



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed
معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle



Département de Maintenance en Electromécanique

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Génie Industriel

Spécialité : Maintenance-Fiabilité-Qualité

Thème

**Simulation sous Ansys de la vérification de résistance
des engrenages coniques**

Réalisé par:

KAIDI Samira

Membres du jury

Nom et prénom	Grade	Etablissement	Qualité
Y. S. REGUIEG	MAA	IMSI	Président
Y. AOUMEUR	MAA	IMSI	Examinateur
F. BELARIFI	Professeur	IMSI	Encadreur
S BENILHA	Docteur	TOSYALY	Co Encadreur

Septembre 2022

Sommaire

Sommaire.....	2
Remerciement	7
Dédicace.....	8
Table des figures.....	9
Table des tableaux.....	12
Table des organigrammes.....	13
Nomenclature.....	14
Introduction générale.....	20
Chapitre 1 : généralités sur les engrenages	
1 Introduction.....	22
2 Historique.....	22
3 Les différents types de denture.....	23
4 Classification des engrenages	24
4.1 Les engrenages parallèles.....	24
4.1.1 Engrenage cylindrique à denture droite.....	24
4.1.2 Engrenage cylindrique à denture hélicoïdale.....	25
4.2 Engrenage à axes concourant.....	25
4.2.1 Engrenage conique à denture droite.....	26
4.2.2 Engrenage conique à denture hélicoïdale.....	26
4.2.3 Engrenage hypoïde	26
4.3 Engrenage à roue et vis sans fin.....	26

4.3.1	Différents types de systèmes roue-vis sans fin	27
4.3.2	Conditions d'engrènement.....	27
4.3.3	Irréversibilité du système.....	27
5	Etude géométrique des engrenages.....	28
5.1	Profil de la denture.....	28
5.2	Conditions géométriques d'engrènement	28
5.3	Continuité de l'engrènement	29
5.4	Jeu entre les dentures	30
6	Développante de cercle et tracé.....	31
6.1	Equation polaire de la développante de cercle.....	31
6.2	Propriétés et caractéristiques du profil en développante de cercle.....	33
6.2.1	Profil conjugué.....	33
6.2.2	Pas de base (Pb).....	33
6.2.3	Ligne d'engrènement ou ligne de pression T_1T_2	33
6.2.4	Cercle de base et cercles primitifs.....	34
7	Les procédés ou modes d'obtention des dentures.....	34
7.1	Sans enlèvement de matière.....	34
7.2	Avec enlèvement de matière.....	34
8	Qualité des engrenages.....	35
9	Le phénomène d'interférence.....	36
9.1	Définition.....	38
9.2	Supprimer l'interférence	37
9.3	Correction des dentures.....	37
10	Différentes formes de détérioration des engrenages.....	37
10.1	rupture des dents.....	37

10.1.1	Rupture par surcharge instantanée	38
10.1.2	Rupture par fatigue.....	39
10.2	Formation des piqûres.....	39
10.3	L'usure.....	39
10.3.1	Usure par adhésion.....	40
10.3.2	Usure à trois corps.....	40
10.3.3	Usure par interférence.....	40
10.4	L'écaillage.....	40
10.5	Le grippage.....	40
	Conclusion.....	41

Chapitre 2 : méthodes de calcul de résistance d'un engrenage à denture droite

1	Introduction.....	42
2	Caractéristiques d'un engrenage conique.....	42
3	Efforts exercés sur les dentures d'un engrenage conique à denture droite.....	43
4	Les méthodes de calcul de résistance.....	44
4.1	Méthode simplifiée.....	44
4.1.1	Engrenage cylindrique à denture droite.....	44
4.1.2	Engrenage conique à denture droite	45
4.2	La méthode Lewis	46
4.3	La méthode AGMA	47
	Le facteur de forme J	48
	Facteur de répartition de charge K_m	48
	Facteur dynamique K_v	49
	Facteur d'application de charge K_a	50
	Facteur d'échelle K_s	50
	Facteur d'épaisseur de jante K_B	50
	Facteur de roue folles K_I	51

4.4	Influence de la vitesse, de l'usure et du lubrifiant.....	51
4.4.1	La vitesse.....	51
4.4.2	L'usure.....	52
4.4.3	Le lubrifiant.....	53
4.5	La méthode ISO.....	53
4.5.1	Engrenage parallèles.....	53
4.5.1.1	Résistance à la pression superficielle.....	53
	Facteur de service K_B	54
	Facteur géométrique combiné C_2	54
	Facteur combiné de vitesse C_3	55
	Facteur combiné de distribution C_4	56
	Facteur combiné de matériau C_5	57
	Facteur combiné de film d'huile C_6	58
4.5.1.2	Résistance à la rupture.....	59
	Facteur de service K_B	60
	Facteur géométrique combiné C_{B2} et C'_{B2}	60
	Facteur combiné de distribution C_{B3}	61
	Facteur combiné de forme C_{B4}	62
	Facteur C_{B5}	63
	Facteur C_{B6}	64
	Facteur C_{B7}	65
4.5.2	Engrenages concourants.....	68
4.5.2.1	Résistance à la pression superficielle.....	68
4.5.2.2	Résistance à la rupture	69
5	Conclusion	71

Chapitre 3 : Les éléments finis

1	Introduction	72
2	Historique sur la méthode des éléments finis.....	72
3	Choix des éléments finis.....	74
4	Modélisation et discrétisation.....	74
5	Les différentes étapes de la méthode des éléments finis.....	75
6	Les étapes pratiques de calcul par éléments finis.....	75
7	Le maillage	76
8	Les différents types des éléments finis.....	77

9	Contraintes et déformations	77
9.1	La loi de HOOKE.....	78
9.2	Les contraintes principales.....	78
9.3	La contrainte de VON MISES.....	78
9.4	Energie et déformation	78
10	convergence des résultats par éléments finis	78
10.1	Caractéristiques de la solution EF.....	79
10.2	Les conditions de convergence	80
10.2.1	Le patch test.....	81
10.2.2	Mise en œuvre	81
10.2.3	Les différents tests	81
11	Modélisation du comportement sous charge de l'engrenage conique.....	81
12	Rappel sur la théorie de HERTZ.....	82
13	Modélisation par la méthode des éléments finis.....	82
13.1	Modélisation complète par EF.....	82
13.2	Modélisation par Eléments Finis Polynomiaux	83
13.3	Modélisation Mixte par Eléments Finis.....	84
13.4	Méthodes basées sur la méthode TCA/LTCA.....	84
13.5	Méthodes basées sur la théorie de Boussinesq	84
14	Conclusion	85

Chapitre 4 : Mise en œuvre de la simulation sur ANSYS

1	Introduction	86
2	Génération de l'engrenage sous Autodesk Inventor.....	87
2.1	Etapas de génération de l'engrenage sous Inventor.....	87
3	Simulation sous ANSYS.....	88
3.1	Lecture de la géométrie	88
3.2	Vérification du contact	89
3.3	Analysis Settings.....	91
4	Résultats de la simulation	91
4.1	Résultats concernant les contraintes principales	92
4.2	Résultats concernant les contraintes limites de VON MISES.....	93
4.3	Résultats concernant les déformations totales	94
5	Discussion des résultats.....	95
6	Conclusion	96
	Référence bibliographique.....	98
	Annexe.....	101

Remerciements

*Je remercie d'abord **Dieu** tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour m'appliquer sérieusement dans mon travail.*

*Je vous une extrême et infinie reconnaissance à **mes parents** pour leurs soutiens financier et psychologique, ainsi que pour leurs patiences tout au long de mon parcours scolaire.*

Je remercie chaleureusement tous ceux et celles qui ont collaboré, de près ou de loin, à la réalisation de ce projet.

*Je remercie mon encadreur **Mr. Belarifi** qui s'est montré attentif, pas que pour l'avancement de mon travail mais surtout à ma personne et ma manière de faire, pour ensuite me faire sortir le meilleur de moi-même et me surpasser. Merci pour votre exemple et vos leçons de vie.*

*Je tiens à remercier **Mr. Benilha** pour sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire et grâce à son aide précieuse et ces conseils scientifiques j'ai pu accomplir ce modeste travail.*

*Je remercie les membres de jury d'avoir bien voulu prendre de leurs temps pour examiner ce travail. Je tiens à Un remerciée particulièrement pour **Mme Harouz**, dont les qualités professionnelles et humaines m'ont permis non seulement d'exceller durant mes années scolaires mais aussi dans ma vie personnelle.*

Je dois un remerciement pour tous mes enseignants, pour leurs qualités scientifiques et pédagogiques qui ont toujours suscité mon profond respect, ainsi que le personnel de mon institut pour leur sympathie et leur gentillesse.

Merci à tous ceux qui ont cru en moi, et en mes capacités, envers qui, j'espère être à la hauteur de leurs attentes, voir même, au-delà.

Dédicace

C'est avec profonde gratitude et sincères mots que je dédie ce modeste travail

A mes chers parents qui m'ont soutenue, encouragé, épaulé durant mes années d'études afin que je puisse atteindre mes objectifs. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

*A mes frères et sœurs, et particulièrement ma petite sœur **Lydia** avec qui j'ai partagé les moments d'émotion et m'a chaleureusement encouragée dans des moments difficiles, lors de la réalisation de ce travail.*

A ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A mes encadreurs, mes enseignants, mes formateurs, mes collègues, mes amis et à toute l'équipe pédagogique et administrative de l'IMSI.

A tous ceux qui me sont chers.

Liste des Figures

Chapitre 1

Figure 1.1 Les différents types d'engrenages.....	23
Figure 1.2 Principaux types de dentures : développement sur un plan.....	24
Figure 1.3 Engrenage parallèle.....	24
Figure 1.4 Engrenage conique.....	25
Figure 1.5 Engrenage hypoïde.	26
Figure 1.6 Systèmes roues-vis sans fin.....	27
Figure 1.7 profile d'une denture.....	28
Figure 1.8 profile d'une denture comparée avec une droite et un cercle.....	28
Figure 1.9 longueur de conduite, contacts d'approche et de retraite, pas angulaire.....	29
Figure 1.10 jeu normal entre dents.....	30
Figure 1.11 Les différents types de jeu.....	31
Figure 1.12 construction du profile conjugué d'un engrenage parallèle droit.....	33
Figure 1.13 La ligne d'engrènement.....	34
Figure 1.14 Illustration de la déformation des dents (dents 2 et 2') et du phénomène d'interférence (dents 3 et 3').....	36
Figure 1.15 Aire de contact sur le flanc de la denture : (a) Contact typique (b) Contact en « coin » (au bord).....	36
Figure 1.16 rupture des dents.....	37
Figure 1.17 Rupture par surcharge instantanée.....	38
Figure 1.18 La courbe de Wohler.....	38
Figure 1.19 les piqures sur les dents.....	39
Figure 1.20 défaut d'usure.....	39
Figure 1.21 écaillage des dents.....	40

Chapitre 2

Figure 2.1 Caractéristiques d'un engrenage conique.....	42
Figure 2.2 Efforts exercé sur la dent.....	43
Figure 2.3 Comportement à la résistance d'une denture.....	45
Figure 2.4 Méthode de Lewis.....	46
Figure 2.5 facteur de forme J	48
Figure 2.6 facteur dynamique K_v	49
Figure 2.7 Facteur d'épaisseur de jante K_b	51
Figure 2.8 Facteur de service K_B (d'après la norme AGMA 420-04).....	54
Figure 2.9 Facteur géométrique combiné C_2	55
Figure 2.10 facteur combiné de vitesse.....	55
Figure 2.11 facteur combiné de distribution C_4	57
Figure 2.12 facteur combiné de matériaux C_5	58
Figure 2.13 facteurs combinés géométriques.....	61
Figure 2.14 facteur combiné de distribution C_{B3}	62
Figure 2.15 facteur combiné de forme C_{B4}	63
Figure 2.16 facteur C'_{B5}	64
Figure 2.17 facteur C_{B6}	65
Figure 2.18 facteur C_{B7}	67

Figure 2.19 Diamètres primitifs moyens et génératrice moyenne.....68

Figure 2.20 facteur $K_{H\beta}$69

Chapitre 3

Figure 3.1 Les différents types de maille en 3 dimensions.....76

Figure 3.2 types de maillage raffiné.....79

Figure 3.3 Exemple de test patch plan.....80

Figure 3.4 Définition d'un contact conforme et non-conforme.....82

Figure 3.5 Modèle EF pour un engrenage conique.....82

Figure 3.6 Maillage EF distordu pour une orientation correcte des « GAP ELEMENT ».....83

Figure 3.7 Exemple de modélisation par Eléments Finis Polynomiaux.....83

Figure 3.8 Maillage de la zone de contact potentiel dans le plan tangent.....84

Chapitre 4

Figure 4.1 Génération du contact.....89

Figure 4.2 Génération du maillage.....90

Figure 4.3 Les condition de simulation.....90

Figure 4.4 Choix du temps de la simulation.....91

Figure 4.5 Résultats concernant les contraintes principales pour différents moments.....92

Figure 4.6 Résultats concernant les contraintes de Von Mises pour différents moments.....93

Figure 4.7 Résultats concernant les déformations totales différentes moments.....94

Liste des tableaux

Chapitre 2

Tableau 2.1 facteur de répartition des charges.....	48
Tableau 2.2 facteur d'application de la charge Ka	50
Tableau 2.3 facteurs correctifs du facteur combiné de la vitesse.....	56
Tableau 2.4 Les matériaux les plus utilisés.....	66

Chapitre 3

Tableau 3.1. Les types des éléments finis.....	77
---	----

Chapitre 4

Tableau 4.1 Caractéristiques de l'engrenage	86
Tableau 4.2 Valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 10 N.m.....	92
Tableau 4.3. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 20 N.m.....	92
Tableau 4.4. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 30 N.m.....	92
Tableau 4.5. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 10 N.m.....	93
Tableau 4.6. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 20 N.m.....	93
Tableau 4.7. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 30 N.m.....	93
Tableau 4.8 valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 10 N.m.....	94
Tableau 4.9 valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 20 N.m.....	94
Tableau 4.10 valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 30 N.m.....	94
Tableau 4.11 Récapitulatif des résultats pour un couple de 10NM.....	95
Tableau 4.12 Récapitulatif des résultats pour un couple de 20NM.....	95
Tableau 4.13 Récapitulatif des résultats pour un couple de 30NM.....	95

Liste des organigrammes

Chapitre 3

Organigramme 3.1 Étapes de l'analyse d'un problème aux limites.....	74
Organigramme 3.2 étapes de la MEF.....	75
Organigramme 3.3 étapes pratiques du calcul par EF.....	76
Organigramme 3.4 Processus du calcul de comportement sous charge.....	81

Chapitre 4

Organigramme 4.1 Procédure de génération de l'engrenage.....	87
Organigramme 4.2 Lecture et édition de la géométrie.....	88

Introduction générale

Les engrenages sont des éléments de machines qui remontent à la plus haute antiquité, qui sont constitués de deux roues dentées, mobiles autour d'axes de position relative, invariable et dont l'une entraîne l'autre par l'action des dents venant successivement en contact. Ils transmettent le mouvement de rotation d'un arbre moteur menant vers un arbre mené, avec un rapport constant des vitesses angulaires. Les principes fondamentaux ont été énoncés tout d'abord pour les engrenages à axes parallèles et furent par la suite adaptés aux différents types d'engrenages, dont nous distinguons trois grandes familles à savoir les engrenages à axes parallèles, concourants et gauches.

Nous remarquons que malgré l'avancé des outils mathématiques, d'analyse et d'investigation expérimentaux, nous avons toujours des dimensionnements qui sont approximatifs et dépendent d'autres phénomènes qui ne peuvent être cernés ou déductibles, car chaque couple d'engrenage a sa spécificité et ses conditions de fonctionnement. Dans ce contexte on fait remarquer qu'il existe plusieurs méthodes de calculs ou de vérification d'un engrenage et les plus connues sont la méthode de Lewis qui considère la dent d'engrenage comme une poutre encasturée. Par la suite d'autres facteurs ont été mis en évidence tel que la concentration de contrainte qui fut adoptée par les Américains (méthode AGMA). Par la suite le système de normalisation internationale (ISO) proposa une approche très complexe pour la vérification de résistance des dentures en ajoutant une panoplie de paramètres. La tendance actuelle s'oriente vers la minimisation de l'expérimental qui devient très onéreux et le développement des outils numériques tel que la méthode des éléments finis qui est très intéressante mais sa mise en œuvre est très complexe d'où la nécessité de passer par les logiciels spécialisés. Dans ce contexte nous proposons de traiter dans ce mémoire la procédure de simulation sur le logiciel ANSYS, d'un couple d'engrenage conique soumis à différents couples et l'analyse des résultats des conditions de fonctionnement tel que les contraintes maximales supportées et les valeurs des contraintes limites ainsi que la visualisation des déformations.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres distincts, d'une introduction et conclusion générale ainsi que d'une bibliographie relative à la thématique étudiée.

Le chapitre 1 traite de l'état de l'art des engrenages et donne un aperçu de l'histoire et de la géométrie des engrenages.

Le chapitre 2 passe en revue les différentes méthodes de calculs sur les engrenages.

Le chapitre 3 développe la méthode des éléments finis en définissant ces caractéristiques ainsi que ces avantages et ces difficultés de mise en œuvre, en ce qui concerne.

Le Chapitre 4 est consacré à la mise en œuvre et la stratégie adoptée pour la simulation d'un couple d'engrenage conique et les différents résultats obtenus.

Chapitre 1

Généralités sur les engrenages

1 Introduction

Un engrenage est un mécanisme élémentaire qui remonte à la plus haute antiquité. Jusqu'aux temps moderne constitué de deux roues dentées, mobiles autour d'axes de position relative, invariable et dont l'une entraîne l'autre par l'action des dents venant successivement en contact [1,2]. Il transmet le mouvement de rotation d'un arbre moteur à un arbre mené, avec un rapport constant des vitesses angulaires ω_1, ω_2 [3] qui est également le rapport des fréquences de rotation des deux parties, menante n_1 et menée n_2 : [4], la qualité de la transmission du mouvement dépendait de celle du taillage, précisément de la qualité de l'artisan et de son habilité. Son art [1] consistait à développer la denture de l'une des roues par des approximations successives plus ou moins nombreuses, pour obtenir la conjugaison avec la denture de l'autre roue.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1.1)$$

Avec :

$$\omega = 2\pi n \quad (1.2)$$

Ces principes, énoncées tout d'abord pour les engrenages à axes parallèles et concourants furent par la suite adapter aux engrenages gauches (dont les axes sont quelconques).

Dès le 16ème siècle, des mathématiciens commencent à se pencher sur le problème de la théorie des engrenages. Ce n'est qu'au 18ème siècle que furent définies avec précision les relations mathématiques qui s'appliquent aux engrenages pour que le rapport de vitesse angulaire des deux roues, soit constant pendant le fonctionnement. Au cours des derniers siècles, l'évolution des procédés de fabrication et de taillage, parallèlement au développement des relations mathématiques qui régissent le comportement des engrenages, a permis d'en améliorer grandement la qualité de fabrication comme de fonctionnement. De nouveaux types de dentures et d'engrenages font aussi leur apparition au cours de cette période. Aujourd'hui encore ; les engrenages sont couramment utilisés et demeurent un moyen très efficace pour transmettre un mouvement de rotation et une puissance d'un arbre menant à un arbre mené. On trouve plusieurs types d'engrenages, dont quelques-uns sont représentés par la (figure 1.1). On distingue trois

grandes classes d'engrenages. Ces classes sont divisées selon la position relative des axes des arbres en rotation. La première classe concerne les engrenages aux axes parallèles ; on inclut dans cette catégorie les engrenages cylindriques droits et les engrenages cylindriques hélicoïdaux ; ces derniers, pour des dimensions similaires, permettent d'obtenir un rapport de conduite plus élevé. Les engrenages coniques, quant à eux, permettent la transmission du mouvement de rotation entre deux arbres concourants. Ceux-ci peuvent comporter une denture droite, inclinée ou spirale. Ces engrenages coniques à denture spirale sont plus communément appelés spiro-coniques [1].

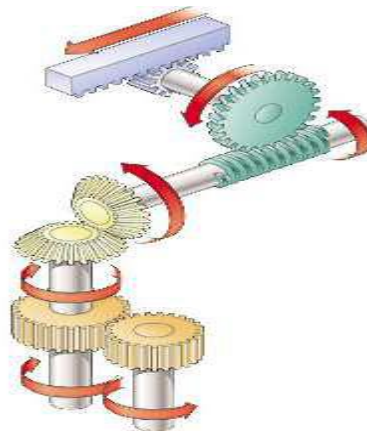


Figure 1.1 Les différents types d'engrenages.

3 Les différents types de dentures

Actuellement, il existe des dentures droites, hélicoïdales, spirale et à chevrons [5] comme indiqué par la (figure 1.2).

- La denture droite, se caractérise par les flancs qui coupent le cylindre primitif de denture suivant des génératrices.
- La Denture hélicoïdale (à droite ou à gauche), se caractérise par les flancs qui coupent le cylindre primitif de denture suivant des hélices. Elle est dite à droite si, suivant les génératrices, la denture s'éloigne vers la droite ; elle est dite à gauche dans le cas contraire.
- La denture spirale (à droite ou à gauche), se caractérise par les flancs qui coupent le cylindre primitif de denture suivant une coupe.
- La Denture en chevron, se caractérise par le flanc qui coupe le cylindre primitif de denture suivant une courbe, s'éloignant d'abord dans un sens, puis dans l'autre, regardant suivant les génératrices. (Une juxtaposition de deux dentures hélicoïdales, l'une à droite, et l'autre à gauche).

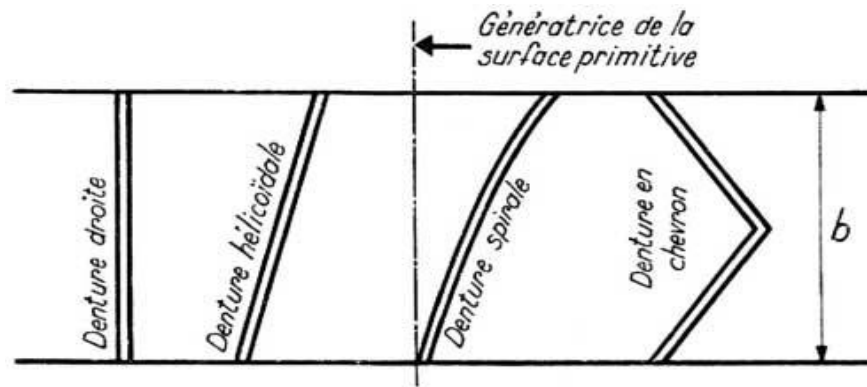


Figure 1.2 Principaux types de dentures : développement sur un plan

4 Classification des engrenages

Ils sont classés selon :

- la position relative des axes des arbres d'entrée et de sortie.
- La forme extérieure des roues dentées.
- Le type de dentures.
- Le type de contact, intérieur ou extérieur.

On retrouve différents types d'engrenages :

4.1 Les engrenages parallèles

Ils transmettent le mouvement entre deux arbres parallèles.

4.1.1 Engrenage cylindrique à denture droite

- **Avantage**
 - Simple et économique.
 - Pas d'efforts axiaux.
- **Inconvénient**
 - Vitesse de rotation limitée.
 - Bruyant.
 - Entraxe prenant des valeurs finies.
- **Condition d'engrènement**
 - Même module (m).

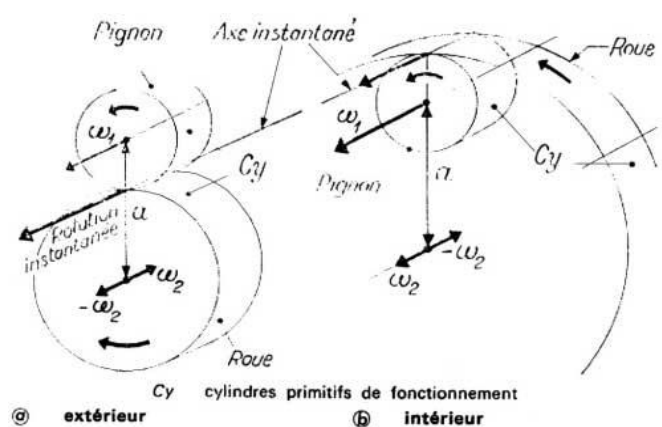


Figure 1.3 Engrenage parallèle.

4.1.2 Engrenage cylindrique à denture hélicoïdale

- **Avantage**

- Fonctionnement silencieux sans vibration.
- Efforts sur chaque dent réduit (3 ou 4 dents prises simultanément)

- **Inconvénient**

- Ils créent des poussées axiales qui exigent des épaulements et des butées (on peut les supprimer en utilisant de roues à denture cheverons).
- Des efforts supplémentaires dus à l'angle d'hélice (effort axiale sur les paliers et augmentation des efforts de flexion).
- Rendement un peu moins bon.
- Utilisation impossible en montage « baladeur » (ces engrenages doivent rester en contact permanent)

- **Condition d'engrènement**

- Même module, (quels que soit leurs diamètres ou leurs nombre de dents).
- Même angle d'hélice.
- Hélices de sens opposés. (sur les deux roues)

4.2 Engrenage à axe concourant

Il permet de transmettre le mouvement entre deux arbres dont les axes sont concourants. Les surfaces primitives ne sont plus des cylindres mais des cônes qui sont tangents sur une ligne de contact MM' et avec un sommet commun correspondant au point S .

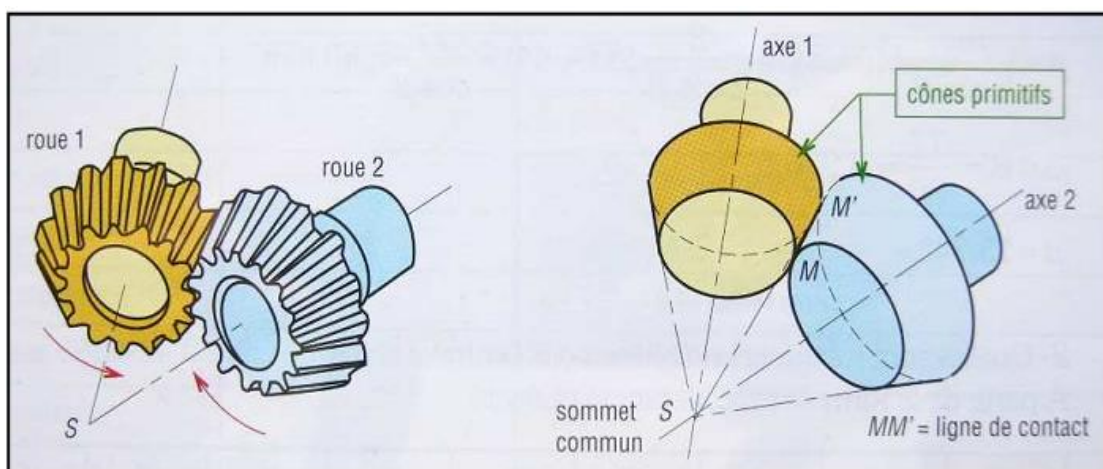


Figure 1.4 Engrenage conique.

