^T P$ comme terme bilinéaire on

appliquant la propriété des matrices congruentes : $M < 0 \Rightarrow \Pi^T M \Pi < 0$

Avec $\Pi = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$

on obtient $\begin{bmatrix} P^{-1} A^T + A P^{-1} & B_w & P^{-1} (C_z^T + K^T D_{zu}^T) \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z P^{-1} + D_{zu} K P^{-1}) & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.24)$

Dernier changement on posant : $Q=P^{-1}$ et $Y=K P^{-1}$ et ce changement est bien posé car la

fonction qui relie (P, K) et (Q, Y) est une bijection : on aura

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ + Y^T B_u^T & B_w & QC_z + Y^T D_{zu}^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z Q + D_{zu} Y) & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

Cette dernière inégalité est une LMI (affine en Q et Y)

En conclusion ma recherche d'une loi de commande $u=Kx$ assurant la stabilité de la boucle fermée et une norme H_∞ entre w et z inférieure à γ s'obtient de la façon suivante :

1. Trouver Q et Y tel que les inégalités précédente (4.21) soit satisfaite
2. $P=Q^{-1}$ et $K=YP$ (4.22)

IV.1.2.2. Synthèse H_∞ par retour de sortie :

Soit le système P admet une représentation d'état $(A, B_w, B_u, C_z, D_{zw}, D_{zu}, C_y, D_{yw}, D_{yu})$ d'ordre n , étant donné $\gamma > 0$, il existe un correcteur K par retour de sortie ($u=Ky$) ; d'ordre inférieur ou égal à n définie par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y \\ u(t) = C_K x_K(t) + D_K y \end{cases}$$

telle que : 1. Le système $P*K$ est asymptotiquement stable

2. $\|P*K\|_\infty < \gamma$

Si et seulement s'il existe deux matrice P et Q telle que :

$$\begin{aligned} & [B_u^T \quad 0 \quad D_{zu}^T]_\perp^T \begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z q & D_{zw} & -I \end{bmatrix} [B_u^T \quad 0 \quad D_{zu}^T]_\perp < 0 \\ & [C_y \quad D_{yw} \quad 0]_\perp^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_w & C_z \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z q & D_{zw} & -I \end{bmatrix} [C_y \quad D_{yw} \quad 0]_\perp < 0 \\ & \text{Et } \begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

IV.2. Formulation du norme H_2 : [32, 33,35]

IV.2.1. Caractérisation matricielle :

Un système discret (A, B, C, D) est stable et admet une norme H_2 inférieure à un niveau $\gamma_2 > 0$

ssi : $\exists X_2 = X_2^T > 0$ telle que :

$$\|C(zI - A)^{-1}B + D\|_2 < \gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A^T X_2 A - X_2 + C^T C < 0 \\ \text{trace}(D^T D + B^T X_2 B) < \gamma_2^2 \\ \text{ou} \\ A^T X_2 A - X_2 + B^T B < 0 \\ \text{trace}(D^T D + C^T X_2 C) < \gamma_2^2 \end{cases} \quad (4.27)$$

L'utilisation conjointe du lemme de Schur et de manipulation matricielles conduit à une

caractérisation sous d'inégalité matricielle, le système est stable et admet une norme H2 inférieur à un niveau γ_2 ssi il existe deux matrices symétriques définie positives $X_2=X_2^T>0$
 $Y=Y^T>0$

Telles que :

Structure 01 :

$$\begin{bmatrix} -X_2^{-1} & A & 0 \\ A^T & -X_2 & C^T \\ 0 & C & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} -X_2^{-1} & B & 0 \\ B^T & -Y & D^T \\ 0 & D & -I \end{bmatrix} < 0, \text{trace}(Y) < \gamma_2^2 \quad (4.28)$$

Il existe autres façon de formuler H2 en utilisant les outils techniques de formulation :

Structure 02 :

$$\begin{cases} \exists P = P^T > 0 \\ A^T P + PA + C^T C < 0 \\ \text{trace}(D^T D + B^T P B) < \gamma_2^2 \end{cases} \quad (4.29)$$

Structure 03 :

$$\begin{cases} \exists Q = Q^T > 0 \\ A^T Q + QA + BB^T < 0 \\ \text{trace}(D^T D + C Q C^T) < \gamma_2^2 \end{cases} \quad (4.30)$$

Structure 04 :

$$\begin{cases} \exists X_2 = X_2^T > 0 \\ \exists Z = Z^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T X_2 + XA & XB \\ B^T X & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} X_2 & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} < 0 \\ \text{trace}(z) < \gamma_2^2 \end{cases} \quad (4.31)$$

Structure 05 :

$$\begin{cases} \exists Y = Y^T > 0 \\ \exists T = T^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T Y + YA & Y C^T \\ CY & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} Y & B \\ B^T & T \end{bmatrix} < 0 \\ \text{trace}(T) < \gamma_2^2 \end{cases} \quad (4.32)$$

IV.2.2. Synthèse H2 :

IV.2.2.1. Synthèse H2 par retour de sortie :

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_w u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}$$

Question : on recherche une loi de commande par retour d'état ($K \in \mathbb{R}^{p \times n}$) telle que $u=Ky(t)$ et assure :

1. Le système en boucle fermé est stable
2. La norme H2 du système en boucle fermé $\|T_{w \rightarrow z}\|_2 < \gamma_2$

Avec un contrôleur par retour de sortie dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_K x_k(t) + B_K y \\ u(t) &= C_K x_k(t) + D_K y \end{aligned}$$

le système bouclé est donnée par :

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{A}x(t) + \hat{B}w(t) \\ z(t) = \hat{C}x(t) + \hat{D}w(t) \end{cases}$$

Avec $\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix}$ $\hat{A} = \begin{bmatrix} A + B_u D_k C_y & B_u C_k \\ B_k C_y & A_k \end{bmatrix}$, $\hat{B} = \begin{bmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_k D_{yw} \end{bmatrix}$,

$\hat{C} = [C_z + D_{zu} D_k C_y \quad D_{zu} C_k]$, $\hat{D} = D_{zu} + D_{zu} D_K D_{yw}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{A}\hat{Q} + \hat{Q}\hat{A}^T & \hat{B} \\ \hat{B}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} Z & \hat{C}\hat{Q} \\ * & \hat{Q} \end{bmatrix} < 0 \\ \text{trace}(z) < \gamma_2 \end{cases}, \text{ avec : } \hat{Q} = \begin{bmatrix} Q & \bar{Q}^T \\ \bar{Q} & * \end{bmatrix}, \hat{P} = \bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} P & \bar{P} \\ \bar{P}^T & * \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$PQ + \bar{P}\bar{Q} = I$

IV.2.2.2. Synthèse H2 par retour d'état:

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}$$

Question : on recherche une loi de commande par retour d'état ($K \in \mathbb{R}^{p \times n}$) telle que $u(t)=Kx(t)$ et assure :

1. Le système en boucle fermé est stable
2. La norme H2 du système en boucle fermé $\|T_{w \rightarrow z}\|_2 < \gamma_2$

$$\begin{cases} \exists X_2 = X_2^T > 0 \\ \exists Z = Z^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T X_2 + X_2 A + B_u R + R^T B_u & B_w \\ B_w^T & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} Z & C_z X_2 + D_{zu} R \\ X_2 C_z + R^T D_{zu} & Q \end{bmatrix} < 0 \\ \text{trace}(z) < \gamma_2^2 \end{cases} \quad (4.34)$$

H2 optimal revient à minimiser γ_2^2 ; $\exists K$ tel que $\|T_{w \rightarrow z}\|_2 < \gamma_2$ ssi :

$$\begin{cases} \text{trace}\{(C_z + D_{zu}R)Q(C_z + D_{zu}R)^{-1}\} < \gamma_2 \\ (A + B_uR)^{-1}Q + Q(A + B_uR) + BB^T < 0 \end{cases}$$

après modification en utilisant les outils techniques pour la formulation LMI on obtient

$$(D_{yw} = D_{22} = 0)$$

$$\begin{cases} \text{trace}(z) < \gamma_2^2 \\ \begin{bmatrix} Z & C_z X_2 + D_{zu}R \\ X_2 C_z + R^T D_{zu}^T & X_2 \end{bmatrix} > 0 \\ AX_2 + X_2 A^T + B_u R + R^T B_u + B_w B_w^T < 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

avec H2 sous-optimal par retour d'état $K=RX^{-1}$

$$\text{H2 optimal revient à minimiser } \gamma_2^2 \quad \|P_{BF}\|_2 \leq \sqrt{\gamma_2^{2*}} \quad (4.36)$$

IV.3. α -stabilité :

IV.3.1. Définition :

L' α -stabilité est une propriété des systèmes qui permet de garantir la rapidité de convergence vers un point d'équilibre. Ce critère peut aussi être vu comme une contrainte de placement de pole dans un disque de rayon α :

IV.3.1.1. Cas discret :

Soit le système : $x(k+1)=Ax(k)$

L'état x d'un système est dit α -stable ($\alpha \in]0, 1[$) si est seulement si pour une entrée nulle et pour toute condition $x(0)$, la relation suivante est vérifiée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{-k} \|x(k)\| = 0 \quad (4.37)$$

Dont on peut dire que le module des valeurs propres de la matrice d'évolution est inférieur à α .

IV.3.1.2. Cas continu :

Soit le système : $\dot{x}(t)=Ax(t)$

on peut définir l' α -stabilité d'un système le taux de décroissance exponentiel définie comme le plus grand α tel que pour toute condition initiale $x_0(0)=0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(k)\| = 0 \quad (4.38)$$

IV.3.2. Caractérisation matricielle :

IV.3.2.1. Cas continu :

On peut relier le taux de décroissance aux valeurs propres de la matrice A . Dans le cas où A est diagonalisable dans \mathbb{C} , en notant $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ les valeurs propres de la matrice A , on a la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'état qu'est défini par :

$$x(t) = \sum_i e^{\alpha_i t} (\alpha_i \cos \omega_i t + \beta \sin \omega_i t) \quad (4.39)$$

La limite $\dot{x}(t) = Ax(t)$ sera satisfaite si et seulement si $\sigma_i < -\alpha$; il est possible de démontrer une condition nécessaire et suffisante : le taux de décroissance est (strictement) supérieur à α s'il existe une fonction $V(x)$ telle que :

$$\text{Pour } x \neq 0, V(x) > 0 \text{ et } \dot{V}(x) < -2\alpha V(x) \quad (4.40)$$

On prend $V(x) = x^T P x$ ou P est une matrice symétrique à déterminer.

