



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Département de Maintenance en Instrumentation

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Maintenance en Instrumentation

Spécialité : Mesure-Analyse-Qualité

Thème

Commande robuste d'un robot manipulateur

Présenté et soutenu publiquement par :

Nom TEGGAR Prénom Smail

Nom ZIANE Prénom Yazid

Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
Mme DJELGHOUM FARIDA	MAA	IMSI-Univ d'oran 2	Président
Mr BOURAHLA BOUMEDIENE	MAB	IMSI-Univ d'oran 2	Encadreur
Mr MEKKI IBRAHIM KHALIL	MCB	IMSI-Univ d'oran 2	Examinateur

Juin 2017

Résumé :

Les systèmes non linéaires représentent une grande partie des systèmes étudiés dans l'industrie parmi lesquels on trouve les robots manipulateurs. C'est pour cette raison que le développement des lois de commande non linéaire est devenu très intéressant pour l'amélioration des performances.

Cette thèse se compose de quatre parties

Nous introduirons dans la première partie quelques notions de bases de ces systèmes pour faciliter l'étude et la compréhension

La deuxième partie est consacrée à la modélisation du robot manipulateur, on montre les modèles géométriques et dynamiques.

La troisième partie traite l'étude théorique des lois de commande non linéaire à savoir la commande par mode glissant, la commande par backstepping. Pour améliorer les performances on présente la commande hybride mode glissant- backstepping.

La quatrième partie a pour but d'appliquer les commandes non linéaires citée auparavant sur le robot manipulateur, les résultats de simulation sont présentées, une étude comparative montre l'efficacité de chaque commande.

Mots Clés:

Robot manipulateur, commande non linéaire, commande par mode glissant, commande par backstepping, commande hybride, simulation.

Abstract:

Non linear systems represent a large part of the studied systems of the industry, among which are the manipulator robots. It is for this reason that the development of nonlinear control laws has become very interesting for improving performance.

In the first part, we introduce some basic concepts of these robotic systems to facilitate study and understanding.

The second part is co-created the modeling of the manipulator robot, we show the kinematic and dynamic models.

In the third part the theoretical study of non linear control and the sliding mode control, the backstepping to improve performance the hybrid mode sliding-backsepping is introduce

Fourth part is intended to apply the non-linear control previously cited on the robot manipulator, the results of the simulation present a comparative study that shows

The effectiveness of each control

Key words:

Robot manipulator, mode sliding mode controller, backstepping controller, the hybrid controller , simulation.

Remerciements

Nous exprimons nos remerciements à «ALLAH» pour nous avoir donné la foi, le courage et la force de terminer nos études et réaliser ce travail qu'on souhaite qu'il soit réussi.

*Nous adressons nos vifs remerciements à notre enseignant monsieur **BOURAHLA Boumediene** d'avoir accepté de nous encadrer pour notre mémoire de fin d'étude, pour ces précieux conseils, sa patience et son aide continue tout au long ce projet.*

Nos vifs remerciements aux membres du jury qui ont accepté de juger notre travail. Ainsi qu'à tous l'ensemble des enseignants du l'IMSI

En fin, nous remercions tous nos amis et toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de notre travail.



Dédicace

Je dédie ce mémoire à:

Mes chers parents pour leur encouragement.

Mes frères " ayoub ,khalil ,rached " et ma sœur

Et chacun de la famille " ziane "

*Tous mes amis sur tous:taha ,nadjib ,hocine ,nogri, laid, Fayçal, said, toufik
,karim, feres, hamou le comme moi ,soufiane, hakou, moussa, aziz, sido,
kamel,mohemmed,lhachemi,oussama ,khaled ,google*

Mon encadreur

Mon cher binôme smail

A tous mes amis : de L'I.M.S.I

Ziane yazid



Dédicace

Je dédie ce mémoire à:

Mes chers parents pour leur patience, leur encouragement et leur soutien moral et financier, qu'ils soient assurés de mon affection et mon profond respect.

Mes frères et mes sœurs chacune par son prénom

Et a tous ma famille

Tous mes amis sur tous: Ayoub, Boamama, Ibib, Nasreddine, Nadjib, Taha, Aziz, Hammou, nogri, Fayçal, laid, Saïd, Houcine, Abdellah, Hachimi, Mohamed, Baghdad, sauf Mokhtar.

Mon encadreur

Mon cher binôme Yazid

A toute la promotion Master 2016/2017

TEGGAR Smail

SOMMAIRE

Table des figures	
Liste des tableaux	
Liste des symboles	
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Modélisation Du Robot Manipulateur	
I.1 Introduction	3
I.2 principe de base de la robotique.....	3
I.3 Définition du bras manipulateur	5
I.4 utilisation des bras manipulateurs	5
I.5 Constituants mécanique des robots	6
I.5.1 L'organe terminale.....	7
I.5.2 Articulations	7
I.5.3 Structure mécanique articulée	7
I.6 Modélisation des robots manipulateurs a 2ddl.....	8
I.6.1 Le modèle géométrique	8
I.6.2 Modèle dynamique	12
I.6.2.1 Modèle dynamique inverse	12
I.6.3 Modèle dynamique direct	18
I.7 Conclusion.....	20
Chapitre II : Théorie Des Commandes Non Linéaires	
II.1 Introduction	21
II.2 Commande par mode glissant	21
II.2.1 Historique de la Commande en Mode glissant	21
II.2.2 Système à structure variable	22
II.2.2.1 Conception de la commande par mode de glissement	23
II.2.3.2 Phénomène de réticence	27
II.2.3.3 Solutions pour la suppression du phénomène de réticence	27
II.3 Commande par backstepping	28
II.3.1 Historique de la commande par backstepping	28
II.3.2 Synthèse d'une loi de commande par backstepping	29
II.3.2.1 Exemple d'un bras manipulateur à un degré de liberté.....	29
II.3.2.2 Exemple d'un système du deuxième ordre	33
II.3.2.3 Description de la procédure.....	34
II.4 Commande hybride mode glissant-backstepping	37
II.5 Conclusion	38

SOMMAIRE

Chapitre III : Application Des Commandes Non Linéaires Sur Un Robot Manipulateur A Deux Degrés De Liberté

III.1 Introduction.....	39
III.2 Application de la commande par mode glissant au robot manipulateur.....	39
III.3 Application de la commande par backstepping.....	41
III.3.1 Backstepping avec l'action intégrale.....	44
III.4 Application de mode glissant-backstepping pour un robot manipulateur.....	46
III.4.1 Application de mode glissant-backstepping avec intégral.....	49
III.5 Résultats de simulation.....	49
III.5.1 Comparaison des lois de commandes.....	50
III.5.2 Synthèse des résultats de simulation	51
III.5.2.1 Poursuite de trajectoire.....	51
III.5.2.2 Régulation et robustesse.....	52
III.5.2.3 Sensibilité au bruit de mesure.....	52
III.6 Conclusion.....	59
Conclusion générale	60
Bibliographie	61
Annexe	63

Liste des figures

Chapitre I : Modélisation Du Robot Manipulateur

Figure.I.1 Le robot dans son contexte	3
Figure I.2 : catégories des robots.....	4-5
Figure I.3 : Exemples d'application des bras manipulateurs.....	6
Figure I.4 Constituants mécanique des robots.....	6
Figure I.5 : robot a deux degré de liberté	8

Chapitre II : Théorie Des Commandes Non Linéaires

Figure II .1: Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase.....	22
Figure II .2: Surface de glissement.....	24
Figure II .3: Représentation de la fonction sign.....	26
Figure II .4 : Schéma de la commande par mode glissant.....	26
Figure II .5: Phénomène de chattering.....	27
Figure II .6: Fonctions de commutation.....	28
Figure II .7: Système articulé à un degré de liberté.....	30
Figure II .8: Système non linéaire du deuxième ordre avec une seule fonction non linéaire..	34
Figure II .9: Stabilisation du premier sous-système.....	35
Figure II .10 : Stabilisation du deuxième sous-système.....	36

Chapitre III : Application Des Commandes Non Linéaires Sur Un Robot Manipulateur A Deux Degrés De Liberté

Figure III.1 Courbes résultantes de la commande Mode Glissant avec perturbations.....	53
Figure III.2 Courbes résultantes de la commande Mode Glissant avec bruit de mesure.....	54
Figure III.3 Courbes résultantes de la commande backstepping avec perturbations.....	54-55
Figure III.4 Courbes résultantes de la commande backstepping avec bruit de mesure.....	55-56
Figure III.5 Courbes résultantes de la commande Hybride avec perturbations.....	56-57
Figure (III.6) Courbes résultantes de la commande Hybride avec bruit de mesure.....	57

Liste des tableaux

Chapitre I : Modélisation Du Robot Manipulateur

Tableau I.1 Configuration de Denavit-Hartenberg du robot 2ddl (RR).....	9
---	---

Chapitre IV : Application Des Commandes Non Linéaires Sur Un Robot Manipulateur A Deux Degrés De Liberté

Tableau IV.1 Tableau de comparaison des lois de commandes simulée.....	51
Tableau IV.2 Tableau de comparaison pour la vitesse1.....	58
Tableau IV.3. Tableau de comparaison pour la vitesse2.....	58

Liste des principales notations et abréviations

SSV	Système à structure variable.
ddl	degré de liberté d'un robot manipulateur.
${}^{i-1}T_i$	La matrice de transformation homogène.
0r_i	Le vecteur de coordonnées du centre de masse du corps C_i par rapport au repère R_0 .
l_i	Longueur du segment i .
l_{ci}	Longueur du centre de gravité du segment i .
$M(q)$	Matrice d'inertie de dimension $(n \times n)$.
$H(q, \dot{q})$	Vecteur des forces centrifuges et de Coriolis.
$G(q)$	Vecteur de force de gravité de la charge.
f_v	La matrice des coefficients de frottement visqueux des articulations du robot.
f_s	La matrice des coefficients de frottement sec des articulations du robot.
Γ_i	Vecteur des couples ou des forces généralisés.
Γ_0	Entrée auxiliaire de la commande.
k_p	Gain de commande proportionnel.
k_i	Gain de commande intégrale.
k_v	Gain de commande dérivée.
θ	Vecteur des variables articulaires du bras manipulateur.
$\dot{\theta}$	Vecteur des vitesses articulaires.
$\ddot{\theta}$	Vecteur des accélérations articulaires.
L	Lagrangien du système.
E	Energie cinétique totale du système.
U	Energie potentielle totale du système.
$sign$	Fonction signe.
sat	Fonction de saturation.
$V(\theta, \check{\theta})$	Fonction candidate de Lyapunov.
$\dot{V}(\theta, \check{\theta})$	La dérivée de la fonction candidate de Lyapunov.
r	Le degré relatif du système.
$S(x)$	La surface de glissement.
λ	Le gain constant.

U_{eq}	Un terme continu, appelée commande équivalente.
U_n	Un terme discontinu, appelée commande de commutation.
λ_x	Un coefficient positif qui représente la pente de la surface de glissement.
\wedge	Matrice des gains définis positive.
x	Vecteur d'état.
θ_{1c}	La position angulaire de référence du 1er segment.
θ_{2c}	La position angulaire de référence du 2eme segment.
$\dot{\theta}_{1c}$	La vitesse angulaire de référence du 1er segment.
$\dot{\theta}_{2c}$	La vitesse angulaire de référence du 2eme segment.
e_1	L'erreur de position.
e_2	L'erreur de vitesse.
γ	Gain positif d'adaptation.

Introduction générale

Malgré le fait qu'on s'achemine de nos jours vers des robots de plus en plus adaptatifs capables de décision et aux structures géométriques plus ou moins variées, les fondements de la robotique restent les mêmes. Seules viennent s'y greffer des techniques de construction, de contrôle et de commande de plus en plus sophistiquées.[1]

Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de répondre sur une plus large plage d'opération. C'est à ce moment que les non-linéarités se font sentir et rendent les synthèses des lois commandes, utilisés dans le domaine linéaire, caduc et absolument incapable de rendre compte de certains phénomènes. Il faut alors élaborer une commande, qui doit être robuste, non linéaire, performante et devra assurer une faible sensibilité aux incertitudes sur les paramètres, à leurs variations et aux perturbations externes.

De plus, dans l'étude des systèmes dynamiques, la première étape est de redonner à la modélisation le rôle central et de se concentrer sur les aspects structurels pour donner une approximation des phénomènes physiques mis en jeu.

Dans le cadre de ce travail, nous avons appliqué deux lois de commandes robustes et non linéaires sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté. C'est deux commandes, à savoir le backstepping et la commande mode glissant sont des techniques qualifiées par leur robustesse en stabilité et en performance. Nous avons faire une commande hybride mode glissant-backstepping et nous avons conclu par une étude comparative afin de tirer les avantages ainsi que les inconvénients entre elles.

La méthode du Backstepping développée par Kanellakopoulos [2], c'est une procédure récursive utilisant la théorie de Lyapunov dans la recherche de la loi de commande et dans l'étude de la stabilité. Dans cette procédure de conception comme son nom en anglais – "Backstepping" l'indique, il s'agit de choisir une fonction de l'état comme étant l'entrée d'un sous-système et de procéder de la même manière récursivement jusqu'à obtenir la commande à appliquer au système global.

La commande par mode de glissement fait partie de la famille des contrôleurs à structure variable. C'est une commande qui est reconnue pour sa grande robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques et les perturbations externes au système, d'autant plus qu'elle est simple à implémenter. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'étudier la commande par mode de glissement. Toutefois, la commande par mode de glissement induit en pratique

des commutations haute fréquence sur la commande. Ces commutations peuvent exciter des dynamiques non désirées qui risquent de déstabiliser, détériorer voire même de détruire le système étudié [3].

Ce mémoire est organisé en trois chapitres répartis comme suit :

Chapitre I :

Donne une description générale du robot manipulateur, suivi d'un développement de son modèle géométrique ainsi que le modèle dynamique.

Chapitre II :

Présente les éléments théoriques nécessaires à la compréhension des deux lois de commandes et leur hybridation par des définitions, des algorithmes généraux et d' illustratifs.

Chapitre III :

Sera réservé au développement des lois de commandes choisies, suivi de leur application dans le modèle dynamique de notre robot. Les résultats de simulation sont ainsi présentés et interprétés. Et enfin, une étude comparative entre les trois méthodes aura lieu de manière à montrer les performances de chaque loi commande.

Chapitre I :

Modélisation Du Robot Manipulateur

I.1 Introduction

Le système robotique est un système automatique, équipé de capteurs et d'actionneurs pour effectuer une ou plusieurs tâches, dans un environnement donné, de manière autonome, par l'exécution d'un programme. [4]

Dans ce chapitre, nous allons présenter le bras manipulateur en indiquant les définitions nécessaires. On poursuivra avec sa modélisation, qui consiste à représenter son comportement par des équations mathématiques.

I.2 principe de base de la robotique

Il n'y a vraiment pas de définition standard pour un robot. Cependant, il existe des caractéristiques essentielles qu'un robot doit avoir et cela pourrait vous aider à décider ce qui est et ce qui n'est pas un robot. Cela vous aidera également à décider quelles fonctionnalités vous devrez construire dans une machine avant de pouvoir compter en tant que robot.

Cependant, on retrouve toujours autour du robot, trois composantes essentielles, schématisées dans la figure .I.1

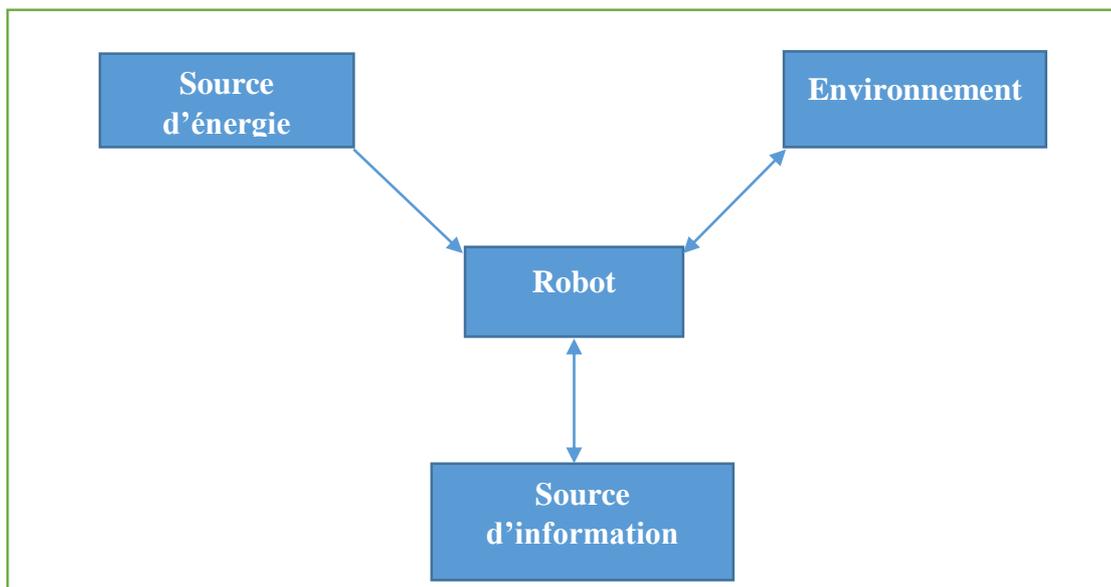


Figure.I.1 Le robot dans son contexte

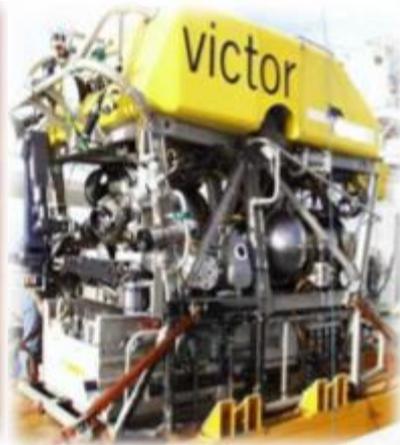
- a- La source d'énergie :** elle peut être électrique, hydraulique ou pneumatique.
- b- La source d'information :** elle définit les tâches à accomplir et traite toutes les informations relatives aux commandes et aux mesures.
- c- L'environnement :** il comprend à la fois l'espace atteignable du robot, les obstacles, les objets à manipuler et les propriétés physiques du milieu.

I.2.1 Les différentes catégories des robots

Nous pouvons citer plusieurs catégories de système robotiques Robots mobiles Robots sous-marins, Robots volants, Robots humanoïdes, Robots manipulateurs ... etc.