4.2.1 Engrenages coniques à dentures droites

- Les plus simples.
- La direction des génératrices du profil de la denture passe par le sommet S.
- Aux vitesses élevées, on retrouve les mêmes inconvénients que les engrenages droits à dentures droites (bruits de fonctionnement, fortes pressions sur les dents, etc...)

4.2.2 Engrenages coniques à denture hélicoïdale (spirale)

- Conçus sur le même principe que les engrenages droits.
- Diminution des bruits aux grandes vitesses.
- meilleure progressivité de la transmission

4.2.3 Engrenages hypoïdes

Transmission de mouvement entre deux arbres perpendiculaires dont les axes sont écartés l'un de l'autre d'une certaine distance.

Ils sont considérés comme étant des intermédiaires entre les couples coniques et la roue à vis sans fin. [6]

- **La condition d'engrènement**

- Même module.
- Les sommets des deux cônes soient confondus.



Figure 1.5 Engrenage hypoïde

4.3 Engrenage à roue et vis sans fin

L'engrenage à vis sans fin est un engrenage gauche se caractérisant tout d'abord par la forme particulière de son pignon, qui se présente sous l'aspect d'une vis sans fin.

- **Avantages**

- Grand rapport de réduction (jusqu'à 1/200).
- Presque toujours irréversibles d'où sécurité anti retour.
- Glissement important entre les dentures, donc usure et rendement faible (60%).
- La vis supporte un effort axial important.

4.3.1 Différents types de systèmes roue-vis sans fin

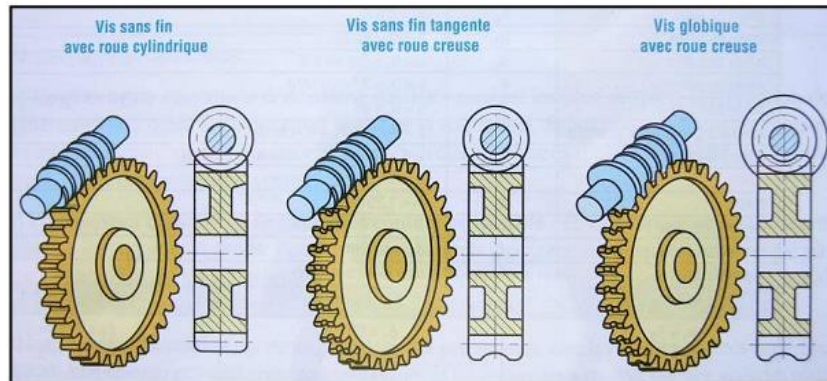


Figure 1.6 Systèmes roues-vis sans fin.

4.3.2 Conditions d'engrènements

- Même module axial.
- Même angle d'hélice.

Remarque : Une roue creuse est une roue cylindrique légèrement creusée, ce qui accroît la surface de contact entre les dents et permet d'augmenter les efforts transmissibles.

$$r = \frac{z_v}{z_r} = \frac{N_r}{N_v} \quad (1.3)$$

$$\frac{N_r}{N_v} \neq \frac{d_v}{d_r} \quad (1.4)$$

4.3.3 Irréversibilité du système

Si la vis peut toujours entraîner la roue, l'inverse n'est pas toujours possible. Lorsque l'angle d'hélice est suffisamment petit (moins de 6° à 10°) le système devient irréversible (il se passe un blocage en position)

Cette propriété est utile pour les systèmes exigeants un non-retour (sécurité mécanique, etc...).

5 Etude géométrique des engrenages

5.1 Profil de la dent

L'utilisation des engrenages en milieu industriel doit répondre à des contraintes cinématiques, dynamiques et économiques. L'analyse des divers profils permet de retenir la développante de cercle comme seul profil respectant ces exigences (ni en droite, ni en cercle). Au cours de l'engrènement, la ligne d'action est une droite fixe, tangente aux cercles de base. Lorsque l'on néglige la résistance au glissement au contact des profils et en considérant le couple constant, les inter-efforts se réduisent à un glissement constant, ce qui n'engendre qu'un minimum de vibrations, si l'on considère le profil indéformable.[7]

Les dentures doivent permettre de toujours maintenir les deux roues en contact, d'assurer une rotation continue d'une roue par rapport à l'autre et de ne pas bloquer le fonctionnement de l'engrenage.

Il se compose de deux flancs compris entre le cylindre de pied et le cylindre de tête. Il doit être aussi grand que possible afin de conserver une résistance suffisante en limitant le coefficient de forme du raccord.

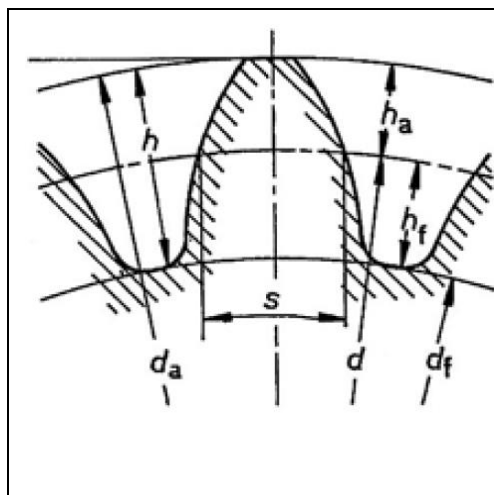


Figure 1.7 profil d'une denture

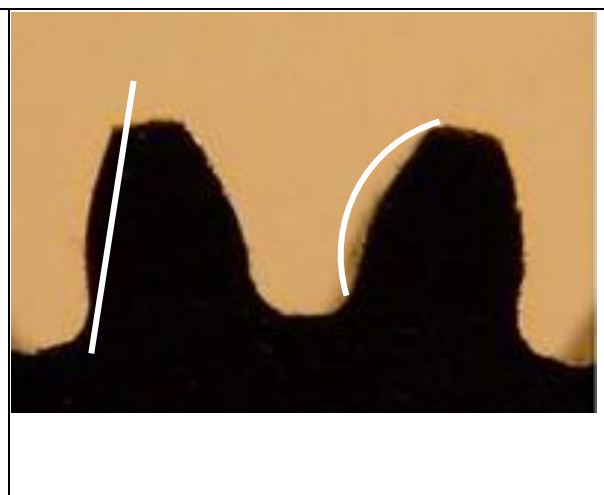


Figure 1.8 profil d'une denture comparée avec une droite et un cercle

5.2 Conditions géométriques d'engrènement

Comme la transmission du mouvement et des efforts entre deux roues dentées fait intervenir des contacts successifs de toutes les dents, deux conditions évidentes doivent être satisfaites: [4]

Condition 1 : Le rapport de transmission i entre les deux roues doit rester constant indépendamment de la position du point de contact sur les flancs porteurs. (Première loi des engrenages). Comme indiqué par l'équation (1.1).

Conditions 2 : À chaque instant de l'entraînement, il faut que l'engrènement reste continu entre les deux roues, et pour ce, il faut que l'angle de conduite φ soit toujours supérieur au pas angulaire τ (la seconde loi des engrenages).

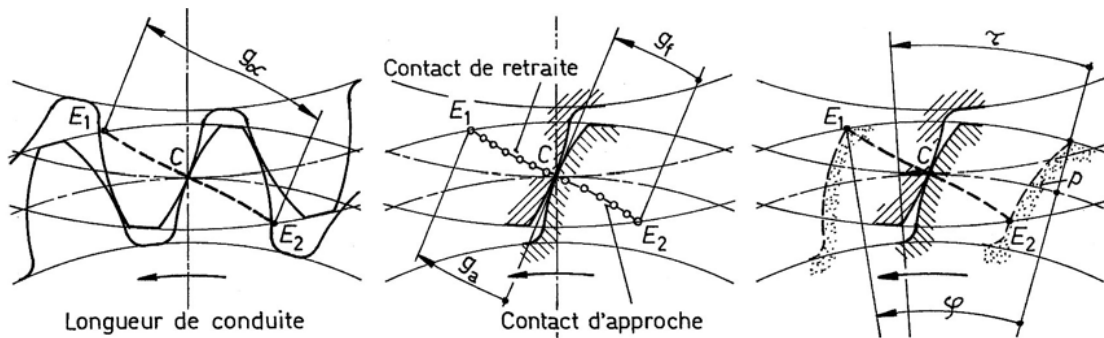


Figure 1.9 Longueur de conduite, contacts d'approche et de retraite, pas angulaire

D'où le rapport de conduite :

$$\varepsilon = \frac{\text{angle de conduite}}{\text{pas angulaire}} = \frac{\varphi}{\tau} \quad (1.5)$$

5.3 Continuité de l'engrènement

Pour assurer une conduite continue :

- un couple de dents doit entrer en contact avant que le précédent ne perde le contact : $\varphi > \tau$ (Pas circonférentiel)
- Le rapport de conduite, ne doit pratiquement pas être inférieur à 1,3. Il est souhaitable que $2 < \varepsilon < 3$

Il y a tantôt 2, tantôt 3 couples de dents simultanément en prise.

- ε augmente en même temps que la saillie des dents.
- ε diminue si φ augmente.
- ε augmente avec le nombre de dents des roues.

5.2 Jeu entre les dentures

Pour qu'un engrenage fonctionne correctement, il faut prévoir du jeu entre les paires de dents participant à la transmission du mouvement afin d'éviter tout coincement qui serait catastrophique.

Dans un engrenage, le *jeu entre dents* j n'est la plus courte distance entre les flancs arrière de deux roues quand les flancs avant sont en contact. Ce jeu est absolument nécessaire au bon fonctionnement de l'engrenage.

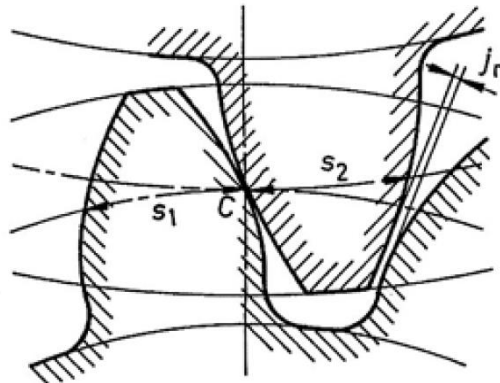


Figure 1.10 jeu normal entre dents.

Le jeu entre dents est obtenu par diminution de l'épaisseur de la dent par rapport à la denture théorique sans jeu en tenant compte des facteurs suivants :

- Espace de lubrification requis.
- Expansion différentielle entre les composants de l'engrenage et le logement.
- Erreurs d'usinage. Dépassement des deux engrenages, erreur de contour, pas, épaisseur de dent, angle d'hélice et distance au centre. Plus la valeur du jeu entre dents est faible, plus l'usinage des engrenages est précis.
- Les conditions de fonctionnement telles que l'inversion ou le dépassement fréquent des charges.

Cette diminution d'épaisseur fait l'objet d'un système de tolérances pour les roues dentées selon ISO. On fait remarquer l'existence de plusieurs types de jeu indiqués par la (figure 1.11) à savoir :

- Jeu entre dents circulaire j_t [mm/po]
- Jeu entre dents normal j_n [mm/po]
- Jeu entre dents central j_r [mm/po]
- Jeu entre dents angulaire j_θ [deg.]

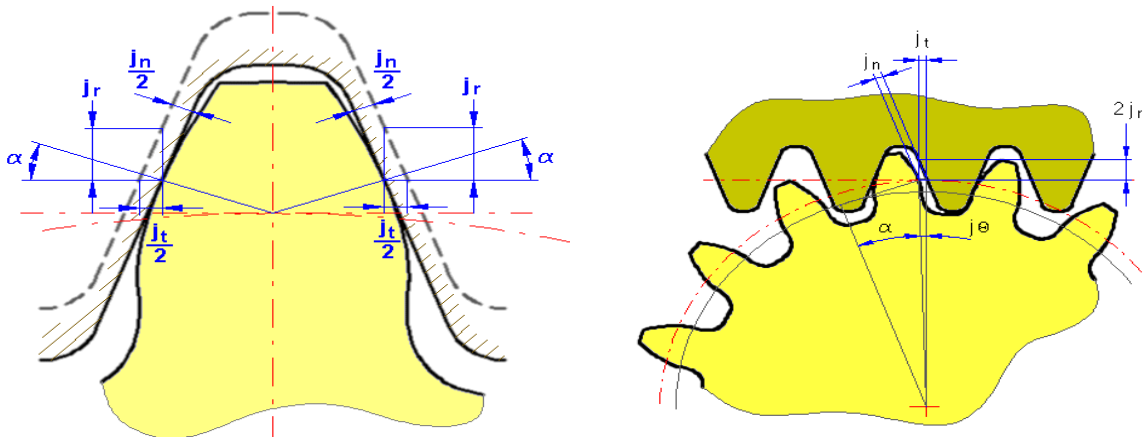


Figure 1.11 Les différents types de jeu.

6 Développante de cercle et tracé

Il existe d'autres profils de denture, rarement usités. Le profil en développante de cercle est le profil très largement utilisé pour obtenir la forme des dents.

Ainsi les dents roulent l'une sur l'autre. Il existe cependant un glissement résiduel entre les dents engrenées, d'autant plus important que le nombre de dents est faible. C'est pourquoi le nombre de dents généralement admis, sur le plus petit pignon, n'est pas inférieur à 12. En dessous de cette valeur, le glissement devient important. Il est source de perte mécanique par frottement et d'usure accélérée.

On évitera donc, sauf en cas de nécessité, d'utiliser des roues dentées comportant moins de 12 dents. Plus le nombre de dents est important, moins il se produit de glissement, réduisant ainsi les pertes mécaniques et l'usure.

6.1 Equation polaire de la développante de cercle

La figure ci-dessous représente une développante dont le point de rebroussement est Q sur le cercle de base. En un point quelconque, M de rayon r_M , L'angle de la développante OM est l'angle d'incidence α_M définit par :

$$\cos \alpha_M = \frac{r_b}{r_M} \quad (1.5)$$

$$T_M \cdot M = \hat{T}_M Q = r_b \cdot \tan \alpha_M \quad (1.6)$$

$$\hat{Q}W = \hat{T}_M Q - \hat{T}_M W \quad (1.7)$$

$$r_b Q \hat{O}M = r_b \tan \alpha_M - r_b \alpha_M \quad (1.8)$$

$$r_b \cdot Q \hat{O}M = r_b (\tan \alpha_M - \alpha_M) \quad (1.9)$$

D'où

$$Q \hat{O}M = \tan \alpha_M \quad (1.10)$$

$Q \hat{O}M$: représente l'involute de α_M

D'où l'angle auxiliaire (l'angle du rayon du vecteur) :

$$Q \hat{O}M = \text{inv} \alpha_M \quad (1.11)$$

Donc :

$$\text{inv} \alpha_M = \tan \alpha_M - \alpha_M \quad (1.12)$$

L'angle de pression α_M est exprimé en radians.

$$\text{Au point primitif I : } \text{inv} \alpha = \tan \alpha - \alpha \quad (1.13)$$

$$\text{Au point de tête, on a : } \text{inv} \alpha_a - \alpha_a \quad (1.14)$$

La longueur de l'arc de développante t compris entre le cercle de base et un point M quelconque est :

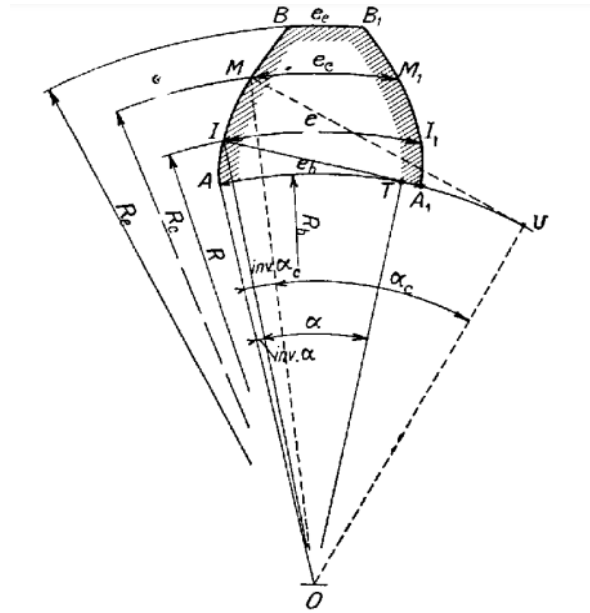
$$t = \frac{r_b}{2} \tan^2 \alpha_M \quad (1.15)$$

La distance entre deux points M et M' définis par leurs angles d'incidences α_M et $\alpha_{M'}$, est :

$$\frac{r_b}{2} (\tan^2 \alpha_M - \tan^2 \alpha_{M'}) \quad (1.16)$$

Le rayon vecteur R se retrouve par la relation

$$R = \frac{r_b}{\cos \alpha_M} \quad (1.17)$$



6.2 Propriétés et caractéristiques du profile en développante de cercle

6.2.1 Profile conjugué

La construction du profile conjugué est basé sur l'application directe de la première loi des engrenages, ils permettent de transmettre le mouvement d'une roue à une autre sans à-coups, de façon régulière, sans fluctuation, même infime, du rapport de l'engrenage $n_2/n_1 = constante$.

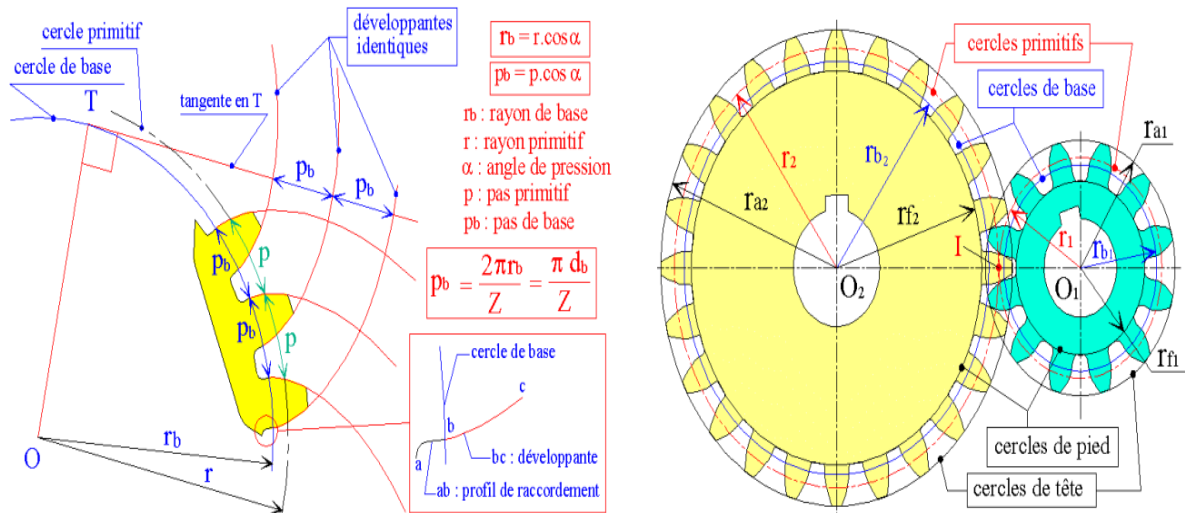


Figure 1.12 construction du profile conjugué d'un engrenage parallèle droit.

6.2.2 Pas de base (Pb)

C'est la longueur de l'arc, mesuré sur le cercle de base, entre deux dents consécutives. C'est aussi la distance entre les profils des dents successives. Pour que deux roues puissent engrener, il faut qu'elles aient le même pas de base ($pb_1 = pb_2$).

6.2.3 Ligne d'engrènement ou ligne de pression T_1T_2

Tangente aux deux cercles de base, c'est la ligne qui porte (en permanence) l'effort de contact s'exerçant entre les deux roues. Le point de contact (M) entre les dents est toujours situé sur cette ligne. La tangente en M aux deux profils en contact est toujours perpendiculaire à T_1T_2 . Le contact en M entre les deux dents se fait à la fois avec du roulement et du glissement.

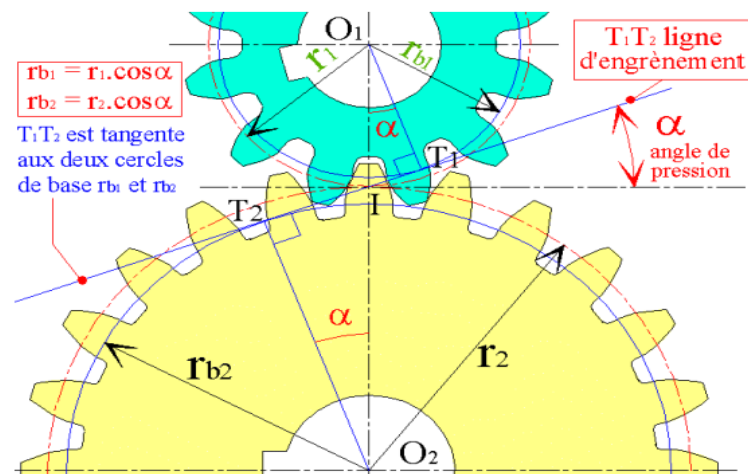


Figure 1.13 La ligne d'engrènement

6.3 Cercles de base et cercles primitifs

Pour un engrenage les cercles primitifs sont uniques. Ils définissent le rapport de la transmission. Les cercles de base définissent le profil de la denture, autrement dit la développante. À deux cercles primitifs peut correspondre, en théorie, une infinité de cercles de base et d'angles de pression possibles, seule condition : $r_2/r_1 = r_{b2}/r_{b1}$

7 Les procédés ou modes d'obtention des dentures

A ce niveau de l'étude, il devient impératif de rappeler quelques notions élémentaires à propos de l'élaboration des engrenages. Il existe en effet plusieurs modes de fabrication des engrenages, que l'on peut classer en deux grands groupes, selon le mode d'obtention, les profils actifs sont obtenus :[7]

7.1 Sans enlèvement de matière (sans coupeaux)

- Moulage sable ou sous pression.
- Forgeage/ estampage.
- Découpage (petits mécanismes).

Il faudra remarquer que la qualité et la précision recherchées dans les engrenages pour la transmission de grandes puissances ne sont pas obtenues par les procédés sans enlèvement de matière.

7.2 Avec enlèvement de matière

- Taillage par fraise de forme (fraise doigt ou fraise « au module »).

- Taillage par génération : l'outil génère, engendre les profils actifs ; le profile est obtenu par enveloppe des positions successives de l'outil, c'est le procédé le plus utilisé dès que l'on désire une qualité correcte.

- Taillage à outil crémaillère (procédés Maag ou Sunderland-Rollet).
- Taillage à l'outil pignon (procédé Fellow).
- Taillage à la fraise-mère.

On signale que le taillage des dentures extérieures par l'outil crémaillère reste le procédé le mieux utilisé pour l'obtention des dentures qui doivent supporter de très grandes charges, et ceci est dû à la génération « point par point » de la développante de cercle assurée par cet outil.

8 Qualité des engrenages

Il s'agit de la classe de précision :

- **Classe 1 à 4:** Précision exceptionnelle et grandes vitesses ($V > 30$ m/s). Engrenages étalons, turbines.
- **Classe 5 et 6:** Denture rectifiée ou rasée, vitesses élevées ($V < 20$ m/s). Appareil de mesure, turbine, automobiles, machine outils.
- **Classe 7:** Denture taillée et rectifiée, bonne qualité en mécanique – Classe 7 : Denture taillée et rectifiée, bonne qualité en mécanique générale, vitesses ($V < 10$ m/s). Manutention des machines-outils, automobiles, machines de bureau.
- **Classe 8 et 9:** Qualité courante pour roues trempées non rectifiées, vitesses ($V < 7$ m/s)
- **Classe 10 :** Procédés usuels de fabrication, incluant engrenages en plastique.
- **Classe 11 et 12:** Engrenages lents ($V < 2$ m/s) et/ou à gros modules.

9 Le phénomène d'interférence

9.1 Définition

Les profils des dents d'engrenages permettent théoriquement une transmission homocinétique sans choc. Les profils en développantes de cercle possèdent cette propriété si les déformations et les écarts géométriques demeurent très faibles devant les dimensions caractéristiques des dentures.[8]

Quoique, en réalité, lorsqu'une charge est transmise, les systèmes se déforment et peuvent induire des interférences comme illustré schématiquement sur la **Figure 1.14**

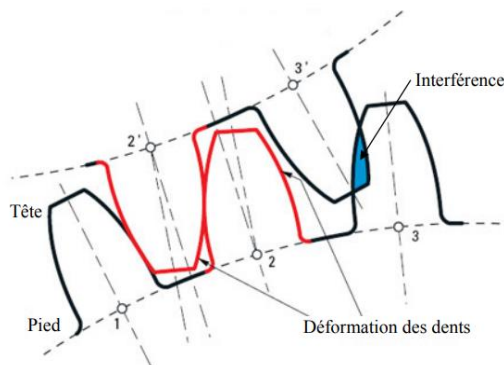


Figure 1.14 Illustration de la déformation des dents

De même :

- Les erreurs géométriques, de forme ou de positionnement (présentes sur tous les engrenages suite aux imprécisions d'usinage)
- Les distorsions (dues aux traitements thermiques, etc.) pouvant entraîner une portée en « coin » qui correspond à une surcharge sur les extrémités de la largeur des dentures ce qui peut mettre en cause la capacité de charge de l'engrenage.