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < -2\alpha V(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + PA + 2\alpha P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\alpha)(2P) - (A^T P + PA) > 0 \\ 2P > 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

IV.3.2.2. Cas discret :

Un système (A, B, C, D) est dit α -stable ssi :

$$\begin{cases} \exists X_3 = X_3^T > 0 \\ \begin{bmatrix} \alpha X_3 & A^T \\ A & X_3^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

IV.3.3. Synthèse α -stabilité :

IV.3.3.1. Synthèse α -stabilité par retour d'état :

Soit un système $\{D=0(\text{simplification de calcul})\}$ tel que :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{et } u = Kx$$

Alors le système bouclé est donné par

$$\dot{x}(t) = (A+BK)x(t)$$

Problème : Trouver K et P telles que :

$$\begin{cases} \forall x_1 \in R^n & x_1^T P x_1 > 0 \\ \forall x_2 \in R^n & x_2^T [(A+BK)^T P + P(A+BK) + 2\alpha P] x_2 < 0 \end{cases}$$

on remarque que la seconde inégalité est bilinéaire en les variables P et K :

Posons : $x_1 = P^{-1} \hat{x}_1$ et $x_2 = P^{-1} \hat{x}_2$, alors

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in R^n & \hat{x}_1^T P \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in R^n & \hat{x}_2^T [AP^{-1} + P^{-1}A^{-1} + BKP^{-1} + P^{-1}K^T B^T + 2\alpha P^{-1}] \hat{x}_2 < 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

Les inégalités ne sont affine en les variables d'optimisation P et K

Posons : $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$ alors on aura :

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in R^n & \hat{x}_1^T Q \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in R^n & \hat{x}_2^T [AQ + QA^T + BY + Q^T B^T + 2\alpha Q] \hat{x}_2 < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Ce changement de variables est bien posé les deux inégalités sont affine en les variables d'optimisation Q et Y , par suite la recherche d'une loi de commande $u(t) = Kx(t)$ assurant un taux de décroissance supérieur à α peut s'effectuer de la façon suivante :

1. Trouver Q et Y tel que les inégalités précédentes soient satisfaites (Problème de faisabilité ou de minimisation)

2. $P=Q^{-1}$ et $K=YP$ (4.45)

IV.3.3.2. Synthèse α -stabilité par retour de sortie :

Soit un système tel que :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \text{ et } u(t) = Ky(t)$$

Le système bouclé est donné par $\dot{x}(t) = (A+BKC) x(t)$

Problème : Trouver K et P telles que :

$$\begin{cases} \forall x_1 \in R^n & x_1^T P x_1 > 0 \\ \forall x_2 \in R^n & x_2^T [(A + BK)^T P + P(A + BK) + 2\alpha P] x_2 < 0 \end{cases}$$

De la même façon que la synthèse par retour d'état ;

Posons : $x_1 = P^{-1}\hat{x}_1$ et $x_2 = P^{-1}\hat{x}_2$, alors

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in R^n & \hat{x}_1^T P \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in R^n & \hat{x}_2^T [AP^{-1} + P^{-1}A^T + BKCP^{-1} + P^{-1}C^T K^T B^T + 2\alpha P^{-1}] \hat{x}_2 < 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Les inégalités ne sont affine en les variables d'optimisation P et K

Posons : $Q=P^{-1}$ et $Y=KCP^{-1}$ alors on aura :

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in R^n & \hat{x}_1^T Q \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in R^n & \hat{x}_2^T [AQ + QA^T + BY + Q^T B^T + 2\alpha Q] \hat{x}_2 < 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

Ce changement de variables est bien posé les deux inégalités sont affine en les variables d'optimisation Q et Y, par suite la recherche d'une loi de commande $u(t)=Ky(t)$ assurant un taux de décroissance supérieur à α peut s'effectuer de la façon suivante :

3. Trouver Q et Y tel que les inégalités précédentes soient satisfaites (Problème de faisabilité ou de minimisation)

4. $P=Q^{-1}$ et $K=YPC^{-1}$ (4.48)

IV.6. CONCLUSUON :

La formulation par LMI est un outil très efficace pour résoudre des problèmes généraux de LMI. Il mélange les outils simples pour les spécifications et la manipulation de LMIs avec les solutionneurs puissants de LMI pour trois problèmes génériques de LMI. Grâce à une représentation structure orientée de LMIs, les diverses contraintes de LMI peut être décrite sous leur forme normale de bloc-matrice. De même, les variables d'optimisation sont indiquées directement comme des variables de matrice avec une certaine structure donnée. Une fois qu'un problème de LMI est indiqué, il peut être résolu numériquement en appelant le solutionneur approprié.

Chapitre V

Application sur un bras flexible

V.1.Introduction :

Dans notre exemple d'application On appliquant la commande H2/H ∞ via les paramétrisations de Youla et l'optimisation LMI qui présenté dans les 4 chapitre précédents sur un bras flexible le but de cette étude c'est de calculé le régulateur K, le régulateur doit être calculé de façon qui respecter les spécifications présents dans le cahier des charges.

V.2.Problème multicritère :

En utilisent la boucle de correction suivant :

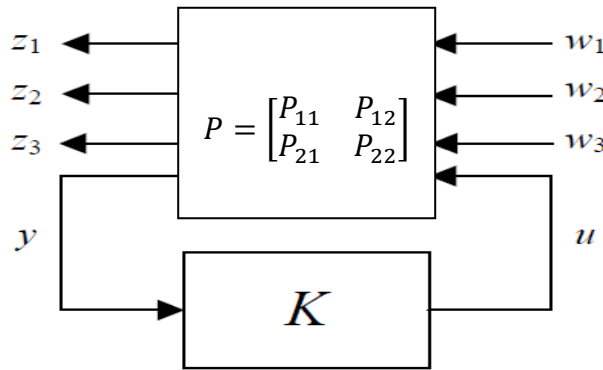


Fig.V.1.boucle de correction

Alors le système LFT (P, K) vérifier les trois propriétés suivant :

$$\|T_1\|_\infty < \gamma_1$$

$$\|T_2\|_2 < \gamma_2$$

LFT (P, K) α stable

Si seulement s'il existe quatre matrices symétriques et définies positif X_1 X_2 X_3 Y telle que les inégalités suivant soient vérifiées :

$$\begin{bmatrix} -X_1 & X_1 A_{cl} & X_1 B_{1,cl} & 0 \\ A_{1,cl}^T X_1 & -X_1 & 0 & C_{1,cl}^T \\ B_{1,cl}^T X_1 & 0 & -\gamma_1 I & D_{1,cl}^T \\ 0 & C_{1,cl}^T & D_{1,cl} & -\gamma_1 I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.1}$$

$$\begin{bmatrix} -X_2 & -X_2 A_{cl} & 0 \\ A_{1,cl}^T X_2 & -X_2 & C_{2,cl}^T \\ 0 & C_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.2}$$

$$\begin{bmatrix} -X_2 & -X_2 B_{2,cl} & 0 \\ B_{2,cl}^T X_2 & -Y & D_{2,cl}^T \\ 0 & D_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.3}$$

$$trace(Y) < \gamma_2^2$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 X_3 & A_{cl}^T X_3 \\ X_3 A_{cl} & X_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.4)$$

La problématique de synthèse :

Le problème alors de trouver une solution ?

Les inégalités précédentes sont linéaires et les variables sont inconnues c'est un problème de faisabilité LMI, dès qu'il s'agit de la synthèse da la correcteur les matrice de la représentation d'état dépendent de correcteur qui fais partie de problème d'optimisation, alors les inégalités ne sont plus linéaire.

V.3.Linéarisation des inégalités matricielles :

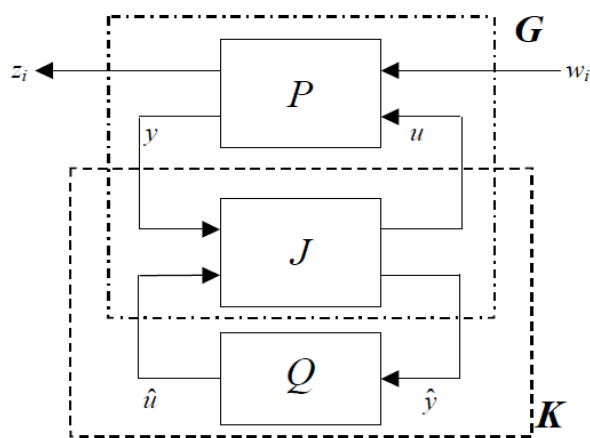


Fig.V.2.la forme générale de la paramétrisation de Youla

Considérons les caractérisations matricielles des nomes H_2 et H_∞ du système bouclé :

$$G_{cl} = LFT(G, Q) = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & C_{cl} \end{bmatrix}$$

Où Q est un retour statique de soitie ; compte tenu de la propriété 3 de la paramétrisation de Youla présentée au chapitre 3. La représentation d'état du système bouclé donnée par :

$$G_{cl} = LFT(G, Q) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 + B_2 Q C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_{11} + B_2 Q D_{21} & B_{11} + B_{\hat{u}} Q D_{\hat{y}2} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} + D_{12} Q D_2 \\ C_{12} & C_{22} + D_{2\hat{u}} Q C_{\hat{y}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_{11} + D_{12} Q D_{21} & D_{12} + D_{1\hat{u}} Q D_{\hat{y}2} \\ D_{21} + D_{2\hat{u}} Q D_{\hat{y}1} & D_{22} + D_{2\hat{u}} Q D_{\hat{y}2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