Robot mobile



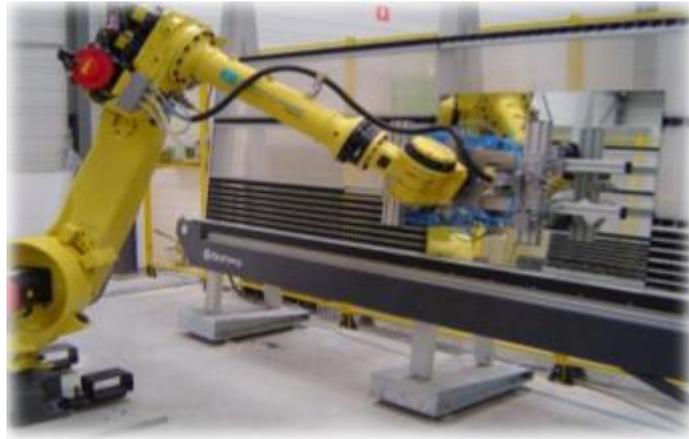
robot sous-marines



Robot volant



robot humanoïde



Robot manipulateur

Figure I.2 : catégories des robots

I.3 Définition du bras manipulateur

Un bras manipulateur est le bras d'un robot généralement programmable, avec des fonctions similaires à un bras humain. Les liens de ce manipulateur sont reliés par des axes permettant, soit du mouvement de rotation (comme dans un robot articulé) ou de translation (linéaire) de déplacement.

Il peut être autonome ou contrôlé manuellement et peut être utilisé pour effectuer une variété de tâches avec une grande précision.

Les bras manipulateurs peuvent être fixes ou mobiles (c'est-à-dire à roues) et peuvent être conçus pour des applications industrielles.

I.4 utilisation des bras manipulateurs

L'utilisation des bras manipulateurs est généralement dans l'industrie, il remplacent les ouvriers dans les tâches pénible et dangereuses :

- Principales applications dans l'automobile et l'industrie manufacturière
- Principales applications dans l'industrie agroalimentaire
- Répartition des applications sur la base installée mondiale

La figure I.3 suivante montre quelques exemples d'application du robot.

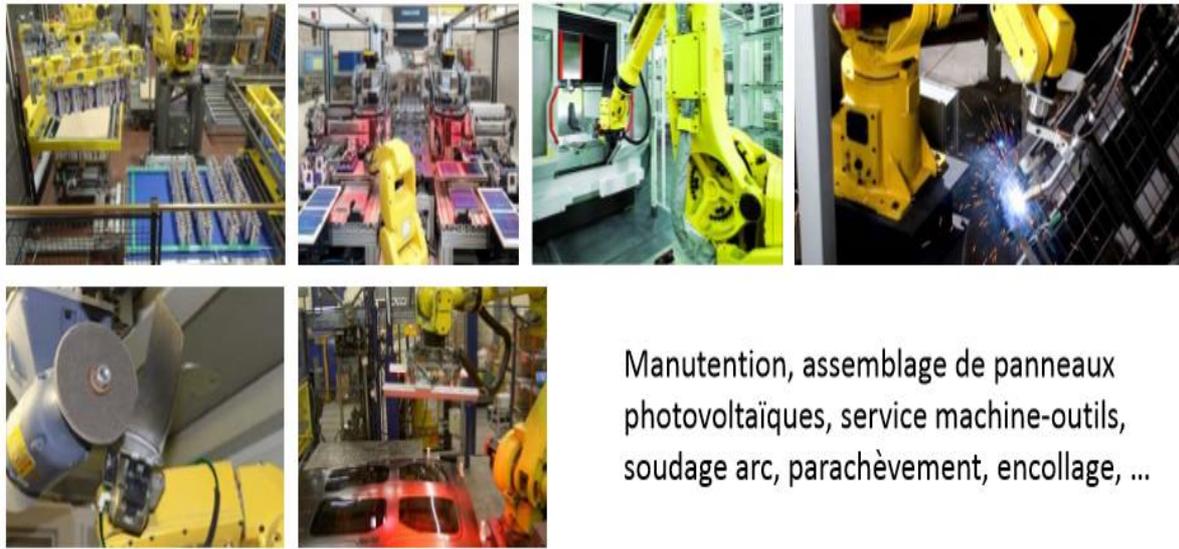


Figure I.3 : Exemples d'application des bras manipulateurs

I.5 Constituants mécanique des robots

Un robot-manipulateur est constitué par deux sous-ensemble distincts : un (ou plusieurs) organe terminale et une structure mécanique articulée.

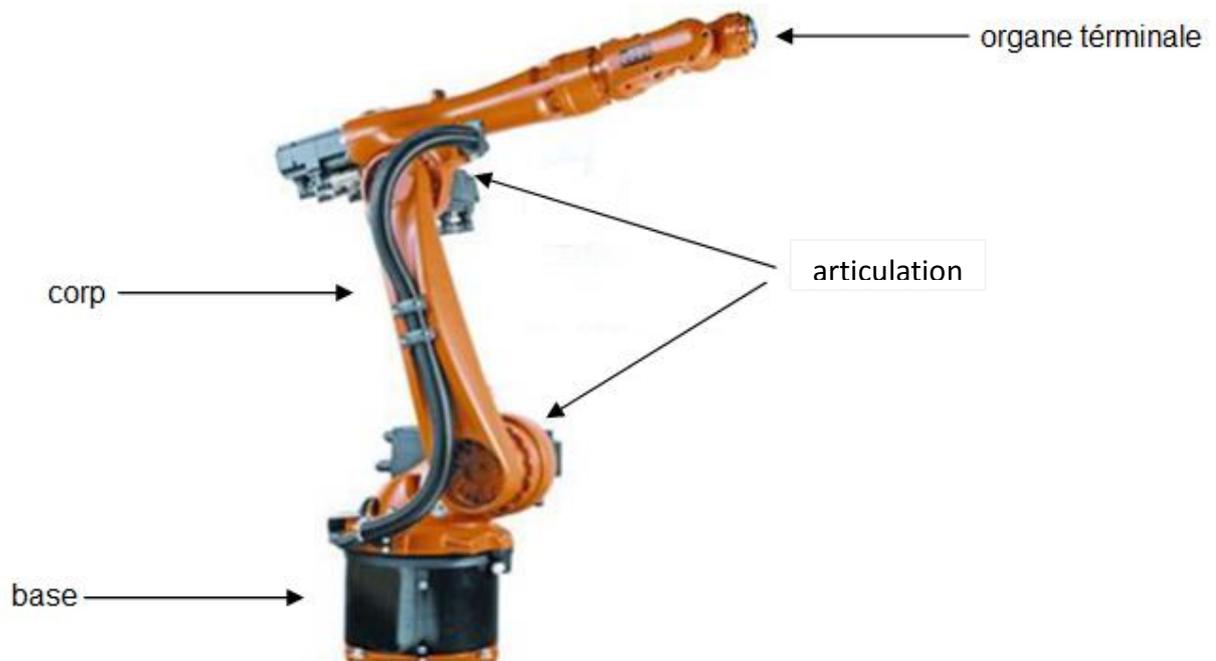


Figure I.4 Constituants mécanique des robots

I.5.1 L'organe terminale

Sous le terme organe terminal, on regroupe tous dispositifs destinés à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques, à dépression ...) ou à les transformer (outils, torche de soudage, pistolet de peinture...). Il s'agit donc d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement. Un organe terminal peut être multifonctionnel, c'est-à-dire qu'il est équipé de plusieurs dispositifs ayant des fonctionnalités différentes.

Il peut aussi être monofonctionnel mais interchangeable, un robot, enfin, peut être multi-bras, chacun des bras portant un organe terminal différent. Par la suite nous utilisons indifféremment le terme organe terminal, préhenseur, outil ou effecteur pour nommer le dispositif d'interaction fixé à l'extrémité mobile de la structure mécanique [2].

I.5.2 Articulations

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degrés de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit m le nombre de degrés de liberté résultant de la mobilité de l'articulation. La mobilité est tel que :

$$0 \leq m \leq 6$$

Lorsque $m = 1$, ce qui est le cas le plus fréquent en robotique, l'articulation est dite simple, soit rotoïde, soit prismatique [2].

I.5.3 Structure mécanique articulée

Le rôle de la structure mécanique articulée est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération donnée. Son architecture est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides ou supposée comme tels, assemblés par des liaisons appelées articulations. Les chaînes peuvent être soit ouvertes simples, soit arborescentes, soit fermées.

I.6 Modélisation des robots manipulateurs a 2ddl

La modélisation du système mécanique articulé consiste à représenter son comportement par des équations algébriques, soit du point de vue des positions, c'est le modèle géométrique, soit du point de vue des vitesses, c'est le modèle cinématique, soit encore en considérant les efforts mis en jeux, c'est le modèle dynamique.

I.6.1 Le modèle géométrique

En suivant les instructions de la convention de Denavit-Hatenberg de (Annexe A), la structure géométrique du robot manipulateur à 2ddl est représentée par la figure I.5 suivante :

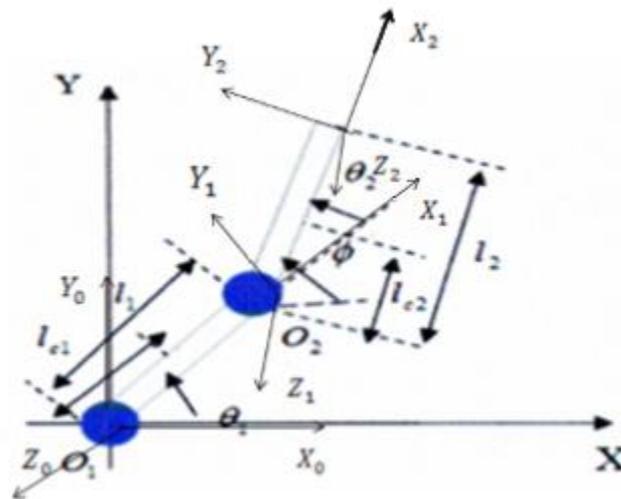


Figure I.5 : robot a deux degré de liberté

I.6.1.1 Le modèle géométrique directe

Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est-à-dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de ses coordonnées articulaires, le modèle s'écrit :

$$X = f(Q) \quad (I.1)$$

Où

$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ Vecteur des variables articulaires.

$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ Vecteur des variables opérationnelles. Tel que : $X = [x, y, z]$

Nous pouvons établir la tableau suivant :

Articulation	Paramètre d'articulation			
i	θ_i	l_i	α_i	r_i
1	0	l_1	0	0
2	0	l_2	0	0

Tableau I.1 Configuration de Denavit-Hartenberg du robot 2ddl (RR)

En utilisant la matrice (A.1) de (Annexe A), ou détermine les matrices de transformation homogène :

Le passage du repère R_0 au R_1 au moyen de la matrice de transformation homogène 0T_1 :

$${}^1T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.2)$$

Le passage du repère R_1 au R_2 au moyen de la matrice de transformation homogène 1T_2 :

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

La matrice de transformation du repère 0 au repère 2 est le produit des deux matrices

0T_1 et 1T_2 , cela donne :

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 \cdot C_{12} + l_2 \cdot C_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 \cdot S_{12} + l_2 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

Avec: $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ et $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$.

La forme général de la matrice 0T_2 est donnée par :

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x & P_x \\ X_y & Y_y & Z_y & P_y \\ X_z & Y_z & Z_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

L'identification entre la matrice donnée par l'équation (I.4) et celle donnée par l'équation (I.5) donne les systèmes d'équation suivants :

$$\begin{cases} X_x = C_{12} \dots \dots \dots (1) \\ X_y = S_{12} \dots \dots \dots (2) \\ X_z = 0 \dots \dots \dots (3) \end{cases} \quad (I.6)$$

$$\begin{cases} Y_x = -S_{12} \dots \dots \dots (1) \\ Y_y = C_1 \dots \dots \dots (2) \\ Y_z = 0 \dots \dots \dots (3) \end{cases} \quad (I.7)$$

$$\begin{cases} Z_x = 0 \dots \dots \dots (1) \\ Z_y = 0 \dots \dots \dots (2) \\ Z_z = 0 \dots \dots \dots (3) \end{cases} \quad (I.8)$$

Et les coordonnées de positions suivantes :

$$\begin{cases} P_x = l_2 C_{12} + l_1 C_1 \dots \dots \dots (1) \\ P_y = l_2 S_{12} + l_1 S_1 \dots \dots \dots (2) \\ P_z = 0 \dots \dots \dots (3) \end{cases} \quad (I.9)$$

I.6.1.2 Le modèle géométrique inverse

Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (MGI). Le modèle s'écrit :

$$\theta = f^{-1}(X) \quad (I.10)$$

- **Calcul de la variable articulaire θ_2**

En utilisant les relations (1) et (2) de l'équation (I.9) pour le calcul suivant :

$$P_x^2 + P_y^2 = I_2^2 C_{12}^2 + I_1^2 C_1^2 + 2I_2 C_{12} I_1 C_1 + I_2^2 S_{12}^2 + I_1^2 S_1^2 + 2I_2 I_1 S_{12} S_1 \quad (I.11)$$

Ce qui donne :

$$P_x^2 + P_y^2 = I_2^2 + I_1^2 + 2I_2 I_1 (C_{12} C_1 + S_{12} S_1) \quad (I.12)$$

A partir de l'équation (I.12) nous tirons la relation suivante :

$$C_{12}C_1 + S_{12}S_1 = \frac{(P_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2)}{2l_1^2l_2^2} \quad (\text{I.13})$$

En utilisant les relations trigonométriques suivantes :

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, l'équation devient :

$$C_2 = \frac{(P_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2)}{2l_1^2l_2^2} \quad (\text{I.14})$$

Posons : $C_2 = D$, ce qui donne :

$$S_2 = \pm\sqrt{1 - D^2}$$

Nous obtenons finalement l'expression θ_2 donné par :

$$\theta_2 = \text{ATAN2}(\varepsilon\sqrt{1 - D^2}, D) \quad (\text{I.15})$$

Avec $\varepsilon = \pm 1$.

La fonction $\text{ATAN2}(\sin a, \cos a)$ est presque similaire à ARCTG , elle donne l'angle a en fonction des signes sinus et cosinus.

- **Calcul de la variable articulaire θ_1**

Reprenons les relations (1) et (2) de l'équation (I.9) qui peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} P_x = l_1C_1 + l_2(C_1C_2 - S_1S_2) \\ P_y = l_1S_1 + l_2(S_1C_2 - S_2C_1) \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

En développant C_{12}, S_{12} , l'équation (I.16) implique :

$$\begin{cases} P_x = (l_1C_1 + l_2C_2)C_1 - l_2S_1S_2 \\ P_y = l_1S_1C_1 + (l_1 + l_2C_2)S_1 \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Nous résolvons le système d'équation (I.17) par rapport aux deux inconnus C_1 et S_1 .

Le déterminant correspondant vaut $P_x^2 + P_y^2$ et nous trouvons C_1 et S_1 sous les équations suivantes :

$$C_2 = \frac{P_x (l_1 l_2 C_1) P_y l_2 S_2}{P_x^2 + P_y^2} \quad (\text{I.18})$$

$$S_2 = \frac{P_y (l_1 l_2 C_2) P_x l_2 S_2}{P_x^2 + P_y^2} \quad (\text{I.19})$$

D'où la variable articulaire θ_1 est donnée par :

$$\theta_1 = \text{ATAN1}(S_1, C_1) \quad (\text{I.20})$$

I.6.2 Modèle dynamique

Le modèle dynamique est la relation entre les couples et/ou forces applique aux actionnaires et les positions, vitesses et accélérations. On représenter le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e) \quad (\text{I.21})$$

Avec :

Γ : Vecteurs des couples/forces des actionnaires, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique. (dans la suite en écrira tout simplement couple).

q : Vecteur des positions articulaires.

\dot{q} : Vecteur des vitesses articulaires.

\ddot{q} : Vecteur des accélérations articulaires.

f_e : Vecteur représentant les efforts extérieur (fores et moment) qu'exerce le manipulateur sur l'environnement.

I.6.2.1 Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse exprime les couples exercés par les actionneurs en fonction des positions, vitesses et accélérations des articulations. Le modèle dynamique inverse est représenté par une relation de la forme :

$$\Gamma = f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \quad (\text{I.22})$$

Γ : Vecteur des couple/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique.

Θ : Vecteur des positions articulaires.

$\dot{\theta}$: Vecteur des vitesses articulaires.

$\ddot{\theta}$: Vecteur des accélérations articulaire.

Plusieurs formalismes ont été utilisés pour obtenir le modèle dynamique des robots. Les formalismes les plus souvent utilisés sont:

- Le formalisme de Lagrange-Euler : cette méthode est mieux adaptée pour le calcul du modèle dynamique que l'on utilise en simulation.
- Le formalisme de Newton-Euler: cette méthode est mieux adaptée pour le calcul du modèle dynamique que l'on utilise en commande.

Nous allons voir dans ce qui suit la modélisation d'un bras manipulateur dynamique rigide à chaîne ouverte simple à deux degrés de liberté et en tenant compte des effets de la vitesse, on va utiliser le formalisme de Lagrange pour déterminer les équations du mouvement pour un bras manipulateur à deux degrés de liberté à chaîne ouverte simple.

I.6.2.1.1 Formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement en termes de travail et d'énergie du robot. La forme générale représentant le mouvement d'un robot manipulateur constitué de n degrés de liberté et de n articulations, s'écrit suivant Lagrange :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad (I.23)$$

Avec : $i=1,2,\dots,n$.

L : Fonction lagrangienne de robot égale à : $l=E_c - E_p$.

E_c : Energie cinétique totale du robot manipulateur.

E_p : Energie potentielle totale du robot manipulateur.

$q \in R^n$: Vecteur des positions articulaires.

$\dot{q} \in R^n$: Vecteur des vitesses articulaires.

Les forces généralisées produites par cette méthode ne représentent pas nécessairement des forces physiques réelles qui peuvent être identifiées et ne sont pas constituées de forces contraintes qui n'effectuent aucun travail, car ces forces sont éliminées. L'équation pour les forces généralisées s'écrit :

$$\Gamma_{qi} = \sum \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{q}} = \sum \left(F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \quad (I.24)$$

Où :

F_x, F_y, F_z : sont les composantes des forces et x, y, z sont les coordonnées des points d'application de ces forces définies en fonction des coordonnées généralisées pour permettre leurs dérivées.

Dans le cas d'une articulation rotoïde $q_i = \theta_i$, tandis que pour une articulation prismatique $q_i = d_i$.