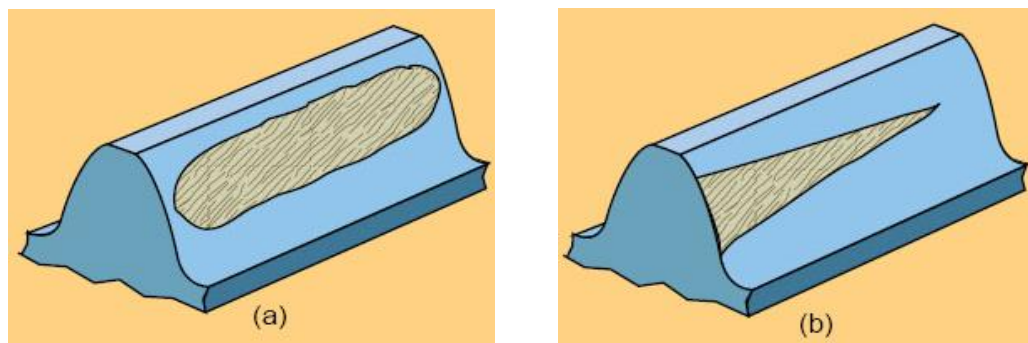


Figure 1.15 Aire de contact sur le flanc de la denture : (a) Contact typique (b) Contact en « coin » (au bord)

8.2 Supprimer l'interférence

- **Augmenter l'angle de pression α** : peu utilisé car cela nécessite un outillage spécial pour le taillage des dents et aussi car on diminue le rapport de conduite.
- **Réduire la hauteur de saillie** : peu utilisé car on diminue également le rapport de conduite.
- **Par déport de denture (avec ou sans variation d'entraxe)** : c'est la méthode la plus utilisée pour résoudre les problèmes d'interférence.

8.3 Correction des dentures

Dans le but de conduire à une meilleure régularité de fonctionnement et à améliorer la répartition de la charge sur le flanc de denture en évitant, entre autres, une surcharge à l'engagement, des modifications de forme sont souvent introduites, elles sont effectuées sur la surface de denture.

Ces modifications correspondent le plus souvent à un enlèvement de matière de l'ordre de la dizaine de micromètres et peuvent être appliquées en pied de dent, en tête, sur toute ou sur une partie seulement de la largeur denture conduisant ainsi à une déviation du profil de la dent par rapport au profil théorique. [8]

10 Différentes formes de détérioration des engrenages

Les détériorations les plus typiques sont la rupture, les piqures, l'usure, l'écaillage, le grippage et déformations plastiques des surfaces actives. [9]

10.1 rupture des dents

Elle est due essentiellement à la fatigue, à un mauvais traitement thermique ou à une mauvaise répartition des charges. Chaque engrènement de dents produit des contraintes de flexion alternatives à allure périodique. La modification brusque de la forme de la dent au niveau de son congé de raccordement donne lieu à une concentration des contraintes. Après un certain nombre de cycles, il se produit une fissure dans la zone qui se propage jusqu'à la rupture.

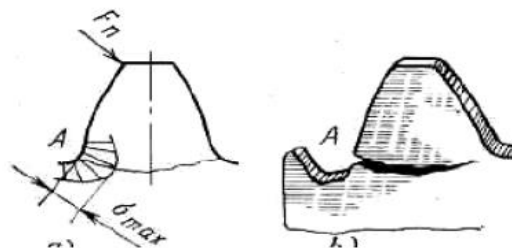


Figure 1.16 rupture des dents.

10.1.1 Rupture par surcharge instantanée

Ces ruptures surviennent le plus souvent d'un seul coup, c'est-à-dire en une seule mise en charge. Les à-coups de surcharge locaux se produisent brutalement, peuvent occasionner des cassures de certaines parties des dents. La surface de rupture se présente comme l'indique la **figure 1.17** des zones granuleuses et brillantes, dites «zones de rupture fragile » où le métal s'est rompu parce qu'il n'a pas pu supporter les contraintes de traction atteinte, et des zones plus mates dites «zones de rupture ductile »[10].

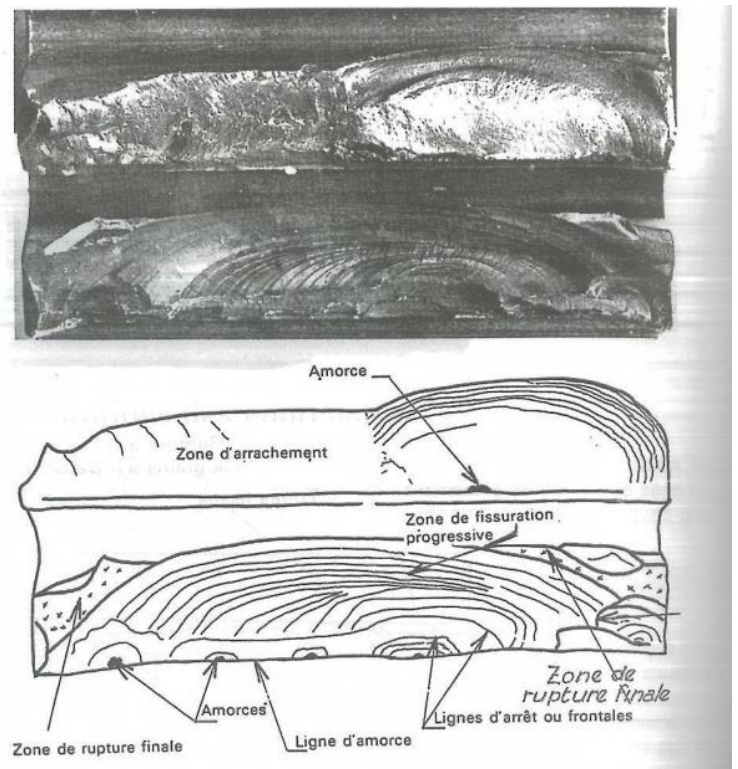


Figure 1.17 Rupture par surcharge instantanée

La surface de rupture comporte toujours, comme l'indiqué, toujours sur la **figure 1.17** :

- Une zone de progression de fissure, qui peut être mate à grains fins, ou bien striée par des «lignes d'arrêt » caractéristiques.
- Une zone de rupture par surcharge.

L'importance relative de ces deux zones dépend de la sécurité existant dans le dimensionnement des dents.[10]

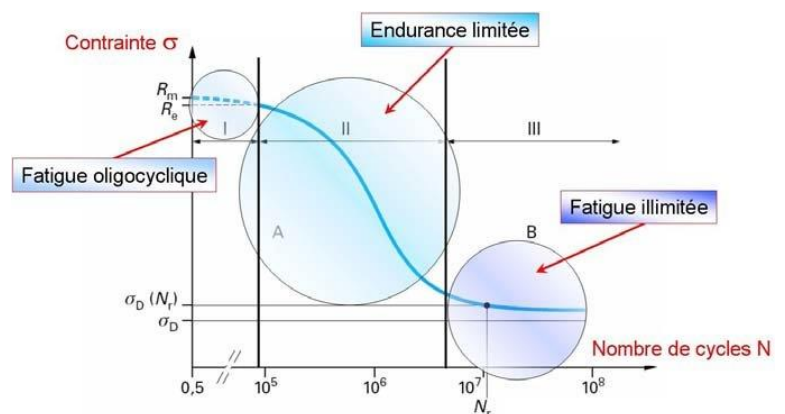


Figure 1.18 La courbe de Wohler

10.1.2 Rupture par fatigue

Les courbes de Wohler indiquent que lorsque la contrainte est supérieure à la limite de fatigue du matériau, et au bout d'un certain nombre de cycle, il se produit une rupture.[10]

10.2 Formation des piqûres

Autres types de détérioration des engrenages est la formation des piqûres en surfaces actives des dents à cause de non lubrification de celle-ci. Les piqûres perturbent le profil de la dent et augmentent de coefficient de frottement, et donc l'échauffement, ce qui va accroître des contraintes au niveau des dentures.[9]

Remarque : un choix d'huile approprié peut en retarder la progression de celle-ci. [10]

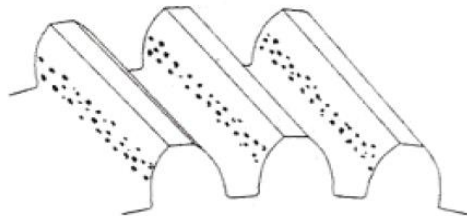


Figure 1.19.Les piqûres sur les dents.

10.3 L'usure

Phénomène local caractérisé par un enlèvement de matière dû au glissement relatif de deux surfaces l'une sur l'autre.

Il est généralement faible au centre de la dent car la vitesse de glissement est nulle. L'usure s'accélère avec l'augmentation de la force de contact et avec l'insuffisance car nous aurons un contact métal-métal [9,10]

Il peut également affecter les contraintes et les distributions de charge ce qui peut accélérer l'apparition d'autres modes de défaillance.[8]



Figure 1.20.Défaut d'usure.

10.3.1 Usure par adhésion

Apparaît lorsque la pression de contact entre deux surfaces « frottant » l'une sur l'autre est suffisante pour provoquer des déformations plastiques, des micro-soudures ou des adhésions locales.

10.3.2 Usure à trois corps

Causée par la présence d'un troisième corps (en général abrasif) véhiculé entre les deux surfaces en contact par le lubrifiant.

10.3.3 Usure par interférence

Produite en début ou en fin d'engrènement par les interférences de fonctionnement entre les dents conjuguées (mauvaise conception géométrique, flexion exagérée des dents en service).

10.4 L'écaillage

L'écaillage est le détachement de petits morceaux de la couche superficielle cémentée des dents à cause d'une mauvaise cémentation ou d'une faible épaisseur de la couche cémentée ou d'un effort important appliqué sur les dents.



Figure 1.21.Ecaillage des dents.

10.5 Le grippage

Le grippage des dents se produit dans la zone de rupture du film d'huile, dans cette zone, la pression de contact est élevée et les particules existantes des surfaces de contact se soudent. Il peut y avoir lieu si la lubrification est mal choisie ou si la vitesse de glissement est élevée, le choix correct de la nuance et de la viscosité de l'huile, de la durée d'action de la charge, de l'état de surface, de la durée de surface active, du matériau des roues, du type de rodage des dents. Tous ces paramètres empêchent un éventuel grippage.

11 Conclusion

Nous avons traités dans ce chapitre l'état de situation des engrenages, depuis la plus haute antiquité jusqu'à nos jours, où nous remarquons leurs évolutions à travers les âges. De ce fait les engrenages ont toujours constitué un moyen de transmission de puissance, en passant par les méthodes archaïque à une génération mathématique.

Nous distinguons trois grandes familles d'engrenages qui sont à nos jours très utilisés. Nous remarquons que malgré l'avancé des outils mathématique, d'analyse et d'investigation expérimentaux, nous avons toujours des dimensionnements qui sont relatifs et dépendent d'autres phénomènes qui ne peuvent être cernés ou déductible, car chaque couple d'engrenage a sa spécificité et ces conditions de fonctionnement. Au fait nous reprenons ici la fameuse phrase de J. Lefèvre dans son analyse où il disait « le jour où on arrivera à mettre tous les phénomènes pris en compte lors d'un fonctionnement d'un engrenage ce jour-là on dimensionnera un engrenage d'une manière parfait », mais apparemment ce ne sera pour demain, car à chaque avancé on se retrouve avec d'autres phénomènes et ce qui fait tout le plaisir de les étudier.

Chapitre 2

Méthodes de calcul de résistance d'un engrenage à denture droite

1 Introduction

La conception d'un engrenage met en évidence plusieurs paramètres, à savoir, le type d'engrenage les conditions de fonctionnements dans leurs milieu interne et externe, tout ces paramètres ont une influence direct ou indirect sur le comportement de contact entre les dents et de ce fait leurs dimensionnement. Les premiers travaux furent ceux de Lewis qui proposa que le dimensionnement d'une dent d'engrenage est considéré comme une poutre encastrées. Par la suite des travaux en mis en évidence d'autres facteurs tel que la concentration de contrainte qui fut adopter par les américains (méthode AGMA). Le système de normalisation internationale (ISO) pris la relève pour proposer une approche très complexe pour la vérification de résistance des dentures en ajoutant une panoplie de paramètres, ce qui ne veut pas dire que nous avons cerné le fonctionnement des engrenages au contraire nous avons surdimensionné mais le problème n'est pas pour autant régler. Dans ce chapitre nous avons synthétisés les différentes méthodes de calculs concernant le dimensionnement et la vérification des engrenages.

2 Caractéristiques d'un engrenage conique

Un engrenage conique se définit par les caractéristiques géométriques indiquées par la (figure 2.1). Les différents détails de calcul sont indiqués en (annexe 1 du Chapitre2).

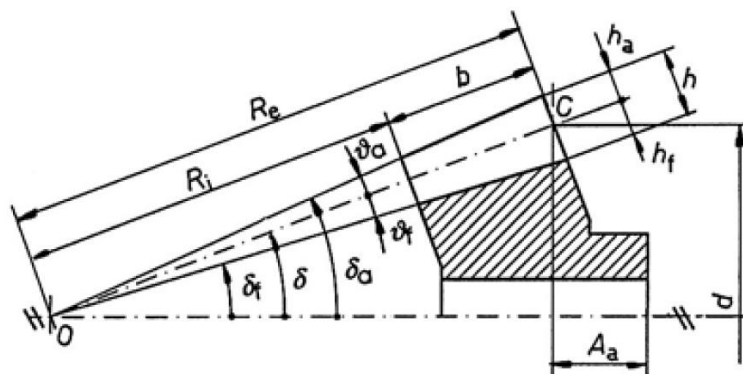


Figure2.1 Caractéristiques d'un engrenage conique

3 Efforts exercés sur les dentures d'un engrenage conique à denture droite [3, 5]

On considère un engrenage conique comme indiqué par la (figure 2.2). L'effort est supposé concentré au milieu de la denture. (Cercle primitif moyen)

La composante tangentielle:

$$F_t = 980\,000 \frac{P_1}{N_1 \cdot r_{m1}} \quad (2.1)$$

L'effort normal:

$$F_n = F_t / \cos \alpha \quad (2.2)$$

La composante axiale sur la roue menée:

$$F_{x2} = F_t \tan \alpha \cdot \cos \delta_1 \quad (2.3)$$

Composante radiale sur la roue menée :

$$F_{r2} = F_t \cdot \tan \alpha \cdot \sin \delta_1 \quad (2.4)$$

Les composantes de la réaction de la denture de la roue sur celle du pignon sont :

- La force tangentielle F_t .
- L'effort axial sur le pignon F_{x1} : égale et directement opposée à F_{r2}
- L'effort radial sur le pignon F_{r1} : égale et directement opposée à F_{x2}

$$T_1 = \frac{P \times 9\,549}{N_1} \quad (2.5)$$

$$T_2 = \frac{P \times 9\,549}{N_2} \quad (2.6)$$

- Effort tangentiel:

$$F_t = \frac{T \times 2\,000}{d} \quad (2.7)$$

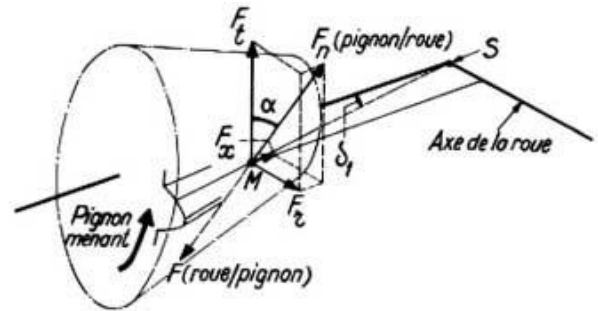


Figure 2.2 Efforts exercé sur la dent

- Effort tangentiel moyen:

$$F_{m.t} = \frac{2\,000T_1}{d_{m1}} = \frac{2\,000T_2}{d_{m2}} \quad (2.8)$$

- La puissance :

$$P = \frac{T_{1-2}N_{1-2}}{9\,549} = \frac{T_{1-2}\omega_{1-2}}{1\,000} = \frac{F_{mt}V_{mt}}{1\,000} \quad (2.9)$$

Avec :

$$V_{mt} = \frac{d_{m1-2}N_{1-2}}{19\,098} \quad (2.10)$$

4 Les méthodes de calcul de résistance

4.1 Méthode simplifiée [11,12]

4.1.1 Engrenage cylindrique à denture droite

Généralement deux couples de dents sont en prise quand l'effort supposé « F » est appliqué à l'extrémité de l'une d'elles (hypothèse défavorable), seule la composante tangentielle produit une flexion sur les dents comme indiqué sur la (figure 2.3), qui est assimilée à une pièce encastrée à une extrémité et libre de l'autre, chargé par l'effort « F_t » a son extrémité libre.

« F_t » étant considérée perpendiculaire à l'axe de dent (la dent est supposée fléchie), section dangereuse étant à la racine, pour le calcul de la résistance à la flexion.

La condition de la résistance à la flexion de la dent s'écrit comme suit :

$$\sigma = \frac{M_{f\,max}}{\frac{I}{v}} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{I}{v} \geq \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{adm}} \quad (2.11)$$

Avec:

$$\text{Moment fléchissant : } M_{f\,max} = F_t \cdot h \quad (2.12)$$

$$\text{Module de section: } \frac{I}{V} = \frac{b \cdot e^2}{6} \quad (2.13)$$

L'effort tangentiel exprimé en fonction du couple :

$$F_t = \frac{2C}{Z.m} \quad (2.14)$$

En denture normale :

$$h \approx 2.25me \approx 1.6mb = k m \quad (2.16)$$

Ce qui donne en remplaçant dans une des deux formules pratiques pour un effort tangentiel, ou un couple connu:

$$m^2 \geq 5 \frac{F_t}{K\sigma_{adm}} \Rightarrow m = 2.23 \sqrt{\frac{F_t}{K\sigma_{adm}}} \quad (2.17)$$

$$m^3 \geq \frac{11 C}{K\sigma_{adm}Z} \Rightarrow m \geq 2.22 \sqrt[3]{\frac{C}{K\sigma_{adm}Z}} \quad (2.18)$$

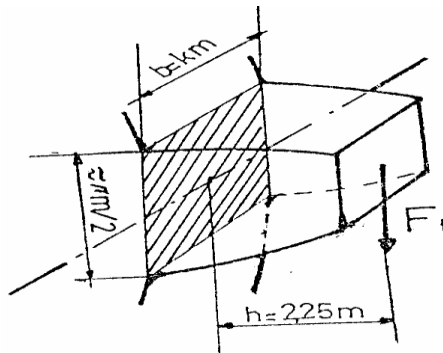


Figure 2.3 Comportement à la résistance d'une denture

4.1.2 Engrenage conique à denture droite

La section d'une dent de roue conique à considérer pour le calcul de la résistance est la section moyenne, mesurée au milieu de la largeur (b) de la dent. Le calcul s'effectuera donc sur un module moyen (m_{moy}), il faudra ensuite transposer ce module moyen en module effectif (m) valable au cône complémentaire externe en appliquant la relation :

$$m = d. \frac{m_{moy}}{d_{moy}} \quad (2.19)$$

La formule indiquée pour les engrenages parallèles droits est modifiée comme suit :

$$m_{moy}^2 = 5 \frac{F_t}{K' \delta_{adm}} \Rightarrow m_{moy} = 2.23 \sqrt{\frac{F_t}{K' \sigma_{adm}}} \quad (2.20)$$

$$m_{moy}^3 \geq \frac{11 C}{K \sigma_{adm} Z} \Rightarrow m_{moy} \geq 2.22 \sqrt[3]{\frac{C}{K' \sigma_{adm} Z}} \quad (2.21)$$

Avec : $K' = b/m_{moy}$ (2.22)

Le module moyen m_{moy} étant plus faible que le module m , K' est plus grand que le facteur K

4.2 La méthode Lewis [13]

Lewis, en 1893, propose que la section de contrainte superficielle maximale, ou la section critique se situe au point de tangence de la parabole avec le profil de la dent.

Cette méthode simple est à l'origine des autres méthodes et est encore utilisé aujourd'hui pour des approximations et des études simplifiées ne tenant pas compte du phénomène de concentration de contraintes au pied de la dent (rayon r_f) et négligeant les conditions de service (chocs, fatigue...).

La dent est calculé en flexion comme une poutre encastrée soumise à un effort F appliqué à son extrémité, et suppose qu'une seule dent est prise.

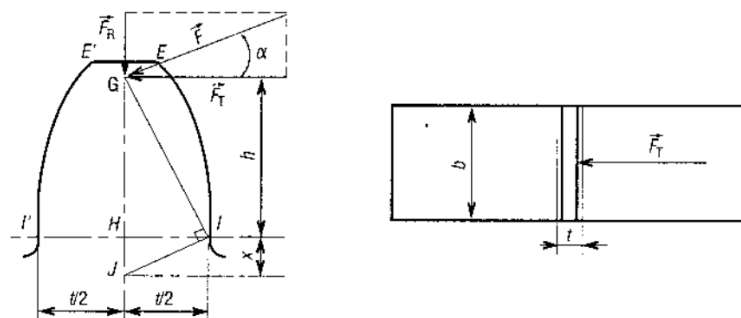
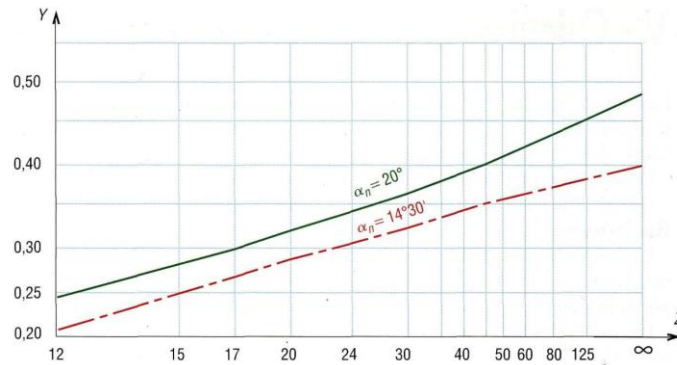


Figure 2.4 Méthode de Lewis

La résistance des matériaux montre que la contrainte de flexion est maximale en I (I') et qu'en ce point :

$$\sigma_{max} = \frac{F_t}{b.m.Y} = \frac{F_t}{K m^2 Y} \leq R_{pe} \quad (2.23)$$

La valeur de Y dépend de l'angle de pression α et du nombre de dents Z.



Au besoin, un coefficient correcteur K_v permet de tenir compte des effets de la vitesse circonférentielle au diamètre primitif ($V=7\pi nr/30$) en [m/s]

$$\sigma_{max} = \frac{F_t}{b.m.YK_v} \leq R_{pe} \quad (2.24)$$

$$\text{Avec : } K_v = \frac{6}{6+V} \quad (2.25)$$

4.3 La méthode AGMA [11]

L'American Gear Manufacturer Association (AGMA) utilise pour le calcul des contraintes en tension dans les engrenages la formule proposée par Dolan et Broghamer en 1942. Après des études photo élastiques similaires à celles de Timoshenko et Baud, elle trouve que le facteur de concentration de contraintes, qui multiplie la formule de Lewis modifiée (flexion/compression), est aussi lié à la position de la force sur la dent. Suite à cela, les chercheurs introduisent une formule empirique pour calculer le facteur de concentration de contraintes en fonction de la section critique, de la hauteur de la charge, du rayon de courbure au pied de la dent et de coefficients mesurés par photoélasticité (ceux-ci varient avec l'angle de pression de la dent).

L'approche américaine proposée par l'AGMA repose sur la formule de Lewis écrite en fonction du pas diamétral.

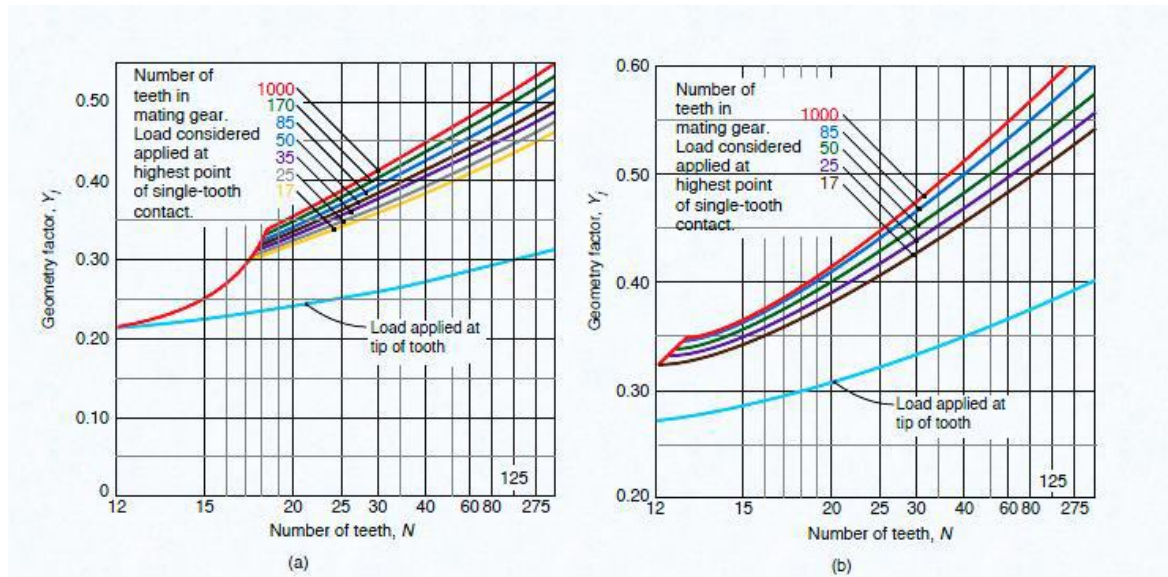
$$P_d = \frac{1}{m_0} \quad (2.26)$$

$$\sigma_0 = \frac{F_t P_d}{b J} K_m \quad (2.27)$$

$$\sigma_0 = \frac{F_t}{b m_0 J} K_m \quad (2.28)$$

4.3.1 Le facteur de forme J

Le facteur J remplace le coefficient de Lewis. Il tient compte de l'effet de géométrie de la dent. Il est déterminé suivant un algorithme complexe défini par la norme AGMA 908-B89. Remarquons que les facteurs J sont différents pour les pignons et pour les roues. Le facteur J dépend en particulier de la géométrie du pied de la dent et du nombre de dents Z .



(a) : pour $\alpha=20^\circ$

(b) : pour $\alpha=25^\circ$

Figure 2.5 facteur de forme J

4.3.2 Facteur de répartition de charge K_m :

Il exprime la diffusion non-uniforme de la charge à travers la largeur de visage. Il dépend de l'exactitude du support, des roulements, du débattement d'axe et de l'exactitude des vitesses (Tableau 2.1).