-soit X_i la fonction de Lyapunov associé au critère i (H_2, H_∞), on a la partition dans la même proportion de la matrice d'état A_{cl} de G .

$$X_i = \begin{bmatrix} W_i & Z_i \\ Z_i^T & Y_i \end{bmatrix} \text{ Selon } A_{cl} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

En définie le changement de variable bijective suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} R^{n \times n} \rightarrow R^{n \times n} \\ \left[\begin{array}{cc} W_i & Z_i \\ Z_i^T & Y_i \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} R_i & S_i \\ S_i^T & T_i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} W_i^{-1} & W_i^{-1} Z_i \\ -Z_i^T W_i^{-1} & Y_i - Z_i^T W_i^{-1} Z_i \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (5.7)$$

La matrice M_i :

$$M_i = \left[\begin{array}{cc} R_i & 0 \\ S_i^T & I \end{array} \right] \quad (5.8)$$

En appliquant au système G_{cl} les caractérisations matricielles des critères décrits dans l'annexe A, et on utilisant les propriétés de congruence on obtient les formulations LMI suivant :

V.3.1. Problème H_∞ : En utilisant la congruence par la matrice $\Pi_1 = \text{diag}(M_1 M_1 I I)$ On obtient

$$\left[\begin{array}{cccccc} -R_1 & 0 & A_1 R_1 & -A_2 S_1 + A_3 + B_{\hat{u}} Q C_{\hat{y}} & B_{11} + B_{\hat{u}} Q D_{\hat{y}1} - S_1 B_{12} & 0 \\ 0 & -T_1 & 0 & T_1 A_2 & T_1 B_{12} & 0 \\ * & * & -R_1 & 0 & 0 & R_1^T C_{11}^T \\ * & * & 0 & -T_1 & 0 & C_{12}^T + C_{\hat{y}}^T Q^T D_{1\hat{u}}^T + S_1^T C_{11}^T \\ * & * & * & * & -\gamma_1 I & D_{11}^T + D_{\hat{y}1}^T Q^T D_{1\hat{u}}^T \\ * & * & * & * & * & -\gamma_1 I \end{array} \right] < 0 \quad (5.9)$$

V.3.2. Problème H_2 :

En utilisant la congruence par la matrice :

$\Pi_{21} = \text{diag}(M_2 M_2 I)$ et $\Pi_{22} = \text{diag}(M_2 I I)$ On obtient

$$\left[\begin{array}{cccccc} -R_2 & 0 & A_1 R_2 & -A_2 S_2 + A_3 + B_{\hat{u}} Q C_{\hat{y}} & 0 & 0 \\ 0 & -T_2 & 0 & T_2 A_2 & 0 & 0 \\ * & * & -R_2 & 0 & R_2^T C_{21}^T & 0 \\ * & * & 0 & -T_2 & C_{22}^T + C_{\hat{y}}^T Q^T D_{1\hat{u}}^T + S_2^T C_{21}^T & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \end{array} \right] < 0 \quad (5.10)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -R_2 & 0 & B_{21} + B_{\hat{u}} Q D_{\hat{y}2} - S_2 B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_2 & T_2 B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Y & 0 & D_{22}^T + D_{\hat{y}2}^T Q^T D_{2\hat{u}}^T & 0 \\ * & * & * & 0 & -I & 0 \end{array} \right] < 0 \quad (5.11)$$

$$\text{trace}(Y) < \gamma_2^2 \quad (5.12)$$

V.3.3. Problème α –stabilité:

En utilisant la congruence par la matrice :

$$\Pi_3 = \text{diag}(I M_3)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 R_2 & & * & * & * \\ 0 & & \alpha^2 T_2 & * & * \\ A_1 R_3 & A_1 S_3 + S_3 A_2 + B_2 Q C_2 + A_3 & R_3 & * & * \\ 0 & & T_3 A_2 & 0 & T_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.13)$$

Ces différentes inégalités sont effectivement linéaires en les variables de décisions R_1, S_1, T_1, Q et γ_1 pour le problème H_∞ et R_2, S_2, T_2, Q et γ_2^2 pour le problème H_2 et R_3, S_3, T_3 pour le problème α -stabilité. Les deux problèmes H_2 et H_∞ sont couplés par le retour statique Q et utilisent des fonctions de Lyapunov indépendantes.

V.4. Modélisation de système :

V.4.1. Objectif :

L'objectif de cette étude est de trouver une loi de commande $u=k y$ pour le bras flexible qui permet de commander la position de l'angle désiré, le contrôleur à calculer doit éliminer les vibrations de bras tout en maintenant une réponse rapide, pour cela il faut modéliser se système.

V.4.2. Descriptions de système étudié (bras flexible) :

Ci-dessous illustre le module Joint flexible couplé à l'installation dans la configuration correcte. Le module est fixé à la roue de charge par deux vis à oreilles. Le bras principal est fixé au corps du module par deux ressorts identiques, ainsi résultant dans l'articulation flexible. La figure (V.4) montre les différents points d'ancrage sur le corps et le bras résultant dans de nombreuses configurations du module.



Fig.V.3.Module de bras flexible

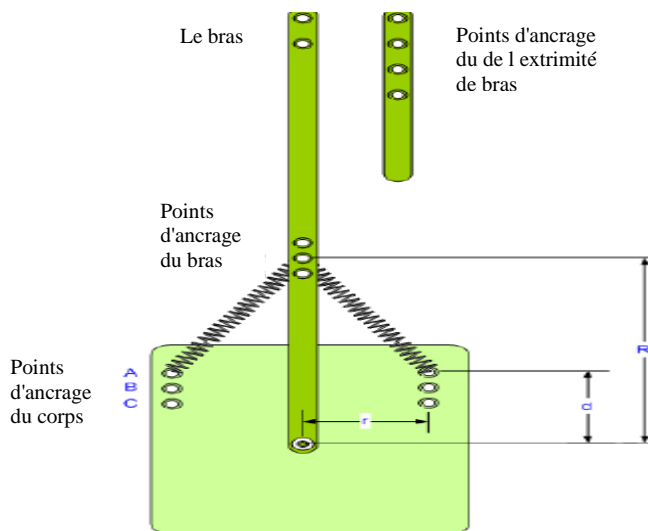


Fig.V.4.Illustration de bras flexible

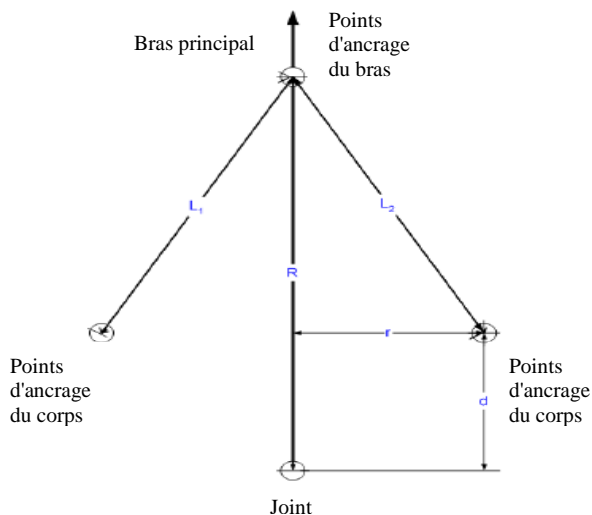


Fig. V.5. Le bras flexible au repos

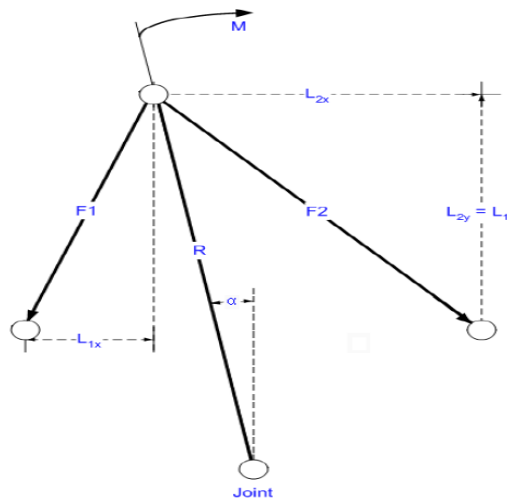


Fig. V.6. Le bras flexible déplacement

La figure V.5 ci-dessus montre l'articulation au repos, tandis que la figure V.4 illustre l'articulation à un α donné. Avis que le ressort 1 a été comprimé et ressort 2 a été étiré (par rapport à l'état stationnaire de l'articulation). Nous allons commencer par dériver les longueurs de chaque ressort en La figure 5.4.

$$\begin{cases} L_{1x} = r - R \sin \alpha \\ L_{1y} = R \cos \alpha - d \\ L_{2x} = r R \sin \alpha \\ L_{2y} = r R \cos \alpha - d \\ L_1 = \sqrt{L_{1x}^2 + L_{1y}^2} \\ L_2 = \sqrt{L_{2x}^2 + L_{2y}^2} \end{cases} \quad (5.14)$$

Nous allons maintenant tirer la force agissant sur chaque ressort:

$$\begin{cases} F_1 = K (L_1 - L) F_r \\ F_2 = K (L_2 - L) F_r \\ F_{1x} = F_1 \frac{L_{1x}}{L_1}, F_{1y} = F_1 \frac{L_{1y}}{L_1} \\ F_{2x} = F_2 \frac{L_{2x}}{L_2}, F_{2y} = F_2 \frac{L_{2y}}{L_2} \end{cases} \quad (5.15)$$

* F_r est la force de rappel sur chaque ressort. Les ressorts fournis viennent sans pré-charge ils ne seront pas étirés avant la force F_r est appliquée.