Dans notre travail, nous avons considéré d'abord un robot manipulateur à 2ddl, dont le mouvement des articulations est rotoïde, nous avons donc

$$q_i = \theta_i$$

Tel que :

$$q = [\theta_1 \quad \theta_2]^T \quad \text{et} \quad \tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$$

A partir de la figure (I.5), nous déterminons les coordonnées du bras manipulateur par rapport au repère xy, ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 = l_{c1} \cos \theta_1 \\ y_1 = l_{c1} \sin \theta_1 \end{cases} \quad (I.25)$$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_{c2} \cos \theta_2 \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \sin \theta_2 \end{cases} \quad (I.26)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_{c1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{y}_1 = l_{c1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1^2 \\ \dot{y}_2 = l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -(l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_{c2} \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_{c2}^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta_1 \\ \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_{c2}^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta_1 \end{cases}$$

• **Détermination de l'énergie cinétique E_c**

$$E_c = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (\text{I.27})$$

Ce qui donne :

$$E_c = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + I_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (\text{I.28})$$

Avec :

$$\begin{cases} v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \\ v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_{c2}^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

L'équation (I.28) devient :

$$\begin{aligned} E_c = & \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + I_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + 2l_{c2}^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

• **Détermination de l'énergie potentielle E_p**

$$E_p = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \quad (\text{I.30})$$

Avec :

$$\begin{cases} h_1 = y_1 = l_{c1} \sin \theta_1 \\ h_2 = y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

L'équation (I.30) devient :

$$E_p = m_1 g l_{c1} \sin \theta_1 + m_2 g (l_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (\text{I.31})$$

- **Détermination du Lagrangien $L = E_c - E_p$:**

$$L = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + I_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_1l_{c1}^2\dot{\theta}_1^2 - m_1gl_{c1}\sin\theta_1 - m_2g(l_1\sin\theta_1 + l_{c2}\sin(\theta_1 + \theta_2)) + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2\dot{\theta}_2^2 + l_{c2}^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_{c2}^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2l_1l_{c2}\dot{\theta}_1^2\cos\theta_2 + 2l_1l_{c2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2) \quad (I.32)$$

- **Détermination du modèle dynamique du robot**

Nous appliquons maintenant l'équation d'Euler-Lagrange donnée par équation (I.23) pour déterminer le modèle dynamique correspondant au robot manipulateur à 2ddl, soit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \Gamma_i, i = 1,2 \quad (I.33)$$

Nous avons :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1g(l_{c1}\cos\theta_1) - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_{c2}\cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad (I.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= I_1\dot{\theta}_1 + I_2\dot{\theta}_1 + I_2\dot{\theta}_2 + m_1l_{c1}^2\dot{\theta}_1 + m_2(l_1^2\dot{\theta}_1 + l_{c2}^2\dot{\theta}_1 + l_{c2}^2\dot{\theta}_2 + 2l_1l_{c2}\dot{\theta}_1\cos\theta_2 \\ &+ l_1l_{c2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{aligned} \quad (I.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= I_1\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_2 + m_1l_{c1}^2\ddot{\theta}_1 + m_2(l_1^2\ddot{\theta}_1 + l_{c2}^2\ddot{\theta}_1 + l_{c2}^2\ddot{\theta}_2 + 2l_1l_{c2}\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 - \\ &2l_1l_{c2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + l_1l_{c2}\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 - \\ &l_1l_{c2}\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2) \end{aligned} \quad (I.36)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= (I_1 + I_2 + m_1l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1l_{c2}\cos\theta_2))\ddot{\theta}_1 + (I_2 + \\ &m_2(l_{c2}^2 + l_1l_{c2}\cos\theta_2))\ddot{\theta}_2 + (-m_2l_1l_{c2}\sin\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + 2(-m_2l_1l_{c2}\sin\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \\ &m_1gl_{c1}\cos\theta_1 + m_2g(l_1\cos(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned} \quad (I.37)$$

Nous avons aussi :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2(l_1l_{c2}\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2 + l_1l_{c2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2) - m_2gl_{c2}\cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (I.38)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2 \dot{\theta}_2 + I_2 \dot{\theta}_1 + M_2 (l_{c2}^2 \dot{\theta}_1 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_1 + l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \quad (I.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = (I_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_2)) \ddot{\theta}_1 + (I_2 + m_2 l_{c2}^2) \ddot{\theta}_2 + (m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + (m_2 g l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad (I.40)$$

A partir de l'équation (I.23), nous avons :

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ \tau_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \end{cases} \quad (I.41)$$

En robotique, si le mouvement des articulations constituant le robot manipulateur est rotoïde, l'expression du couple peut être s'exprimer sous la forme matricielle suivante, ce qui correspondant au modèle dynamique du robot :

$$\Gamma_i = M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + G(\theta) \quad , \quad (i = 1,2) \quad (I.42)$$

Avec :

Γ : vecteur des couples ou des forces généralisés.

θ : vecteur des variables articulaires du bras manipulateur.

$\dot{\theta}$: vecteur des vitesses articulaires.

$\ddot{\theta}$: vecteur des accélérations articulaires.

$M(\theta)$: matrice d'inertie de dimension (n x n)

$C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}$: vecteur des forces centrifuges et de Coriolis.

$G(\theta)$: Vecteur de force de gravité de la charge.

Soit $\Gamma_i = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$. Le développement de l'équation (I.41) donne :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2h_{122}\dot{\theta}_2 & h_{211}\dot{\theta}_2 \\ h_{211}\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (I.43)$$

L'identification entre équation (I.43) et équation (I.41) permet de définir les éléments suivants :

$$M_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2)$$

$$M_{12} = M_{21} = I_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_2)$$

$$M_{22} = I_2 + m_2 l_{c2}^2$$

$$h_{122} = h_{112} = -h_{211} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2$$

$$g_1 = m_1 g (l_{c1} \cos \theta_1) + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2))$$

$$g_2 = m_2 g l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

La matrice d'inertie M est égale à :

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2) & I_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_2) \\ I_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_{c2} \cos \theta_2) & I_2 + m_2 l_{c2}^2 \end{bmatrix} \quad (I.44)$$

Le vecteur de termes Coriolis et centrifuge est donnée par :

$$c(\theta, \dot{\theta})\theta = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (I.45)$$

Le vecteur des termes de forces de gravité G est donné par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} \cos \theta_1 + m_2 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (I.46)$$

I.6.3 Modèle dynamique direct

Pour simuler le comportement du robot et de sa boucle de commande, on utilise le modèle dynamique direct. Même si les contraintes de temps de calcul sont moins critiques que pour la commande, il est cependant intéressant de disposer d'un modèle performant, ou le modèle dynamique direct exprime la position, la vitesse et l'accélération des articulations en fonction du couple appliqué [25].

Il est obtenu par inversion du modèle précédent, il s'écrit :

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau - N(q, \dot{q}) - G(q) - \tau_f) \quad (I.47)$$

Nous présentons ici deux méthodes, l'une qui procède par inversion de la matrice d'inertie A . l'autre qui calcule les accélérations articulaires sans inversion.

- Calculer par inversion de la matrice d'inertie A du robot :

A partir de l'équation :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) \quad (I.48)$$

Et en supposant l'existence d'un effort extérieur sur l'organe terminal.

Ou A est la matrice ($n \times n$) de l'énergie cinétique, d'élément générique A_{ij} , appelée aussi matrice d'inertie du robot, qui est symétrique est définie positive [6]. Ses éléments sont fonction des variables articulaires q .

Le modèle dynamique direct s'écrit :

$$\ddot{q} = A^{-1}[\Gamma - H(q, \dot{q})] \quad (I.49)$$

Avec :

$$H(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + Q + J^T f_{en}$$

Calcul du modèle dynamique direct sans inversion de la matrice d'inertie : Cette méthode utilise les équations de Newton-Euler et permet de calculer les accélérations articulaires sans avoir à inverse la matrice d'inertie A du robot [7], [8], [9].

Le calculer de la matrice A par une méthode lagrangienne peut être moins couteux en temps [10], [11]. On peut cependant utiliser l'algorithme de Newton-Euler pour calculer ses éléments [12] en remarquant, à partir de la relation (II.38), que la $i^{\text{ème}}$ colonne est égal à Γ si :

$$\dot{q} = 0, \quad g = 0, \quad \ddot{q} = u_i, \quad f_{en} = 0, \quad m_{en=0}$$

u_i Étant le vecteur ($n \times 1$) dont tous les éléments sont nuls sauf le $i^{\text{ème}}$ composant qui est égal à 1.

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons brièvement donné une définition générale du robot manipulateur, en indiquant ses constituants mécaniques. Nous avons ensuite déterminé le modèle géométrique du bras suivant la convention de Denavit-Hartenberg et nous sommes décidés pour le formalisme d'Euler Lagrange pour l'obtention de son modèle dynamique.

Pour le prochain chapitre, nous introduirons les théories des commandes non linéaires du bras manipulateur.

Chapitre II :

Théorie Des Commandes Non Linéaires

II.1 Introduction

Beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Au cours du deuxième chapitre, nous présentons une étude théorique des commandes non linéaires entamée par la commande par mode glissant, la commande par backstepping et enfin la commande hybride mode glissant backstepping en donnant tous les aspects théoriques avec leurs principes de fonctionnement nécessaire pour la conception et l'application sur notre robot manipulateur

II.2 Commande par mode glissant

II.2.1 Historique de la Commande en Mode glissant

La commande par mode de glissement fait partie de la famille des contrôleurs à structure variable. C'est une commande qui est reconnue pour sa grande robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques et les perturbations externes au système, d'autant plus qu'elle est simple à implémenter. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'étudier la commande par mode de glissement. Toutefois, la commande par mode de glissement induit en pratique des commutations haute fréquence sur la commande. Ces commutations peuvent exciter des dynamiques non désirées qui risquent de déstabiliser, détériorer voire même de détruire le système étudié [13].

Le réglage en mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier des systèmes à structure variable. La théorie donc des systèmes à structure variable et les modes glissants associés (en anglais : sliding mode), est une technique de commande non linéaire, elle est caractérisée par la discontinuité de la commande aux passages par une surface de commutation appelée surface de glissement. [14] [15].

La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'un état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l' aide d'une commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d' équilibre, d'ou le phénomène de glissement.

II.2.2 Système à structure variable

Un système à structure variable est un système dont sa structure change pendant son fonctionnement. Il est caractérisé par un choix d'une fonction de commutation. Dans les systèmes à structure variable avec mode glissant, la trajectoire d'état est amenée vers une surface (hyperplan), puis à l'aide de la loi de commutation, elle est obligée de rester au voisinage de cette surface. Cette dernière est dite surface de glissement dans laquelle se produit le mouvement qu'on appellera mouvement de glissement [16]. La trajectoire dans le plan de phase (système deuxième ordre) est constituée de trois modes distinctes (Figure II.1) et qui sont:

- **Le mode de convergence (MC)** : Durant lequel la variable à régler se déplace de n'importe quel point initial dans le plan de phase est tend vers la surface de commutation $s(x,y)=0$. Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence (figure II.1).
- **Le mode glissement (MG)** : Durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique dans ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement $s(x,y)$ (figure II.1)
- **Le mode du régime permanent (MRP)** : Il est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande (figure II.1).

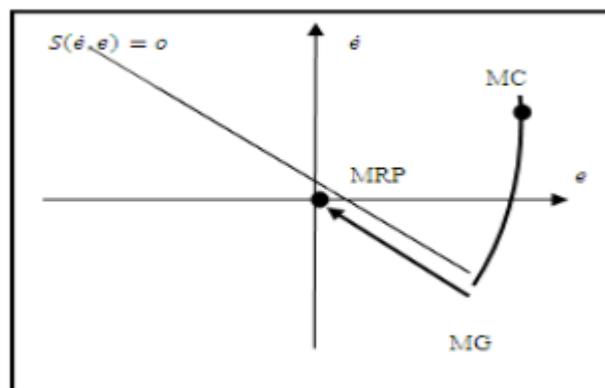


Figure II.1 : Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase

II.2.2.1 Conception de la commande par mode de glissement

La conception de la commande par mode glissant peut être divisée en trois étapes principales très dépendantes, ces étapes concernent [17],[18].

- Choix de la surface.
- Etablissement des conditions d'existence de convergence.
- Détermination de la loi de commande.

II.2.2.1.1 Le choix de la surface de glissement (S)

La fonction S est appelée par abus de langage surface, cette dernière peut être une droite ou une hyper surface selon l'ordre du système à commander.

Slotine a proposé une forme générale qui consiste à définir une fonction scalaire des surfaces de glissement dans le plan de phase (figure III.2), dans le but est d'assurer la convergence d'une variable d'état vers sa valeur de consigne cette fonction est donnée par l'équation :

$$s(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_x \right)^{r-1} e(x) \quad (\text{II. 1})$$

Cette surface est d'usage très pratique car elle minimise le nombre des paramètres de synthèse de la surface en un seul coefficient [18].

Où :

$e(X)$: l'Écart entre la variable à régler et la variable désirée .

λ_x : Un coefficient positif qui représente la pente de la surface de glissement.

r : Le degré relatif de système qui représente le nombre de fois qu'il faut dériver la surface pour faire apparaître la commande.

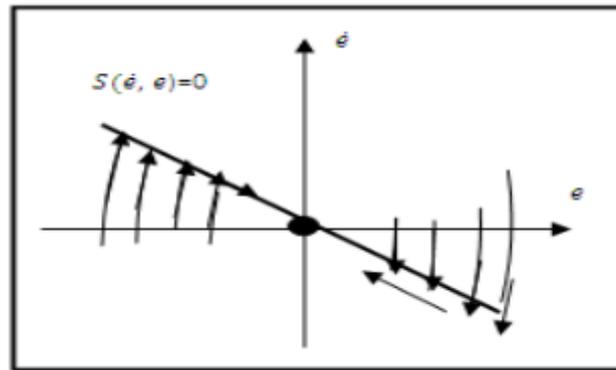


Figure II.2: Surface de glissement

II.2.2.1.2 Condition d'existence de convergence

Les conditions d'existence de convergences sont les critères qui permettent en dynamique du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment à la perturbation. Il y'a deux considérations correspondantes au mode convergence de l'état du système.

a) Fonction directe de commutation

C'est la première condition de convergence (attractivité). Elle est proposée et étudiée par Emilyanov et Utkin [13],[16]. Il s'agit de donner, à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est formulée par :

$$\dot{s}(x) > 0 \text{ lorsque } s(x) < 0$$

$$\dot{s}(x) < 0 \text{ lorsque } s(x) > 0$$

Cette condition peut être donnée autrement par :

$$\dot{s}(x)s(x) < 0 \tag{II.2}$$

b) Fonction de Lyapunov

La détermination du domaine de glissement peut se ramener à l'étude de la stabilité du système en régime glissant. Cette étude est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov. La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive ($V(x) > 0$) pour les variables d'états de système et la loi de commande doit faire décroître cette fonction ($\dot{V}(x) < 0$). L'idée de base est de choisir une fonction scalaire pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence et de construire une commande U

Tel que le carrée de la surface correspond à une fonction de Lyapunov qui est définie par :

$$V(x) = \frac{1}{2} s^2(x) \quad (\text{II. 3})$$

En dérivant cette dernière, on obtient :

$$\dot{V}(x) = s(x) \cdot \dot{s}(x) \quad (\text{II. 4})$$

Pour que la fonction candidate de Lyapunov puisse décroître, il suffit d'assurer que :

$$\dot{V}(x) < 0$$

Pour que la fonction décroisse, il faut s'assurer que sa dérivée est négative. Ceci n'est permis que si la condition (II.2) est vérifiée. L'équation (II.3) explique que le carrée de la distance vers la surface mesurée par $s_2(x)$ diminue tout le temps, contraignant la trajectoire du système à se diriger vers la surface dans les deux cotés.

II.2.2.1.3 Détermination de la commande

La commande par mode glissant comprend en générale deux termes

$$(U = U_{eq} + U_n) \quad (\text{II. 5})$$

Avec :

U_{eq} : Un terme continu , appelée commande équivalente

U_n : Et un terme discontinu, appelée commande de commutation.

a) La commande équivalente

La méthode qui a été proposée par Utkin [16], consiste à admettre qu'en mode de glissement tout se passe comme si le système était piloté par une commande dite commande équivalente. Cette dernière correspondant au régime glissant idéal, pour lequel non seulement le point de fonctionnement reste sur la surface mais aussi pour lequel la dérivée de la fonction de la surface reste nulle $\dot{S}=0$ (c'est-à-dire surface invariante dans le temps).

b) La commande de commutation

La commande de commutation impose au point de fonctionnement de rester au voisinage de la surface. Cette commande a essentiellement pour but de vérifier les conditions d'attractivité.

$$U_n = -\lambda \text{sign}(s) \tag{II.6}$$

- Le gain est choisit pour garantir la stabilité, la rapidité et pour vaincre les perturbations extérieures pouvant agir sur le système.
- Le signe «-» indique le rappel de point de fonctionnement vers la surface à tout instant de fonctionnement.
- La fonction $\text{sign}(s(x, t))$ est définie par :

$$\text{sign}(S(\dot{x}, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } S > 0 \\ -1 & \text{si } S < 0 \end{cases} \tag{II.7}$$

L'utilisation de la fonction sign , donnée par Figure (II.3), signifie que la commande U_n commute entre deux valeur +/- .

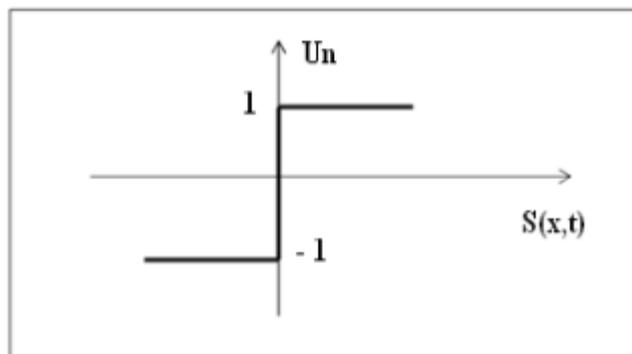


Figure II.3 : Représentation de la fonction sign.

Donc la structure d'un contrôleur par mode glissant se compose de deux parties la linéarisation (U_{eq}) et l'autre stabilisante (U_n).

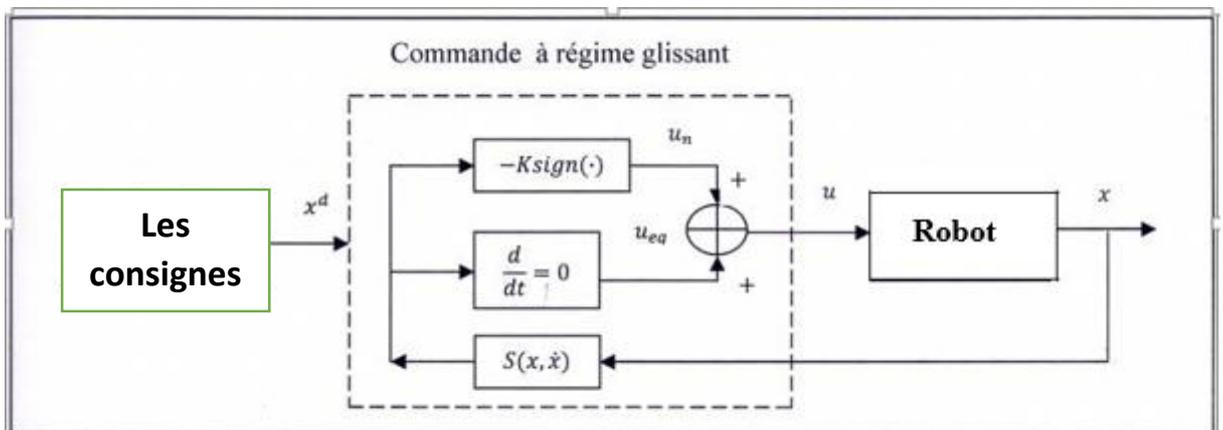


Figure II.4 : Schéma de la commande par mode glissant.

II.2.3.2 Phénomène de réticence

Étant donné que l'utilisation de la fonction *sign* signifie que la commande U_n commute entre deux valeurs $\pm\lambda$ avec une fréquence infinie, dans la pratique, un régime glissant idéal n'existe pas.