Caractéristiques d'appui	Largeur de visage (millimètre)			
	0-50	150	225	400 up
Les supports précis, petits dégagements de roulement, débattement minimum, précision embraye	1.3	1.4	1.5	1.8
Supports moins rigides, vitesses moins précises, contact à travers le plein visage	1.6	1.7	1.8	2.2
Exactitude et support tels que moins que le contact de plein-visage existe	Plus de 2.2	Plus de 2.2	Plus de 2.2	Plus de 2.2

Tableau 2.1 facteur de répartition des charges.

Pour estimer la contrainte maximale de dimensionnement AGMA tiennent encore d'autres facteurs tels que :

4.3.3 Facteur dynamique K_v

Le facteur K_v ou facteur dynamique tient compte des charges dynamiques et des vibrations induites par les impacts dent contre dent.

Les charges vibratoires sont appelées **erreurs de transmission** et sont plus pénalisantes avec les engrenages de moindre précision.

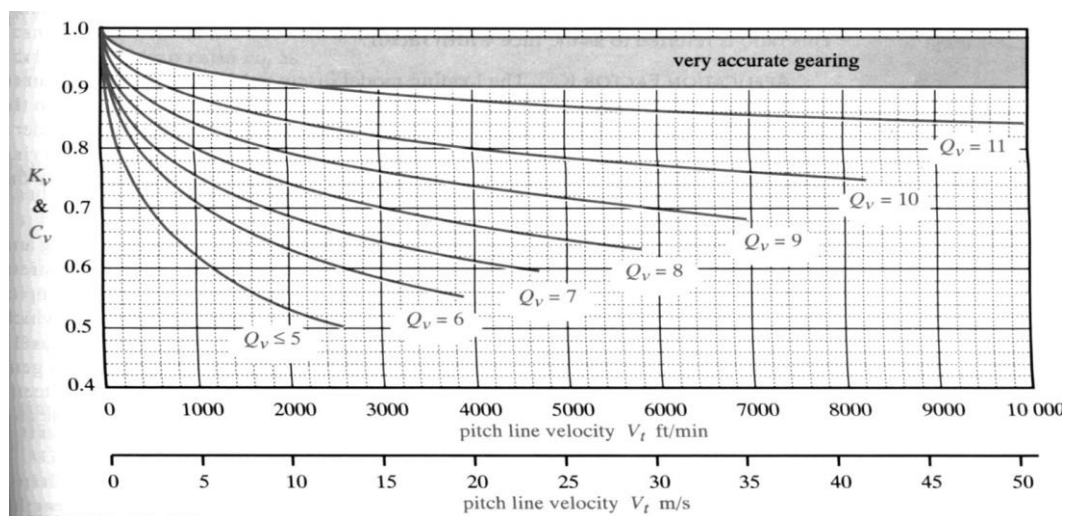


Figure 2.6 facteur dynamique K_v

En l'absence de données, on peut approcher K_v par les courbes suivantes.

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{200V_t}} \right)^B \quad (2.29)$$

Les facteurs A et B sont définis par :

$$A = 50 + 56(1 - B) \quad (2.30)$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} \quad (2.31)$$

Pour : $6 \leq Q_v \leq 11$

Ces courbes sont valides en dessous de la vitesse tangentielle maximale :

$$V_{t \max} = \frac{[A+(Q_v-3)]^2}{200} \quad (2.32)$$

Pour des engrenages de qualité $Q < 5$

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200V_t}} \quad (2.33)$$

4.3.4 Facteur d'application de la charge K_a

L'effort F_n n'est pas appliqué progressivement mais un effet de choc intervient. La fluctuation des contraintes dans la dent provient de la variabilité de la charge. Majong doit introduire un effort tangentiel or:

$$F'_t = F_t K_a K_a > 1 \quad (2.34)$$

Machine entraînée machine d'entraînement	Machine entraînée		
	Uniforme	choc modéré	chocs violents
Uniforme (Moteurs électriques, Turbine)	1.00	1.25	< 1.75
léger choc (Moteur multicylindre).	1.25	1.50	< 2.00
choc moyenne (moteur monocylindre)	1.50	1.75	< 2.25

Tableau2.2 facteur d'application de la charge K_a

4.3.5 Facteur d'échelle K_s

Le facteur de taille K_s est similaire au facteur de taille introduit pour la résistance à la fatigue. Les engrenages de grande taille ont une moindre résistance.

4.3.6 Facteur d'épaisseur de jante K_B

Le facteur d'épaisseur de jante K_b a été récemment introduit par l'AGMA pour tenir compte de situations dans lesquelles un engrenage de grand diamètre, fait d'une jante et de rayons plutôt que d'un tambour solide a une faible épaisseur de jante. Ceux-ci peuvent périr à cause des contraintes radiales dans la jante avant rupture de la dent.

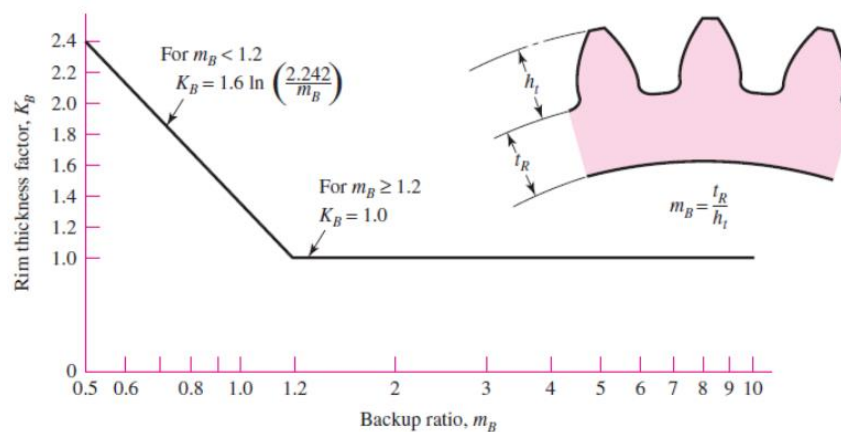


Figure 2.7 Facteur d'épaisseur de jante K_B

4.3.7 Facteur de roues folles K_I

Le facteur K_I doit refléter le fait que les engrenages sur roue folle sont soumis à plus de cycles par unité de temps et plus de charges alternées de hautes amplitudes que leur homologues montés fixes.

$K_I = 1,25$ pour les roues folles

$K_I = 1,00$ pour les roues fixes.

La contrainte maximale est donnée par :

$$\sigma_{max} = \sigma_0 \frac{K_a}{K_v} K_s K_B K_I \quad (2.35)$$

4.4 Influence de la vitesse, de l'usure et du lubrifiant [12]

4.4.1 La vitesse

La résistance diminue si la vitesse tangentielle augmente. Les erreurs de division, de taillage, entraînent des irrégularités de rotation. L'inertie des masses provoque des surcharges dynamiques

Les charges pratiques R conseillées par le catalogue Piat, semblent répondre au coefficient de sécurité égal à :

$$\frac{\sigma_r}{R} = 5 \times \frac{8+V}{8} \quad (2.36)$$

4.4.2 L'usure

Elle résulte de la combinaison de la pression locale et du glissement, le catalogue de Piat donne :

$$U = \frac{F}{K m} \cdot \frac{N}{\pi m} \leq U_{lim} \quad (2.37)$$

4.4.3 Le lubrifiant

Celui-ci modifie la répartition de la pression, ainsi la formule de Hertz statique.

$$p = 0.6 \sqrt{\frac{F \rho}{l E}} \quad (2.38)$$

$$\text{En : } p = 0.6 \sqrt{\frac{F \rho^{0.8}}{l E}} \quad (2.39)$$

4.5 La méthode ISO [3, 5]

La méthode générale de calcul de résistance des engrenages parallèles élaborée par l'ISO (International Organization for Standardization) peut être considérée comme définitivement adoptée. Cette méthode générale est très complexe ; elle fait intervenir tous les facteurs influençant de près ou de loin sur la résistance des dentures à la pression superficielle et à la rupture. C'est donc une méthode de vérification de la capacité de charge d'un engrenage dont on connaît déjà tous les éléments.

Pour rendre cette méthode générale ISO réellement utilisable par la grande majorité des techniciens, il est vite apparu qu'il fallait trouver des méthodes simplifiées pour les différents types d'applications d'engrenages rencontrés :

La méthode personnelle qu'Henriot propose est valable pour les engrenages dits de Mécanique générale, c'est-à-dire la grande majorité des cas, quelque soit le couple transmis, pour des vitesses tangentielles raisonnables, disons jusqu'à 40m/s, et des dessins d'engrenages n'ayant aucun caractère extrême. De plus, nous verrons que cette méthode est réversible, c'est-à-dire qu'elle permet non seulement la vérification d'un engrenage existant, mais également la

détermination complète des caractéristiques d'un engrenage à partir de la puissance transmise, des vitesses, de la classe de qualité de denture envisagée, de l'application ...etc.

4.5.1 Engrenage parallèles:

4.5.1.1 Résistance à la pression superficielle

La formule générale est donnée sous la forme suivante :

$$Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_B Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_1} \frac{u \pm 1}{u}} K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha} \leq \frac{\sigma_{Hlim}}{S_{Hmin}} Z_{NT} Z_L Z_R Z_V Z_W \quad (2.40)$$

➤ Première transformation possible de la formule générale

$$F_{tadm(\frac{1}{2})} = \sigma_{H.lim(\frac{1}{2})}^2 b \cdot d_1 \left(\frac{u}{u \pm 1} \right) \frac{1}{K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}} \left(\frac{Z_N(\frac{1}{2}) Z_L Z_R Z_V Z_W}{Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta} \right)^2 \quad (2.41)$$

➤ Deuxième transformation possible de la formule générale

$$P_{adm(\frac{1}{2})} = 0,524 \times 10^{-6} b d_1^2 n_1 \left(\frac{u}{u \pm 1} \right) \times \sigma_{H.lim(\frac{1}{2})}^2 \frac{1}{K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}} \left(\frac{Z_N(\frac{1}{2}) Z_L Z_R Z_V Z_W}{Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta} \right)^2 \quad (2.42)$$

La pression d'Hertz admissible $\sigma_{H.lim}$ pour le matériau considéré, pour une durée infinie, et une probabilité de détérioration de 1 %

Pour des risques de détérioration différents de 1%, on fait intervenir le facteur de fiabilité K_R :

- 10% de risques de détérioration : $K_R=0,80$
- 1% $K_R=1$
- Très grande fiabilité : $K_R=1,25$ (multiplier K_A par K_R).

On obtient donc la formule simplifiée générale suivante :

$$P_{adm} \cdot K_B = C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 \quad (2.43)$$

Ou : $C_1 = 0,524 \left(\frac{u}{u+1} \right) n_1$ (2.44)

➤ **Facteur de service K_B**

Nous ne considérons que les transmissions par moteur électrique, ou éventuellement par turbine. La (figure 2.9) permet une détermination pratique du facteur de service K_B en fonction du degré de choc de l'application, et qui correspond à la norme AGMA (American Gear Manufacturers Association).

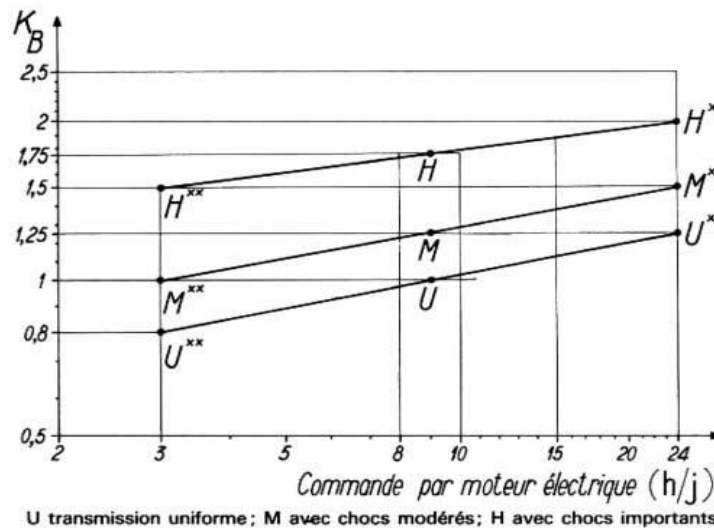


Figure 2.8 Facteur de service K_B (d'après la norme AGMA 420-04)

Il est donné par la formule suivante :

$$K_B = \frac{K_A K_R}{Z_N^2} \quad (2.45)$$

➤ **Facteur géométrique combiné C_2**

La (figure 2.10) donne une très bonne valeur de C_2 en fonction de l'angle d'inclinaison β et pour les angles de pression réels de 20 et 25°.

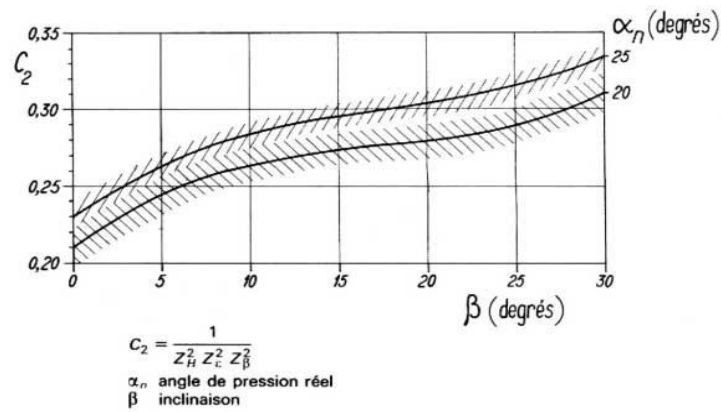


Figure 2.9 Facteur géométrique combiné C_2

Il est donné par la formule suivante:

$$C_2 = \frac{1}{Z_H^2 Z_\epsilon^2 Z_\beta^2} \tag{2.46}$$

➤ **Facteur combiné de vitesse C_3**

Ce facteur regroupe les deux facteurs K_V et Z_V faisant intervenir la vitesse tangentielle. La (figure 2.11) donne la valeur moyenne pour une denture hélicoïdale en fonction de la vitesse tangentielle v (m/s)

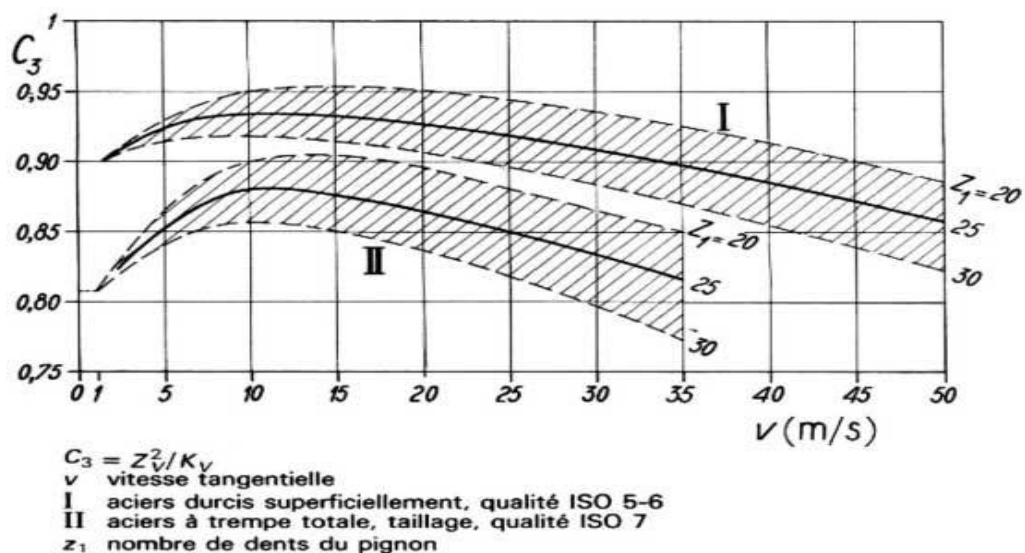


Figure 2.10 facteur combiné de vitesse

Il est donné par la formule suivante :

$$C_3 = \frac{z_V^2}{K_V} \quad (2.47)$$

Diviser cette valeur par le facteur correctif dans le (tableau 2.3) présenté ci-dessous :

qualité ISO	$\frac{v z_1}{100}$					
	1	2	4	6	8	10
5-6	≈ 1	1,03	1,07	1,10	1,14	1,17
7	1,05	1,08	1,14	1,19	1,23	1,27

Tableau 2.3 facteurs correctifs du facteur combiné de la vitesse

➤ Facteur combiné de distribution C_4

Il est donné par la formule suivante :

$$C_4 = \frac{10^{-6} b d_1^2}{K_{H\beta} H_{H\alpha}} \quad (2.48)$$

➤ Pour des dentures de précision, la valeur est pratiquement $K_{H\alpha}=1.0$ (méthode générale C de la méthode ISO)

➤ $K_{H\beta}$: méthode générale D, avec les conditions d'utilisation suivantes :

- Qualité de denture indiquée sur le dessin.
- Position du pignon pas trop excentrée par rapport à la mi-distance des paliers.
- En charge, différence faible des déformations des deux paliers.
- Carter rigide.
- Pas de modification longitudinale des hélices.
- Largeur de denture comprise entre 50 et 500mm.
- Rapport $\frac{\text{largeur de denture } b}{\text{diamètre primitif du pignon } d_1} < 2$

- erreur totale de distorsion relative des dentures conjuguées inférieure à 40µm.
- Charge unitaire (par millimètre) suffisante.

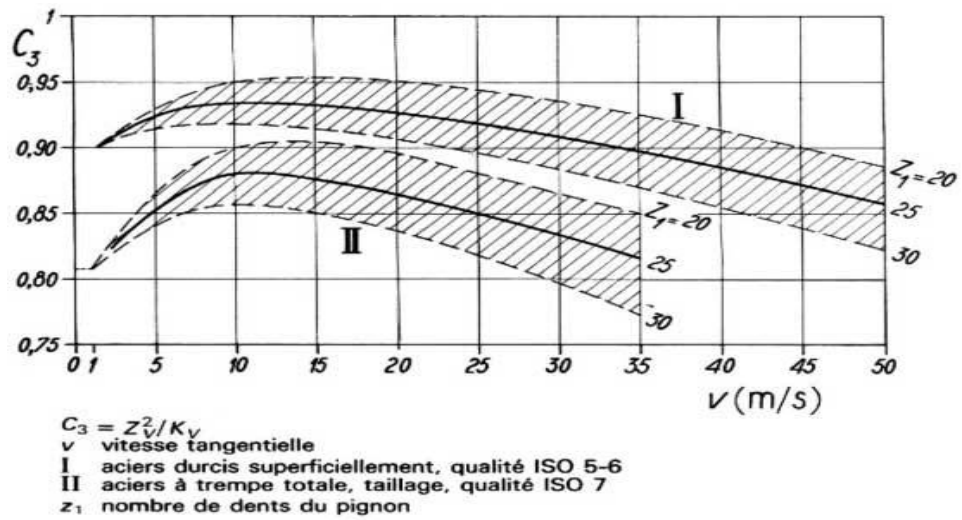


Figure 2.11 facteur combiné de distribution C_4

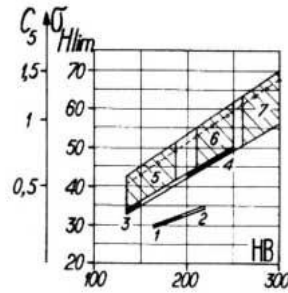
➤ **Facteur combiné de matériau C_5**

Il est donné par la formule suivante :

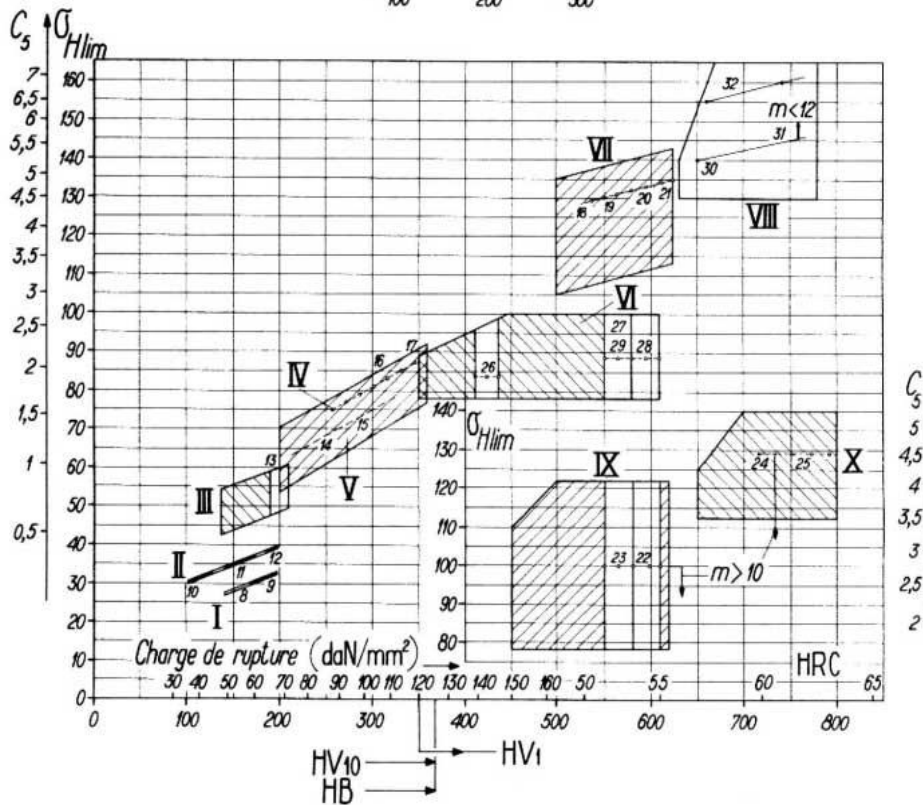
$$C_5 = \frac{\sigma_{H.lim}^2(\frac{1}{2})}{Z_E^2} \tag{2.49}$$

La (figure 2.12) donne directement sa valeur pour les différentes catégories de matériaux

Ⓐ fontes



Ⓑ aciers



- I aciers moulés non alliés
- II aciers de construction
- III aciers non alliés, traités dans la masse, normalisés
- IV aciers alliés, traités dans la masse et revenus [fortement alliés au Ni-Cr-Mo (points 16 et 17) ou faiblement alliés au Cr-Mo (points 14 et 15)]
- V aciers moulés faiblement alliés
- VI aciers traités dans la masse ou aciers de cémentation, nitruration au bain ou gazeuse de courte durée
- VII aciers traités dans la masse, durcis superficiellement à la flamme ou par induction
- VIII aciers alliés de cémentation, cémentés, trempés [fortement alliés (point 32) ou faiblement alliés avec modules élevés $m > 12$ (points 30 et 31)]

- IX aciers traités dans la masse ou aciers de cémentation, nitruration gazeuse de longue durée
- X aciers de nitruration spéciaux, nitruration gazeuse de longue durée

$$C_5 = \left(\frac{\sigma_{H,lim}}{Z_E} \right)^2$$

$\sigma_{H,lim}$ est exprimé en daN/mm^2 ($1 \text{ daN}/\text{mm}^2 = 10 \text{ MPa}$)

Figure 2.12 facteur combiné de matériaux C_5

➤ Facteur combiné de film d'huile C_6

Donné par la relation :

$$C_6 = (Z_L Z_R Z_W)^2 \tag{2.50}$$

Pour les principales combinaisons de dentures, nous obtenons, en considérant $Z_L \approx 1$.

- pignon et roue : aciers durcis superficiellement et dentures rectifiées pour $Z_R \approx 1$ et $Z_W \approx 1$

Soit : $C_6 = 1$

- pignon en acier durci superficiellement, denture rectifiée et la roue en acier trempé dans la masse ($HB \approx 300$), denture taillée par génération pour $Z_R \approx 0.85$ et $Z_W \approx 1.10$

Soit : $C_6 = 0.87$

- pignon et roue : aciers trempés dans la masse, dentures taillées par génération ($Z_W = 1$) :

Soit : $C_6 = \overline{0.85^2} = 0.72$

- avec un rodage après taillage :

Soit : $C_6 = \overline{0.90^2} = 0.81$

4.5.1.2 Résistance à la rupture.

La formule générale s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{F_t}{b m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta (K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}) \leq \frac{\sigma_{F.lim}}{S_{F.min}} Y_{ST} Y_{NT} Y_{\delta.relT} Y_{R.relT} Y_X \quad (2.51)$$

Avec: $\frac{F_t}{b m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta$: la contrainte de rupture de base.

- **1^{er} transformation possible de la formule générale**

$$F_{t.adm(\frac{1}{2})} = \frac{\sigma_{F.lim(\frac{1}{2})} Y_{ST} Y_{NT(\frac{1}{2})} Y_{\delta.relT} Y_{R.relT} Y_X (b m_n)}{(Y_{Fa} Y_{Sa})_{(\frac{1}{2})} (Y_\varepsilon Y_\beta) K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}} \quad (2.52)$$

- **2^{eme} transformation possible de la formule générale**

$$P_{adm(\frac{1}{2})} = 0,524 \times 10^{-6} b \cdot m_n^2 z_1 n_1 \frac{(\sigma_{F.lim} Y_{ST})_{(\frac{1}{2})} Y_{NT(\frac{1}{2})} Y_{\delta.relT} Y_{R.relT} Y_X}{(Y_{Fa} Y_{Sa})_{(\frac{1}{2})} (Y_\varepsilon Y_\beta \cos \beta) K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}} \quad (2.53)$$

Pour des risques de détérioration différents de 1%, faire intervenir le facteur de fiabilité K_R (voir les valeurs pour la résistance à la pression superficielle d'un engrenage parallèle droit).