Revenant à la figure 5.6, on peut voir que la F_1 et F_2 sont tous deux agissent sur l'ancrage du bras (le point où les deux ressorts sont fixés au bras). Par simple inspection, nous peut voir que les x composants sont opposés les uns des autres, tandis que les composants y sont en la-même direction alors :

$$F_x = F_{2x} - F_{1x}$$

$$F_y = F_{2y} - F_{1y}$$

Nous avons maintenant 2 forces agissant sur le point d'ancrage qui apportera le bras à sa position initiale. Ces 2 forces provoquent un couple autour de l'articulation. Nous savons que le couple (restauration Moment) est égal au produit transversale du rayon R et chaque force résultant en ce qui suit:

$$\begin{cases} M_x = RxF_x = RF_x \sin(\pi/2 - \alpha) = RF_x \cos \alpha \\ M_y = Rx F_y = RF_y \sin(2\pi - \alpha) = -RF_x \sin \alpha \\ M = M_x + M_y = R \cos \alpha (F_{2x} - F_{1x}) - R \sin \alpha (F_{2y} - F_{1y}) \end{cases} \quad (5.16)$$

Nous avons maintenant notre moment de rappel M. Nous allons modélisons l'articulation souple comme un ressort simplifiée avec l'équation dynamique suivante :

$$M = K_{sf} \alpha \quad (5.17)$$

La figure V.7 ci-dessous montre le modèle simplifié qui sera utilisé pour le joint flexible. Puisque M est non-linéaire, on peut obtenir le première ordre linéaire estimé pour K_{sf} la raideur articulaire :

$$K_{sf} = \frac{\delta M}{\delta \alpha} \quad (5.18)$$

La dérivation finale obtenue est:

$$K_{sf} = \frac{2R}{D^{3/2}} [(Dd - Rr^2)F_r + (D^{3/2}d - DLd + Rr^2L)K] \quad (5.19)$$

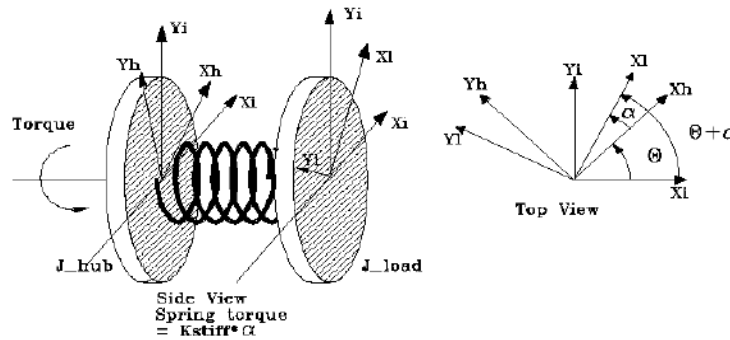


Fig. V.7.le modèle dynamique simplifié de système

Dérivation des équations du système dynamiques :

Maintenant que nous avons développé le modèle linéaire de le bras flexible, les équations dynamiques du système peut être obtenue en utilisant la formulation d'Euler-Lagrange. Nous obtenons l'énergie potentielle et cinétique dans notre système:

L'énergie potentielle : la seule énergie potentielle de système est au ressort

$$V = PE_{ressort} = \frac{1}{2}K_{sf}\alpha^2 \quad (5.20)$$

L'énergie cinétique : Les énergies cinétiques du système découlent de la plaque tournante mobile et bras flexible:

$$T = KE_{plaque} + KE_{bras} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{bras}(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \quad (5.21)$$

Formant le lagrangien :

$$L = T - V = KE_{plaque} + KE_{bras} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{bras}(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2}K_{sf}\alpha^2 \quad (5.22)$$

Nos 2 coordonnées généralisées sont θ et α . Nous avons donc 2 équations:

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} = T_{sortie} - B_{eq}\dot{\theta} \\ \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\alpha}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \alpha} = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Résolution d'équations (5.23) en arrive a :

$$\begin{cases} J_{eq}\ddot{\theta} + J(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = T_{sortie} - B_{eq}\dot{\theta} \\ J_{bras}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_{sf}\alpha = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

Revenant au contrôle de position, nous savons que le couple de sortie de la charge du moteur est:

$$T_{sortie} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g (V_m - K_t K_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (5.25)$$

Enfin, en combinant les équations, nous obtenant représentation d'état du système complet suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{sf}}{J_{eq}} & \frac{-\eta_m \eta_g K_t K_g K_m^2 + J_{eq} B_{eq}}{J_{eq} R_m} & 0 \\ 0 & \frac{-K_{sf}(J_{eq} - J_{bras})}{J_{bras} J_{eq}} & \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g K_m^2 + J_{eq} B_{eq}}{J_{eq} R_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g K_m}{J_{eq} R_m} \\ \frac{-\eta_m \eta_g K_t K_g K_m}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix} V_{in}$$

La modélisation tient compte des trois premiers modes de résonance qui sont très peu amortis. La fréquence de Shannon a donc été choisie entre le 3^{ieme} et le 4^{ieme} mode. La période d'échantillonnage est $T_e = 70$ ms. Le modèle d'ordre 6, correspondant à des charges de 0g, 25g, 75g, a été identifié [39]. Ils correspondent à la fonction de transfert donnée par la suite :

Les équations de système :

$$\begin{cases} K_a u(t) = R_m \dot{i}_m(t) + K_m \dot{\theta}_m(t) \\ J_m \ddot{\theta}(t) = K_c T_m(t) - B \dot{\theta}(t) - K_s \alpha(t) \\ J_{Br} (\dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t)) = K_s \alpha(t) \\ T_m(t) = K_m \dot{i}_m(t) \\ \theta_m(t) = K_c \theta(t) \end{cases}$$

Avec :

- K_a : Gain de l'amplificateur de puissance
- K_m : Constante de couple
- J_m : Inertie de la plate-forme
- $\theta(t)$: L'angle de rotation de la plate forme par rapport à sa base
- K_G : Rapport de l'engrenage
- R_m : Résistance
- J_{Br} : l'inertie du bras
- $\alpha(t)$: L'angle de rotation du bras par rapport à l'axe de la plate forme

Les valeurs de les paramètres de system et présenté dans l'annexe B

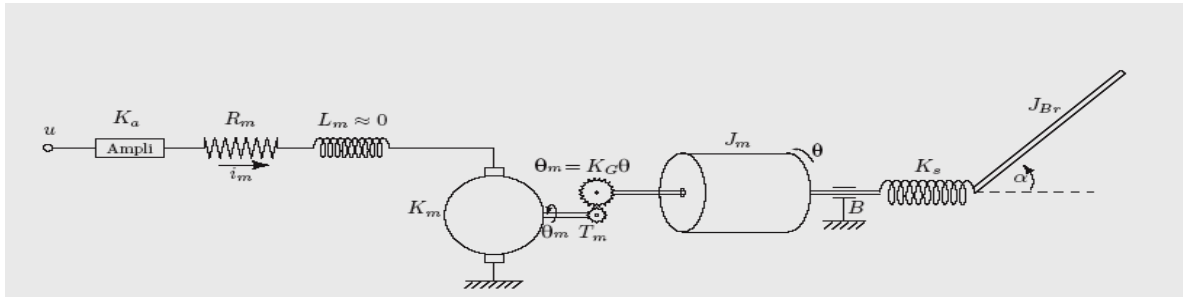


Fig.V.8. Modèle de connaissance du système

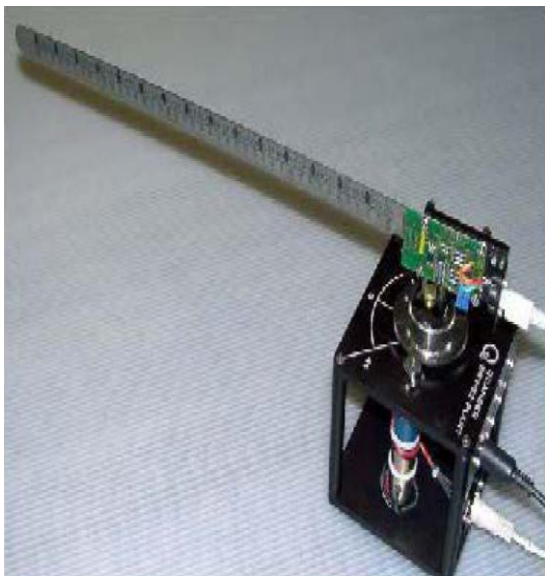


Fig.V.9. bras flexible

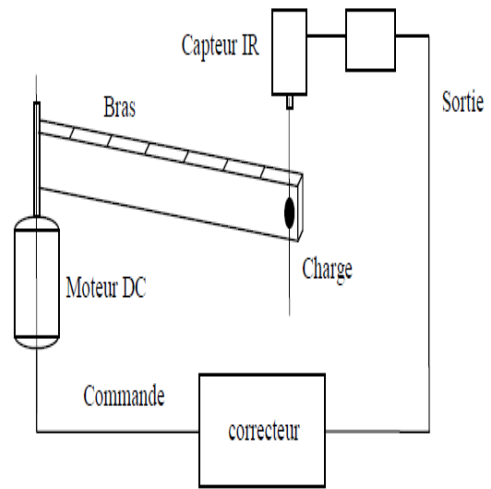


Fig.V.10. la représentation de bras flexible

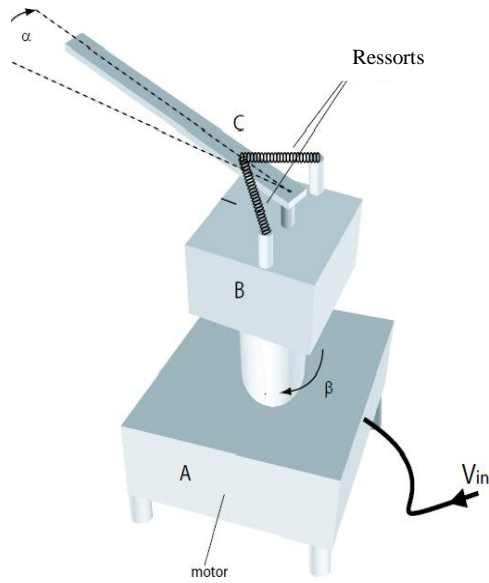


Fig.V.11.vue 3D de bras flexible

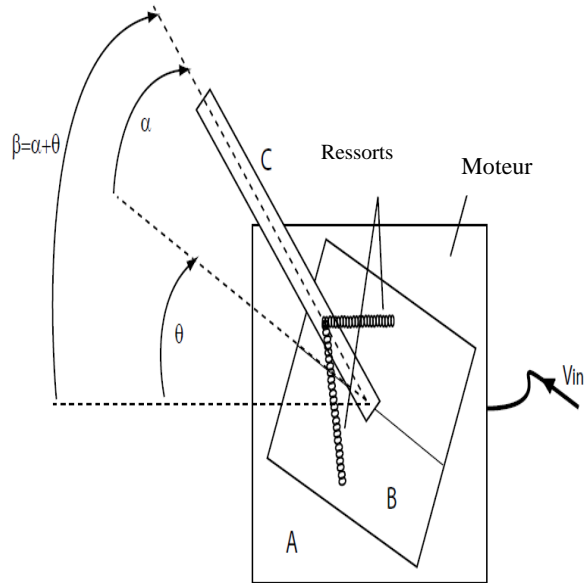


Fig.V.12.vue Au dessus de bras flexible

Charge=0g

Transfer function:

$$\frac{0.04235 z^{-2} - 0.04359 z^{-3} - 0.1699 z^{-4} + 0.4258 z^{-5} - 0.1907 z^{-6}}{1 - 1.953 z^{-1} + 1.385 z^{-2} - 0.5767 z^{-3} + 0.8176 z^{-4} - 1.333 z^{-5} + 0.7606 z^{-6}}$$