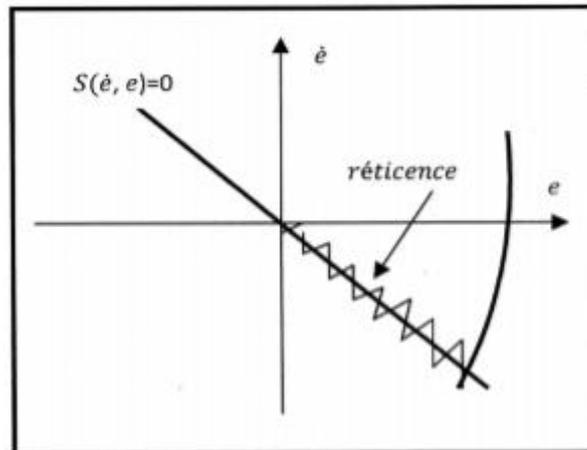


Figure II.5 : Phénomène de chattering.

La présence d'imperfections ou de limites technologiques et physiques, tels que des retards au niveau des commutations ou de petites constantes de temps au niveau des actionneurs, le caractère discontinu de la commande U_n engendre un comportement dynamique particulier au voisinage de la surface qui est communément appelé chattering, en anglais, ou encore réticence ou broutement, en français, (Figure II.5). Celui-ci est caractérisé par de fortes oscillations autour de la surface.

II.2.3.3 Solutions pour la suppression du phénomène de réticence

Le phénomène de réticence constitue l'inconvénient majeur non négligeable de la commande par mode glissant puisqu'il peut provoquer une détérioration anticipée de l'organe de commande ou exciter des dynamiques hautes fréquences non considérées dans la modélisation du système. Ceci peut dégrader les performances et même conduire au problème d'instabilité

Le phénomène de chattering revient à ce que la commande de commutation ne commute pas infiniment rapidement. Cependant,

il est possible de réduire ou d'éliminer ce phénomène par :

- La modification de la fonction signe par une fonction plus lisse telle que celles représentées par Figure (II.6).
- L'utilisation d'une commande composée de deux commandes, celle discontinue avec celle appelée commande équivalente.
- L'utilisation d'une commande par mode glissant d'ordre supérieur.

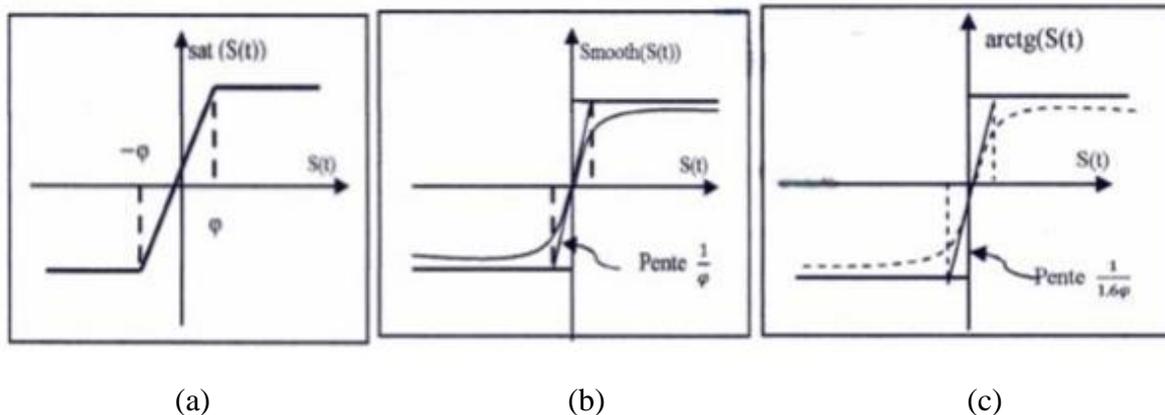


Figure II.6 : Fonctions de commutation.

Dans notre travail nous sommes optés pour les deux premières solutions c'est-à-dire : Nous avons changé la fonction signe par la fonction sat qui est une fonction plus lisse donnée par Figure (II.6-a) et nous avons considéré aussi une commande composée de deux commandes, à savoir celle de commutation en plus de celle équivalente.

II.3 Commande par backstepping

II.3.1 Historique de la commande par backstepping

Le backstepping a été développé par Kanellakopoulos et al [19] et inspiré par les travaux de Feurer et Morse [19] d'une part et Tsinias [19] et Kokotovii et Sussmann [19] d'autre part. Elle offre une méthode systématique pour effectuer le design d'un contrôleur pour les systèmes non linéaires.

L'idée consiste à calculer une loi de commande afin de garantir que certaine fonction de Lyapunov soit définie positive et que sa dérivée soit toujours négative. La méthode consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue ensuite récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. À chaque étape l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de

l'étape précédente est traitée. À la dernière étape la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir en tout temps la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

Contrairement à la plupart des autres méthodes le backstepping n'a aucune contrainte au niveau du type de non-linéarité. Cependant le système doit se présenter sous la forme dite paramétrique pure. Les équations d'un tel système sont données par :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1)^T \theta + \psi_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2)^T \theta + \psi_2(x_1, x_2)x_3 \\
 \dot{x}_{R-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})^T \theta + \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n \\
 \dot{x}_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \theta + \psi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{II.8}$$

Où θ est le vecteur de paramètres constants. Les ψ_i et φ_i sont des fonctions non linéaires connues avec $\varphi(0)=0$ et $\psi_n(x) \neq 0, \forall x \in R^n$. De plus le backstepping permet de garder les non-linéarités utiles [20].

II.3.2 Synthèse d'une loi de commande par backstepping

L'idée de base du backstepping est de stabiliser au départ le premier sous système par une fonction stabilisante connue via une fonction de Lyapunov choisie ensuite d'ajouter à son entrée un intégrateur. On procède de même pour le prochain sous-système augmenté et ainsi de suite pour les sous-systèmes successifs pour aboutir enfin à une fonction de Lyapunov globale donnant la loi de commande globale qui stabilise le système [20]. Dans cette partie l'idée principale de la technique du backstepping est démontrée par son application à travers les exemples donnés.

II.3.2.1 : Exemple d'un bras manipulateur à un degré de liberté

On peut simuler un bras manipulateur à un pendule simple comme le montre la figure (II.10). Pour cette application, on va montrer l'utilisation de la technique de backstepping. Pour commander un robot manipulateur à un degré de liberté, en supposant que tous les paramètres du système sont connus et prédéfinis.

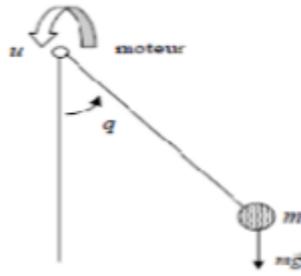


Figure II.7 : Système articulé à un degré de liberté.

Tout d'abord, on va décrire le comportement du bras manipulateur sous forme d'un modèle de connaissance, et pour cela on introduit le Lagrangien suivant :

$$L = E_c - E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 \quad (\text{II. 9})$$

$$E_p = mg(1 - \cos q)$$

Tel que :

- E_c : L'énergie cinétique.
- E_p : L'énergie potentielle.
- l : La longueur du bras manipulateur
- q : Position angulaire.

On aura, donc :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 - mg(1 - \cos q) \quad (\text{II. 10})$$

Soit l'équation d'Euler Lagrange suivante :

$$\Gamma_i = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (\text{II. 11})$$

Avec :

- $N=1$: pour un degré de liberté.
- $\Gamma=u$: commande à l'entrée système.

Les équations différentielles sont données comme suit:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = ml^2 \ddot{q} \quad (\text{III. 12})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -mgl \sin q$$

D'après l'expression de Lagrange, on exprime l'équation du système comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = u \Rightarrow ml^2 \ddot{q} + mgl \sin q = u \quad (\text{II. 13})$$

L'équation du système peut encore s'écrire :

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin q + \frac{1}{ml^2} u \quad (\text{II. 14})$$

Maintenant, introduisons la notation d'état en posant :

- $x_1 = q$: représente la position angulaire.
- $x_2 = \dot{q}$: représente la vitesse angulaire.

Le modèle résultant peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} \Gamma \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Calcul de la loi de commande backstepping

Etape1

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2 \quad (\text{II.16})$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} \Gamma \quad (\text{II.17})$$

Soit x_{1d} la trajectoire de référence de x_1 et l'erreur de position de q est donc :

$$e_1 = x_{1d} - x_1 \quad (\text{II.18})$$

Et sa dérivée est :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 \quad (\text{II.19})$$

On a $\dot{x} = x_2$, l'équation (II.19) devient :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2 \quad (\text{II.20})$$

La fonction de lyapunov candidate est :

$$v_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (\text{II.21})$$

Il est clair que la fonction de lyapunov donnée par (II.21) est définie positive et il faut garantir que sa dérivée soit négative pour que le premier sous système soit stable. On a :

$$\dot{v}_1 = \dot{e}_1 e_1 \quad (\text{II.22})$$

En substituant l'équation (II.20) dans (II.22), on trouve :

$$\dot{v}_1 = (\dot{x}_{1d} - x_2)e_1 \quad (\text{II.23})$$

La fonction de lyapunov doit prendre la valeur suivante pour qu'elle soit négative :

$$\dot{v}_1 = -k_1 e_1^2 \quad (\text{II.24})$$

Avec k_1 est une constante définit positive.

L'égalité entre (II.23) et (II.24) donne :

$$-k_1 e_1 = \dot{x}_{1d} - x_2 \quad (\text{II.25})$$

On trouve alors :

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + k_1 e_1 \quad (\text{II.26})$$

L'équation(II.26) représente une commande virtuelle qui va être référence de trajectoire dans la 2 éme étape, soit $\dot{x} = x_{2d}$

Etape 2

Etant donne l'erreur de poursuite de x_2 :

$$e_2 = x_{2d} - x_2 \quad (\text{II.27})$$

On a utilisé les équations développées dans l'étape 1 pour déterminer les relations suivantes :

$$e_2 = \dot{x}_{1d} + k_1 e_1 - x_2 \quad (\text{II.28})$$

$$e_2 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 + k_1 e_1 \quad (\text{II.29})$$

$$e_2 = \dot{e}_1 + k_1 e_1 \quad (\text{II.30})$$

$$\dot{e}_1 = e_2 - k_1 e_1 \quad (\text{II.31})$$

$$\dot{e}_2 = k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 \quad (\text{II.32})$$

La fonction de Lyapunov candidate est augmentée par un terme, ce qui donne :

$$v_2 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (\text{II.33})$$

Et sa dérivée \dot{v}_2 égale a :

$$\dot{v}_2 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \quad (\text{II.34})$$

Le développement de cette équation donne :

$$\dot{v}_2 = e_1 (e_2 - k_1 e_1) + e_2 (k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2) \quad (\text{II.35})$$

$$\dot{v}_2 = -k_1 e_1^2 + e_2 (k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + e_1) \quad (\text{II.36})$$

Pour que le sous-système soit stable il faut que le terme entre parenthèses de l'équation (II.36) soit égale à $(-k_2 e_2)$ avec k_2 est une constante définie positive, ce qui donne :

$$\dot{v}_2 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 \quad (\text{II.37})$$

L'égalité entre (II.36) et (II.37) donne :

$$\dot{x}_2 = k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + k_2 e_2 \quad (\text{II.38})$$

L'égalité entre (II.17) et (II.38) donne le développement suivant :

$$-\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} \Gamma = k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + k_2 e_2 \quad (\text{II.39})$$

Qui va aboutir à la détermination de la commande (couple) Γ du segment :

$$\Gamma = \left(\frac{g}{l} \sin(x_1) + (k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + k_2 e_2) \right) ml^2 \quad (\text{II.40})$$

II.3.2.2 Exemple d'un système du deuxième ordre

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}_1 = \psi(x_1) + x_2 \quad (\text{II.41.a})$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (\text{II.41.b})$$

$$y = x_1 \quad (\text{II.41})$$

Où x_1, x_2, y et $u \in \mathbb{R}$, la seconde équation représente un intégrateur pur voir figure (II.39). Le but de la commande du système non linéaire (II.41) est la régulation de $y(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Le seul point d'équilibre avec $y = 0$ est $(x_1, x_2) = (0, -f(0))$.

Puisque le système non (II.41) est constitué de deux états x_1 et x_2 , alors il y aura une méthode de conception récursive à deux étapes. On traite donc (II.41.a) et (II.41.b) comme deux

sous-systèmes en cascade chacun avec une seule entrée et une seule sortie. On commence la conception avec le système x_1 et on continue avec x_2 .

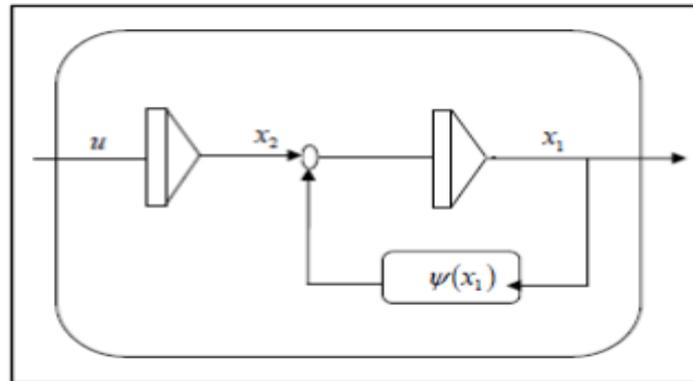


Figure II.8: Système non linéaire du deuxième ordre avec une seule fonction non linéaire.

II.3.2.3 Description de la procédure

- **Etape 1 :**

Pour le système (II.41.a), on choisit x_2 comme une entrée de commande virtuelle ou fictive, rappelons que l'objectif de la commande est de réguler la sortie $y = 0$ à 0. D'où la première variable du backstepping est choisie comme :

$$z_1 = x_1 \quad (\text{II. 42})$$

La commande virtuelle est alors définie comme :

$$x_2 = z_2 + \alpha_1 \quad (\text{II. 43})$$

- α_1 : est la fonction stabilisante.
- z_2 : est la nouvelle variable d'état.

D'où le sous-système

$$\dot{x}_1 = \psi(x_1) + x_2$$

Devient
$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \psi_1 \quad (\text{II. 44})$$

La nouvelle variable d'état z_2 ne serait pas utilisée dans la première étape, mais sa présence est nécessaire puisqu'on a besoin de z_2 pour lier le nouveau sous-système en z_1 au prochain sous-système ou sous-système en z_2 qui serait considéré dans l'étape suivante. En plus, les coordonnées de conception ont changé de $(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$.

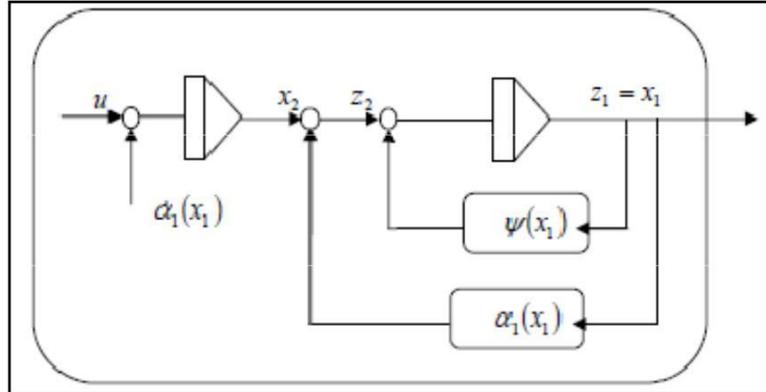


Figure II.9: Stabilisation du premier sous-système

Maintenant, l'attention est tournée vers la fonction stabilisante α_1 qui produira la contre réaction nécessaire pour le nouveau sous-système. Prenons la fonction stabilisante α_1 comme :

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 - \psi(x_1); \quad \alpha_1 = \alpha_1(x_1) \tag{II. 45}$$

Celle-ci donne :

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 \tag{II. 46}$$

La fonction de Lyapunov choisie pour le premier sous-système est :

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \tag{II. 47}$$

Alors :

$$\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 \tag{II. 48}$$

Où $k_1 > 0$, est le gain de la contre réaction. D'où le nouveau sous-système est stabilisé. Notons que α_1 a été choisie de manière à éliminer la non linéarité ψ et d'avoir $\dot{V}_1 > 0$, le terme de sera éliminé dans l'étape suivante. Maintenant, on passe au deuxième sous-système.

- **Etape2**

Les dynamiques du nouveau sous-système sont calculées en prenant la dérivée de l'équation(II.46) :

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = u - \dot{\alpha}_1 \quad (\text{II. 49})$$

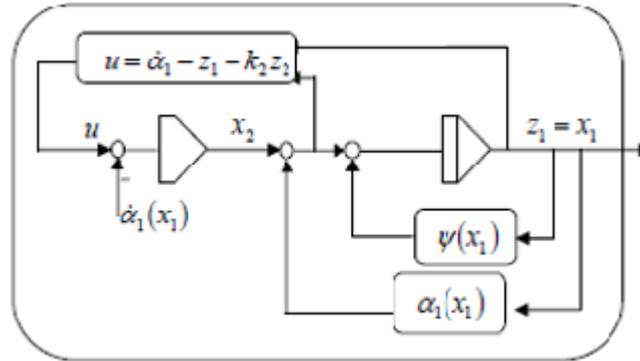


Figure II.10 : Stabilisation du deuxième sous-système

Prenons la fonction de Lyapunov du deuxième sous-système comme :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (\text{II. 50})$$

Alors :

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2(u - \dot{\alpha}_1 + z_1) \quad (\text{II. 51})$$

Puisque le système original est décrit par deux états seulement, l'entrée de commande apparaît dans la deuxième étape. D'où le choix de la commande

$$u = \dot{\alpha}_1 - z_1 - k_2 z_2 \quad (\text{II. 52})$$

Avec $k_2 > 0$ donne :

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 < 0; \forall z_1 \neq 0, \forall z_2 \neq 0 \quad (\text{II. 53})$$

Ce qui signifie que l'équilibre $z = 0$ est **GAS**.

En réalisant la loi de commande (II.52), il est important d'éviter les expressions contenant les dérivées des états. Pour cet exemple, on a seulement $\dot{\alpha}_1$ qui doit être évaluée. Il est important

d'observer que la dérivée par rapport au temps de α_1 sera implantée analytiquement sans différentielle ; c'est la première caractéristique du « backstepping ».

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} \dot{x}_1 - k_1 \dot{x}_1 = \left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} + k_1 \right) (f(x_1) + x_2) \quad (\text{II. 54})$$

D'où l'expression finale de la loi de commande est :

$$u = \left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} + k_1 \right) (f(x_1) + x_2) - x_1 - k_1(x_2 + f(x_1) + k_1 x_1) \quad (\text{II. 55})$$

La transformation des coordonnées via « backstepping » est donnée par la forme

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - f(x_1) - k_1 x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 56})$$

La transformation inverse est :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 - f(z_1) - k_1 z_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 57})$$

Le système en boucle fermée est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 58})$$

On remarque que la matrice d'état du système peut être décomposée en deux matrices : matrice diagonale et matrice antisymétrique.