➤ **3^{ème} transformation possible de la formule générale**

$$\left(\frac{F_{t.adm}}{b \cdot m_n}\right)_{(1)} = \frac{(\sigma_{F.lim} Y_{ST})_{(1)} Y_{NT} Y_{\delta.rel} Y_{R.rel} Y_X}{(Y_{Fa} Y_{Sa})_{(1)} (Y_{\epsilon} Y_{\beta}) K_A K_V K_F K_{F\beta} K_{F\alpha}} \quad (2.54)$$

On peut alors écrire la formules simplifiées générale par :

$$P_{adm} K_B = C_{B1} C_{B2} C_{B3} C_{B4} C_{B5} C_{B6} C_{B7} \quad (2.55)$$

$$\frac{F_{t.adm}}{b m_n} K_B = C'_{B2} C_{B3} C_{B4} C'_{B5} C_{B6} C_{B7} \quad (2.56)$$

$$\text{Avec : } C_{B1} = 0,524 \times 10^{-6} Z_1 m_n^2 n_1 \quad (2.57)$$

➤ **Facteur de service K_B**

Il est présenté par l'équation ci-dessous et a les mêmes valeurs indiquées pour le cas de la résistance à la pression superficielle.

$$K_B = \frac{K_A K_R}{Y_{NT}} \quad (2.58)$$

➤ **Facteur combiné géométrique C_{B2} et C'_{B2}**

Il est présenté par les équations ci-dessous :

$$C_{B2} = \frac{1}{Y_{\epsilon} Y_{\beta} \cos \beta} \quad (2.59)$$

$$C'_{B2} = \frac{1}{Y_{\epsilon} Y_{\beta}} \quad (2.60)$$

La (**figure 2.13**) présenté ci-dessous, donne ces facteurs en fonction du rapport de conduite ϵ_α et d'inclinaison β

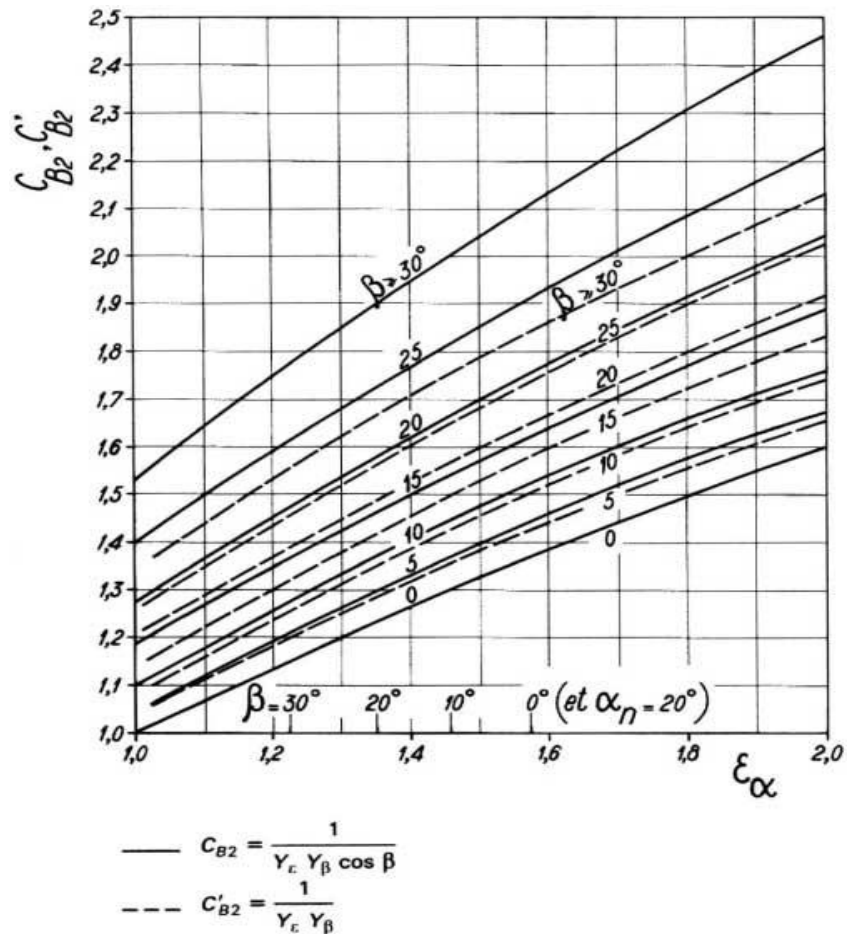


Figure 2.13 facteurs combinés géométriques.

➤ **Facteur combiné de distribution C_{B3}**

La (figure 2.14) donne la valeur de C_{B3} , pour denture droite et hélicoïdale, ayant différentes qualités ISO (5, 6, 7 et 8), en fonction de la vitesse tangentielle v (m/s) et du nombre de dents z_1 du pignon. Ces valeurs correspondent à celles de la méthode C de la méthode générale. Elles sont largement valables pour les engrenages de mécanique générale fonctionnant pratiquement toujours au-dessous de la vitesse critique de résonance des dents.

Il est donné par la relation :

$$C_{B3} = \frac{1}{K_V} \tag{2.61}$$

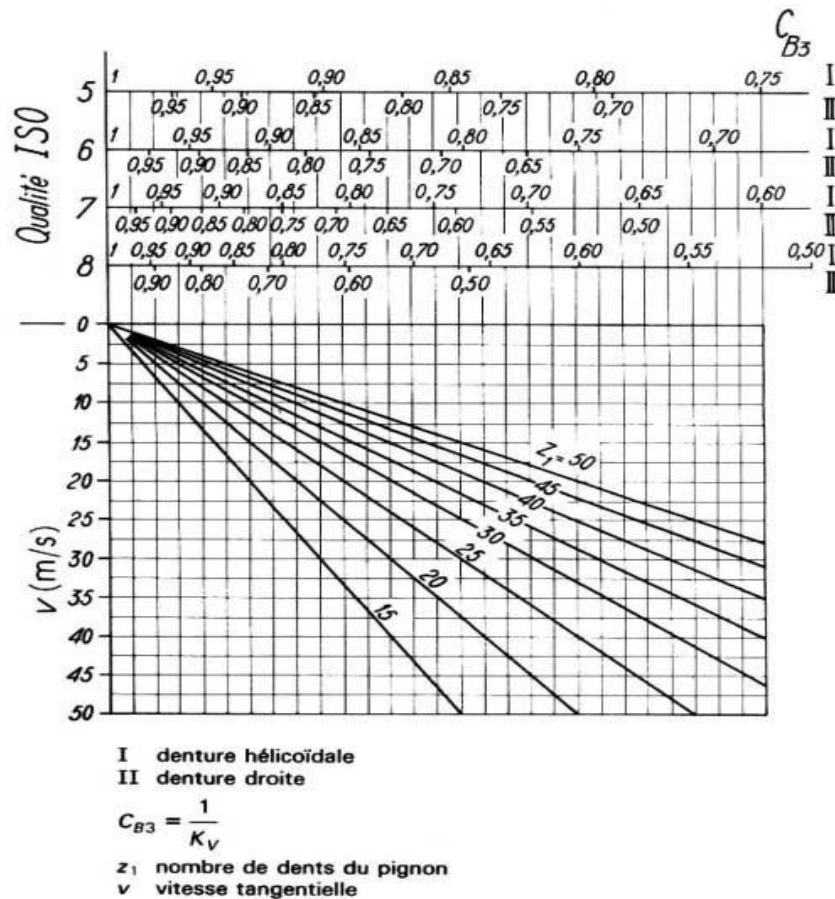


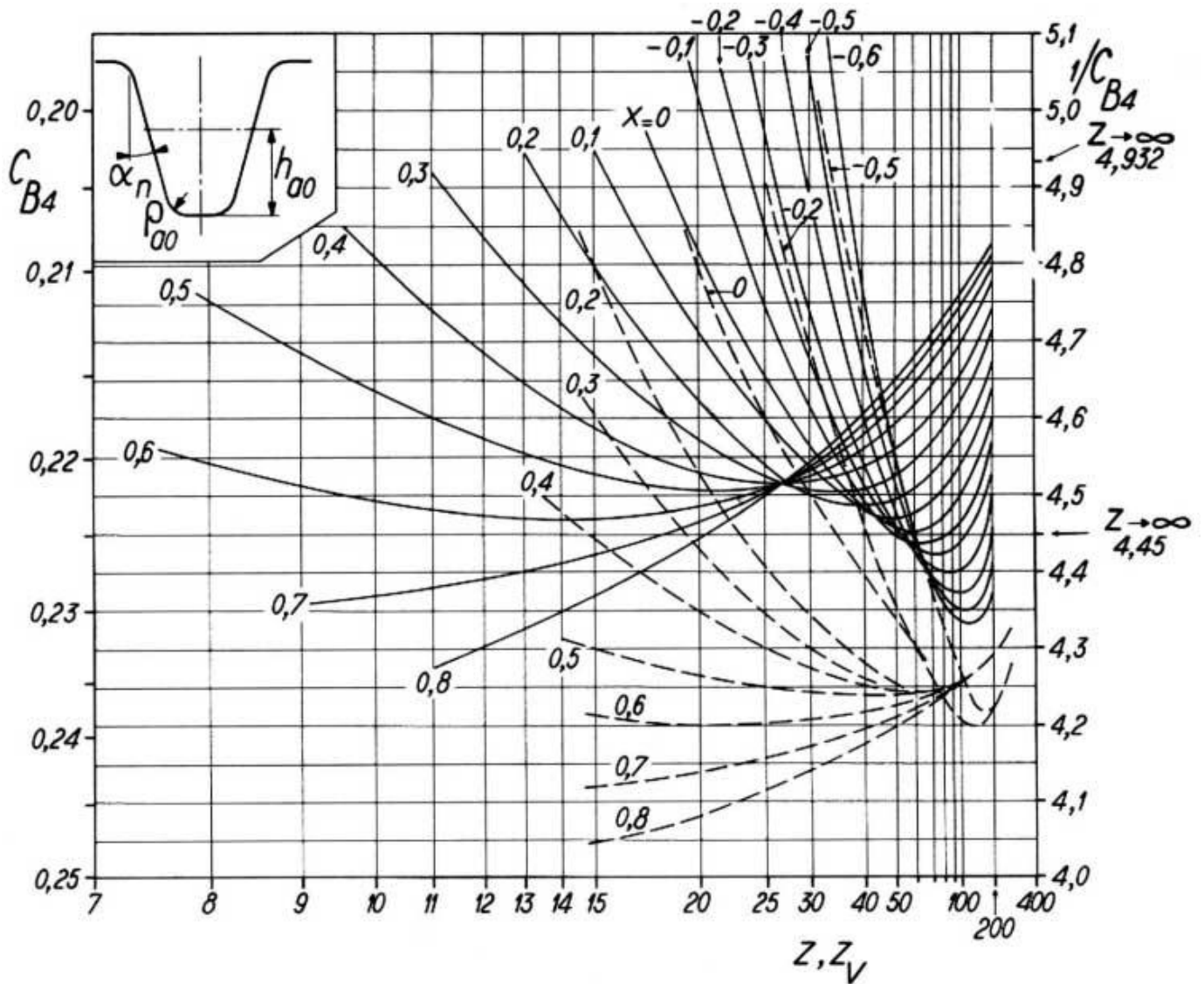
Figure 2.14 facteur combiné de distribution C_{B3}

➤ **Facteur combiné de forme C_{B4}**

Donné par la formule :

$$C_{B4} = \frac{1}{Y_{Fa}Y_{Sa}} \tag{2.62}$$

La (figure 2.15) présenté ci-dessous, donne la valeur de C_{B4} pour la crémaillère génératrice normalisée, en fonction du nombre de dents z de la denture droite (ou du nombre de dents virtuel $Z_v = Z/\cos 3 \beta$ de la denture hélicoïdale) et du déport x . Il est également possible de déterminer C_{B4} dans le cas du taillage avec outil à protubérance (courbes en tirets).



— $\alpha_n = 20^\circ; h_a/m_n = 1; h_{a0}/m_n = 1,25; \rho_{a0}/m_n = 0,25$
 - - - $\alpha_n = 20^\circ; h_a/m_n = 1; h_{a0}/m_n = 1,40; \rho_{a0}/m_n = 0,40;$
 protubérance $Pro/m_n = 0,05$

x déport
 z, z_v nombres de dents (réel, virtuel)

$$C_{B4} = \frac{1}{Y_{Fa} Y_{Sa}}$$

Pour $z \rightarrow \infty$, $1/C_{B4} = 4,932$ (sans protubérance) ou 4,45 (avec protubérance)

Échelles arbitraires sur les deux axes.

Figure 2.15 facteur combiné de forme C_{B4}

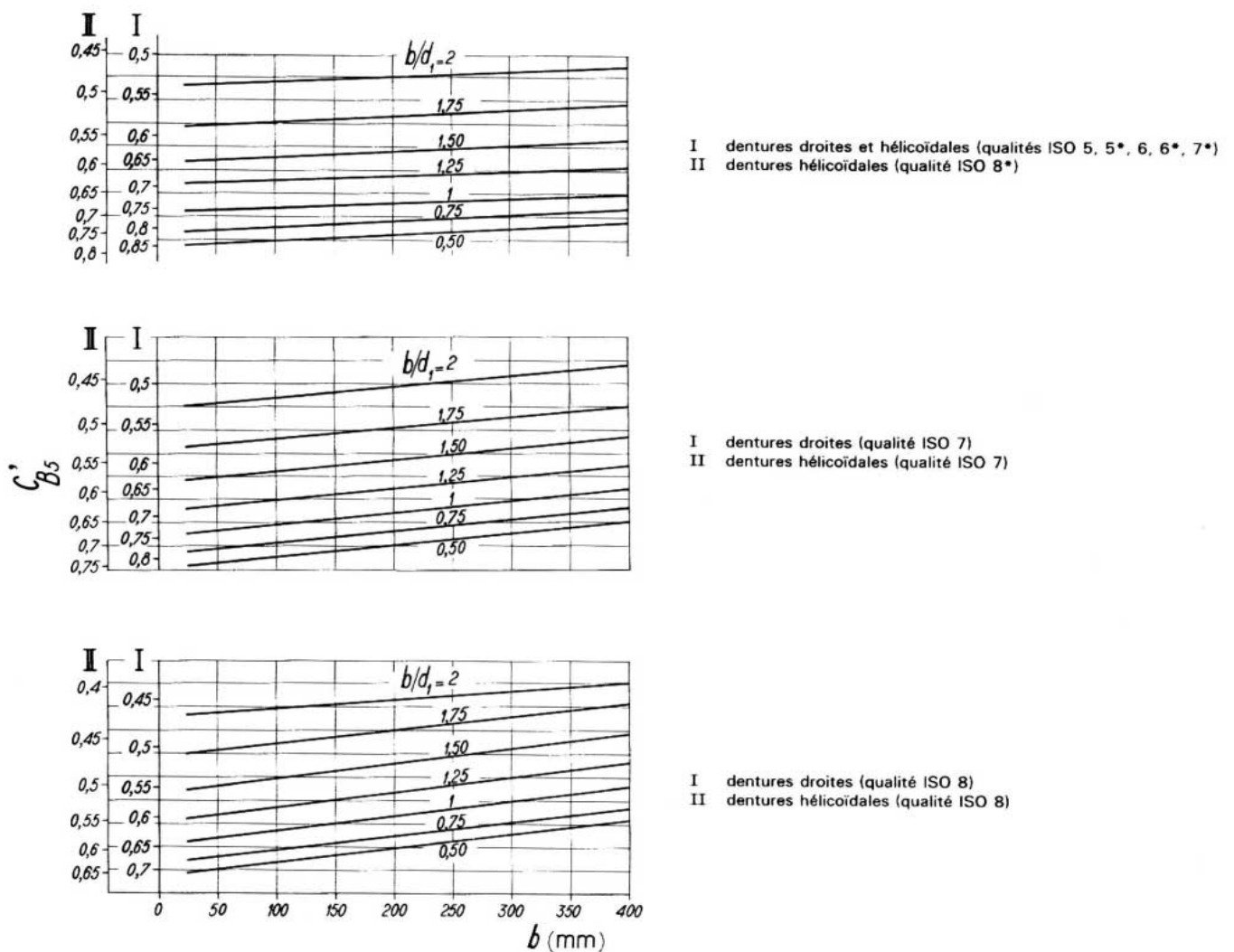
➤ **Facteur C_{B5}**

Il est donné par les formules suivantes :

$$C_{B5} = \frac{b}{K_{F\beta} F_{F\alpha}} \tag{2.63}$$

$$C'_{B5} = \frac{1}{K_{F\beta} F_{F\alpha}} \tag{2.64}$$

La (figure 2.16) donne la valeur de C_{B5} en fonction de la largeur de denture b , du rapport b/d_1 pour les trois classes de précision définies à propos de $K_{H\beta}$:



$$C'_{B5} = \frac{1}{K_{F\beta} K_{F\alpha}}$$

Les valeurs de C'_{B5} sont données sans modification longitudinale de denture pour des aciers trempés dans la masse.

Pour des dentures durcies superficiellement, considérer la qualité 8.

Figure 2.16 facteur C'_{B5}

➤ **Facteur C_{B6} :**

Donné par la formule :

$$C_{B6} = \sigma_{F.lim} Y_{ST} \tag{2.65}$$

La (figure 2.17) donne directement la valeur de $(\sigma_{F.lim} Y_{ST})$ pour la valeur $Y_{ST} = 2,10$ pour différentes catégories de matériaux.

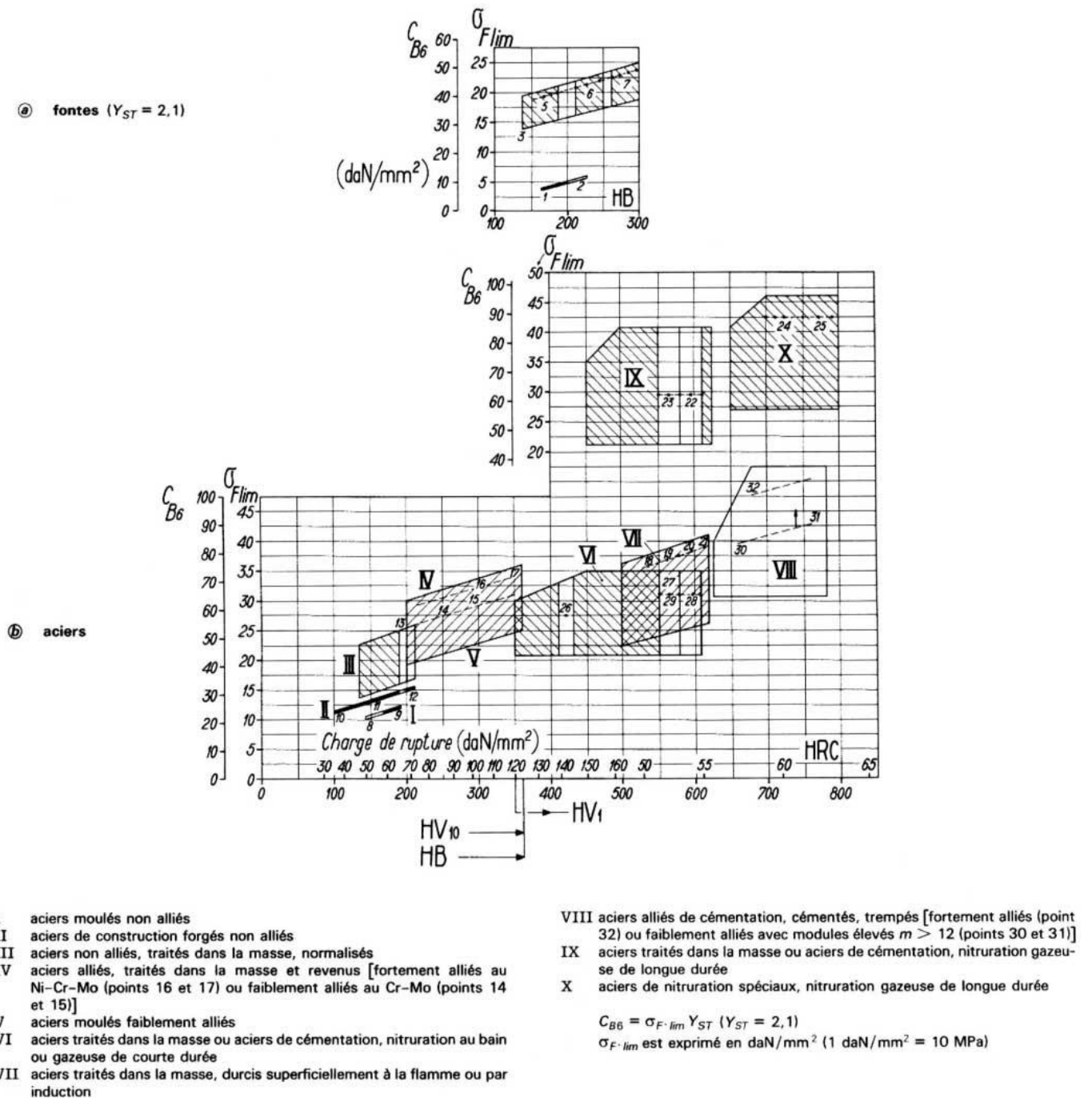


Figure 2.17 facteur C_{B6}

Pour les aciers de la catégorie VII, la trempe à la flamme ou par induction doit obligatoirement être continue sur toute l'entredent, y compris le fond. La trempe sur flancs seuls diminue considérablement la résistance à la rupture.

Les matériaux numérotés dans les différentes pages correspondent à ceux du (tableau 2.4) qui sont le plus couramment utilisés.

N°	Matériau	Composition Désignation	Dureté	
			à cœur	en surface
1	Fontes grises	FT 20	HB 170	HB 170
2		FT 25	HB 210	HB 210
3	Fontes malléables	MB 35	HB 140	HB 140
4		MB 65	HB 235	HB 235
5	Fontes à graphite sphéroïdal	FGS 42	HB 170	HB 170
6		FGS 60	HB 250	HB 250
7		FGS 100	HB 300	HB 300
8	Aciers moulés non alliés	A 48 M	HB 150	HB 150
9		A 56 M	HB 175	HB 175
10	Aciers de construction forgés non alliés	C 40	HB 120	HB 120
11		C 50	HB 150	HB 150
12		C 60	HB 180	HB 180
13	Aciers alliés traités dans la masse (trempe et revenu)	XC 48-XC 55	HV 10 : 185	HV 10 : 185
14		35 CD 4	HV 10 : 250	HV 10 : 250
15		42 CD 4	HV 10 : 280	HV 10 : 280
16		35 NCD 6	HV 10 : 310	HV 10 : 310
17		{ 30 CDN 8 35 NCD 12	HV 10 : 350 HV 10 : 360	HV 10 : 350 HV 10 : 360
18	Aciers traités dans la masse, durcis superficiellement à la flamme ou par induction	XC 45-XC 55	HV 10 : 220	HV 10 : 530
19		35 CD 4	HV 10 : 250	HV 10 : 560
20		42 CD 4	HV 10 : 280	HV 10 : 620
21		35 NCD 6	HV 10 : 310	HV 10 : 610
22	Aciers traités dans la masse ou aciers de cémentation, pour nitruration gazeuse de longue durée	42 CD 4	HV 10 : 280	HV 1 : 580
23		16 MC 5	HV 10 : 270	HV 1 : 530
24	Aciers de nitruration spéciaux, pour nitruration gazeuse de longue durée	31 CDV 9	HV 10 : 320	HV 1 : 700
25		14 CDV 6, 9		
26	Aciers traités dans la masse ou aciers de cémentation, pour nitruration au bain ou gazeuse de courte durée	XC 45 nitruré	} }	HV 1 : 400 HV 1 : 550 à 600
27		16 MC 5 nitruré		
28		42 CD 4 traité dans la masse		
29		16 MC 5 traité dans la masse		
30 } 31 }	Aciers faiblement alliés, cimentés, trempés	16 MC 5-20 MC 5	} }	HRC : 58 à 62
32				

Tableau 2.4 Les matériaux les plus utilisés.

➤ **Facteur C_{B7}**

Il est donné par la formule suivante :

$$C_{B7} = Y_{\delta.rel} Y_{R.rel} Y_X \quad (2.66)$$

Pour les engrenages de mécanique générale, la (figure 2.18) représentée ci-dessous, donne directement la valeur de C_{B7} en fonction du module réel m_n et pour différentes classes de matériaux ayant différentes sensibilités à l'entaille.

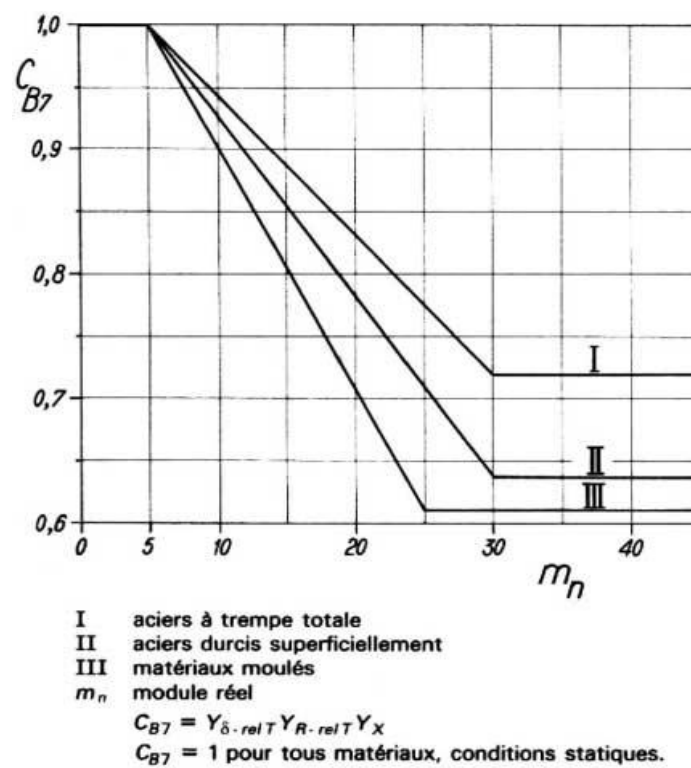


Figure 2.18 facteur C_{B7}

4.5.2 Engrenages concourants

4.5.2.1 Résistance à la pression superficielle

L'effort tangentiel considéré dans notre étude dynamique est l'effort tangentiel aux cercles primitifs moyens, Nous l'avons désigné F_t . nous l'appellerons maintenant F_{tm} , par opposition à F_t .

$$F_{tm} = F_t \frac{d}{d_m} = F_t \frac{R}{R_m} = F_t \frac{R}{R-(b/2)} \quad (2.67)$$

La formule générale ISO s'écrit donc sous la forme :

$$Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_{tm}}{b d_1} \left(\frac{u+1}{u} \right) \left(\frac{R}{R-b} \right) K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}} \leq \sigma_{H.lim} Z_N Z_L Z_R Z_V Z_W \quad (2.68)$$

Avec : σ_{H0} pression de Hertz de base sur les primitifs moyens : (pression de contact nominale).