Charge=25g

Transfer function:

$$\frac{0.03682 z^{-2} - 0.00961 z^{-3} - 0.101 z^{-4} + 0.2843 z^{-5} - 0.1293 z^{-6}}{1 - 2.12 z^{-1} + 1.509 z^{-2} - 0.4197 z^{-3} + 0.6708 z^{-4} - 1.289 z^{-5} + 0.7139 z^{-6}}$$

Charge=75g

Transfer function:

$$\frac{0.03531 z^{-2} - 0.0152 z^{-3} - 0.1265 z^{-4} + 0.2731 z^{-5} - 0.1337 z^{-6}}{1 - 2.31 z^{-1} + 1.738 z^{-2} - 0.461 z^{-3} + 0.7226 z^{-4} - 1.333 z^{-5} + 0.6808 z^{-6}}$$

Cahier des charges :

Le régulateur doit être calculé de façon à tenir le cahier des charges suivant :

1. Maximum de la fonction de sensibilité perturbation-sortie $|S| < 8\text{db}$
2. Maximum de la fonction de sensibilité perturbation-commande $|KS| < 14\text{db}$
3. face à échelon de consigne
 - temps de montée à 90% de la valeur finale inférieur à 1.8s
 - temps d'établissement à 5% inférieure à 4.8s

4. face à un échelon de perturbation appliqué à la sortie le temps de rejet de perturbation inférieure à $t_{rej/pert} 2.8s$

VI.5.Synthèse :

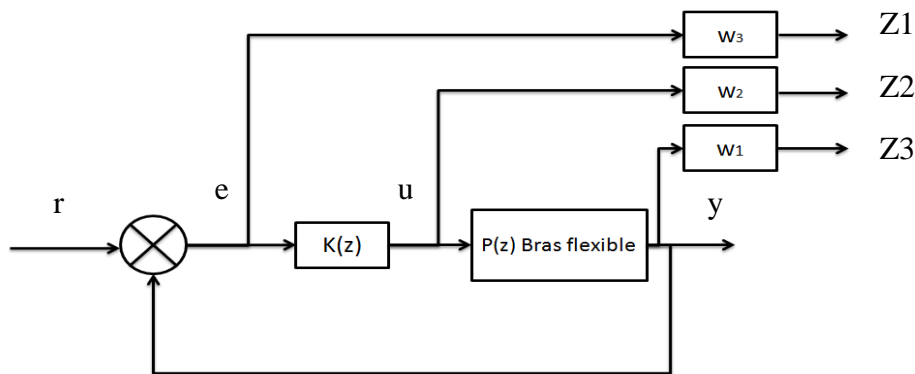


Fig.V.13. Système augmenté du système

La Figure V.13 donne le schéma de synthèse qui a été choisi : le suivi de consigne est assuré de façon classique. Le correcteur, qui à 1 entrée, réalise donc une correction à 1 degré de liberté. En synthèse H_∞ par une pondération (w_3) sur l'erreur de l'asservissement des pondérations w_1 et w_2 sont utilisées pour traduire les spécifications sur S et KS en objectifs : ceux-ci sont respectés si les transferts de w_1 vers z_1 et de w_2 vers z_2 ont une norme H_∞ inférieure à 1. En utilisant le théorème du petit gain le choix de ces valeurs est directement issu des spécifications sur S et KS :

La synthèse initiale est faite à partir d'une méthode multicritère n'utilisant qu'une seule fonction de Lyapunov. Les critères sont l' α -stabilité (la valeur $\alpha = 0,8$ a été choisie pour contraindre les pôles dominants de la boucle) et la performance H_∞/H_2 .

On choisi $W_1=0.5, W_2=0.7, W_3= \frac{3.076z-2.674}{z-0.999}$

Résultat de simulation :

$K_c = [1.2071 \quad -0.596 \quad 0.1820 \quad -0.0682 \quad 0.4892 \quad -0.7874 \quad 0 \quad 0 \quad -0.3756]$

Le gain de retour d'état tel que $(A-B_2 K_c)$ est stable.

$K_f^T = [-0.7615 \quad -1.7138 \quad -1.985 \quad -2.2193 \quad -2.0322 \quad -0.7491 \quad 0 \quad 0 \quad 0.2580]$

Le gain d'observateur tel que $(A-K_f C_2)$ est stable.

$Q_{opt} = 0.3300$

$\gamma_{opt} = 2.4280$

$$K_{opt} = \frac{0.33 z^7 - 0.4894 z^6 + 0.07386 z^5 + 0.1092 z^4 + 0.1442 z^3 - 0.2557 z^2 - 0.01242 z + 0.1128}{z^7 - 1.912 z^6 + 1.49 z^5 - 0.6642 z^4 + 0.7362 z^3 - 1.086 z^2 - 0.6393 z - 0.1294}$$