II.4 Commande hybride mode glissant-backstepping

Parmi les avantages de la technique de backstepping, c'est qu'on peut l'associer à d'autres méthodes de l'automatique moderne dans l'objectif est d'améliorer les performances du système à contrôler.

La commande par mode de glissement est l'une des méthodes qui s'associe à la technique de backstepping avec une procédure très simple.

La technique de backstepping et du mode glissant sont deux méthodes qui exploitent la notion de fonction de Lyapunov. Nous allons utiliser ce point commun pour élaborer une

nouvelle commande associant les deux techniques. En effet les deux critères qui permettent aux dynamiques du système de converger vers la surface du glissement sont :

- Celui proposé par Utkin :

$$s(x)\dot{s}(x) < 0 \quad (\text{II. 60})$$

- Celui est défini par la fonction de Lyapunov :

$$\dot{v}(x) < 0 \quad (\text{II. 61})$$

En mode glissant cette condition est réalisée par :

$$\dot{s}(x) = -q_1 \text{sign}(s) - a_1(s) \quad (\text{II. 62})$$

Avec q_1 et a_1 réels positifs. Par conséquent la condition de stabilité de Lyapunov est réalisée Par la condition de convergence des modes glissants.

II.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter une étude théorique des lois de commande non linéaire robuste, on a introduit deux types de commandes dynamique la commande par mode glissant et celle du backstepping.

A la fin de ce chapitre nous avons vu la commande hybride mode glissant backstepping, ce type de commande est utilisé afin d'améliorer les performances des commandes non linéaires. L'étude de l'influence de ces commandes sur le robot manipulateur, sera l'objet du chapitre suivant. .

Chapitre III :

Application Des Commandes Non Linéaires Sur Un Robot Manipulateur A Deux Degrés De Liberté

III.1 Introduction

Le travail présenté dans ce chapitre est consacré aux commandes non linéaires des robots manipulateurs qui sont non linéaires fortement couplés à dynamique rapide, Sur le plan théorique des commandes non linéaires sont développées permettant de contrôler la position, la vitesse et l'accélération articulaire.

Ce chapitre aura pour objet l'application de ces différentes commandes citées précédemment sur le robot manipulateur. On introduit dans un premier temps la commande par mode glissant et en dernier lieu on présente la commande par Backstepping. On finit notre chapitre par la présentation des résultats obtenus pour chaque commande.

III.2 Application de la commande par mode glissant au robot manipulateur

Après avoir présenté de théorie de la commande par mode glissant, nous allons analyser l'application de cette commande au robot manipulateur considéré dans notre travail.

L'analyse du comportement en mode de glissement est effectuée en déterminant la commande équivalente et la loi de commutation associée à la surface de glissement ainsi que la vérification de la condition d'existence du mode de glissement

Etant donné le modèle dynamique du robot manipulateur peut être écrit sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = M^{-1}(\theta) \cdot \left(\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} - h(\theta, \dot{\theta}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} - G(\theta) \right) \quad (\text{III.1})$$

La loi de commande globale par mode glissant

la lois de commande par modes glissant appliquée au robot est :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{u}_n \quad (\text{III.2})$$

Avec :

$$\mathbf{u}_{eq} = \begin{pmatrix} u_{1eq} \\ u_{2eq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{pmatrix}$$

1) calcul de \mathbf{u}_n

$$\begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \text{sing}(s_1) \\ -\lambda_2 \text{sing}(s_2) \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Le degré relatif du système $r = 2$, donc la surface de glissement choisi dans notre travail est donnée par :

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e_1 + \dot{e}_1 \\ k_2 e_2 + \dot{e}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Avec : $e_1 = \theta_{1c} - \theta_1, e_2 = \theta_{2c} - \theta_2, \dot{e}_1 = \dot{\theta}_{1c} - \dot{\theta}_1, \dot{e}_2 = \dot{\theta}_{2c} - \dot{\theta}_2$

e_1 : Erreur de La position angulaire de référence du 1^{er} segment

e_2 : Erreur de La position angulaire de référence du 2^{er} segment

\dot{e}_1 : Erreur La vitesse angulaire de référence du 1^{er} segment

\dot{e}_2 : Erreur La vitesse angulaire de référence du 2^{er} segment

θ_{1c} : La position angulaire de référence du 1^{er} segment

θ_{2c} : La position angulaire de référence du 2^{eme} segment

$\dot{\theta}_{1c}$: La vitesse angulaire de référence du 1^{er} segment

$\dot{\theta}_{2c}$: La vitesse angulaire de référence du 2^{eme} segment

k_1, k_2 : Paramètre de réglage de la commande discontinue

On trouve donc :

$$\begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \text{sing}(k_1 e_1 + \dot{e}_1) \\ -\lambda_2 \text{sing}(k_2 e_2 + \dot{e}_2) \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

2) calcul de u_{eq}

Pour calculer u_{eq} , il faut que $\dot{s} = 0$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \dot{e}_1 + \ddot{e}_1 \\ k_2 \dot{e}_2 + \ddot{e}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$\begin{pmatrix} \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{1c} - \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_{2c} - \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.7})$$

On utilise les équations (III.1), (III.6) et (III.7) pour déterminer la commande équivalente :

$$\begin{pmatrix} u_{1eq} \\ u_{2eq} \end{pmatrix} = M(\theta) \begin{pmatrix} k_1 \dot{e}_1 + \ddot{\theta}_{1c} \\ k_2 \dot{e}_2 + \ddot{\theta}_{2c} \end{pmatrix} + h(\theta, \dot{\theta}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + G(\theta) \quad (III.8)$$

Suivant l'équation (II.40), on détermine la commande globale par mode glissant :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = M(\theta) \begin{pmatrix} k_1 \dot{e}_1 + \ddot{\theta}_{1c} \\ k_2 \dot{e}_2 + \ddot{\theta}_{2c} \end{pmatrix} + h(\theta, \dot{\theta}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + G(\theta) + \begin{pmatrix} -\lambda_1 \text{sing}(k_1 e_1 + \dot{e}_1) \\ -\lambda_2 \text{sing}(k_2 e_2 + \dot{e}_2) \end{pmatrix} \quad (III.9)$$

III.3 Application de la commande par backstepping

Dans cette partie on présente l'application de la commande par backstepping pour le robot manipulateur à 2 DDL.

- **Loi de commande backstepping pour le 1^{er} segment (1^{er} sous-système)**

Représentation d'état du 1^{er} segment

Soit $x = [x_1 \ x_2] = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1]$ vecteur d'état du 1^{er} sous système, ce qui donne la représentation d'état correspondante suivante :

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 = x_2 \quad (III.10)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 = M^{-1}(\tau - h\dot{\theta}_1 - G) \quad (III.11)$$

Etape 1 :

Soit x_{1d} la trajectoire de référence de x_1 et l'erreur de position de θ_1 est donc :

$$e_1 = x_{1d} - x_1 \quad (III.12)$$

Et sa dérivée est :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 \quad (III.13)$$

On a $\dot{x}_1 = x_2$, l'équation (III.13) devient :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2 \quad (III.14)$$

La fonction de Lyapunov candidate est :

$$v_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (III.15)$$

Il est clair que la fonction de Lyapunov donné par (III.15) est définie positive et il faut garantir que sa dérivée soit négative pour que le 1^{er} sous système soit stable. On a :

$$\dot{v}_1 = e_1 \dot{e}_1 \quad (III.16)$$

En substituant l'équation (III.14) dans (III.16), on trouve :

$$\dot{v}_1 = e_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_2) \quad (\text{III.17})$$

La fonction de Lyapunov doit prendre la valeur suivante pour qu'elle soit négative :

$$\dot{v}_1 = -k_1 e_1^2 \quad (\text{III.18})$$

Avec k_1 est une constante définie positive.

En utilisant (III.17) et (III.18) on obtient

$$-k_1 e_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_2 \quad (\text{III.19})$$

On trouve alors :

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_{1d} + k_1 e_1 \quad (\text{III.20})$$

L'équation (III.20) représente une commande virtuelle qui va être utilisée comme une référence de trajectoire dans la 2^{ème} étape, Soit $\dot{x}_2 = \dot{x}_{2d}$

Etape 2 :

Etant donné l'erreur de poursuite de x_2 :

$$e_2 = x_{2d} - x_2 \quad (\text{III.21})$$

En utilisant les équations développées dans l'étape 1 pour déterminer les relations suivantes :

$$e_2 = \dot{x}_{1d} + k_1 e_1 - \dot{x}_2 \quad (\text{III.22})$$

$$e_2 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 + k_1 e_1 \quad (\text{III.23})$$

$$\dot{e}_2 = \dot{e}_1 + k_1 e_1 \quad (\text{III.24})$$

$$\dot{e}_1 = e_2 - k_1 e_1 \quad (\text{III.25})$$

$$\dot{e}_2 = k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \ddot{x}_2 \quad (\text{III.26})$$

La fonction de Lyapunov candidate est augmentée par un terme, ce qui donne :

$$v_2 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (\text{III.27})$$

Et sa dérivée \dot{v}_2 égale à :

$$\dot{v}_2 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \quad (\text{III.28})$$

Le développement de cette équation donne :

$$\dot{v}_2 = e_1(e_2 - k_1 e_1) + e_2(k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \ddot{x}_2) \quad (\text{III.29})$$

$$\dot{v}_2 = -k_1 e_1^2 + e_2(k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + e_1) \quad (\text{III.30})$$

Pour que le 1^{er} sous système soit stable il faut que $\dot{v}_2 < 0$. Pour cela il faut que $\dot{v}_2 = (-k_2 e_2)$ avec k_2 est une constante définit positive, ce qui donne :

$$\dot{v}_2 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 \quad (\text{III.31})$$

L'égalité entre (III.30) et (III.31) donne :

$$\dot{x}_2 = k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + k_2 e_2 \quad (\text{III.32})$$

L'égalité entre (III.11) et (III.32) donne le développement suivant qui va aboutir à la détermination de la commande (couple) τ_1 du 1^{er} segment :

$$M^{-1}(\tau_1 - h\dot{\theta}_1 - G) = k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + e_1 + k_2 e_2 \quad (\text{III.33})$$

$$\tau_1 = h\dot{\theta}_1 + G + M(k_{p1} e_1 + k_{D1} \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d}) \quad (\text{III.34})$$

Avec :

$$k_{D1} = (k_1 + k_2) \quad (\text{III.35})$$

$$k_{p1} = (1 + k_1 k_2) \quad (\text{III.36})$$

▪ **Loi de commande backstepping pour le 2^{ème} segment (2^{ème} sous-système)**

Représentation d'état du 2^{ème} segment

Soit $x = [x_3 \ x_4] = [\theta_2 \ \dot{\theta}_2]$ vecteur d'état du 2^{er} sous système, ce qui donne la représentation d'état correspondante suivante :

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_2 = x_4 \quad (\text{III.37})$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2 = M^{-1}(\tau - h\dot{\theta}_2 - G) \quad (\text{III.38})$$

La détermination de la loi de commande de ce 2^{ème} segment a été développée en suivant les

Mêmes étapes lors de la détermination de la commande du 1^{er} segment, ce qui aboutit à :

$$\tau_2 = h\dot{\theta}_2 + G + M(k_{p2} e_3 + k_{D2} \dot{e}_3 + \ddot{x}_{3d}) \quad (\text{III.39})$$

Avec

$$k_{D2} = (k_3 + k_4) \quad (\text{III.40})$$

$$k_{p2} = (1 + k_3 k_4) \quad (\text{III.41})$$

Nous obtenons enfin la loi de commande backstepping du robot manipulateur donnée par :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{P1}e_1 + k_{D1}\dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} \\ k_{P2}e_3 + k_{D2}\dot{e}_3 + \ddot{x}_{3d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

III.3.1 Backstepping avec l'action intégrale

▪ Loi de commande pour le 1^{er} segment

Le développement de la loi de commande backstepping avec action intégral On suit les mêmes étapes de la commande backstepping sans intégral mais on introduit l'action intégral au niveau de la commande virtuelle de la 1^{ere} étape.

Alors x_2 devient :

$$e_1 = \theta_{1d} - \theta_1 + \lambda_1 \int (\theta_{1d} - \theta_1) \quad (\text{III.43})$$

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 + \lambda_1(x_{1d} - x_1) \quad (\text{III.44})$$

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2 + \lambda_1(x_{1d} - x_1) \quad (\text{III.45})$$

La fonction de Lyapunov :

$$v_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (\text{III.46})$$

$$\dot{v}_1 = e_1\dot{e}_1 \quad (\text{III.47})$$

$$\dot{v}_1 = e_1(\dot{x}_{1d} - x_2 + \lambda_1(x_{1d} - x_1)) \quad (\text{III.48})$$

$$\dot{x}_{1d} - x_2 + \lambda_1(x_{1d} - x_1) = -k_1e_1 \quad (\text{III.49})$$

$$x_2 = k_1e_1 + \dot{x}_{1d} + \lambda_1(x_{1d} - x_1) \quad (\text{III.50})$$

Alors :

$$e_2 = x_{2d} - x_2 \quad (\text{III.51})$$

$$e_2 = k_1e_1 + \dot{x}_{1d} - x_2 + \lambda_1(x_{1d} - x_1) \quad (\text{III.52})$$

$$e_2 = k_1e_1 + \dot{e}_1 \quad (\text{III.53})$$

$$\dot{e}_1 = e_2 - k_1e_1 \quad (\text{III.54})$$

$$\dot{e}_2 = k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + \lambda_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) \quad (\text{III.55})$$

La fonction de Lyapunov :

$$v_2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (\text{III.56})$$

$$\dot{v}_2 = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 \quad (\text{III.57})$$

$$\dot{v}_2 = e_1(e_2 - k_1e_1) + e_2(k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + \lambda_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1)) \quad (\text{III.58})$$

$$\dot{v}_2 = -k_1e_1^2 + e_2[(e_1 + k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + \lambda_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1))] \quad (\text{III.59})$$

Le terme entre crocher doit être égale a $(-k_2e_2)$

$$(e_1 + k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} - \dot{x}_2 + \lambda_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1)) = -k_2e_2 \quad (\text{III.60})$$

$$\dot{x}_2 = k_2e_2 + e_1 + k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + \lambda_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) \quad (\text{III.61})$$

$$\dot{x}_2 = k_2(k_1e_1 + \dot{e}_1) + e_1 + k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{1d} + \lambda_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) \quad (\text{III.62})$$

$$\dot{x}_2 = (k_1k_2 + 1)e_1 + (k_1 + k_2)\dot{e}_1 + \lambda_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) + \ddot{x}_{1d} \quad (\text{III.63})$$

D'après l'équation (III.43) et (III.44) on trouve :

$$(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) = \dot{e}_1 - \lambda_1(x_{1d} - x_1) \quad (\text{III.64})$$

$$(x_{1d} - x_1) = e_1 - \lambda_1 \int (x_{1d} - x_1) \quad (\text{III.65})$$

En remplaçant (III.64) dans (III.65) on trouve :

$$(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) = \dot{e}_1 - \lambda_1(e_1 - \lambda_1 \int (x_{1d} - x_1)) \quad (\text{III.66})$$

En remplaçant (III.66) dans (III.63) on trouve :

$$\dot{x}_2 = (k_1k_2 + 1)e_1 + (k_1 + k_2)\dot{e}_1 + \lambda_1(\dot{e}_1 - \lambda_1(e_1 - \lambda_1 \int (x_{1d} - x_1))) + \ddot{x}_{1d}$$

$$\dot{x}_2 = (1 + k_1k_2 - \lambda_1^2)e_1 + (k_1 + k_2 + \lambda_1)\dot{e}_1 + \lambda_1^3 \int (x_{1d} - x_1) + \ddot{x}_{1d}$$

D'après l'équation (III.12) on trouve

$$\tau_1 = h\dot{\theta}_1 + G + M((1 + k_1k_2 - \lambda_1^2)e_1 + (k_1 + k_2 + \lambda_1)\dot{e}_1 + \lambda_1^3 \int (x_{1d} - x_1) + \ddot{x}_{1d})$$

$$\tau_1 = h\dot{\theta}_1 + G + M(k_{p1}e_1 + k_{d1}\dot{e}_1 + k_{I1} \int (x_{1d} - x_1) + \ddot{x}_{1d}) \quad (\text{III.67})$$

Avec :

$$k_{p1} = (1 + k_1k_2 - \lambda_1^2), k_{d1} = (k_1 + k_2 + \lambda_1), k_{I1} = \lambda_1^3$$

- **Loi de commande pour le 2^{ème} segment**

La détermination de la loi de commande de ce 2^{ème} segment a été développée en suivant les mêmes étapes lors de la détermination de la commande du 1^{er} segment, ce qui aboutit a :

$$\tau_2 = h\dot{\theta}_2 + G + M((1 + k_3k_4 - \lambda_2^2)e_3 + (k_3 + k_4 + \lambda_2)\dot{e}_3 + \lambda_2^3 \int (x_{3d} - x_3) + \ddot{x}_{3d})$$

$$\tau_2 = h\dot{\theta}_2 + G + M(k_{P2}e_3 + k_{D2}\dot{e}_3 + k_{I2} \int (x_{3d} - x_3) + \ddot{x}_{3d}) \quad (\text{III.68})$$

Avec :

$$k_{P2} = (1 + k_3k_4 - \lambda_2^2), k_{D2} = (k_3 + k_4 + \lambda_2), k_{I2} = \lambda_2^3$$

III.4 Application de mode glissant-backstepping pour un robot manipulateur

La commande hybride mode glissant-backstepping est déterminée suivant les deux suppositions suivantes :

$$e_i = \begin{cases} x_{ic} - x_i & / i \in \{1,3,5,7,9,11\} \\ s_i = \dot{x}_{(i-1)c} - x_i + k_{(i-1)}e_{(i-1)} & / i \in \{2,4,6,8,10,12\} \end{cases} \quad (\text{III.69})$$

Avec $k_{(i-1)} > 0$

$$v_i = \begin{cases} \frac{1}{2}e_i^2 & / i \in \{1,3,5,7,9,11\} \\ v_{(i-1)} + \frac{1}{2}s_i^2 & / i \in \{2,4,6,8,10,12\} \end{cases} \quad (\text{III.71})$$

$$v_{(i-1)} + \frac{1}{2}s_i^2 / i \in \{2,4,6,8,10,12\} \quad (\text{III.72})$$

- **La loi de commande mode glissant-backstepping du 1^{er} segment**

Les étapes à suivre pour calculer cette commande hybride sont les mêmes que celles du backstepping en prenant on considération les équations (III.69, 70, 71,72)

$$x_1 = \theta_1$$

$$x_2 = \dot{\theta}_1 = \dot{x}_1$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 = M^{-1}(\tau_1 - h_1x_2 - g_1) \quad (\text{III.73})$$

Etape1

Soit e_1 l'erreur de position x_1 :

$$e_1 = x_{1c} - x_1 \quad (\text{III.74})$$

Et sa dérivée est :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1c} - \dot{x}_1 \quad (\text{III.75})$$

Ce qui donne :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_{1c} - x_2 \quad (\text{III.76})$$

La fonction de Lyapunov candidate choisi est donnée par :

$$v_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (\text{III.77})$$

On remarque que cette fonction est définie positive, et il faut que sa dérivée soit négatif pour que le 1^{er} sous système soit stable. Pour cela on pose donc :

$$\dot{v}_1 = -k_1 e_1^2 \quad (\text{III.78})$$

Avec k_1 est une constante positive

$$\text{On a :} \quad \dot{v}_1 = e_1 \dot{e}_1 \quad (\text{III.79})$$

Les équations (III.77) et (III.78) donnent

$$\dot{v}_1 = e_1 (\dot{x}_{1c} - x_2) \quad (\text{III.80})$$

D'après l'équation (III.77) et(III.79) on obtient :

$$-k_1 e_1 = \dot{x}_{1c} - x_2 \quad (\text{III.81})$$

Ce qui donne :

$$x_2 = k_1 e_1 + \dot{x}_{1c} \quad (\text{III.82})$$

Avec :

$$x_{2c} = x_{2c}$$

Ce qui donne :

$$x_{2c} = k_1 e_1 + \dot{x}_{1c} \quad (\text{III.83})$$

Etape2

Soit e_2 l'erreur de vitesse x_2 :

$$e_2 = x_{2c} - x_2 \quad (\text{III.84})$$

Remplaçant (III.82) dans (III.83) on aboutit à :

$$e_2 = k_1 e_1 + \dot{e}_1 \quad (\text{III.85})$$

On prend :

$$s_2 = e_2 = k_1 e_1 + \dot{e}_1$$

Et sa dérivée donne :

$$\dot{s}_2 = k_1 \dot{e}_1 + \ddot{e}_1 \quad (\text{III.86})$$

La fonction de Lyapunov est choisie suivant l'équation (III.72)

$$v_2 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} s_2^2 \quad (\text{III.87})$$

$$\dot{v}_2 = e_1 \dot{e}_1 + s_2 \dot{s}_2 \quad (\text{III.88})$$

Pour que le system soit stable il faut que $\dot{v}_2 < 0$, on a donc :

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_1 + s_2 \dot{s}_2 \quad (\text{III.89})$$

On a prouvé dans la 1^{er}étape que $\dot{v}_1 < 0$ et pour assurer que $s_2 \dot{s}_2 < 0$ il faut que

$$\dot{s}_2 = -\lambda_1 \text{sing}(s_2) \quad (\text{III.90})$$

Avec λ_1 est un constant positive.