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{b d_1} \left(\frac{u+1}{u} \right) \left(\frac{R}{R-b} \right)} \quad (2.69)$$

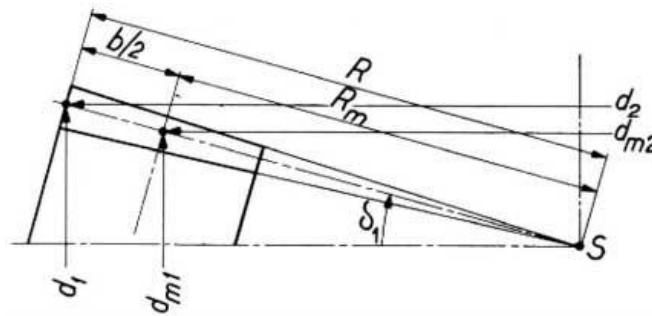


Figure 2.19 Diamètres primitifs moyens et génératrice moyenne.

Remarque :

- Les formules simplifiées sont les mêmes définis pour la résistance à la pression superficielle d'un engrenage parallèle. (voir les équations (2.42) jusqu'à (2.49))
- Les facteurs Z_H , Z_E , Z_ε , Z_β , Z_N , Z_L , Z_R , Z_V , Z_W , $\sigma_{H.lim}$, K_A , K_V peuvent être déterminé à partir des engrenages parallèles.

- $K_{H\alpha}$ facteur de répartition transversale (pratiquement : $K_{H\alpha}=1$ pour une denture droite de bonne qualité).
- $K_{H\beta}$ facteur de répartition longitudinale.

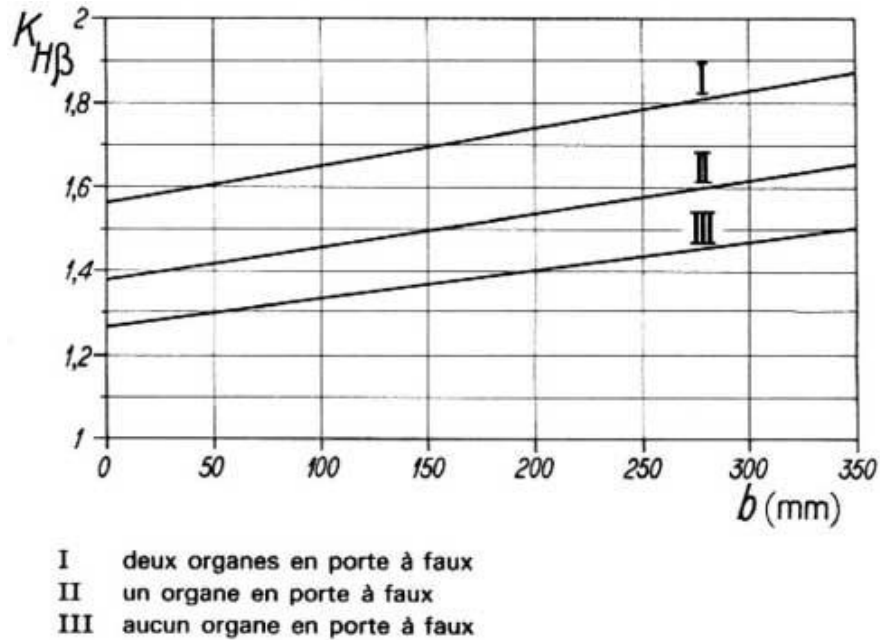


Figure 2.20 facteur $K_{H\beta}$

4.5.2.2 Résistance à la rupture

La contrainte de base est définie par :

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b m_t} \left(\frac{R}{R-b} \right) Y_{Fa} Y_{Sa} \frac{Y_{\epsilon} Y_{\beta}}{\cos \beta_m} \tag{2.70}$$

Et la formule générale ISO s'écrit sous la forme :

$$\frac{F_t}{b m_t} \left(\frac{R}{R-b} \right) Y_{Fa} Y_{Sa} \frac{Y_{\epsilon} Y_{\beta}}{\cos \beta_m} (K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}) \leq \sigma_{F.lim} Y_{ST} Y_{NT} Y_{\delta.rel T} Y_{R.rel T} Y_X \tag{2.71}$$

- **1^{er} transformation possible de la formule générale**

$$\frac{F_{t.adm(\frac{1}{2})}}{b m_t} = \frac{\sigma_{F.lim(\frac{1}{2})} Y_{ST} Y_{NT(\frac{1}{2})} Y_{\delta.rel T} Y_{R.rel T} Y_X}{(Y_{Fa} Y_{Sa})_{(\frac{1}{2})} \left(\frac{Y_{\epsilon} Y_{\beta}}{\cos \beta_m} \right) K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}} \left(\frac{R-b}{R} \right) \tag{2.72}$$

➤ 2^{ème} transformation possible de la formule générale

$$P_{adm(2)} = 0,524 \times 10^6 b m_n^2 z_1 n_1 \left(\frac{R-b}{R} \right) \frac{(\sigma_{F.lim}^{YST})_{(1)}^Y Y_{NT(2)}^Y \delta_{relT}^Y Y_{R.relT}^Y X}{(Y_{Fa} Y_{Sa})_{(1)}^Y \left(\frac{Y_{\varepsilon} Y_{\beta}}{\cos \beta m} \right) K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}} \quad (2.73)$$

Les formules simplifiées s'écrivent sous la forme :

$$P_{adm} \cdot K_B = C_{B1} C_{B2} C_{B3} C_{B4} C_{B5} C_{B6} C_{B7} \quad (2.74)$$

$$\frac{F_{t.adm}}{b m_t} \cdot K_B = C_{B2} C_{B3} C_{B4} C'_{B5} C_{B6} C_{B7} \quad (2.75)$$

Les différents facteurs ont été définis pour la résistance à la rupture d'un engrenage parallèle.

Excepté pour :

$$C_{B5} = \frac{b}{K_{F\beta} K_{F\alpha}} \left(\frac{R-b}{R} \right) \quad (2.76)$$

Considérer pratiquement que : $K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} = K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}$

$$C'_{B5} = \frac{1}{K_{F\beta} K_{F\alpha}} \left(\frac{R-b}{R} \right) = \frac{C_{B5}}{b} \quad (2.77)$$

5 Conclusion

Nous avons développés dans ce chapitre les différentes méthodes de calcul sur les engrenages. Il apparait, trois grandes famille de vérification de résistance à savoir la méthode simplifiée ou de Lewis, qui se base sur les calculs de résistance des matériaux qui se base sur l'hypothèse de considère qu'une dent d'engrenage est considérée comme une poutre encastree soumise à un effort appliqué à son extrémité, et suppose qu'une seule dent est en prise.

La méthode américaine (AGMA) est liée à la position de la force sur la dent, d'où l'introduction d'une formule empirique pour calculer le facteur de concentration de contraintes en fonction de la section critique, de la hauteur de la charge, du rayon de courbure au pied de la dent et de coefficients mesurés par photoélasticité (ceux-ci varient avec l'angle de pression de la dent).

La méthode de calcul de résistance des engrenages parallèles élaborée par ISO est une méthode très complexe ; elle fait intervenir tous les facteurs influençant de près ou de loin sur la résistance des dentures à la pression superficielle et à la rupture. C'est une méthode de vérification de la capacité de charge d'un engrenage dont on connaît déjà tous les éléments.

On remarquera que chaque méthode dispose de ces avantages et inconvénients et le choix d'une méthode de calcul par rapport à l'autre dépendra de la précision et des conditions préétabli pour la conception de l'engrenage désiré.

Chapitre 3

Les éléments finis

1. Introduction

Les techniques de calcul des structures ont connu un développement considérable, motivé par les besoins des industries et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Des problèmes qui ont été considérés comme insolubles à un temps passé par les méthodes analytiques classiques sont, aujourd'hui aisément résolus grâce à des méthodes numériques dont la plus utilisée est la méthode des éléments finis (MEF) et par la suite la méthode des volumes finis dédié aux écoulements. On traitera dans ce chapitre la méthode éléments fini et un aperçu de la méthode des volumes fera l'objet d'un aperçu en (**annexe3**).

2. Historique de la méthode des éléments finis

La naissance du calcul variationnel et le principe du travail virtuel remonte aux 17^e et 18^e siècles, et la première ébauche d'une méthode variationnelle discrète avec des fonctions de forme triangulaires «élément par élément» a été donnée par Leibniz (1697). Les premières études analytiques ont été faites par Schellbach[14](1851) et puis, déjà avec des résultats numériques, par Rayleigh (1877). Le mathématicien Ritz [15](1909) marque la première méthode variationnelle discrète (directe) pour la plaque élastique de Kirchhoff, et l'ingénieur Galerkin[16](1915) a publié son article sur FEM pour les continus élastiques linéaires, postulant l'orthogonalité des résidus d'équilibre par rapport aux fonctions de test, mais à la fois, Ritz et Galerkin, a utilisé des fonctions de test et d'essai dans l'ensemble du domaine comme supports. Courant[17] (1943) a été le premier à introduire des "éléments finis" triangulaires et rectangulaires pour le problème de torsion 2D.[18]

M. J. (Jon) Turner[19] chez Boeing sur la période 1950-1962. Il a généralisé et perfectionné la méthode de rigidité directe. De 1952 à 1953, il a supervisé le développement des premiers éléments finis basés sur le continuum. Outre Turner, les principaux contributeurs à la pratique actuelle incluent : B.M.Irons [20], inventeur des modèles iso-paramétriques, des fonctions de forme, du patch test et des solveurs frontaux ; R. J. Melosh [21], qui a reconnu le lien Rayleigh-Ritz et a systématisé la dérivation variationnelle des éléments de rigidité ; et E. L. Wilson [22], qui a développé le premier logiciel FEM open source.

J. H. Argyris [23], R. W. Clough [24], H. C. Martin et O. C. Zienkiewicz [25] sont largement responsables du « transfert de technologie » de l'industrie aérospatiale vers une gamme plus large d'applications d'ingénierie au cours des années 1950 et 1960. Argyris, un expert de la méthode de la force alors à l'Imperial Collège, a reçu des rapports du groupe de Turner et a intégré le matériel dans son feuillet influent de 1954. On cette année il a construit un élément de continuum à déplacement supposé.

Clough et Martin, alors professeurs juniors à l'U.C. Berkeley et U. Washington, respectivement, ont passé des étés de «stage de faculté» au groupe de Turner en 1952 et 1953. Le résultat de cette collaboration séminale a été largement considéré comme le début de l'actuel

MEF. Clough a baptisé la méthode en 1960 et a ensuite formé à Berkeley le premier groupe de recherche à propulser l'idée dans les applications du génie civil. OlekZienkiewicz, à l'origine un expert en méthodes de différences finies qui a appris le métier de Southwell, a été convaincu en 1964 par Clough d'essayer la FEM. une année plus tard, il a généralisé la méthode à tout les domaines de l'ingénierie tel que: génie civile, mécanique, aéronautique

L'article de 1956 de Turner, Clough, Martin et Topp, désormais abrégé en TCMT [26], est reconnu comme le début du MEF actuel, tel qu'il est utilisé dans l'écasante majorité des publications commerciales codes. Parallèlement à la série d'Argyris, ils prototypent la première génération, qui s'étend de 1950 à 1962.

Les pionniers étaient des ingénieurs en structure formés à la mécanique classique. Ils ont suivi un siècle de tradition en considérant les éléments structuraux comme un dispositif de transmission des forces. Cet «élément en tant que transducteur de force» était la vue standard dans l'analyse structurelle pré-informatique. Il explique l'utilisation des hypothèses de flux pour dériver les équations de rigidité dans TCMT. Les développeurs d'éléments ont travaillé ou interagi étroitement avec l'industrie aéronautique. En conséquence, elles se sont concentrées sur des structures minces constituées de barres, de nervures, de longerons, de raidisseurs et de panneaux. Bien que la méthode de la force classique ait dominé l'analyse des contraintes au cours des années 1950, les méthodes de rigidité ont été maintenues en vie par leur utilisation en dynamique et en vibration.

La période suivante couvre l'âge d'or de MEF : 1962-1972. C'est la "génération variationnelle". Melosh a montré que les modèles de déplacement conformes sont une forme de Rayleigh-Ritz basée sur le principe de l'énergie potentielle minimale. Cet article influent marque la confluence de trois lignes de recherche : la formulation duale des méthodes énergétiques d'Argyris, la méthode de rigidité directe (DSM) de Turner et les premières idées de compatibilité inter-éléments comme base de la limitation des erreurs et de la convergence. Les chercheurs en cette période considéraient les éléments finis comme des idéalizations de composants structuraux. A partir de 1962, une interprétation en deux étapes émerge : les éléments discrets se rapprochent des modèles de continuum, qui à leur tour se rapprochent des structures réelles.

Au début des années 1960, la FEM commence à s'étendre au génie civil via la connexion Boeing-Berkeley de Clough et a été baptisée. Le premier livre consacré au FEM paraît en 1967. Les applications aux problèmes non structuraux avaient commencé en 1965, et ont été traitées en profondeur par Martin et Carey [27].

A partir de 1962, la formulation du déplacement domine. Cela a été fortement stimulé par l'invention de la formulation iso-paramétrique et des outils associés (intégration numérique, coordonnées naturelles ajustées, fonctions de forme, patch test) par Irons et ses collaborateurs. Les modèles de déplacement d'ordre inférieur présentent souvent des performances décevantes. Ainsi, il y avait une frénésie pour développer des éléments d'ordre supérieur. D'autres formulations variationnelles, notamment hybrides, mixtes et modèles d'équilibre ont émergé.

Au début des années 1980. D'autres approches apparaissent, notamment la formulation libre, le contrôle orthogonal du sablier, les méthodes Assumed Natural Strain, les modèles hybrides de contrainte en coordonnées naturelles, l'objectif commun de ces approches est :

- Les éléments doivent s'adapter aux programmes basés sur DSM puisque cela inclut la grande majorité des codes de production, commerciaux ou autres.

- Les éléments restent simples mais doivent fournir des réponses d'une précision technique avec des maillages relativement grossiers. Ceux-ci ont été collectivement étiquetés « éléments de haute performance » en 1989.[28]

3. Choix des éléments finis

La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds. Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation. [29]

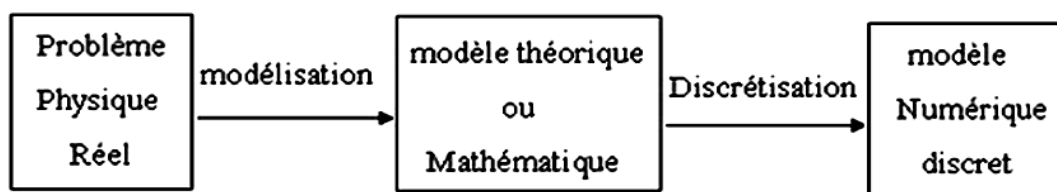
4. Modélisation et discrétisation

Pour la résolution des problèmes des milieux continus, Il faut avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, on effectuant deux opérations essentielles la modélisation et la discrétisation, ces opérations se font en deux temps (**Organigramme 3.1**)

- **La modélisation** : qui représente le passage de la réalité à un ensemble de modèles définis dans le cadre de la mécanique des milieux continus, définissant un "problème continu" insoluble.
- **La discrétisation** : qui porte sur les deux aspects principaux du problème pratique, à savoir :
 - La représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites.
 - Le Choix du maillage et des éléments finis.

La discrétisation, représente la transformation de toutes les théories de la mécanique des milieux continus en lois discrétisées, C'est pourquoi on dit généralement que les éléments finis sont une technique de résolution approchée des équations aux dérivées partielles.

La discrétisation et les fonctions de base ont naturellement une influence sur la modélisation, qui s'effectue dans le cadre théorique, et sur le résultat. La (figure 3.1) représente le schéma général de l'analyse et de la résolution d'un problème numérique.

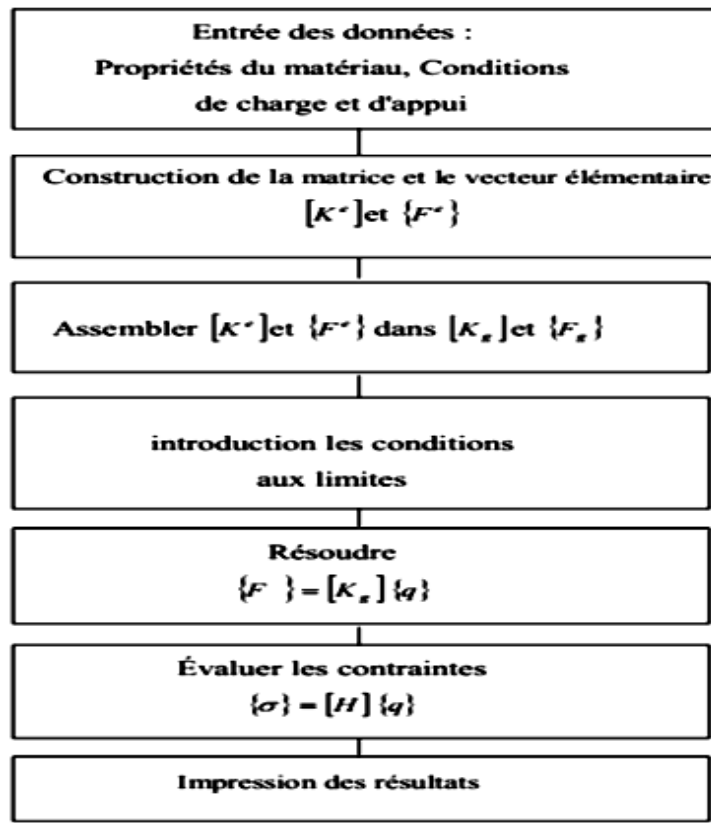


Organigramme 3.1 Étapes de l'analyse d'un problème aux limites.

5. Les différentes étapes de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis se résume en sept étapes :

- Discrétisation du domaine en un maillage d'éléments finis.
- Interpolation en respectant les critères de convergence.
- Calcul des caractéristiques de chaque élément.
- Assemblage.
- Introduction des conditions aux limites essentielles et résolution ;
- Évaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, déplacements).
- Jugement de manière critique les résultats obtenus.



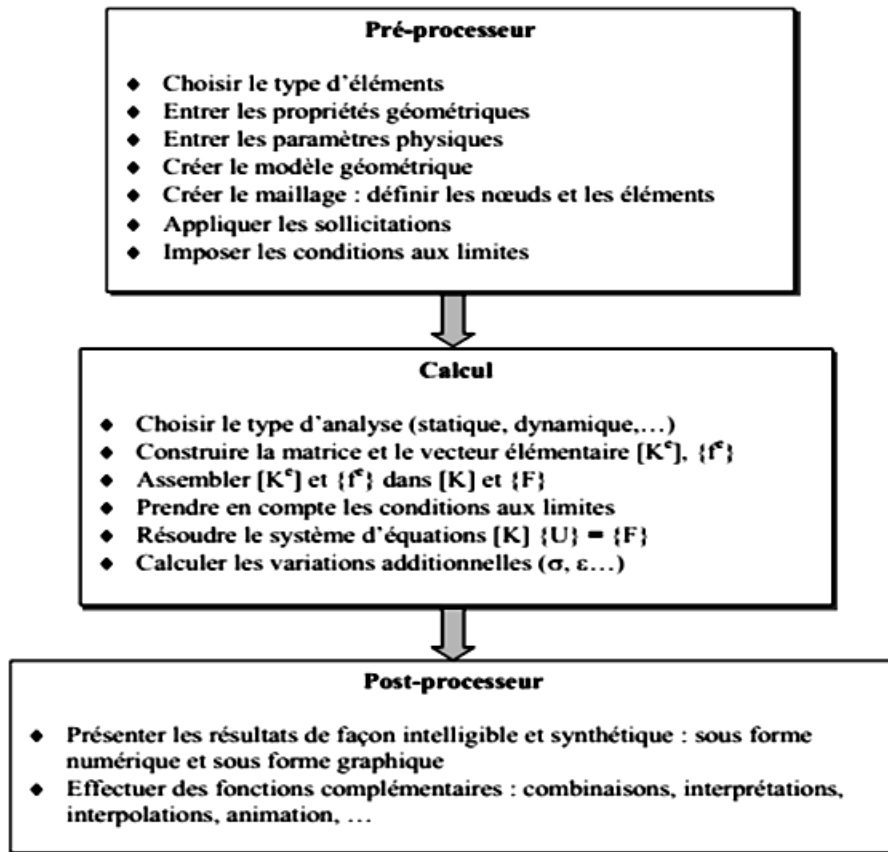
Organigramme3.2 étapes de la MEF. [30]

6. Les étapes pratiques de calcul par éléments finis

Pour utiliser la méthode éléments finis, il faut discrétiser le problème (réaliser un maillage) et modéliser l'effet de son environnement (appliquer les efforts extérieurs et les déplacements imposés). Il faut également choisir un modèle du comportement du matériau, et l'attribuer aux éléments du maillage. A partir de ces modèles, élément finis effectue ensuite un calcul pratique qui se décompose en trois étapes :

- **Le prétraitement** : qui consiste à construire un système d'équations, correspondant aux équations d'équilibre des nœuds et aux déplacements nodaux imposés, en exploitant les données des modèles.
- **Le calcul** : pour résoudre ce système d'équations, et l'obtention des déplacements nodaux et des efforts nodaux.

- **Le post-traitement** : pour reconstruire les résultats demandés (il s'agit typiquement des champs de déplacement, de déformation et de contrainte).



Organigramme3.3étapes pratiques du calcul par EF. [29]

7. Le maillage

Le maillage est constitué d'un nuage des éléments qui sont liés entre eux par des nœuds. Il est caractérisé par sa taille h et le degré p d'interpolation. Une maille contient au minimum trois éléments. Le maillage détermine le modèle géométrique du produit, obtenu en réunissant les différents sous-domaines. Il détermine aussi l'allure du champ de déplacement, et donc de déformation et de contrainte. Ainsi, il influe fortement sur la pertinence des résultats et doit être réalisé avec soin.

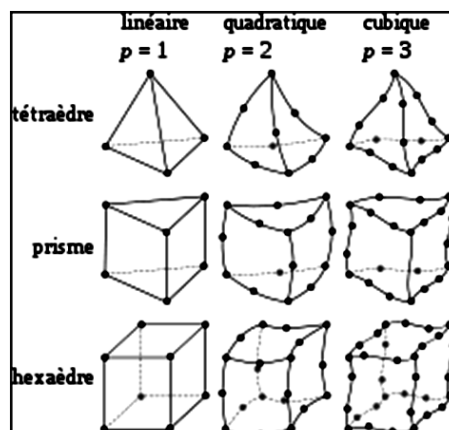


Figure 3.1 Les différents types de maille en 3 dimensions

8. Les différents types des éléments finis

La MEF utilise plusieurs types d'éléments qui ont été développés au cours de temps. Ces éléments se distinguent en termes de forme géométrique (**Tableau 3.1**).

- élément a une dimension : barres, poutres rectilignes ou courbes. (Lignes).
- élément a deux dimensions : élasticité plane (déformation plane, contrainte plane, axisymétrie), ou encore des théories des poutres, plaques ou coques.
- élément a trois dimensions : éléments de volume ou coques épaisses.

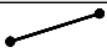


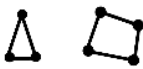

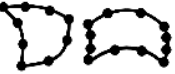






Eléments	linéaires	paraboliques (quadratiques)	Cubiques
unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			
autres types	 Masse	Ressort 	Contact 

Tableau.3.1. Les types des éléments finis. [29]

9. Contraintes et déformations [31]

L'effet des forces sur les matériaux est expliqué par Robert HOOKE : un matériau ne résiste à une force appliquée qu'en se déformant sous l'action de cette force. Les matériaux sont élastiques

Les conditions qui règnent en chaque point d'un matériau soumis à des forces mécaniques conduit aux notions de contrainte et de déformation. Pour s'affranchir de la dépendance des dimensions d'un matériau, les paramètres de contrainte et de déformation sont utilisés. En ce qui concerne la **contrainte**, celle-ci détermine avec quelle intensité les atomes du matériau sont écartés les uns des autres ou bien le contraire. Cette contrainte est la force qui agit sur une unité de surface du matériau (équation 3.1). **La déformation** quant à elle indique dans quelles proportions les liaisons inter atomiques et la structure elle-même.

$$\sigma = F/S \quad (3.1)$$

9.1 La loi de HOOKE

La loi de Hooke permet d'évaluer le comportement des solides soumis à des petites déformations. C'est une loi élastique linéaire qui décrit la relation entre la charge et la déformation des matériaux.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.2)$$

9.2 Les contraintes principales

Se sont des contraintes (σ_1 , σ_2 et σ_3) déterminées à partir de la matrice de contraintes en calculant les valeurs propres correspondant aux directions principales ($\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$) cas 3d [32]

9.3 La contrainte de VON MISES

Le critère de VON MISES permet de comparer les résultats obtenus par MEF et la limite élastique de matériaux. Il consiste à fixer un seuil sur la densité volumique d'énergie de distorsion élastique. De manière pratique, cela consiste à comparer la limite élastique du matériau à la contrainte équivalente de VON MISES σ_{VM} donnée par la formule suivante:[32]

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (3.3)$$

Où (σ_1 , σ_2 et σ_3) sont des contraintes principales.

9.4 Energie de déformation

C'est l'énergie emmagasinée dans un volume lorsqu'il se déforme sous l'action des différents efforts exercés sur lui, elle est emmagasinée sous forme énergie potentielle. [32]

Elle s'exprime par :

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon]\{\sigma\} dV \quad (3.4)$$

10. Convergence des résultats par éléments finis

Par convergence, on entend l'évolution des résultats EF vers les résultats vrais quand on améliore la représentation du problème par les EF. Les facteurs qui peuvent contribuer à faire converger les résultats sont :

- l'évolution du maillage ou plutôt la taille des éléments. C'est ce qu'on appelle la convergence h, h un scalaire qui représente la taille des éléments.
- le degré p d'interpolation du polynôme caractéristique de l'élément appelé la convergence p.

On dit d'un processus de raffinement de maillage qui conduit à des résultats plus exactes qu'il est h convergent et d'un processus d'augmentation du degré de l'interpolation qui produit le même effet qu'il est p convergent. Si le code de calcul EF permet un enrichissement aisé du

nombre de degrés de liberté il est dit adapté, et si cet enrichissement est automatique il est dit auto-adapté.