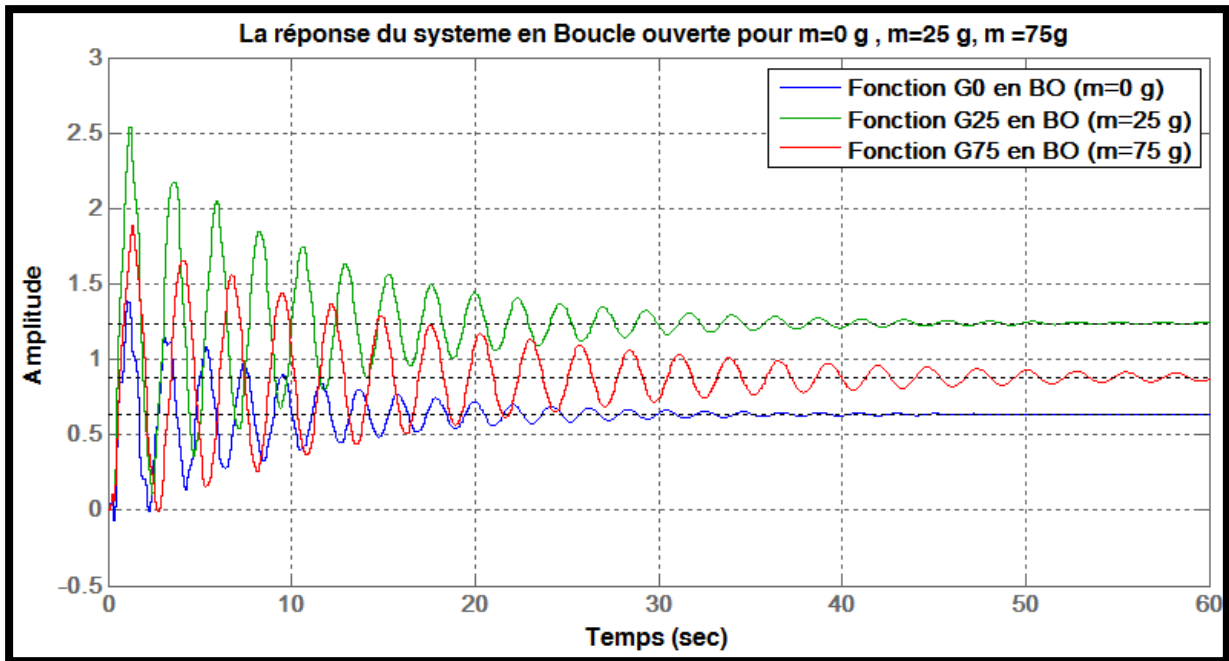


Fig.V.14.La réponse de la fonction de transfert en boucle ouverte

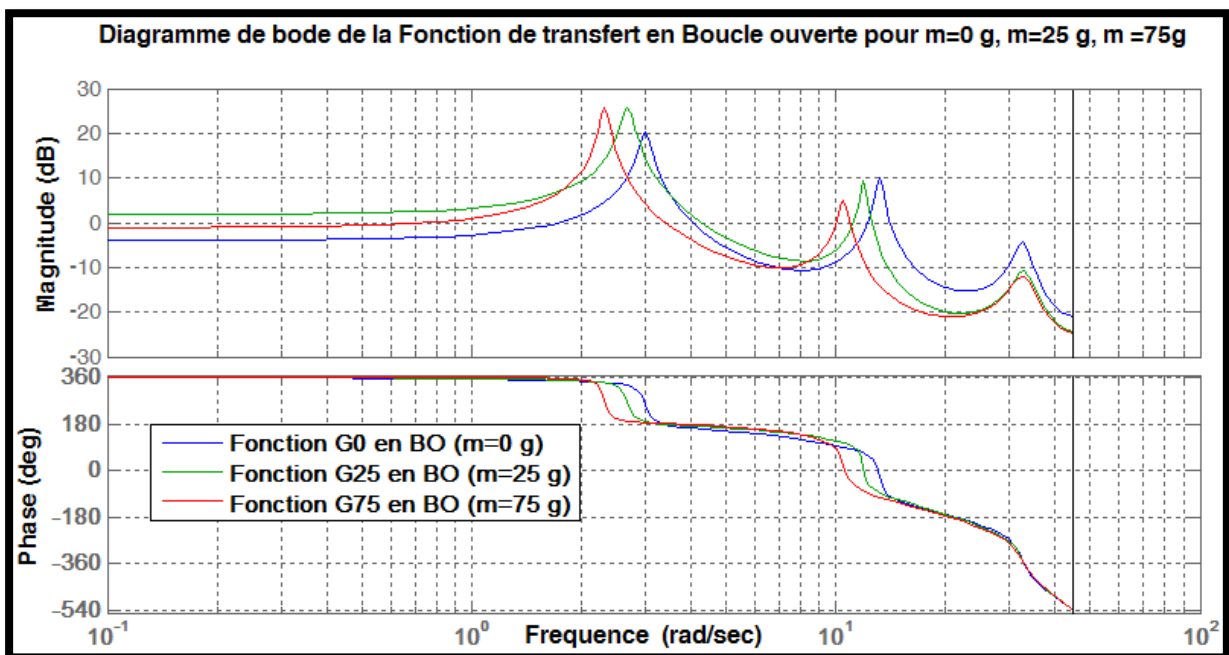


Fig.V.15.Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte

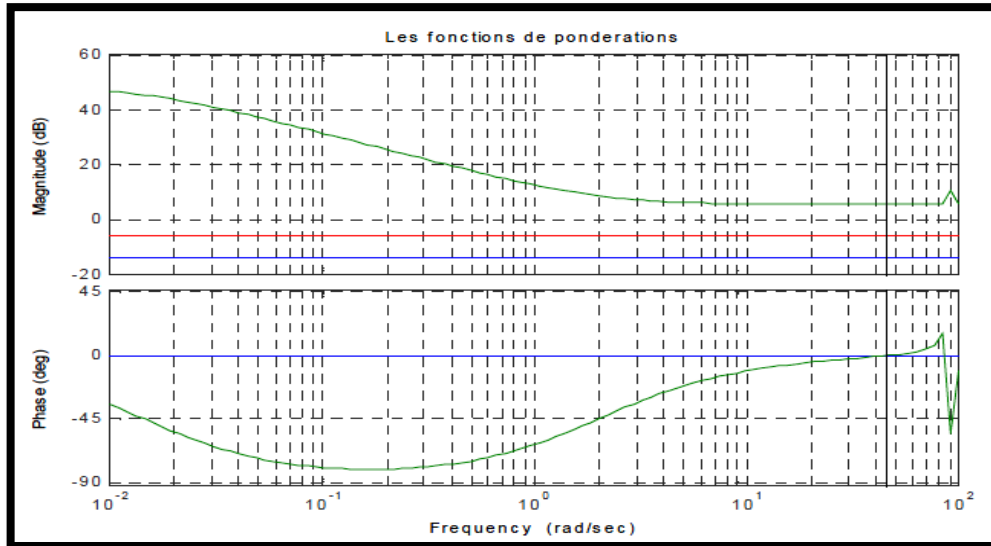


Fig.V.16. Diagramme de Bode des fonctions de pondération

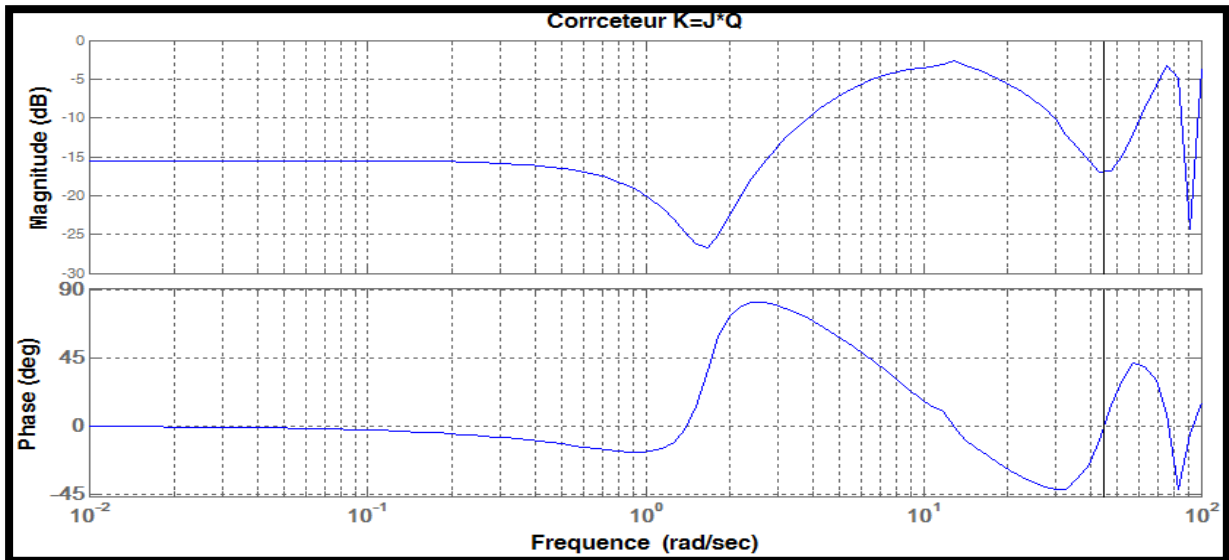


Fig.V.17. Diagramme de Bode de la fonction du correcteur

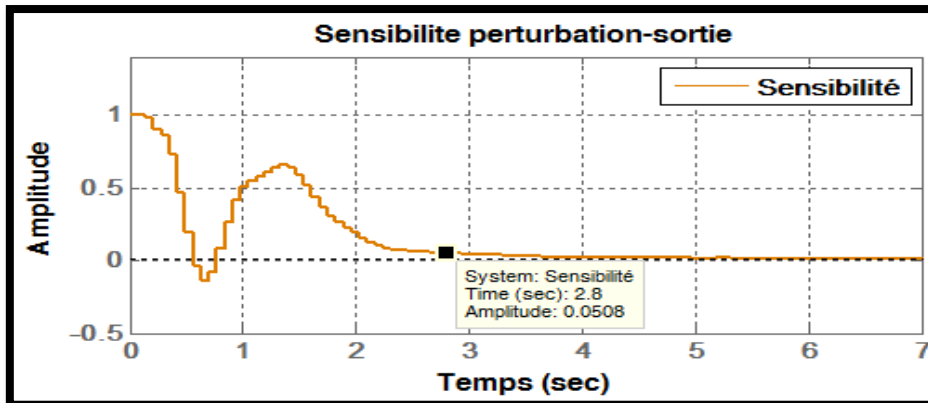


Fig.V.18. Rejet de perturbation

On remarque face à un échelon de perturbation appliquée à la sortie le temps de rejet de perturbation est inférieur à 2.8s satisfaisant le cahier des charges.