L'égalité entre (III.86) et (III.89) donne :

$$k_1 \dot{e}_1 + (\ddot{x}_{1c} - \dot{x}_2) = -\lambda_1 \text{sing}(s_2) \quad (\text{III.91})$$

L'équation (III.105) dans (III.122) on obtient :

$$\tau_1 = M \left(k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1c} - (-\lambda_1 \text{sing}(s_2)) \right) + h_1 x_2 + g_1 \quad (\text{III.92})$$

- **La loi de commande mode glissant-backstepping du 2eme segment**

$$x_3 = \Theta_2$$

$$x_4 = \dot{\Theta}_2 = \dot{x}_3$$

$$\dot{x}_3 = M^{-1}(\tau_2 - h_2 x_4 - g_2) \quad (\text{III.93})$$

En appliquant les mêmes étapes suivies pour le 1^{er} segment pour déterminer la commande du 2eme segment. On trouve alors :

$$\tau_2 = M \left(k_3 \dot{e}_3 + \ddot{x}_{3c} - (-\lambda_2 \text{sing}(s_4)) \right) + h_2 x_4 + g_2 \quad (\text{III.94})$$

Nous trouvons enfin la commande hybride suivante appliquée au robot :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{1c} - (-\lambda_1 \text{sing}(s_2)) \\ k_3 \dot{e}_3 + \ddot{x}_{3c} - (-\lambda_2 \text{sing}(s_4)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.95})$$

III.4.1 Application de mode glissant-backstepping avec intégral

- **La loi de commande mode glissant-backstepping du 1^{er} segment**

La commande hybride avec l'action intégrale a été développée de la même manière que celle déterminée précédemment mais en ajoutant l'intégral dans le terme de la surface comme suit (étape 2) :

$$e_2 = s_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1r} - \lambda_1 e_1 + \alpha_1 x_1 \quad (\text{III.96})$$

Avec :

$$x_1 = \int e_1 \quad (\text{III.97})$$

Ce qui about a la relation suivante :

$$\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_{1r} + \lambda_1 \dot{e}_1 - q_1 \text{sat}(s) - a_1 s_1 - \alpha_1 e_1 \quad (\text{III.98})$$

- **La loi de commande mode glissant-backstepping du 2eme segment**

On applique les mêmes étapes pour déterminer la commande de ce segment. On trouve alors :

$$\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_{2r} + \lambda_2 \dot{e}_2 - q_2 \text{sat}(s_2) - a_2 s_2 - \alpha_2 e_2 \quad (\text{III.99})$$

On trouve finalement la commande suivante :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{1r} + \lambda_1 \dot{e}_1 - q_1 \text{sat}(s) - a_1 s_1 - \alpha_1 e_1 \\ \ddot{\theta}_{2r} + \lambda_2 \dot{e}_2 - q_2 \text{sat}(s_2) - a_2 s_2 - \alpha_2 e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.100})$$

III.5 Résultats de simulation

Pour les paramètres de système nous avons pris[42] :

$$l_1 = 0.5 \text{ m}; \quad l_2 = 0.5 \text{ m}; \quad m_1 = 5 \text{ kg}; \quad m_2 = 5 \text{ kg}; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

- **Fonctionnement d'un robot manipulateur lors de la variation de position et de la vitesse**

Pour la variation de la position nous avons pris les trajectoires suivantes :

$$\theta_{1d}(t) = \text{SIN } t \quad 0 \leq T \leq 10$$

$$\theta_{2d}(t) = \text{SIN } t \quad 0 \leq T \leq 10$$

III.5.1 Comparaison des lois de commandes

Dans un but comparatif, nous avons simulé les six commandes qui représentent la majeure partie des lois de commande non-linéaire dynamique et robuste. Ces commandes sont testées sur le même modèle du robot manipulateur en présence de perturbations. La procédure de comparaison consiste à comparer les performances de ces lois de commandes. la considération de ces performances, se résume dans les trois cas suivants :

1. La poursuite de trajectoire de position et de vitesse désirées.

2. La réaction des commandes vis-à-vis d'une perturbation extérieure, équivaut à un choc au niveau de chaque articulation, c'est le cas de la régulation.

Nous avons simulé ce choc par une impulsion, intervenante à l'instant 1 seconde et de durée égale à 150ms, et d'amplitude égale à 4.5 kg

Nous supposons qu'au moment de choc, le robot subit un changement de masse de la charge ou plus précisément un changement d'inertie de 90 % de l'inertie de I_2 . C'est le cas de la robustesse.

3. Le dernier cas est la sensibilité des commandes vis-à-vis du bruit de mesure de position. Le bruit introduit est aditif, de nature aléatoire d'amplitude variant de -0.005 à +0.005 (rad). Pour valoriser la performance de chaque loi de commande, nous avons défini deux critères de comparaison numériques cr_p et cr_v définis par :

- Critère quadratique sur l'erreur de position dans l'espace des coordonnées articulaires, donné par :

$$cr_p = \sum_{k=0}^n (e_{1k}^2 + e_{2k}^2)$$

Avec n : est un nombre entier correspondant au temps total de simulation ($t_f = 10s$), tel que

$$t_f = nT_e$$

T_e : est la période d'échantillonnage avec laquelle l'ordinateur travail est affiche les résultats de simulation.

- Critère quadratique sur l'erreur de vitesse dans l'espace des coordonnées articulaires donné par :

$$cr_v = \sum_{k=0}^n (\dot{e}_{1k}^2 + \dot{e}_{2k}^2)$$

A travers ces critères, nous avons pu établir le tableau (III.1) pour valoriser la comparaison des lois de commandes.

Les lois de commandes	Poursuite de trajectoire		robustesse		Sensibilité au bruit		Sensibilité au bruit+ robustesse	
	cr_p	cr_v	cr_p	cr_v	cr_p	cr_v	cr_p	cr_v
Mode Glissant	219.087	5.6567 10^4	220.1218	5.6562 10^4	743.190	1.2489 10^5	747.3325	1.8653 10^5
Backstepping avec action intégrale	116.5683	1.2644 10^5	116.5624	1.2674 10^5	797.7061	9.7893 10^5	792.7413	9.6620 10^5
Hybride MOD+BACK	183.0736	5.4921 10^4	183.0794	5.4922 10^4	948.78	2.7759 10^5	948.9574	2.7687 10^5

Tableau III.1 Tableau de comparaison des lois de commandes simulée

III.5.2 Synthèse des résultats de simulation

III.5.2.1 Poursuite de trajectoire

A travers les figures représentant les poursuites de position et de vitesse des six lois de commande, nous constatons que les trajectoires mesurées suivent celles de référence. En effet les positions angulaires sont dans leurs domaines admissibles. En se basant sur le tableau (III.1), ainsi les figures représentent respectivement zoom des poursuites de vitesse au régime transitoire et au moment d'introduction des perturbations dans l'intervalle [3; 3.15s] , nous pouvons observer l'apparition d'un léger dépassement au régime transitoire qui est relativement faible dans le cas de la commande backstepping, la commande hybride, et la commande mode glissant, on peut dire que ces commandes donnent la meilleure réponse en poursuite de position et de vitesse, voire le tableau (III.2) et (III.3). On peut conclure que la commande backstepping et la commande hybride donnent des très bons résultats en poursuite de position et de vitesse par rapport à l'autre commande.

III.5.2.2 Régulation et robustesse

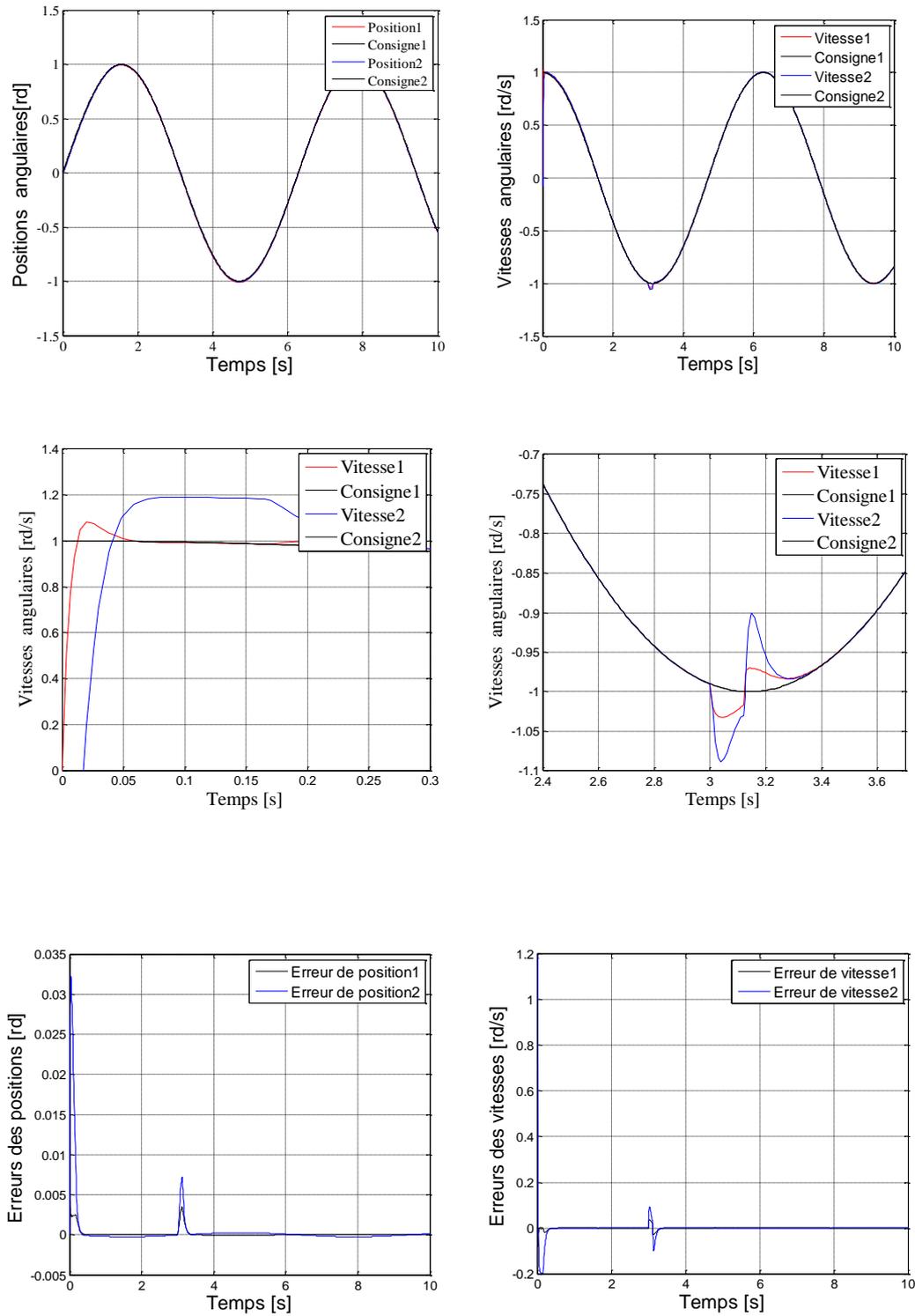
Afin de mettre en évidence la robustesse des lois de commandes proposées, nous avons les courbes de poursuite de position, la variation de la charge appliqués n'ont pratiquement pas d'effet sur la poursuite de position, en observant les erreurs de poursuite $(\theta_d - \theta)$ et $(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$ nous percevons le choc appliqué qui apparait nettement sur les figures erreurs de poursuite de position et de vitesse de six commandes dans un intervalle de temps [3 ; 3.15s] , D'autre part on se voit clairement le rejet rapide vis-à-vis les perturbations par les commandes backstepping, l'hybride ce rejet rapide de perturbations assure la stabilité en régime permanent. A partir ces résultat et en se référant sur les résultats du tableau (III.1), nous pouvons dire que chaque commande a des avantages et des inconvénients. Et nous pouvons conclure que la commande backstepping et la plus performante et prouvent son robustesse vis-à-vis la variation de la charge et le rejet de perturbation, voire le tableau (III.2).

III.5.2.3 Sensibilité au bruit de mesure

Le bruit de mesure que nous avons introduit au niveau des positions angulaires est à 0.5%, mais celui qui a été ajouté aux vitesses angulaires prend des valeurs très importantes relativement aux bruits réels, car la vitesse est un facteur important pour les robots. Cela afin de mettre en évidence l'effet du bruit sur les lois de commande étudiées ainsi que sur le comportement de la dynamique du robot traduit par sa position et sa vitesse vis à vis de la référence. Nous constatons d'après les figures que les positions et les vitesses mesurées tendent asymptotiquement vers celles de références. Cela peut être remarqué aussi à partir des courbes des erreurs de poursuite.

On analyse les figures correspondantes à la commande hybride et mode glissant on trouve que le bruit de mesure n'a pas une grande influence, c'est -à-dire ils sont moins sensibles aux bruits de mesures.

Suivant les valeurs du critère de valorisation choisi, nous pouvons conclure que la commande hybride, la commande backstepping et la commande mode glissant ont donné des meilleures performances.



Figure(III.1) Courbes résultantes de la commande Mode Glissant avec perturbations. Positions angulaires 1,2. Vitesses angulaires 1,2. Zoom de Vitesse1,2. Erreurs de positions1,2 et de vitesses 1,2.

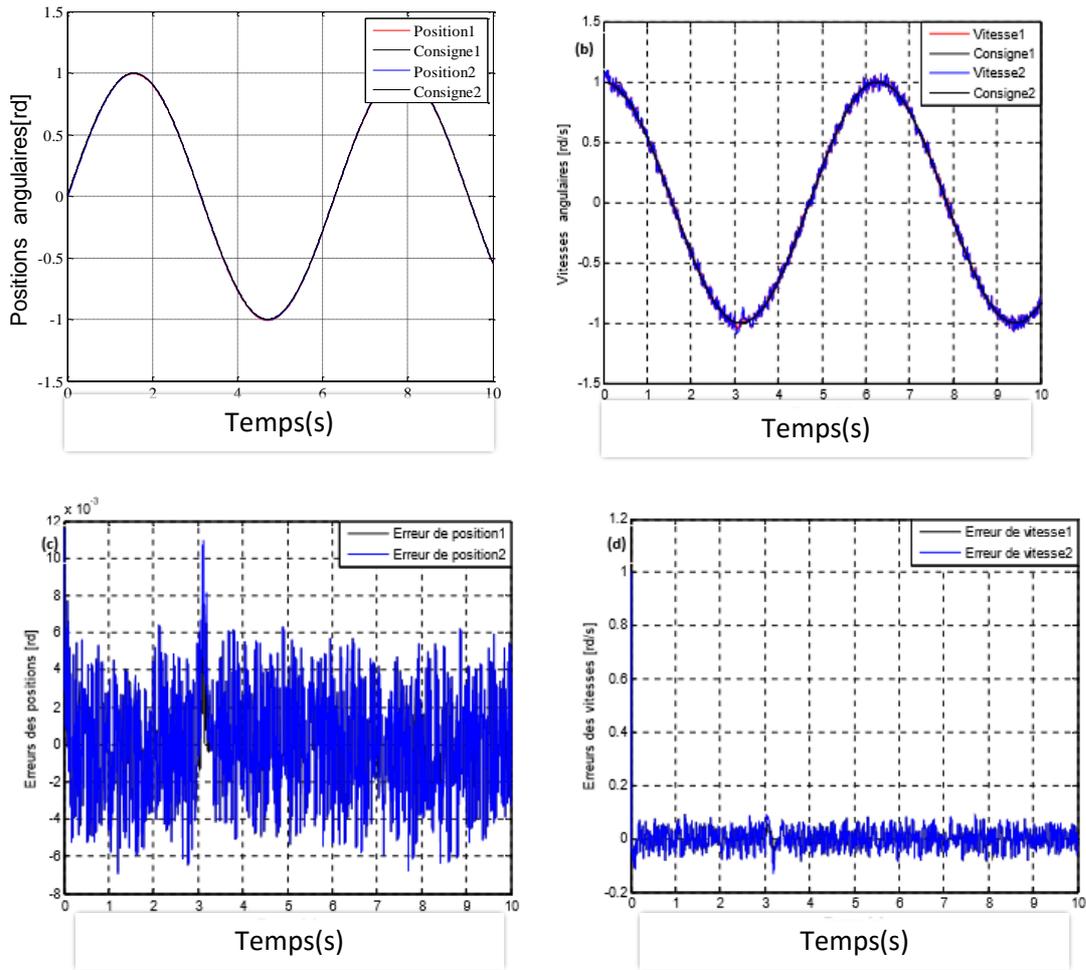
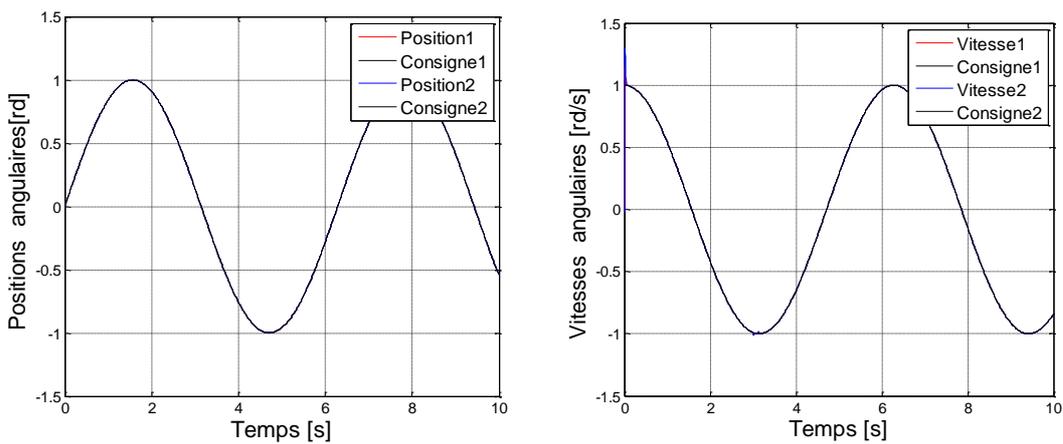


Figure (III.2) Courbes résultantes de la commande Mode Glissant avec bruit de mesure. Positions angulaires 1,2. Vitesses angulaires 1,2. Erreurs de positions1,2 et de vitesses 1,2.