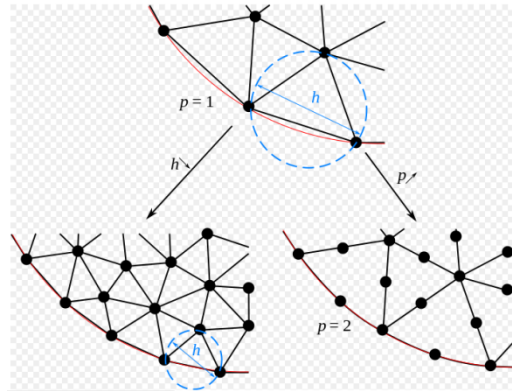


Figure 3.2types de maillage raffiné

10.1 Caractéristiques de la solution EF

Dans une solution par élément fini d'un problème d'élasticité, n'importe quel élément différentiel du milieu continu est en équilibre et les conditions de compatibilité en déformation et en contraintes sont satisfaites. Nous introduisons ici quelques définitions ou notions d'équilibre et de compatibilité nodale de la solution qui permettent de mieux comprendre la convergence des résultats EF vers les résultats vrais. Pour une bonne solution EF.

L'équilibre nodal des forces est exprimé par la vérification de l'équation ci-dessous :

$$[K]\{q\} = \{f\} \quad (3.5)$$

Dire qu'il y a une compatibilité nodale signifie que :

- les déplacements aux nœuds communs à plusieurs éléments sont les mêmes.
- il n'y a pas d'équilibre au passage de la frontière entre deux éléments.
- il n'y a pas toujours et obligatoirement compatibilité au passage d'une frontière entre deux éléments. On peut utiliser des éléments incompatibles mais leur nombre ne peut pas devenir trop important.
- l'équilibre n'est pas vérifié en général dans un élément, par contre, la compatibilité l'est puisque les approximations sont polynomiales.

10.2 Les conditions de convergence

Si un maillage éléments finis est raffiné en utilisant toujours le même type d'éléments, il est possible de donner des conditions pour que la suite de solutions approchées ainsi créée converge vers la solution vraie. Si m représente l'ordre de dérivation dans les termes de l'énergie de déformation, la solution EF converge vers la solution vraie si :

- Dans l'élément, le champ approché contient un polynôme complet d'ordre m . Cela signifie que les éléments doivent pouvoir traduire un état de déplacements rigides ou un état de déformations constantes.
- Au passage des frontières inter-éléments, la continuité du champ doit être assurée jusqu'à l'ordre $(m - 1)$. La compatibilité inter-élément est donc nécessaire quand le maillage se raffine, au moins une compatibilité asymptotique.
- Supposons que les conditions aux limites d'un problème d'élasticité soient telles que les fonctions solutions et leurs dérivées soient constantes jusqu'à l'ordre m , alors quand le maillage est raffiné, chaque élément doit tendre vers une solution à valeurs constantes.

10.2.1 Le patch test

Initialement proposé par IRONS [20], il donne les conditions suffisantes de convergence de la solution EF. Il peut donner aussi des conditions nécessaires. C'est un test purement numérique dont la validation théorique a été apportée par STRANG.

10.2.2 Mise en œuvre

On considère un ensemble d'éléments, ensemble tel qu'il y ait au moins un point intérieur, donc qu'il y ait au moins une frontière inter-élément (**Figure 3.3**). Le chargement et les conditions aux limites sont tels que la solution théorique soit un état de déformations constantes.

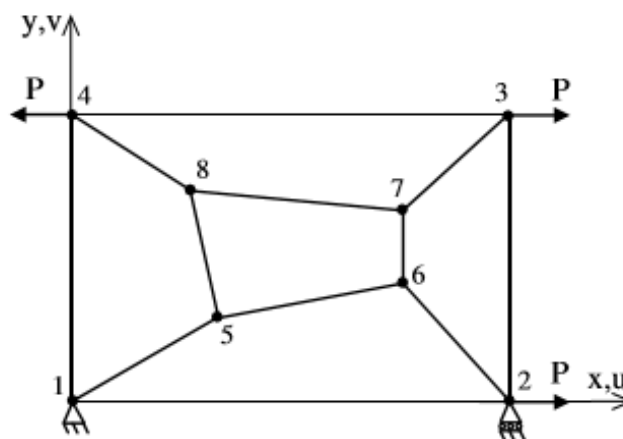


Figure 3.3 Exemple de test patch plan

10.2.3 Les différents tests

La multiplication des éléments finis utilisant des modes incompatibles ou des techniques d'intégration réduite ont conduit les praticiens du patch test à raffiner sa définition. Les multiples formes concernent essentiellement les conditions aux limites.

- **Test 1** : celui pour lequel les déplacements sont imposés sur tous les nœuds extérieurs; il faut remarquer que les champs de déplacements ne sont pas forcément simples, par exemple :

$$u = xy \quad (3.6)$$

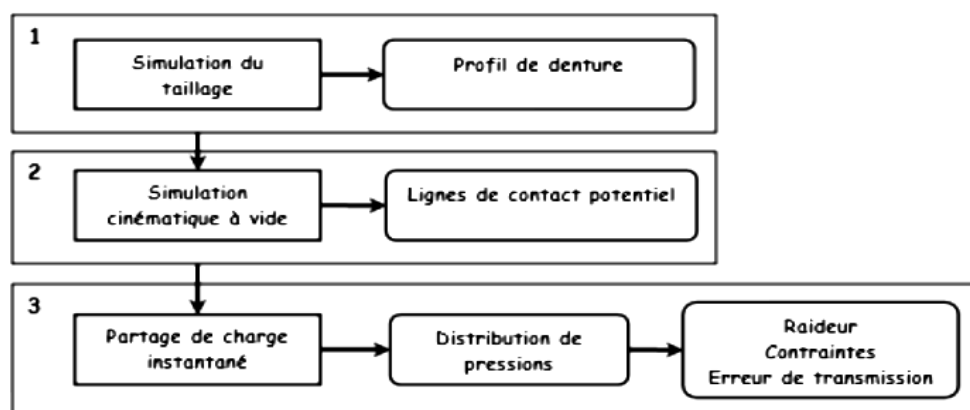
$$v = -\frac{x^2+y^2}{2} \quad (3.7)$$

- **Test 2** : impose des conditions aux limites en déplacement qui empêche les mouvements de corps rigides et des conditions en effort qui induisent l'état de contrainte désiré. Cette version a l'avantage de détecter les modes parasites ou virtuels créés par les états de déformation sans énergie associée auxquels correspondent des singularités de la matrice de raideur.
- **Test 3** : Le test est passé si les déformations sont correctes et les forces sont nulles aux nœuds intérieurs. Il se peut que des éléments relativement grands ne produisent pas un état de déformation constant alors que les conditions extérieures l'imposent. Mais si le maillage est raffiné par subdivisions successives et que les éléments tendent vers cet état, on dit que le test est vérifié faiblement, ce qui assure la convergence vers des valeurs correctes.

11. Modélisation du comportement sous charge de l'engrenage conique

Dans ces travaux Bruyère [32] a étudié le comportement des engrenages coniques, cette étude se base généralement sur trois étapes (**Organigramme 3.4**) :

- Définition de la géométrie des flancs de denture,
- Calcul de la cinématique à vide (prise en compte d'éventuels défauts de montage).
- Calcul du partage de charge à partir des lignes de contact potentiel.



Organigramme 3.4 Processus du calcul de comportement sous charge. [34]

Pour étudier le comportement sous charge on fait une étude au comportement élastique, le contact entre pignon et roue, la déformation des supports...

Plusieurs méthodes utilisées pour étudier le comportement sous charge des engrenages, parmi ces méthodes : la méthode des éléments finis.

12. Rappel sur la théorie de HERTZ

Avant d'étudier le comportement sous charge des engrenages il faut vérifier la théorie de HERTZ qui est basée sur trois conditions principales :

- Les deux corps en contacts sont considérés comme deux massifs semi-infinis,
- Le contact entre les deux solides doit être non-conforme, et sans friction,
- La longueur du contact entre les deux solides doit être très petite par rapport autres dimensions.

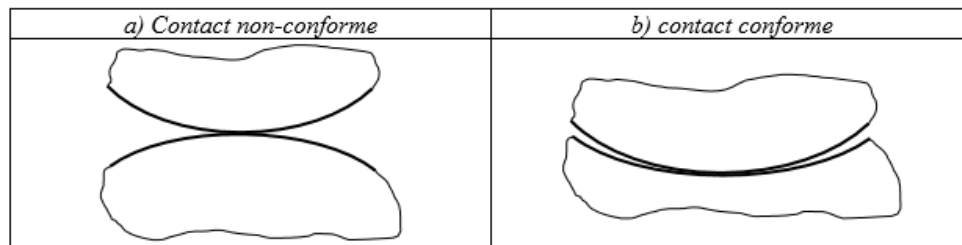


Figure 3.4 Définition d'un contact conforme et non-conforme. [34]

13. Modélisation par la méthode des éléments finis

13.1 Modélisation complète par EF

Il existe deux types de modélisation complète par EF :

- 1- La première modélisation est basée sur le calcul de la matrice de rigidité globale, et aussi la matrice de rigidité et de flexibilité normale localisées tout au long du contact. Elle est utilisée pour l'étude du comportement sous charge des engrenages cylindriques droits, des engrenages coniques et des engrenages roue et vis. (**Figure 3.4**)

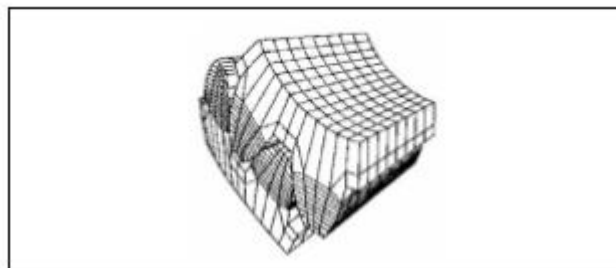


Figure 3.5 Modèle EF pour un engrenage conique. [34]

- 2- La deuxième modélisation est basée sur un maillage Eléments Finis classique du pignon et de la roue aussi sur l'utilisation d'éléments de contact « GAP ELEMENT ». Ce type est utilisé pour l'étude du comportement sous charge des engrenages cylindriques hélicoïdaux et des engrenages spiro-coniques. (**Figure 3.5**). Ces modélisations offrent des résultats très précis en accord avec les résultats expérimentaux mais le calcul prend du temps (des jours) alors elles nécessitent d'avoir des ordinateurs puissants.

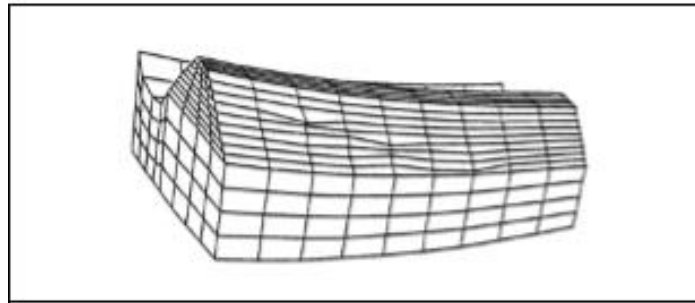


Figure 3.6 Maillage EF distordu pour une orientation correcte des « GAP ELEMENT »[34]

13.2 Modélisation par Eléments Finis Polynomiaux

Cette modélisation utilise un maillage classique comme dans travaux de Baret[35], de Curti[36] et de Piazza [37] sur le comportement des engrenages cylindriques droite et hélicoïdes, et les Eléments Finis utilisés sont des polynômes dont le degré varie en fonction de la zone à mailler. Cette modélisation est très intéressante car le maillage Eléments Finis est effectué une seule fois et la précision du calcul peut être augmentée avec le degré des polynômes d'interpolation. Et elle est plus rapide que la modélisation complète par élément fini.

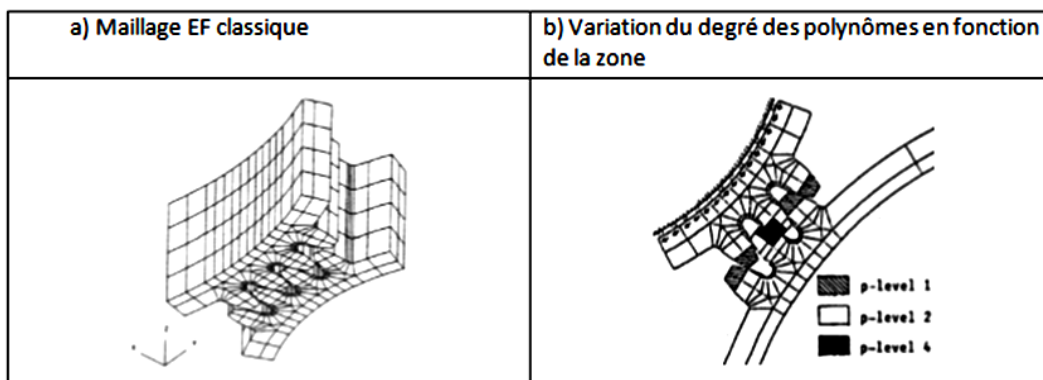


Figure 3.7Exemple de modélisation par Eléments Finis Polynomiaux. [34]

13.3 Modélisation Mixte par Eléments Finis

Il existe deux méthodes pour la modélisation mixte par éléments finis. La méthode d'analyse des contacts et celle basée sur la théorie de Boussinesq. On fait remarquer que quelque soit le modèle utilisée celle-ci donne des résultats précis de et plus rapide que les autres modélisations citées précédemment.

13.4 Méthodes basées sur la méthode TCA/LTCA

Cette méthode (Tooth Contact Analysis/LoadedTooth Contact Analysis) développé par GLEASON et Litvin [38], elle utilisée par Fang [39], de Yongping[40] et de Zhang [41] dans leurs études de comportement sous charge des engrenages cylindriques hélicoïdaux, coniques et hypoïdes.

Elle consiste à calculer des matrices de flexibilité dans la direction normale, dans la direction tangentielle et dans les directions croisées pour les différents points de contact. Les flexibilités, expriment le déplacement au point i dans la direction \vec{p} dû au chargement unitaire au point j dans la direction \vec{q} .

13.5 Méthodes basées sur la théorie de Boussinesq [42] :

Utilisée par Bruyère dans ses travaux sur les engrenages conique, elle repose sur la résolution de l'équation de compatibilité des déplacements qui est une condition géométrique de non-pénétration des deux corps en contact.

La théorie de Boussinesq permet de calculer les coefficients de surface (ou de contact) et les coefficients d'influence de flexion sont calculés par Eléments Finis à partir de chargements unitaires en chaque point du maillage.



Figure 3.8 Maillage de la zone de contact potentiel dans le plan tangent. [34]

14. Conclusion

La M.E.F est une méthode approchée de calcul numérique permettant de déterminer l'état d'équilibre d'un milieu continu élastique à un, deux ou trois dimensions. Elle consiste à déterminer de manière approximative les déplacements d'un certain nombre de points du milieu appelés « nœuds ».

Le Modèle de déformation présente une interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration).

Cette méthode est de toutes les méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe et elle couvre de nombreux domaines de la physique, et la mécanique.

Reste que la méthode des éléments finis offre des résultats plus précis mais difficile de mise en œuvre car elle prend un temps pour les calculs (des jours). Pour cela plusieurs sociétés ont développés des moyens informatiques qui offrent la puissance et la vitesse des calculateurs et outils de visualisation qui la rende facile sa mise en œuvre, on cite les logiciels Abacus et ANSYS qu'on développera plus en détail au chapitre 4.

Chapitre 4

Mise en œuvre de la simulation sur ANSYS

1 Introduction

Dans ce chapitre nous traiterons, la procédure de simulation sur le logiciel ANSYS. Dans ce contexte nous présenterons les différentes étapes de la génération de la géométrie jusqu'à la simulation, pour cela nous avons choisi Autodesk Inventor pour la génération de l'engrenage et le module statique structurale pour la simulation et l'édition des résultats. Les différents résultats ont été obtenus pour un temps de simulation de six secondes, qui représente le temps optimale de la convergence de la solution.

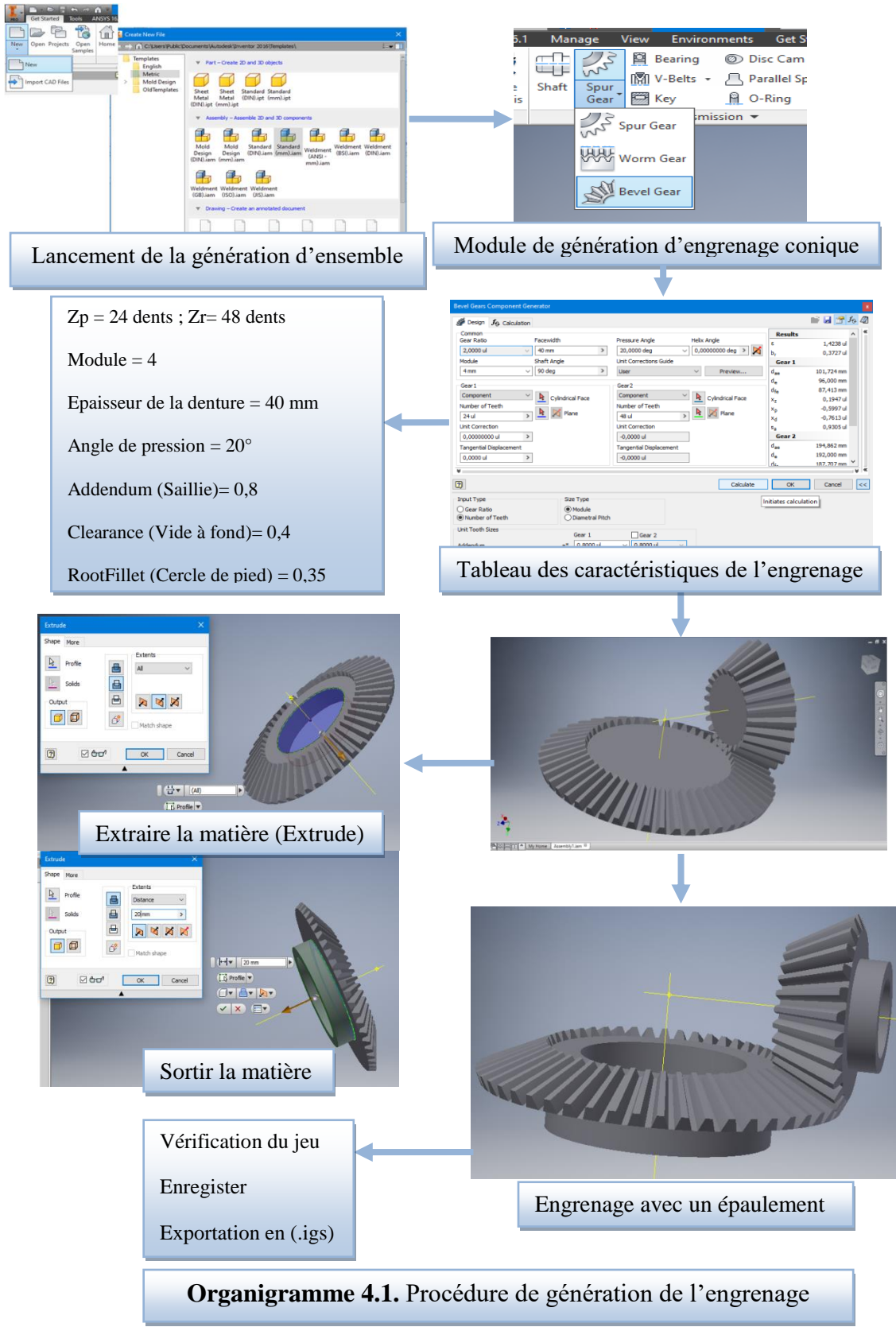
2 Génération de l'engrenage sous Autodesk Inventor

Autodesk Inventor est un logiciel de CAO et travail en modélisation volumique, surfacique et fil de fer. Il travaille en modélisation paramétrique et interfaçable avec plusieurs langages de programmations telles que Visual Basic, Visual C++, VisualBastique.net. Il possède plusieurs modules de génération de pièces parmi eux un module de génération d'engrenages. Dans ce contexte, nous proposons de générer un engrenage droit cylindrique à axe parallèle, avec les caractéristiques indiquées sur le tableau 4.1.la procédure de génération est indiquée sur l'organigramme 1

m	Z_R	Z_P	k	α
4	48	24	10	20

Tableau 4.1.Caractéristiques de l'engrenage.

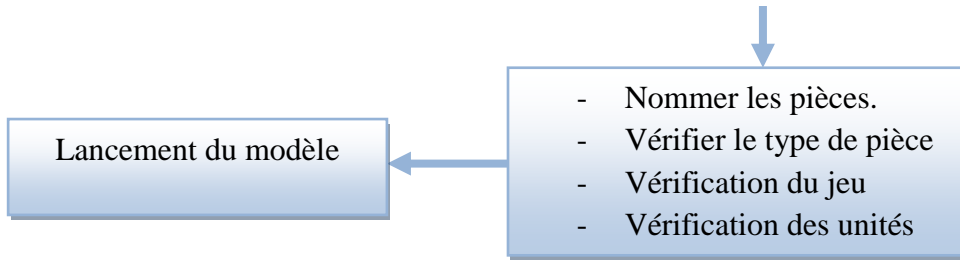
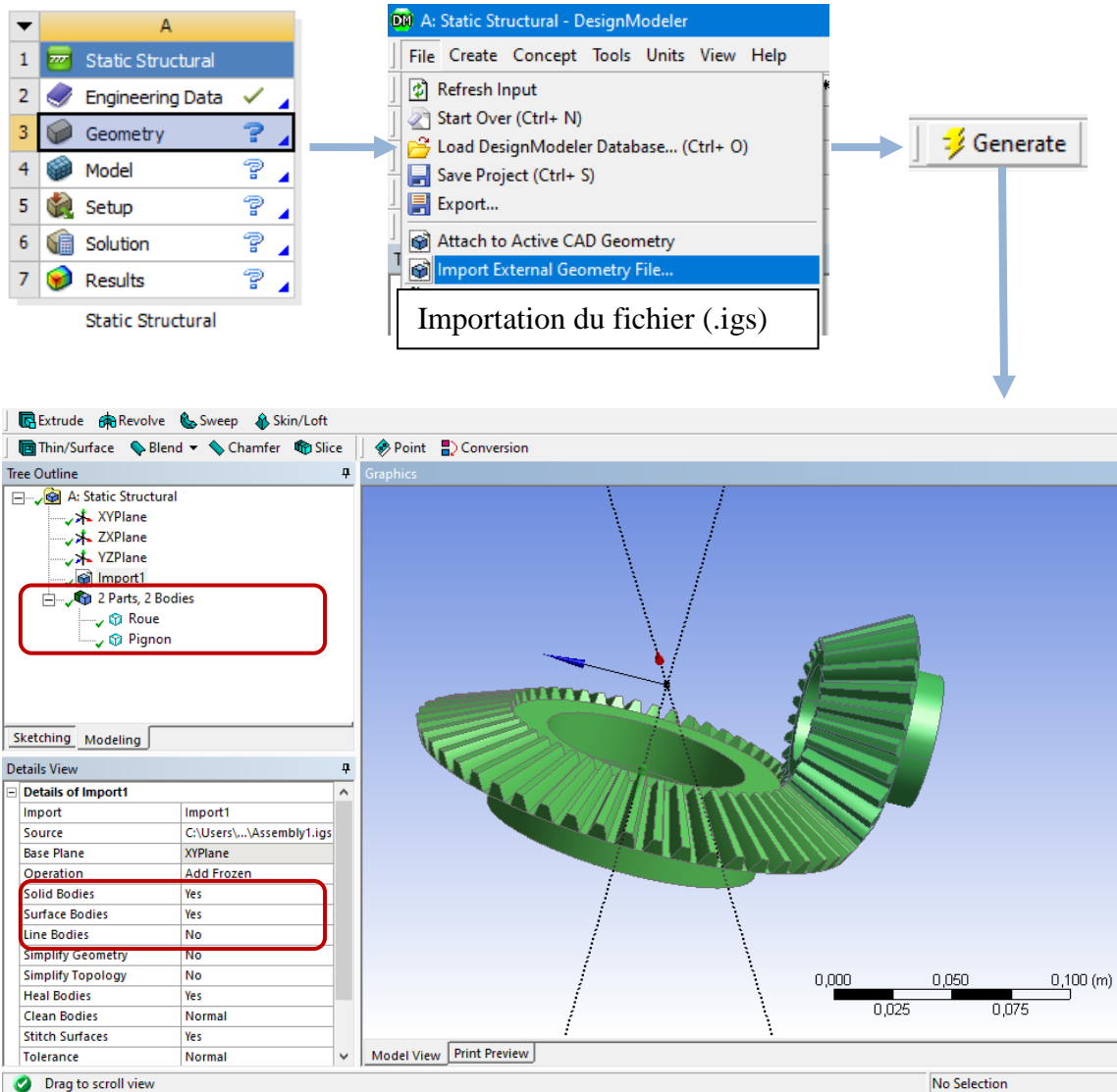
2.1 Etapes de génération de l'engrenage sous Inventor:



Organigramme 4.1. Procédure de génération de l'engrenage

3 Simulation sous ANSYS

3.1 Lecture de la géométrie



Organigramme 4.2. Lecture et édition de la géométrie

3.2 Vérification du contact

Dans **Contacts**, on sélectionne les surfaces extérieures des dentures de l'engrenage (Là où s'effectue le contact) et on définit le type de contact (**avec friction**) ayant **0.1** pour coefficient de frottement.