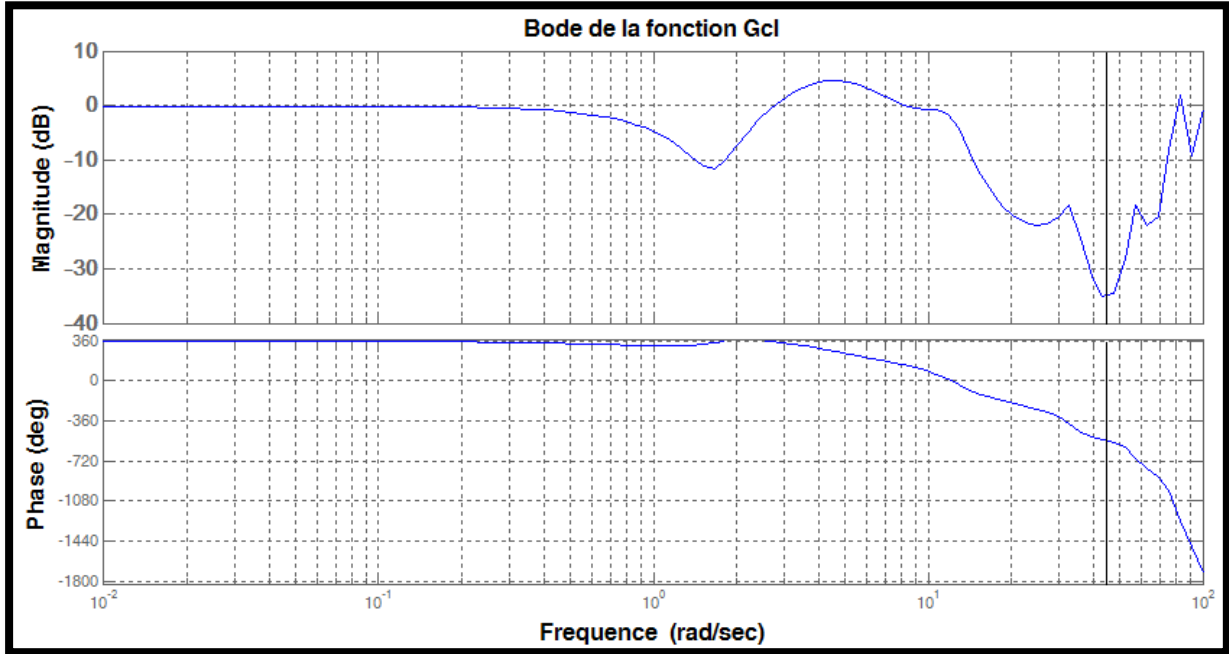


Fig.V.19. Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée

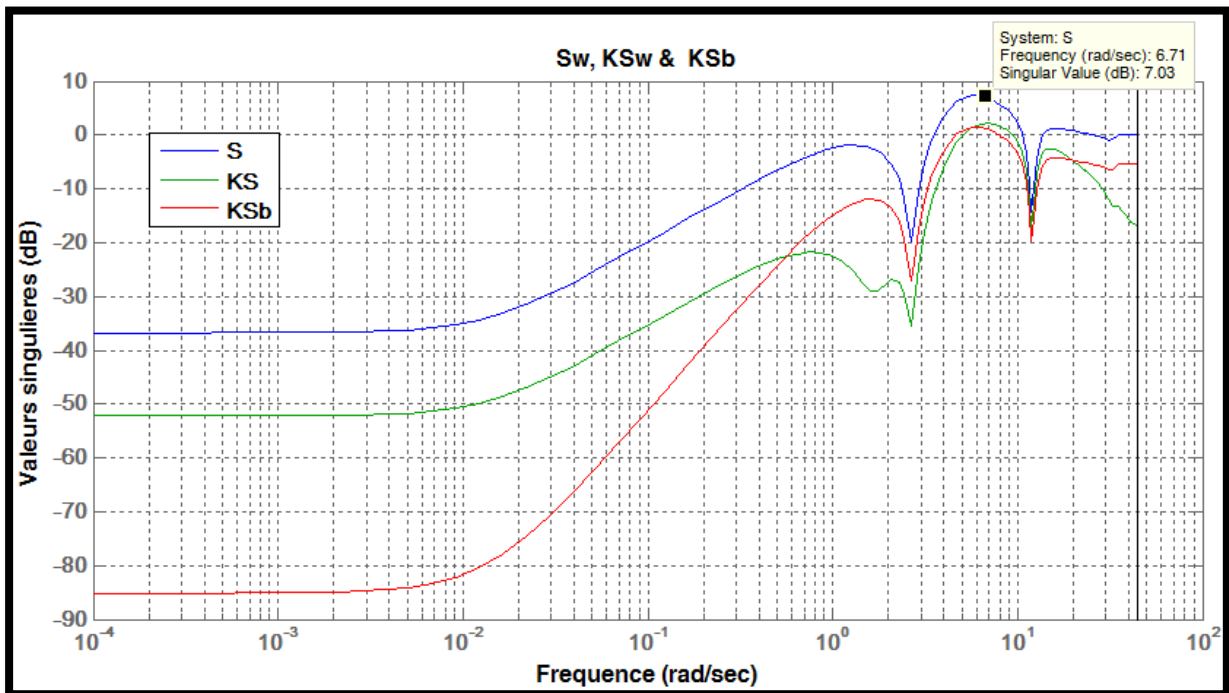


Fig.V.20. Diagramme de Bode des valeurs singulières de fonctions sensibilités

On remarque sur la figure V.20 l'allure de la fonction de sensibilité perturbation-sortie $S(j\omega)$ (en bleu) que leur maximum est inférieur ou égal à 7.03 dB au delà de 6.71 rad/sec, alors $\sigma[S(j\omega)] = 7.03\text{dB} < W_3^{-1} = 9.18\text{ dB}$, et le maximum de la fonction de sensibilité perturbation commande KS ($j\omega$) (en vert) est inférieur ou égal à 1.59 dB, au delà de 6.71 rd/sec, alors $\sigma[KS(j\omega)] = 1.59\text{ dB} < 14\text{ dB}$; donc le cahier des charges est satisfaisant.

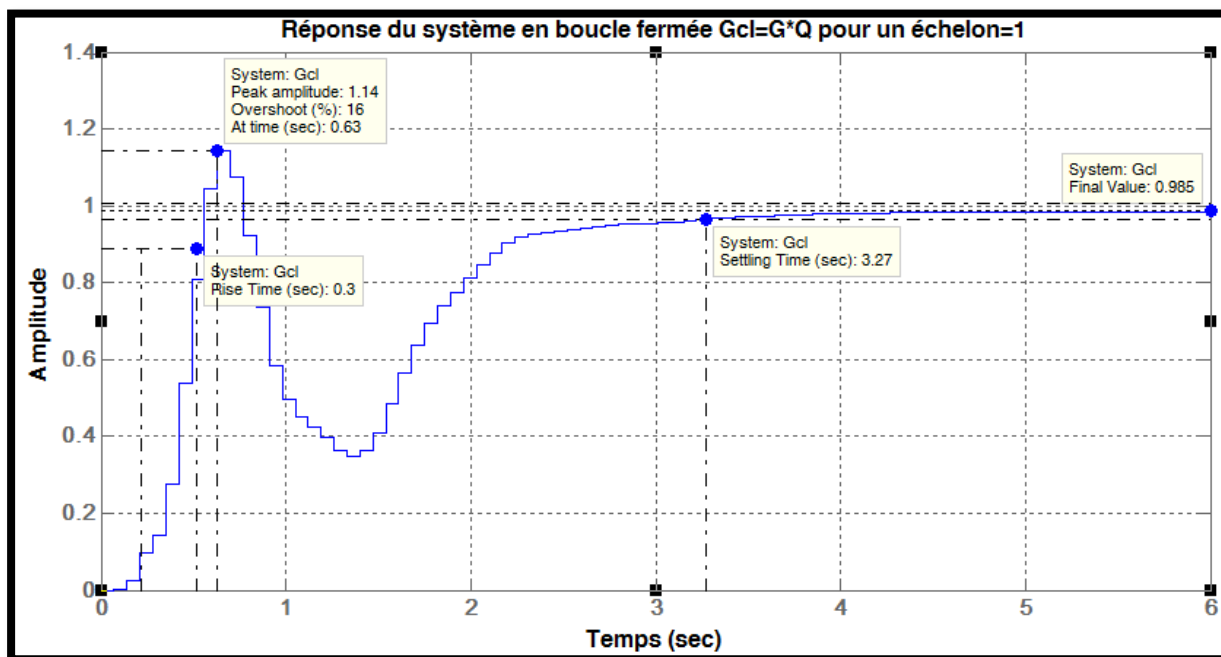


Fig.V.21. Réponse du système en boucle fermée

On constate une bonne réponse du système, un bon suivi de la réponse de référence face à un échelon à l'entrée, un bon temps de réponse est inférieur à 4.8s et un premier dépassement qui est inférieur à $Dép=1.14\text{ dB}$, et un temps de montée à 90% de la valeur finale égale à 1.2s est inférieur à $t_m=1.8s$, alors le cahier des charges est satisfaisant.

VI.6. CONCLUSION :

Dans ce chapitre nous avons illustré une approche méthodologique pour résoudre le problème de synthèse multicritère, et de rechercher un correcteur par retour de sortie statique stabilisant le système bouclé dont les critères pris en compte sont de type H_2 , H_∞ et α -stabilité ; d'une façon générale il y a d'autres critères qui peuvent être aisément être traités de la même manière pour lesquels il existe une formulation par inégalité matricielle, l'obtention des formulations LMI est un « art de manipulation matricielle », en utilisant les outils techniques pour le critère considéré pour le rendre en inégalité affine.

L'utilisation de la paramétrisation de Youla permet de transformer le problème de synthèse en un problème d'optimisation sous contraintes LMI, tandis que la formulation d'un correcteur initial sous forme observateur/retour d'état permet de limiter l'ordre du correcteur final (ordre nominal).

Le principal avantage de LMI est pouvoir combiner différents critères de manières séparées pour s'affranchir des éventuels couplages non désirés c'est pourquoi des synthèses H_2/H_∞ ont trouvée leur immense place dans ce formalisme.

Finalement ; Différent points pourraient faire l'objet d'investigation supplémentaire à la suite de ces résultats, on peut rechercher un correcteur dynamique sur le choix de la dynamique du paramètre de Youla. La solution sous optimale ainsi trouvée avec un paramètre de Youla statique peut être considérablement améliorée en une solution optimale (rapprochée) en utilisant un paramètre de Youla dynamique.

Conclusion générale

Conclusion générale :

Le principe de notre travail est la description des étapes pour calculer le correcteur qui assure la stabilité de système en boucle fermée tout en respectant des spécifications données par un cahier des charges, notre travail basé sur l'approche LMI permet de résoudre le problème de synthèse d'un gain de retour de sortie.

Dans la 1^{ère} étape on a commencé à expliquer la théorie de la commande H_∞ et la commande H_2 , nous avons donné une démarche illustrative pour le calcul de correcteur H_2 et H_∞ aussi qui se base sur la résolution de la série des équations de riccati.

Ensuite on introduit la notion de paramétrisation de Youla, cette dernière nous offre un ensemble des correcteurs stabilisant le système en boucle fermée, Dans cette ensemble notre correcteur minimise un critère donné, alors on arrive à un problème d'optimisation convexe qui peut être résolue avec l'approche LMI.

La notion de paramétrisation de Youla permet de caractériser l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire invariant par l'ensemble des transferts stables. Cette propriété très forte est exposée ici pour définir un outil intermédiaire pour l'optimisation LMI.

La mise en œuvre pratique de cette paramétrisation permet aussi de structurer un correcteur dynamique sous forme d'un observateur et d'un retour d'état. Cette structuration tire son intérêt de la facilité d'implantation qu'elle confère et des interprétations physiques.

Avant la dernière étape on a essayé d'englober les outils techniques pour la formulation des contraintes LMI qui consistent à traduire les contraintes par des inégalités matricielles et tentent ensuite de les rendre affine en fonctions des variables d'optimisations. Une fois que le problème LMI est identifié, il sera résolu en appelant l'un des trois solveurs appropriés de LMI qui sont : Solution de faisabilité, solution d'une minimisation d'une fonction de coût linéaire, solution par minimisation des valeurs propres généralisées. Ceux-ci constituent le moteur informatique de la boîte à outils de commande LMI. Un éclaircissement a été donné pour ces solutions par un exemple illustratif : Minimisation d'un disque sur un polyèdre, et de tirer la conclusion que la demande d'une solution globale nécessite l'utilisation du solveur de minimisation d'une fonction coût linéaire.

Dans la dernière l'étape suivante on a défini les caractérisations matricielles pour les trois critères cités ci-dessus, qui ont une immense utilisation dans le domaine d'automatique H_∞ , H_2 et α –stabilité. Ceci a été fait pour les deux cas suivant : Retour de sortie et retour d'état.