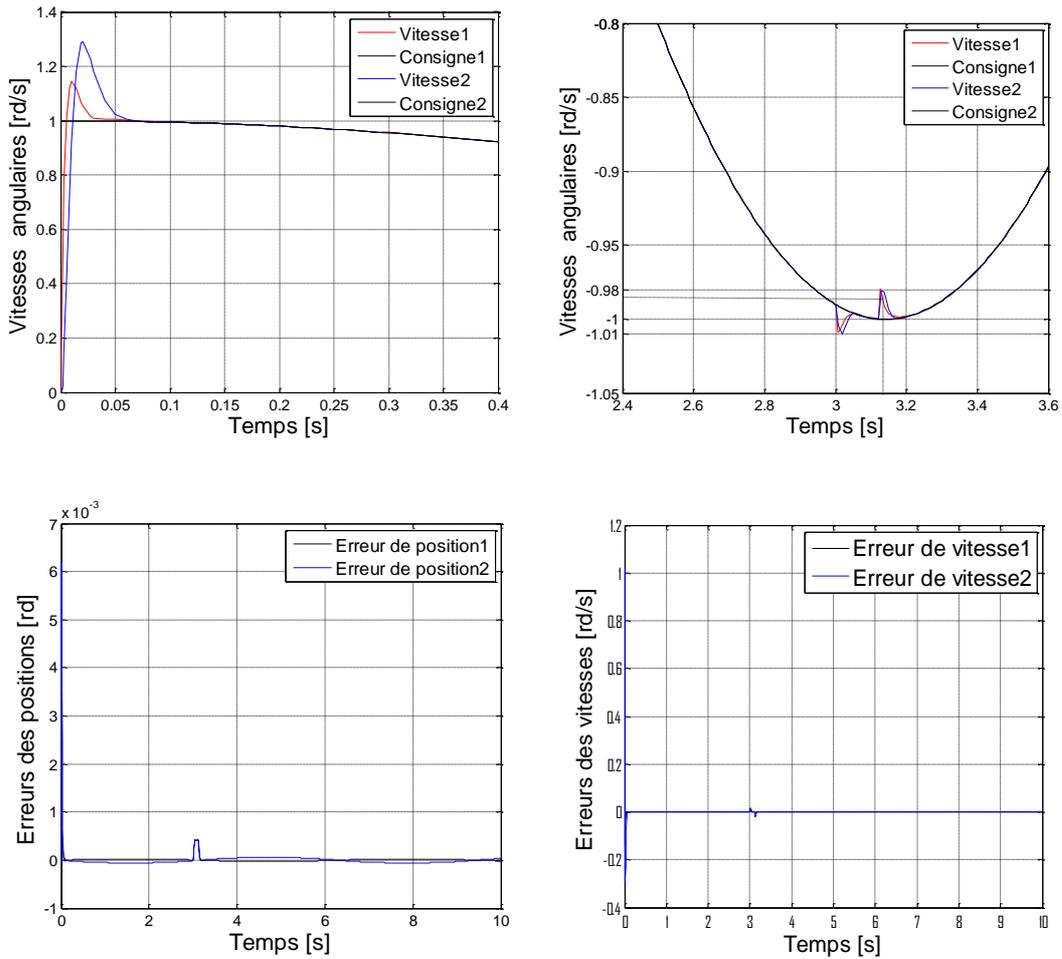
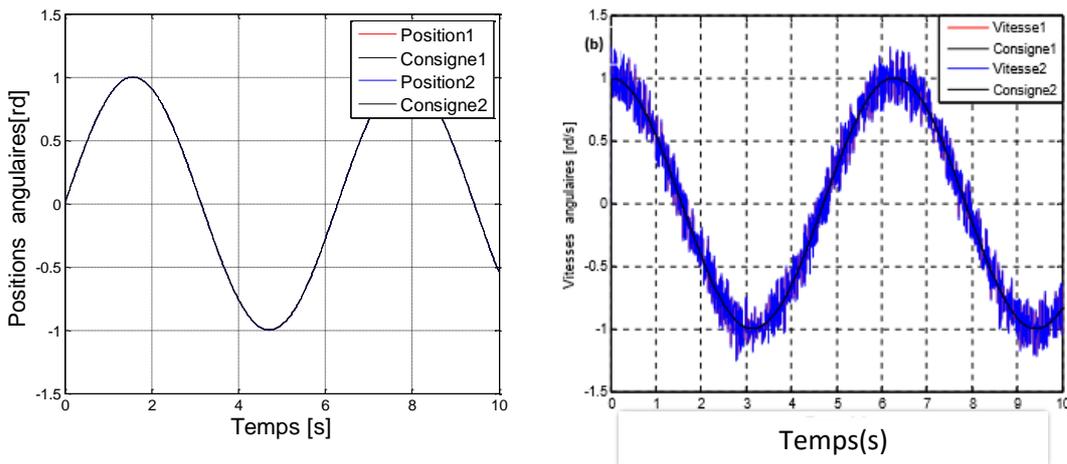


Figure (III.3) Courbes résultantes de la commande backstepping avec perturbations. Positions angulaires 1,2. Vitesses angulaires 1,2. Zoom de Vitesse1,2. Erreurs de positions1,2 et de vitesses 1,2



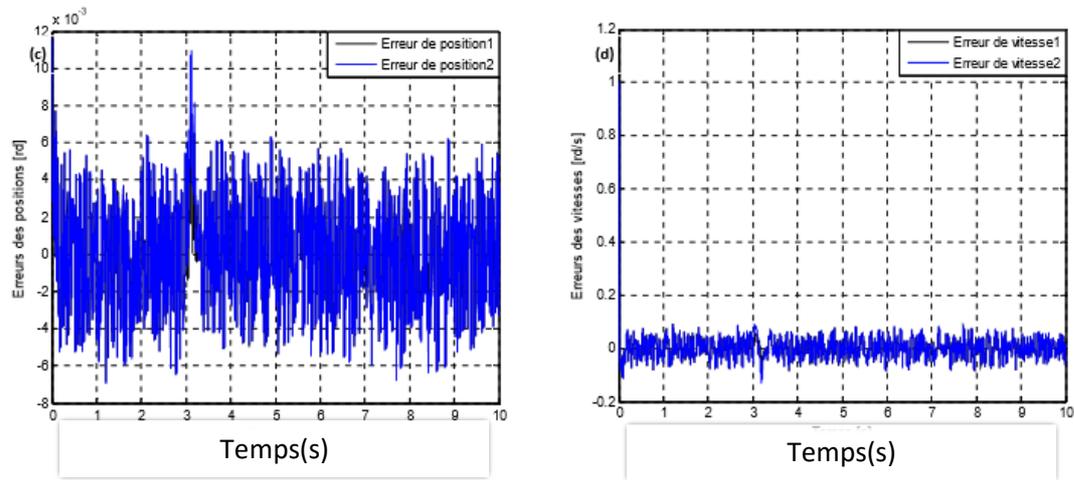
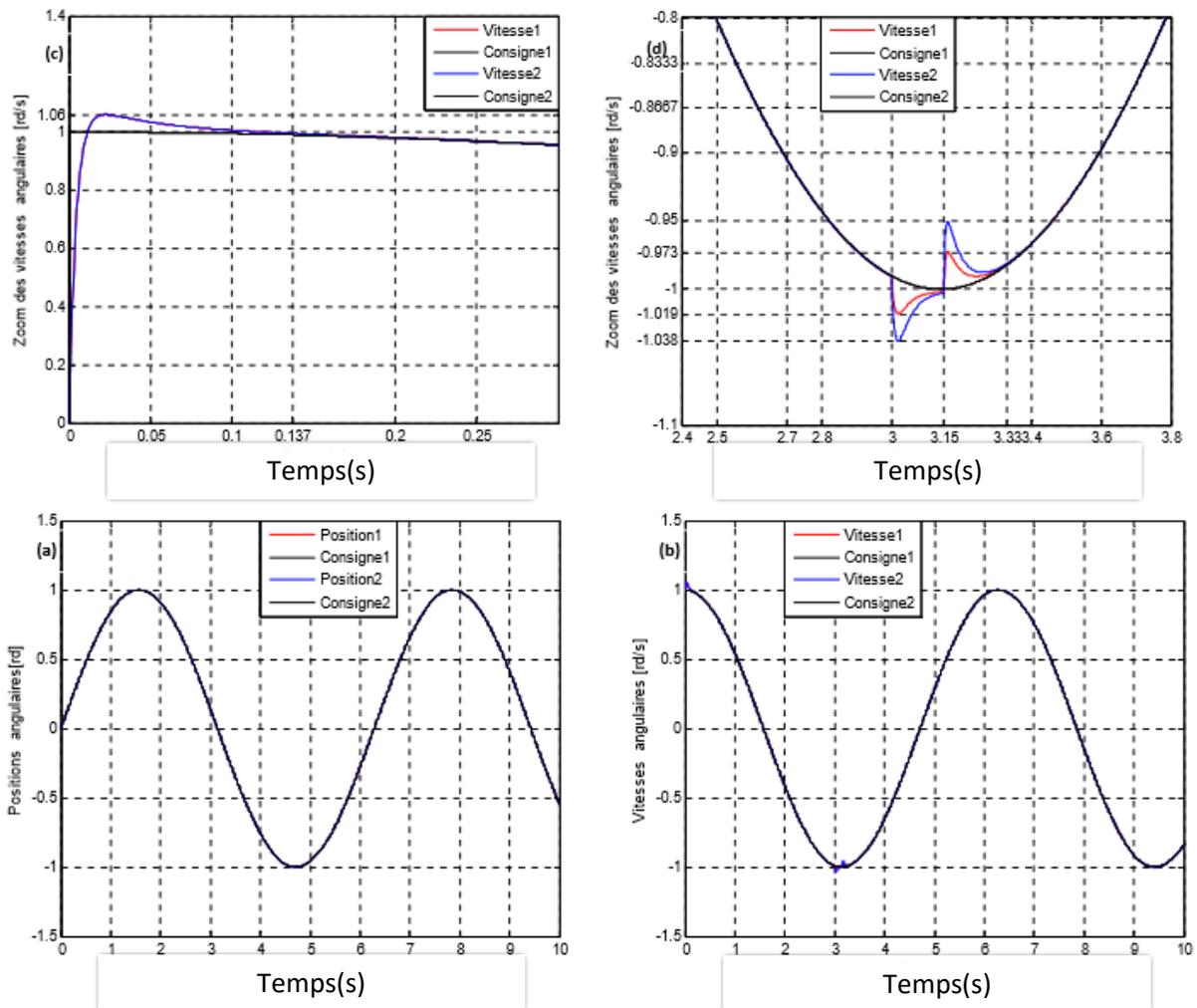
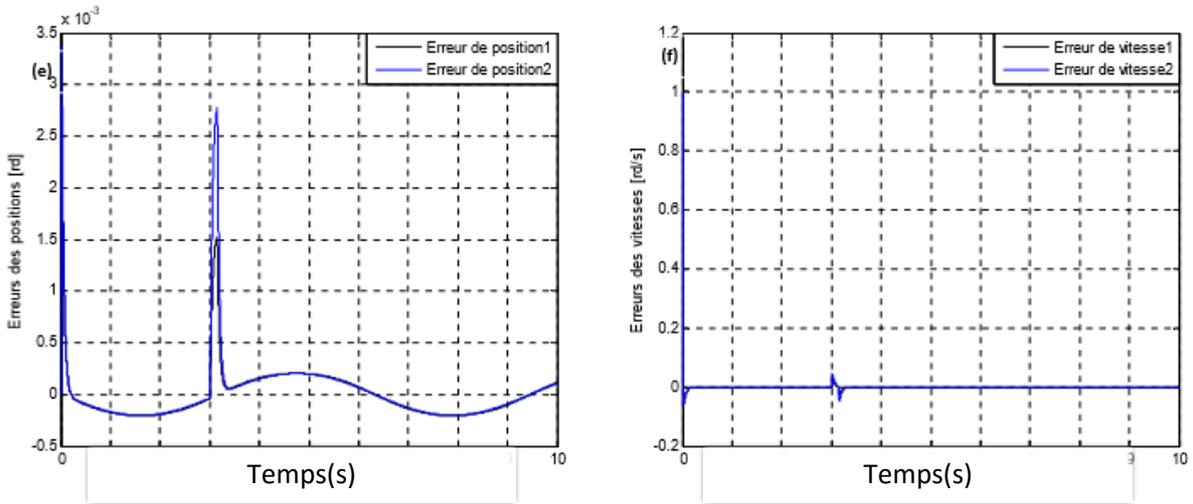


Figure (III.4) Courbes résultantes de la commande backstepping avec bruit de mesure. Positions angulaires 1,2. Vitesses angulaires 1,2. Erreurs de positions1,2 et de vitesses 1,2.





Figure(III.5) Courbes résultantes de la commande Hybride avec perturbations. Positions angulaires 1,2. Vitesses angulaires 1,2. , Zoom de Vitesse1,2. ,Erreurs de positions1,2 et de vitesses 1,2.

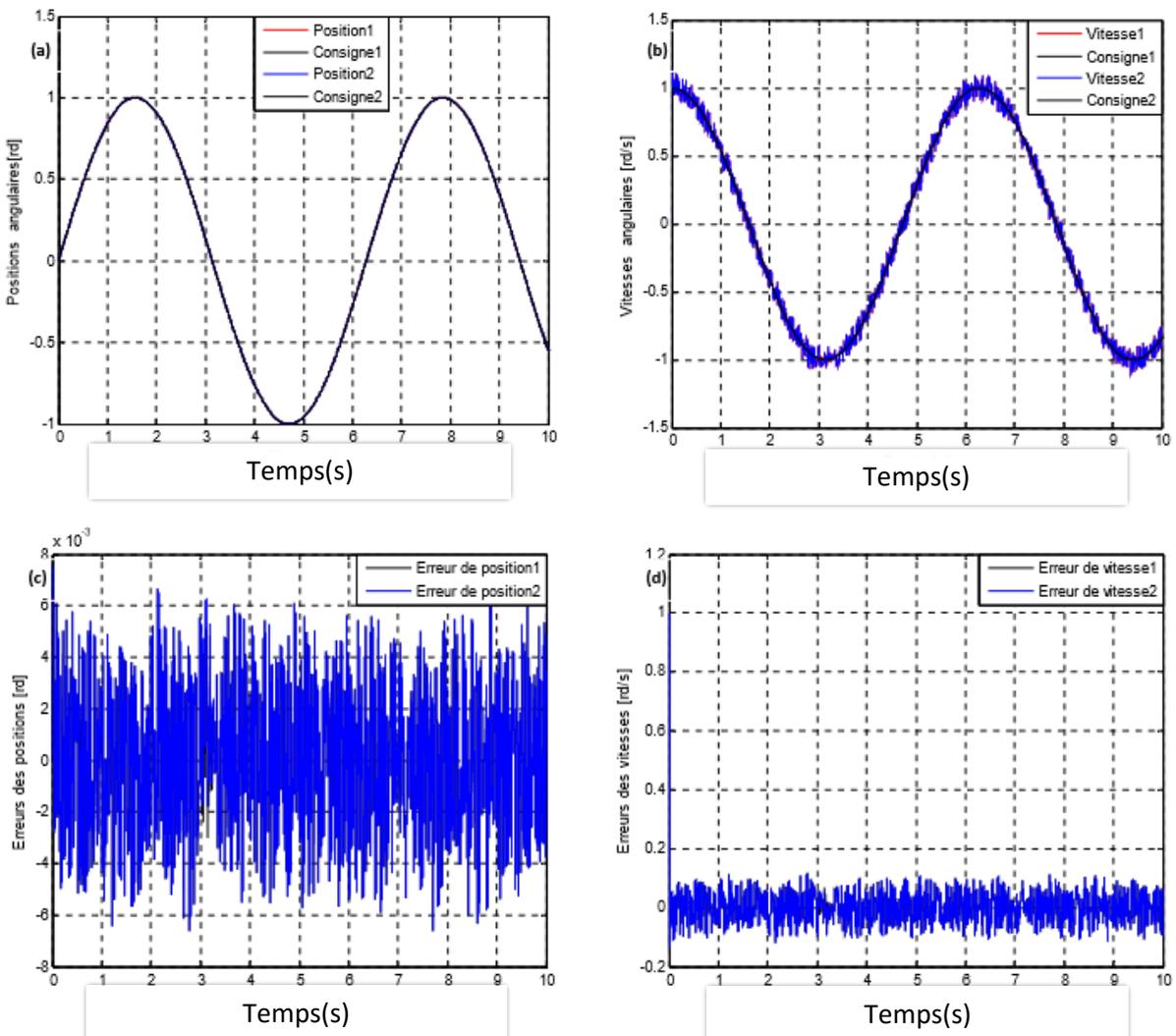


Figure (III.6) Courbes résultantes de la commande Hybride avec bruit de mesure. Positions angulaires 1,2. Vitesses angulaires 1,2. Erreurs de positions1,2 et de vitesses 1,2.

Les commandes	Vitesse 1					
	Dépassement (%)	La durée pour atteindre la valeur finale (s)	Perturbation 90% de m2			
			Temps de rejet (s)	La chute de vitesse (s)	Temps d'augmentation (s)	Augmentation de vitesse (%)
Mode glissant	10	0.05	0.16	2.5	0.16	1.5
Backstepping avec action intégrale	11	0.035	0.066	1	0.08	1.8
Hybride MOG-BACK	6	0.1	0.15	3.8	0.18	5

Tableau III.2 Tableau de comparaison pour la vitesse1.