Conclusion générale

La résolution du problème convexe sous contraintes LMI a été démontré par un exemple d'application système Bras flexible. La résolution se fait par un algorithme basé sur une méthode systématique de synthèse de loi de commande satisfaisant simultanément l'ensemble des spécifications de cahier des charges.

La méthode se décompose en 4 étapes :

- ✓ Synthèse initiale : synthétiser un correcteur initial en utilisant les algorithmes classiques
- ✓ Paramétrisation d'observateur / retour d'état: il s'agit de mettre en œuvre la structuration de correcteur exposée au chapitre 2 afin d'obtenir une paramétrisation de Youla et les systèmes d'interconnexion G et J.
- ✓ Optimisation convexe : choisir l'ordre du paramètre de Youla Q et résoudre le problème d'optimisation sous contraintes LMI.
- ✓ Reconstruction du correcteur : le correcteur final est obtenu par interconnexion des systèmes J et Q : $K = J*Q$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]-D. W. Gu, P. Hr. Petkov and M.M. Konstantinov, "Robust Control Design with MATLAB". Springer-Verlag, 2005.
- [2]- R. S. Burns, "Advanced Control Engineering". Butterworth-Heinemann, 2001.
- [3]-J. C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design: concepts for classical/modern synthesis". IEEE Transactions on Automatic Control, Volume AC-26, pp. 4-16, 1981.
- [4]-K. Ogata, "Modern Control Engineering, Third Edition". Prentice Hall, 1997.
- [5]-G. Stein, "Beyond singular values and loop shapes". Honeywell Systems and Research Center and M.I.T, 1985.
- [6]-S. Boyd and C. Barratt, "Linear control design: limits of performance". Prentice Hall, 1991.
- [7]-J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis. "Space-state solutions to standard H₂ and H control problems". IEEE Transactions on Automatic Control, Volume AC-34, pp. 831-847, 1989.
- [8]-K. Glover and J. C. Doyle,"State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞-norm bound and relations to risk sensitivity". Systems & Control Letters, Volume 11, pp. 167-172, 1988.
- [9]-K. Zhou with J. C. Doyle and K. Glover, "Robust and Optimal Control". Prentice Hall,1996.
- [10]-M. Green and D. Limebeer, "Linear Robust Control". Prentice Hall, 1995.
- [11]-S. Boyd and L. El Ghaoui, "Linear Matrix Inequalities in system and control theory". Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.
- [12]-M. J. Grimble, "Robust industrial control systems". Wiley & Sons, 2006.
- [13]- J. R. Leigh, "Control theory: Second Edition". The Institution of Electrical Engineers (IEE), UK, 2004.
- [14]-S. Skogestad and I. Postlethwaite,"Multivariable feedback control: Analysis and Design". Wiley & Sons, 1996.

- [15]-A. Saberi, B. M. Chen and Z. Lin, "Closed-loop solutions to a class of H_∞ -optimization problems. International Journal of Control", Volume 60, Number 10, pp. 41-70, 1994.
- [16]-A. A. Stoorvogel, "The H_∞ control problem: a state space approach". Prentice Hall, 1992.
- [17]- H. Kwakernaak, "Minimax Frequency Domain Performance and Robustness Optimization of Linear Feedback Systems". IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 30, Number 10, pp. 994-1004, 1985.
- [18]- H. Kwakernaak, "Robust control and H_∞ optimization - A tutorial paper". Automatica,
- [19]- R. Y. Chiang and M. G. Safonov, "Robust control toolbox: user's guide". The Mathworks, 2001.
- [20]- D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controller, part II: multivariable case. IEEE Transactions on automatic control, AC-21 pp. 319-338, 1976.
- [21]-J. Doyle, B. Francis, A. Tannenbaum. Feedback control theory, Macmillan publishing Co, 1990.
- [22]- G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. IEEE Transactions on automatic control, AC-26 pp. 301-320, 1981.
- [23]-J.M. Maciejowski. Multivariable feedback design. Addison-Wesley publishing company, Wokingham, England, 1989.
- [24]- M. Fikar, S. Engell. Receding horizon predictive control based upon the Youla-Kuèera parametrization. European Journal of Control, 3(4), pp.304-316, 1997.
- [25]- B. Clément, S. Hbaïeb, G. Duc, S. Font. Paramétrisation de Youla : application à la commande robuste par optimisation convexe. APII Journal Européen des Systèmes Automatisés, 35(1-2), pp. 33-48, 2001.
- [26]-S. Boyd, C. Barratt. Linear Controller Design: Limits of Performance. Edition Prentice-Hall, 1991.
- [27]- B. Clément Synthèse multiobjectifs et séquençement de gains : application au pilotage d'un missile. Thèse de Doctorat, Université Paris XI, Paris 2001.
- [28]- M. Morari, E. Zafiriou. Robust process control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1989.

- [29]- S. Hbaïeb, S. Font. Synthèse de loi de commande optimale par optimisation convexe. Journée doctorale d'automatique (JDA), Toulouse, septembre 2001
- [30]- P.R. Ayerbe. Robustification de la lois de commande prédictive par la paramétrisation de Youla . PhD thèse, Paris xi Orsay university, 2003.
- [31]- B. Clement , G. Duc; Synthèse multicritère utilisant la parametrisation de Youla et l'optimisation convexe, Hermès, (2001)
- [32]- Nesterov, Nemirovskii, Interior point polynomial methods in convex programming: theory and applications, SIAM Publications, 1994.
- [33]- Gahinet, Nemirovskii, Laub, Chilali, The LMI Control Toolbox Use with Matlab, The Mathworks Inc., 1995.
- [34]-G. Scorletti; Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI, Thèse Doctorat, Univ. Paris XI et Supélec, juin (1997).
- [35]-Gahinet, P., and P. Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to H^∞ Control," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, N°4 (1994)
- [36]-P. Rodríguez, D. Dumur, “ Robustification of GPC controlled system by convex optimization of the Youla parameter ”, Proceedings IEEE Conference on Control Applications, Glasgow, Septembre 2002.
- [37]-D.J. Fowell, R.A. Bender, Computing the estimator-controller form a compensator, *Internationnal Journal of Control*,V.41, (1985).
- [38]-L. El Ghaoui, R. Nikoukhah, and F. Delebecque, *LMITool: A Front- End for LMI Optimization*, User's Guide, Feb. 1995; ftp to ftp.ensta.fr, under /pub/elghaoui/lmitool.
- [39]-I.D. Landau. J.M. Devesne, J. Langer, « Régulation numérique robuste cTun bras manipulateur souple. Banc d'essais comparatif de différentes méthodes de synthèse », in *Commande Robuste* (Ed. : J. Bernussou), Hennés. 1996.

Annexe A

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur</i>
Gain de l'amplificateur de puissance K_a	2.0
Constante de couple K_m	0.00767 [Nm/A]
Inertie de la plate-forme J_m	$3.8710 \cdot 10^{-7}$ [kg m ²]
Résistance R_m	2.6 Ω
Rapport de l'engrenage K_G	70
Inertie du tachymètre	$0.7 \cdot 10^{-7}$ [kg m ²]
Rapport vitesse haute K_g	(14)(5)
l'efficacité du moteur en raison de la perte de rotation η_m	0.87
l'efficacité de boîte vitesse η_g	0.85
inertie de la charge J_L	$5.2823 \cdot 10^{-5}$ [kg m ²]
J_{eq}	0.0023 [kg m ²]

Annexe B

le système LFT (P, K) vérifies les trois propriétés suivantes

$$\|T_1\|_\infty < \gamma_1$$

$$\|T_2\| < \gamma_2$$

$LFT(P, K)$ est α – stable

Si et seulement il existe quatre matrices symétriques définies positives X_1 , X_2 , X_3 et Y telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\|T_1\|_\infty < \gamma_1 \text{ est caractérisé par équation (4.13)}$$

En appliquant la caractérisation matricielle (4.13) sur la boucle fermé T_1 on a :

$$\begin{bmatrix} -X_1^{-1} & A_{cl} & B_{1,cl} & 0 \\ A_{1,cl}^T & -X_1 & 0 & C_{1,cl}^T \\ B_{1,cl}^T & 0 & -\gamma_1 I & D_{1,cl}^T \\ 0 & C_{1,cl} & D_{1,cl} & -\gamma_1 I \end{bmatrix} < 0$$

et par la modification par congruence en multipliant à gauche et à droite l'inégalité par

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} -X_1 & X_1 A_{cl} & X_1 B_{1,cl} & 0 \\ A_{1,cl}^T X_1 & -X_1 & 0 & C_{1,cl}^T \\ B_{1,cl}^T X_1 & 0 & -\gamma_1 I & D_{1,cl}^T \\ 0 & C_{1,cl}^T & D_{1,cl} & -\gamma_1 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\|T_2\|_2 < \gamma_2 \text{ est caractérisé par l'équation (4.28)}$$

De la même façon que H_∞ , En utilisant la caractérisation matricielle (4.28) sur la boucle fermé T on a

$$\begin{bmatrix} -X_2^{-1} & A_{cl} & 0 \\ A_{1,cl}^T & X_2 & C_{2,cl}^T \\ 0 & C_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} -X_2^{-1} & B_{2,cl} & 0 \\ B_{2,cl}^T & -Y & D_{2,cl}^T \\ 0 & D_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0, \text{Trace}(Y) < \gamma_2^2$$

et par la modification par congruence par :

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} X_2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} -X_2 & -X_2 A_{cl} & 0 \\ A_{1,cl}^T X_2 & -X_2 & C_{2,cl}^T \\ 0 & C_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} -X_2 & -X_2 B_{2,cl} & 0 \\ B_{2,cl}^T X_2 & -X_2 & D_{2,cl}^T \\ 0 & D_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0, \text{Trace}(Y) < \gamma_2^2$$

α -stabilité pour le système LFT(P,K) est caractérisé par équation (4.42)

En utilisant la caractérisation matricielle sur le système LFT (P,K) on a :

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 X_3 & A_{cl}^T \\ A_{cl} & X_3^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

et on prend :

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_3 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 X_3 & A_{cl}^T X_3 \\ X_3 A_{cl} & X_3^{-1} \end{bmatrix} > 0$$