Les commandes	Vitesse 2					
	Dépassement (%)	La durée pour atteindre la valeur finale (s)	Perturbation 90% de m2			
			Temps de rejet (s)	La chute de vitesse (s)	Temps d'augmentation (s)	Augmentation de vitesse (%)
Mode glissant	20	0.25	0.16	8	0.16	10
Backstepping avec action intégrale	25	0.05	0.066	1	0.075	2
Hybride MOG-BACK	6	0.1	0.15	1.9	0.15	2.7

Tableau III.3. Tableau de comparaison pour la vitesse2.

III.6 Conclusion

Les résultats obtenus à partir de l'application des lois de commande robuste et non linéaire au robot manipulateur à savoir , la commande mode glissant, la commande backstepping avec action intégrale, et la commande hybride mode glissant-backstepping, nous ont permis de faire une étude comparative entre elles afin de tirer les performances de chaque commande.

Conclusion générale

Dans ce travail de projet de fin d'études, nous avons effectué une modélisation ainsi que la commande d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté par deux lois de commande robustes et non linéaires.

Notre objectif principal s'est basé donc, d'une part à établir un modèle dynamique adéquat qui gouverne le mouvement du robot, et d'autre part, à développer une technique de contrôle robuste et non linéaire efficace et performante afin d'assurer la poursuite du robot à sa trajectoire de référence.

La modélisation dynamique du bras manipulateur, basée sur des lois de la mécanique classique, est obtenue après avoir donné une description correspondante et mécanisme du robot. Le modèle obtenu est non linéaire.

Afin d'assurer la stabilité et la poursuite du mouvement du robot, nous avons appliqué au modèle correspondant à ce processus deux lois de commande robustes en présence de diverses perturbations, à savoir, la commande Backstepping et la commande mode glissant.

Les résultats de simulation acquis montrent que les commandes utilisées permettent la poursuite du système à sa référence. Néanmoins, la commande basée sur l'hybridation présente une certaine amélioration.

Perspectives

- La commande par passivité
- La commande par l'hybridation entre les deux lois de commande « Backstepping-passivité »

Bibliographie

- [1] W.Khalil et E.Dombre. « Modélisation et commande des Robots Manipulateur ». 2^{ème} édition. Hermis Science. 1999
- [2] Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.V et Morse, A.S (1991), Systematic design of adaptive controllers of feedback linearizable systems, IEEE Transactions on automatic control, 36(11),1241.1253.
- [3] Etienne Dombre et Wisama Khalil « Modélisation et commande des robots » Editions Hermes paris, 1988.
- [4] G.Laarem. «Backstepping adaptif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotique ». Thèse de doctorat université ferhat abbas-sétif.
- [5] Y. BAAZI. "Etude d'un Manipulateur à 3 Degrés de Liberté Application à la Fonction de Préhenseur". Thèse de magister, Institut d'électronique, Université de Batna, 2000.
- [6] Wisama Khalil, Etienne Dombre. "Modélisation, identification et commande des robots". 2ème Edition revue et augmentée. Paris Hermès Science publications, 1999. ISBN 2-7462-0003-1.
- [7] Armstrong W.W., "Recursive solution to the equation of motion of an Nlinks manipulator". Proc. 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Montréal, 1979, p. 1343-1346.
- [8] Featherstone R. "The calculation of robot dynamics using articulatedbody inertias". The Int. J. of Robotics Research. Vol. 2(3). 1983. p. 87-101.
- [9] Brandl H., Johanni R., Otter M., "A very efficient algorithm for the simulation of robots and multibody systems without inversion of the mass matrix". Proc. IFAC Symp. On Theory of Robots, Vienne. Autriche, déc. 1986. p. 365-370.
- [10] Megahed S., Renaud M. "Minimization of the computation time necessary for the dynamic control". Proc. 12th Int. Symp, on Industrial Robots, Paris, juin 1982, p. 469-478.
- [11] Renaud M. "A near minimum iterative analytical procedure for obtaining a robot-manipulator dynamic model". LUTAM/IFTOMM Symp, on Dynamics of Multi body Systems, Udine, 1985.
- [12] Walker M.W., Orin D.E. "Efficient dynamic computer simulation of robotics mechanism". Trans, of ASME, J. of Dynamic Systems. Measurement, and Control, Vol. 104. 1982, p. 205-211.
- [13] EMELYANOV. S.V. « Variable structure control systems ». Moscow Nauka, 1967.
- [14] FISETTE.P, BUYSE. H, SAMIN.J.C, « Introduction à la robotique “ MECA 2732 : 2004
- [15] FOSSARD. A.J, NORMAND.C D, « Système non linéaire » tome 1 : modélisation - estimation. Masson, Paris, 1993.
- [16] Utkin V. I. “Sliding mode and their application in variable structure systems” Mir, Moscou, 1978

- [17] Defoort M. et Floquet T. et Perruquetti W. « commande robuste des robots mobiles par mode glissant » PDF .école centrale de Lille.59650 Villeneuve d'Ascq 2006.
- [18] Pierre Lopez et Ahmed Saïd Nouri. « Théorie élémentaire et pratique de la commande par les régimes glissants ».PDF.
- [19] Paquin L. N. « Application du Backstepping à une Colonne de Flottation », Mémoire pour l'obtention du grade de Maître des Sciences (M.Sc), Université de Laval, Faculté de l'étude supérieure, Juillet 2000.
- [20] Benaskeur A.R. « Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires », Thèse PhD, Université Laval, Canada, Février 2000.
- [21] Kechich A, Mazari B. “ La commande par mode glissant : Application à la machine synchrone à aimants permanents (approche linéaire), ” Afrique SCIENCE 04(1), Institut d'électrotechnique, pp. 21 – 37 ISSN 1813-548X, 2008.
- [22] Fang-Shiung Chen and Jung-Shan Lin. “Nonlinear backstepping design of robot manipulators with velocity estimation feedback”, department of electrical engineering, National Chi Nan University, 1 University Rd., Puli, Nantou ;Taiwan 545, R.O.C.

Annexe

Propriétés d'une matrice et la stabilité

A-1 Propriétés d'une matrice

Quelques propriétés de la matrice jouent un rôle important dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques. Les propriétés utilisées dans ce mémoire sont résumées dans cette section.

Définition A.1

Une matrice réelle $A \in R^{n \times n}$ est dite définie positive si $x^T A x > 0$ pour tous $x \in R^n$, et $x \neq 0$.

Une matrice réelle $A \in R^{n \times n}$ est dite semi définie positive si $x^T A x \geq 0$ pour tous $x \in R^n$.

Une matrice réelle $A \in R^{n \times n}$ est dite définie négative si $x^T A x < 0$ pour tous $x \in R^n$ et $x \neq 0$.

Une matrice réelle $A \in R^{n \times n}$ est dite semi définie négative si $x^T A x \leq 0$ pour tous $x \in R^n$.

Une matrice réelle $A \in R^{n \times n}$ est dite indéfinie si $x^T A x > 0$ pour quelque $x \in R^n$ et $x^T A x < 0$ pour les autres $x \in R^n$.

Théorème A.2

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice réelle symétrique $\in R^{n \times n}$. Par conséquent, toutes les valeurs propres de A sont réelles. Nous avons :

Une matrice réelle $\in R^{n \times n}$ est définie positive si toutes ses valeurs propres sont positives.

Une matrice réelle $\in R^{n \times n}$ est semi définie positive si toutes ses valeurs propres sont non négatives.

Une matrice réelle $\in R^{n \times n}$ est définie négative si toutes ses valeurs propres sont négatives.

Une matrice réelle $\in R^{n \times n}$ est semi définie négative si toutes ses valeurs propres sont non positives.

Une matrice réelle $\in R^{n \times n}$ est indéfinie si quelques de ses valeurs propres sont positives et les autres sont négatives.

A-2 la théorie de stabilité de Lyapunov

La théorie de stabilité de Lyapunov traite du comportement des systèmes non linéaires libres décrits par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (\text{A.1})$$

$t \geq 0, x \in R^n$, et $f(.,.): R_+ \times R^n \rightarrow R$ est continue. L'idée de base de cette théorie est que si nous considérons un système isolé dans le sens qu'il n'y a aucune forces externes agissant sur ce système, comme l'équation (A.1), où sans perte de généralité, l'origine est un point d'équilibre. Alors, nous supposons qu'il soit possible de définir une fonction, telle qu'elle soit nulle à l'origine et positive ailleurs, et décrit, en quelque sorte, l'énergie totale du système. Si le système originalement à l'équilibre, est perturbé à un nouvel état initial non nul, alors il y a plusieurs possibilités. Si les dynamiques du système sont telle que l'énergie du système est non croissante avec le temps, alors suivant la fonction de l'énergie, ça peut être suffisant pour conclure que l'origine est stable. Si les dynamiques sont telle que l'énergie devient nulle avec le temps, alors il peut être suffisant de décider que le point d'équilibre est asymptotiquement stable. Finalement si les dynamiques sont telles que l'énergie croît au-delà de sa valeur initiale, alors il est possible de conclure que le système est instable.

Lyapunov était capable d'extraire à partir de ce raisonnement une théorie générale qui est applicable à n'importe quelle équation différentielle. Cette théorie demande de chercher une fonction qui satisfait quelques propriétés. Cette fonction est une généralisation de l'énergie des systèmes mécanique et elle est maintenant appelée la fonction de Lyapunov.

La théorie de Lyapunov nous permettra de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre particulier sans la résolution actuelle de l'équation différentielle (A.1). En plus, elle nous fournira des résultats qualitatifs de la stabilité discutée, qui peut être utilisée dans la conception des régulateurs stabilisants les systèmes dynamique non linéaires.

Dans cette section, nous devons donner le théorème de base de Lyapunov qui est utilisée dans la stabilité, stabilité asymptotique et stabilité exponentielle.

Théorème A.3

L'origine du système (A.1) est stable, s'il existe une fonction de classe C^1 et localement définie positive $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ et une constante $r > 0$ telle que :

$$\dot{V}(x, t) \leq 0, \forall t \geq t_0 \text{ et } \forall x \in B_r$$

Où \dot{V} est évaluée le long des trajectoires de (A.1).

Théorème A.4

L'origine du système (A.1) est uniformément stable, s'il existe une fonction de C^1 définie positive localement $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ et une constante $r > 0$ telle que :

$$\dot{V}(x, t) \leq 0, \forall t \geq 0 \text{ et } \forall x \in B_r$$

Théorème A.4

L'origine du système (A.1) est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction scalaire $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ telle que :

1. $V(t, x)$ définie positive,
2. $\dot{V}(t, x)$ est définie négative.

En plus, si $V(t, x)$ est décroissante, alors l'origine est uniformément asymptotiquement stable.

Théorème A.5

L'origine du système (A.1) est asymptotiquement uniformément globalement stable, s'il existe une fonction scalaire de C^1 définie positive localement $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ et une constante $r > 0$ telle que :

1. $V(t, x)$ définie positive,
2. $V(t, x)$ est décroissante et radialement non bornée,
3. $\dot{V}(t, x)$ est définie négative.

La structure géométrique des robots manipulateurs à chaîne ouverte simple

La description de la structure géométrique du robot manipulateur est l'étape de base pour avoir le modèle dynamique du robot manipulateur qui est modélisé comme une chaîne ouverte des corps rigides articulés. Le système, qui est le robot, est composé de (n) articulations et $(n+1)$ corps notés par C_0, \dots, C_n . Le corps C_0 est la base du robot et le corps C_n porte l'organe terminal, l'articulation j connecte le corps C_j au corps C_{j+1} (voir figure B.1).

Pour décrire la structure géométrique de tels robots manipulateurs, plusieurs techniques peuvent être utilisées. La représentation de Denavit–Hartenberg est largement utilisée, et qui est considérée dans cette section. Cette représentation permet une description homogène, avec un minimum de paramètres, des systèmes mécaniques articulés à chaîne ouverte simple [2]. La description géométrique est basée sur les règles et les conventions suivantes :

- Les corps sont considérés parfaitement rigides ;
- Les articulations sont soit rotative soit prismatique ;
- Le repère R_j est lié au corps C_j ;
- Les paramètres définissant le repère R_j par rapport au repère R_{j-1} sont indicés (j) .

Le repère R_j est défini tels que :

- L'axe Z_j est porté par l'axe de l'articulation j ;
- L'axe X_j est porté par le perpendiculaire comme de Z_j et Z_{j+1}

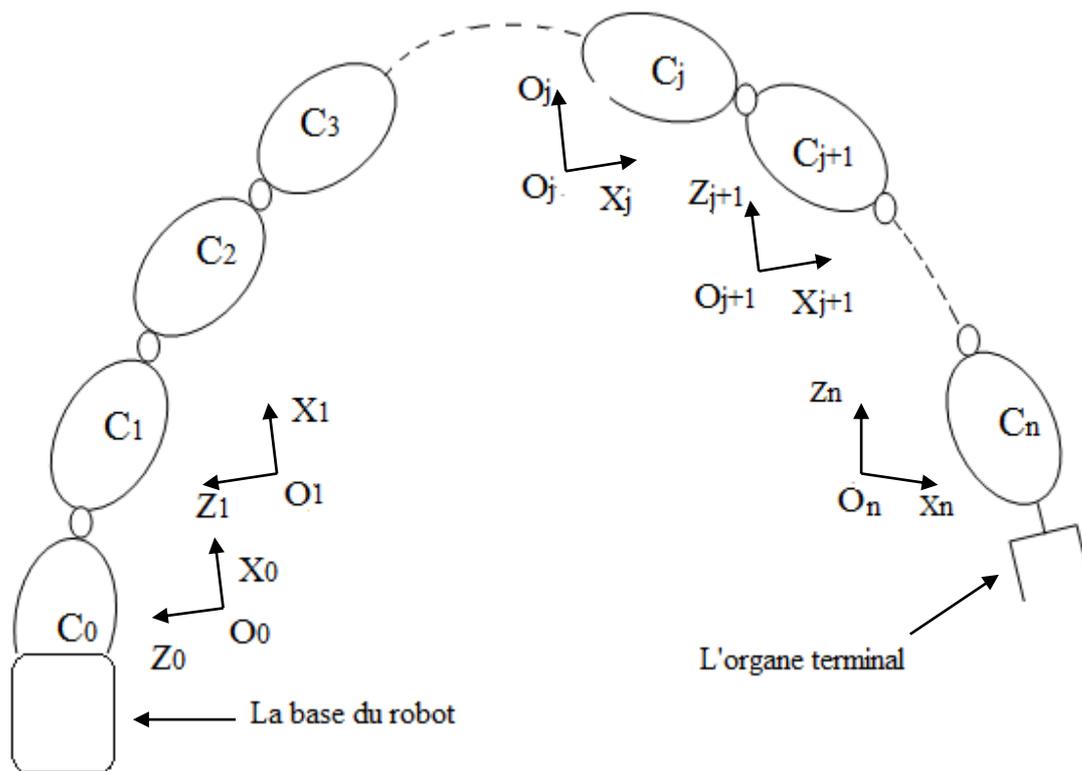


Figure B.1 La structure géométrique d'un robot manipulateur à chaîne ouverte simple.

Le passage d'un repère R_{j-1} à un repère R_j peut être déterminé complètement par les quatre paramètres de Denavit-Hartenberg suivants (voir figure B.2) :

1. α_j : l'angle entre l'axe Z_{j-1} et Z_j mesuré autour de l'axe X_{j-1} ;
2. d_j : la distance entre le centre O_{j-1} du repère R_{j-1} et l'axe Z_j ;
3. θ_j : l'angle entre X_{j-1} et X_j autour de l'axe Z_j ;
4. r_j : La distance entre le centre O_j du repère R_j et l'axe X_{j-1} .

Les paramètres α_j et d_j sont constants, un des paramètres θ_j ou r_j varie lorsque l'articulation se déplace. Si l'articulation est rotatoire, le paramètre θ_j est la variable représentant le déplacement de l'articulation. Si elle est prismatique le paramètre r_j est la variable représentant le déplacement de l'articulation, tandis que θ_j est constant.

La variable articulaire q_j associée à la $j^{\text{ième}}$ articulation est définie par :

$$q_j = (1 - \sigma_j) \theta_j + \sigma_j r_j \quad (\text{B.1})$$

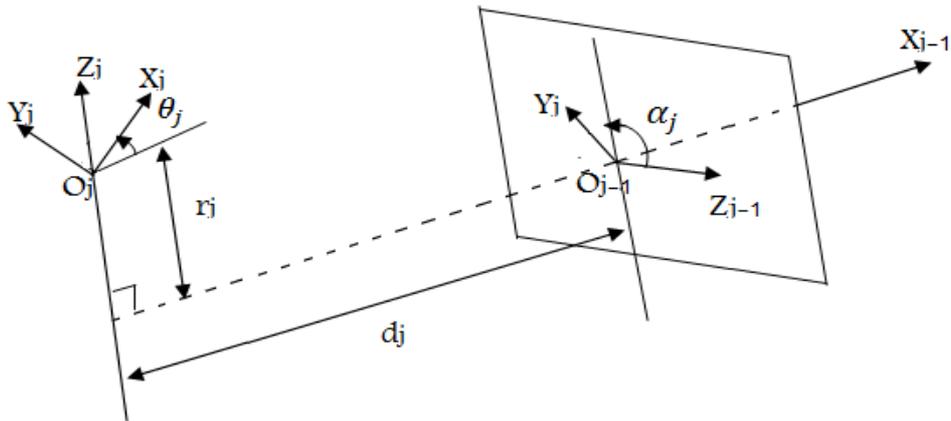


Figure B.2 la représentation de Denavit-Hartenberg

Où

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{si l'articulation est rotoid} \\ 1 & \text{si l'articulation est prismatique} \end{cases}$$

La matrice de transformation homogène définissant le repère R_j par rapport au repère antécédent R_{j-1} peut être obtenue ainsi :

$${}^{j-1}T_j = \text{Rot}(x, \alpha_j) \text{TRANS}(x, d_j) \text{Rot}(Z, \theta_j) \text{TRANS}(z, r_j) \quad (\text{B.1})$$

Avec :

$$\text{Rot}(x, \alpha_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_j & -\sin(\alpha_j) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_j) & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Rot}(Z, \theta_j) = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & 0 \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$TRANS(x, d_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$TRANS(z, r_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Alors :

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & d_j \\ \cos \alpha_j \sin \theta_j & \cos \alpha_j \cos \theta_j & -\sin \alpha_j & -r_j \sin \alpha_j \\ \sin \theta_j \sin \alpha_j & \cos \theta_j \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & r_j \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Nous pouvons remarquer que la matrice de transformation homogène a la forme générale

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} {}^{j-1}A_j & {}^{j-1}P_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Où ${}^{j-1}A_j$ est une matrice $\in R^{3 \times 3}$ qui définit l'orientation de la base du repère R_j par rapport à celle du repère R_{j-1} , et ${}^{j-1}P_j$ est une matrice $\in R^{3 \times 3}$ qui définit les coordonnées de l'origine O_j du repère R_j dans le repère R_{j-1} .