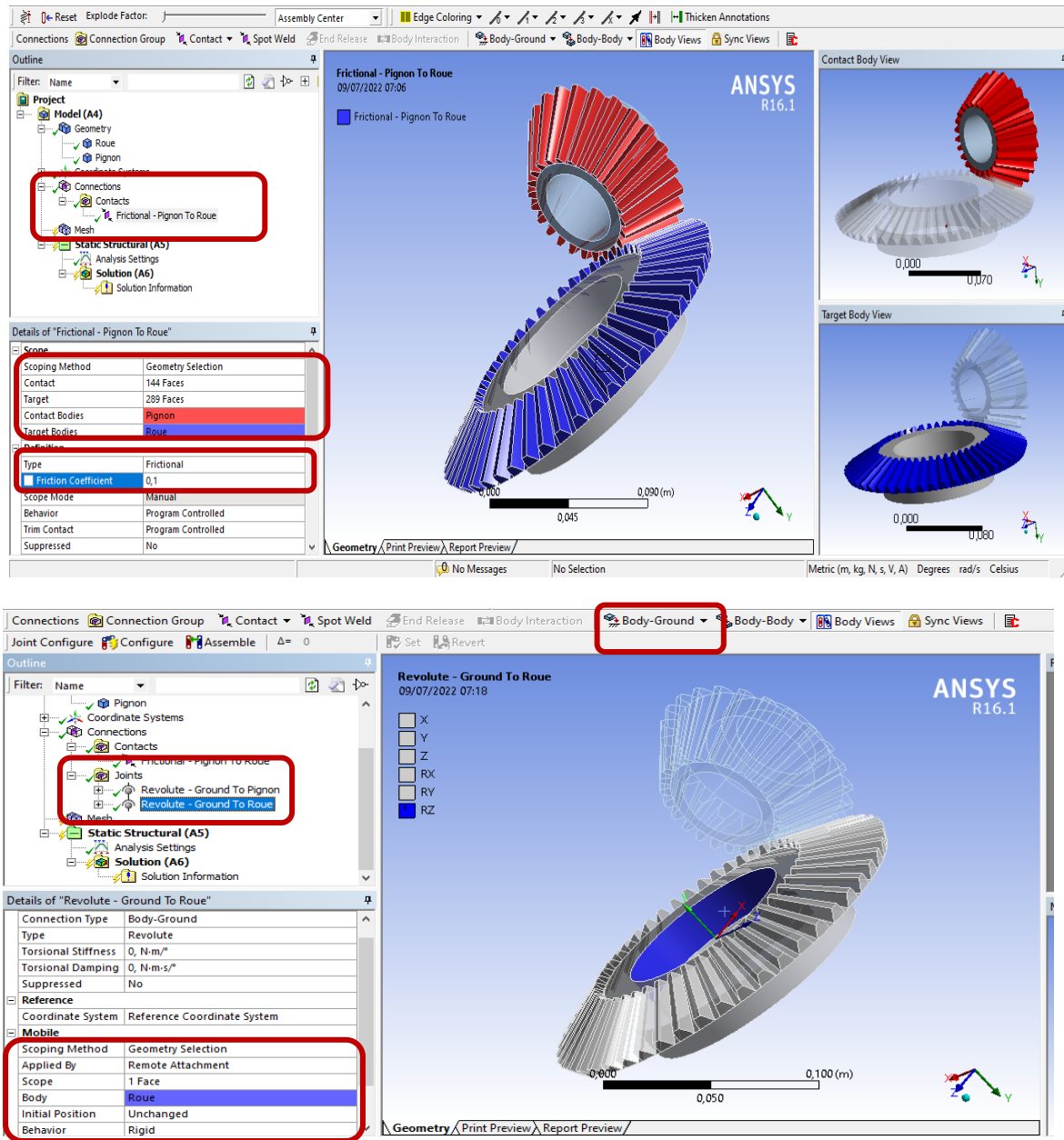


Figure 4.1. Génération du contact.

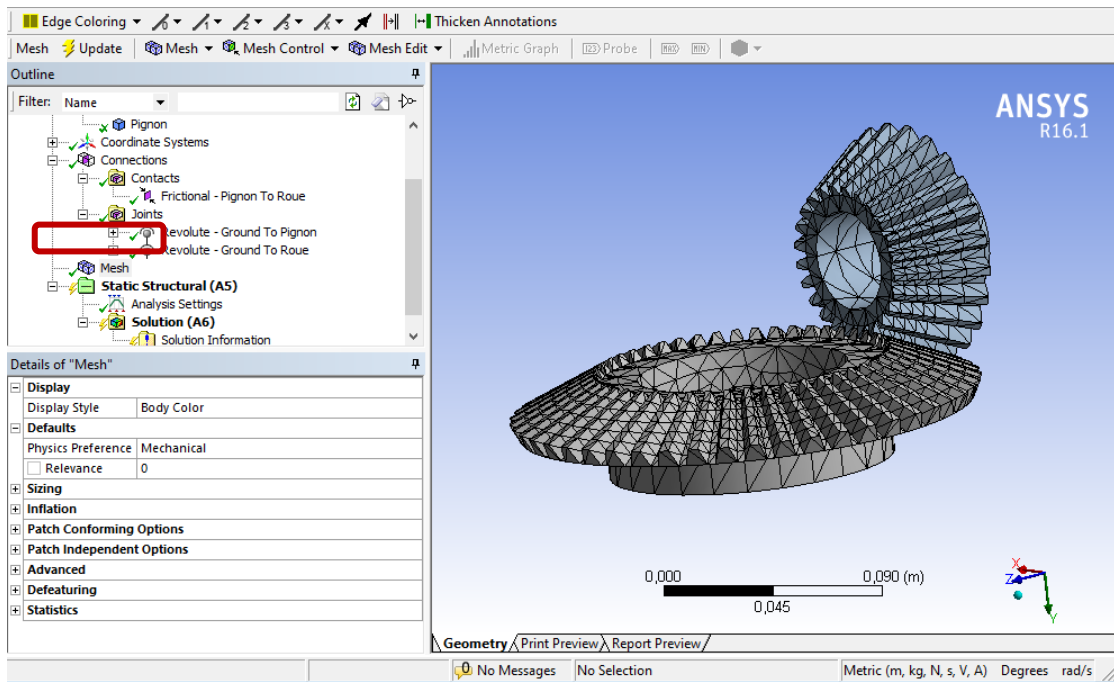


Figure 4.2. Génération du maillage.

Après avoir glissé les deux programmes **Revolute** dans **Static Structural**, on introduit les conditions de simulation.

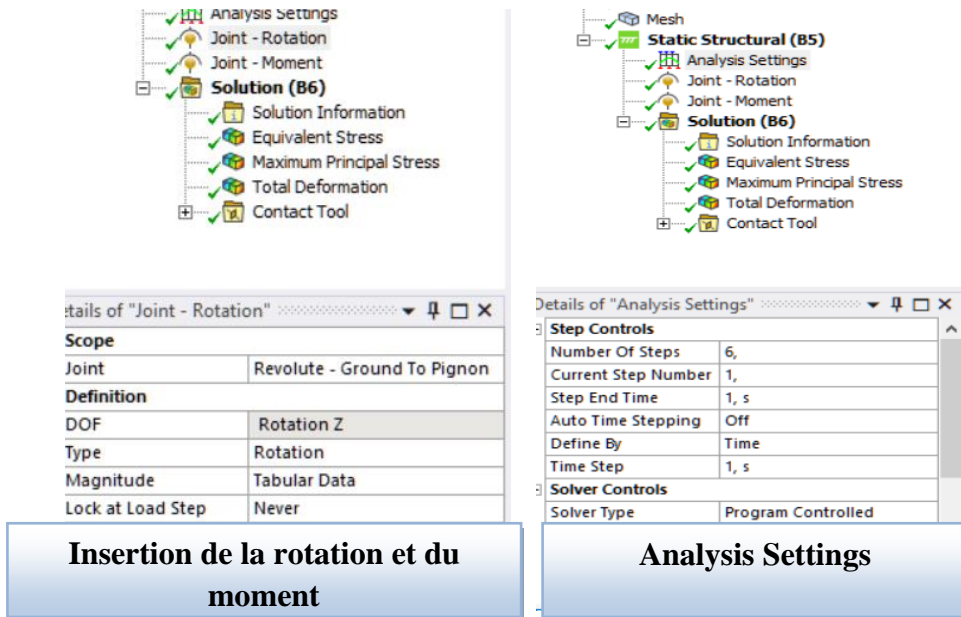


Figure 4.3. Les conditions de simulation.

3.3 Analysis Settings

Les résultats de la simulation des contraintes maximales et des déformations totales sont indiqués respectivement par les figures 4.5 et 4.6, ces résultats sont obtenus pour des variations du couple moteur de magnitude 10 N.m, 20N.m et 30 N.m. et un temps de simulation de 6 secondes qui représente les conditions idéale de la convergence de la solution. On fait remarquer que les valeurs de la plage minimales et maximales sont répertoriées dans les tableaux 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7.

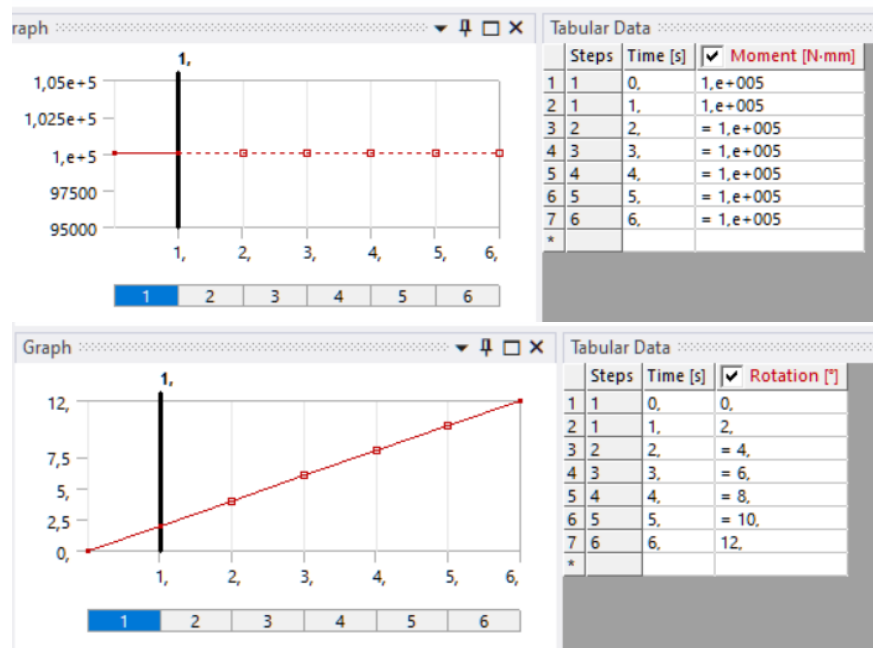


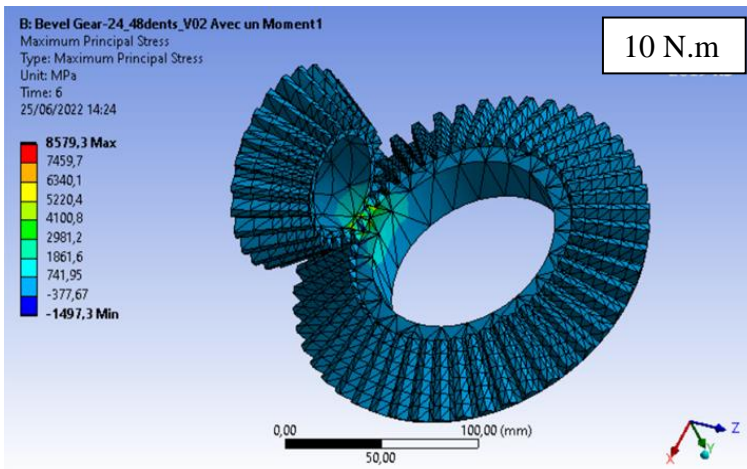
Figure 4.4. Choix du temps de la simulation.

4 Résultats de la simulation

La simulation ainsi effectuée, nous a permis d'obtenir un certains nombre de résultats à savoir les contraintes principales et de Von Mises ainsi que les déformations.

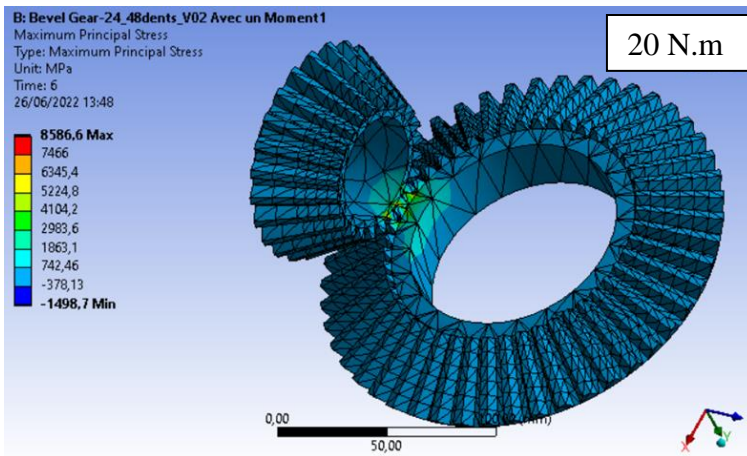
4.1 Résultats concernant les contraintes principales

Celles-ci sont représentées par les figures ci-dessous



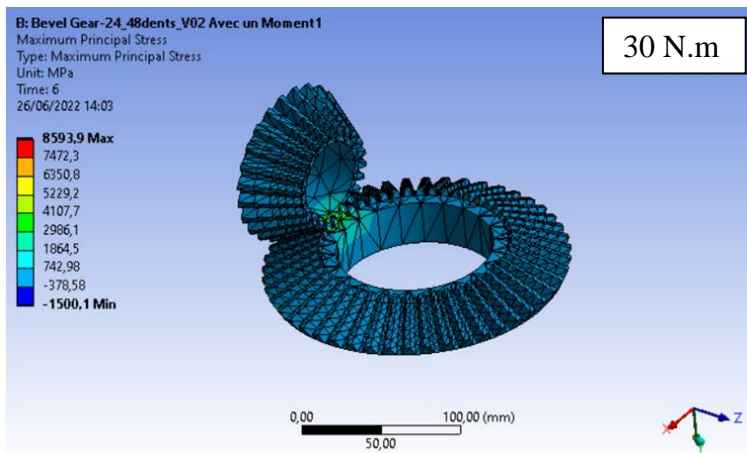
Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average
1 1,	-95,273	1048,	11,049
2 2,	-322,56	2628,6	28,886
3 3,	-581,23	4241,8	47,727
4 4,	-953,93	6093,9	77,427
5 5,	-1255,9	7485,5	109,71
6 6,	-1497,3	8579,3	146,06

Tableau4.2. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 10 N.m



Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average
1 1,	-96,882	1057,9	10,987
2 2,	-324,49	2638,2	28,833
3 3,	-582,52	4250,8	47,677
4 4,	-955,39	6101,6	77,383
5 5,	-1257,3	7492,9	109,67
6 6,	-1498,7	8586,6	146,03

Tableau4.3. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 20 N.m



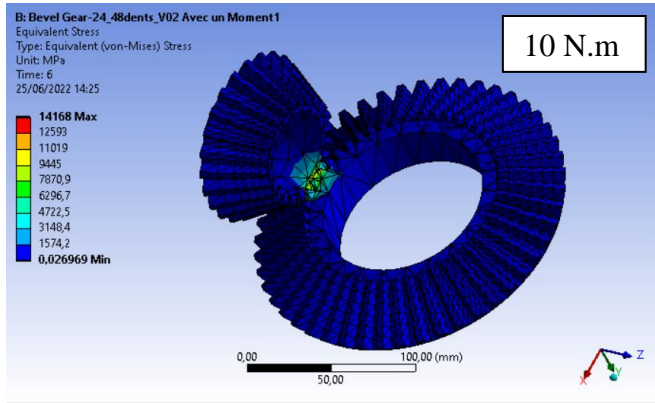
Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average
1 1,	-99,196	1069,	10,928
2 2,	-326,56	2648,2	28,782
3 3,	-583,87	4259,8	47,627
4 4,	-956,85	6109,3	77,34
5 5,	-1258,7	7500,2	109,63
6 6,	-1500,1	8593,9	146,

Tableau4.4. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 30 N.m

Figures 4.5. Résultat concernant les contraintes Principales pour différents moments

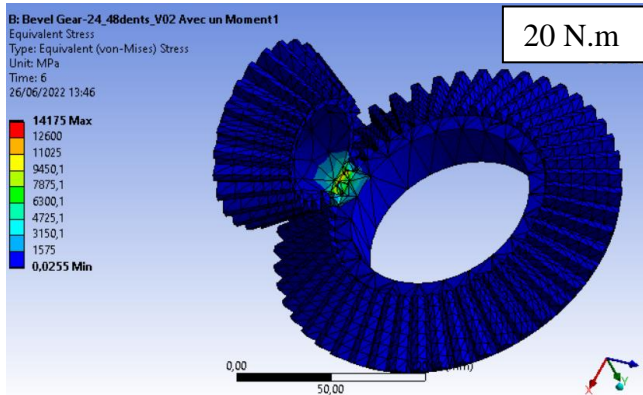
4.2 Résultats concernant les contraintes limites de Von Mises

Celles-ci sont représentées par les figures et tableaux ci-dessous.



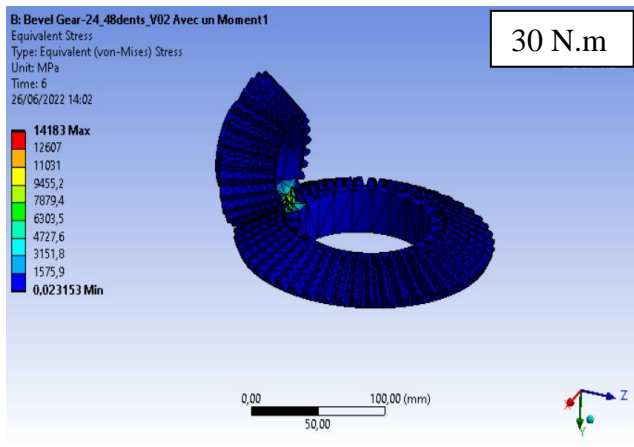
Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average
1 1.	2,7225e-003	2211,3	22,569
2 2.	4,674e-003	4605,2	59,124
3 3.	6,4744e-003	6962,8	97,969
4 4.	9,7372e-003	9555,3	158,74
5 5.	1,5044e-002	11850	224,94
6 6.	2,6969e-002	14168	299,48

Tableau4.5. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 10 N.m



Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average
1 1.	1,4784e-003	2226,6	22,505
2 2.	4,1192e-003	4618,3	59,072
3 3.	6,573e-003	6972,4	97,93
4 4.	1,0152e-002	9562,7	158,71
5 5.	1,5155e-002	11856	224,91
6 6.	2,55e-002	14175	299,47

Tableau4.6. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 20 N.m



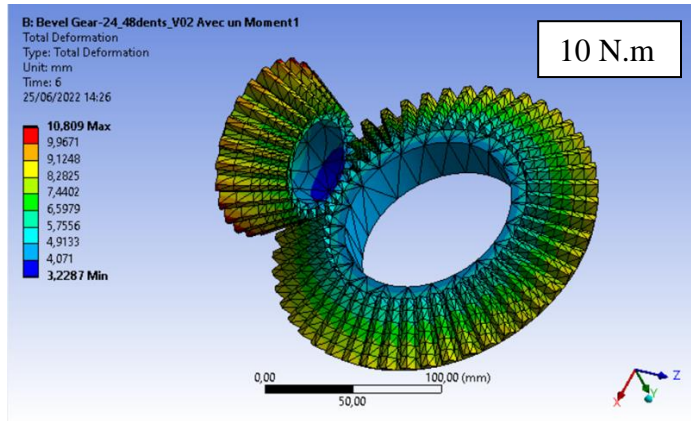
Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average
1 1.	1,5247e-003	2241,8	22,445
2 2.	3,7219e-003	4631,4	59,025
3 3.	6,8056e-003	6982,1	97,891
4 4.	1,1011e-002	9570,1	158,68
5 5.	1,5341e-002	11863	224,88
6 6.	2,3153e-002	14183	299,47

Tableau4.7. valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 30 N.m

Figures 4.6. Résultats concernant les contraintes Von Mises pour différents moments

4.3 Résultats concernant les déformations totales

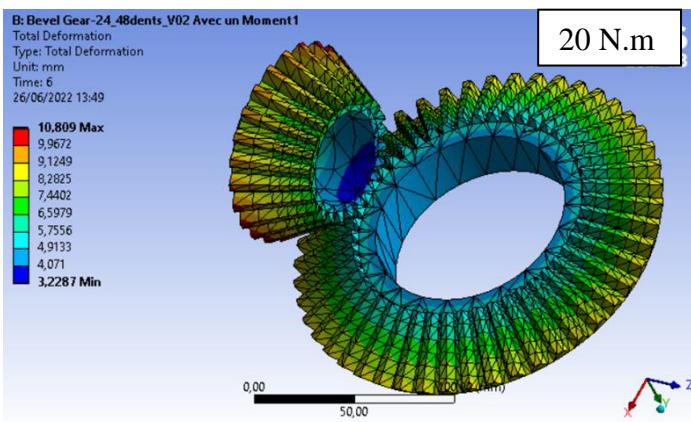
Les différents résultats des déformations totales sont représentés par les figures et tableaux ci-dessous.



Tabular Data

	Time [s]	Minimum [mm]	Maximum [mm]	Average [mm]
1	1,	0,53812	1,8048	1,096
2	2,	1,0762	3,6073	2,2299
3	3,	1,6143	5,4095	3,3606
4	4,	2,1525	7,2108	4,515
5	5,	2,6906	9,0102	5,63
6	6,	3,2287	10,809	6,7297

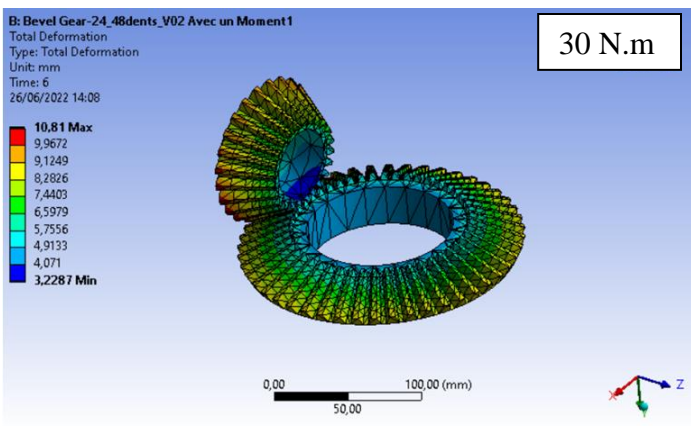
Tableau4.8 valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 10 N.m



Tabular Data

	Time [s]	Minimum [mm]	Maximum [mm]	Average [mm]
1	1,	0,53812	1,8049	1,0974
2	2,	1,0762	3,6074	2,2311
3	3,	1,6143	5,4096	3,3616
4	4,	2,1525	7,2109	4,5159
5	5,	2,6906	9,0103	5,6308
6	6,	3,2287	10,809	6,7304

Tableau4.9 valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 20 N.m



Tabular Data

	Time [s]	Minimum [mm]	Maximum [mm]	Average [mm]
1	1,	0,53812	1,805	1,0987
2	2,	1,0762	3,6075	2,2322
3	3,	1,6143	5,4097	3,3627
4	4,	2,1525	7,211	4,5168
5	5,	2,6906	9,0104	5,6316
6	6,	3,2287	10,81	6,7311

Tableau4.10 valeurs minimales, maximales et moyennes pour un moment à 30 N.m

Figure 4.7 Résultats concernant les déformations totales pour différents moments

5 Discussion des résultats

Le récapitulatif des différents résultats des valeurs minimales et maximales des contraintes ainsi que des déformations sont indiqués par les tableaux 4.8, 4.9 et 4.10.

Couple	Résultats	Temps	Valeur Mini.	Valeur Max.	Valeur Moy
10NM	Contrainte Max (MPA)	1 S	-95.273	1048	11.049
		6S	-1497.3	8579	149.06
	Von Mises (Mpa)	1S	$2.72 \cdot 10^{-3}$	2211	22.569
		6S	$2.69 \cdot 10^{-2}$	14168	299.48
	Déformations (mm)	1S	0.538	1.8	1.09
		6S	3.22	10.809	6.72

Tableau 4.11 Récapitulatif des résultats pour un couple de 10NM

Couple	Résultats	Temps	Valeur Mini	Valeur Max.	Valeur Moy
20NM	Contrainte Max (MPA)	1 S	-96.882	1057	10.987
		6S	-1498.7	8586	146.03
	Von Mises (Mpa)	1S	$1.47 \cdot 10^{-3}$	2226.6	22.505
		6S	$2.55 \cdot 10^{-2}$	14175	299.47
	Déformations (mm)	1S	0.538	1.8	1.09
		6S	3.228	10.809	6.73

Tableau 4.12 Récapitulatif des résultats pour un couple de 20NM

Couple	Résultats	Temps	Valeur Mini	Valeur Max.	Valeur Moy
30NM	Contrainte Max (MPA)	1 S	-99.196	1069	10.928
		6S	-1500.1	8593	146
	Von Mises (Mpa)	1S	$1.52 \cdot 10^{-3}$	2211.3	22.569
		6S	$2.31 \cdot 10^{-2}$	14183	299.47
	Déformations (mm)	1S	0.538	1.8	1.09
		6S	3.228	10.81	6.73

Tableau 4.13 Récapitulatif des résultats pour un couple de 30NM

- Une remarque globale attire notre attention, c'est que les valeurs pour une simulation à une seconde sont inférieures à ceux de six seconde.
- En ce qui concerne les contraintes, nous observons que quel que soit le couple appliqué et le temps de simulation les valeurs des contraintes principales maximales restent inférieures à celles des contraintes de Von Mises. Ce qui implique que les dents résistent bien aux efforts engendrés par les couples moteurs appliqués. Entre autre les valeurs de contraintes sont très proches les unes des autres pour les couples appliqués de 10, 20 ou 30NM. Ce qui s'explique par le fait que le couple de torsion maximale a été atteint et que les dents supporte bien ce couple.
- En ce qui concerne les déformations nous remarquons des valeurs minimales de l'ordre de 0.5mm pour atteindre des valeurs maximales de 10.8mm. Ces valeurs sont excessives et peuvent provoquées la rupture de la dent ou une déformation plastique où la dent devient irrécupérable. Ces valeurs s'expliquent par le fait que nous avons une dent de largeur de 40mm et non uniforme d'où des précautions pour le choix du coefficient de largeur K (K=10 dans notre cas) qui soit en adéquation avec les charges supportés.

6 Conclusion

La simulation effectuée, montre que le pied de la denture est la partie critique d'un engrenage droit. Cette partie est fortement affectée par les contraintes de flexion.

Le coin de la pointe de la dent est une autre partie critique de l'engrenage qui est fortement affectée par la contrainte de contact. De ce fait, l'effet de l'augmentation du couple moteur avec une largeur de denture inadéquate, font croire la déformation totale par contre la contrainte principale maximale reste stabilisée et inférieure à celle de Von Mises, ce qui procure des conditions de travail en contrainte satisfaisante mais avec risque de déformation plastique permanente de la dent, si sa largeur n'est pas bien choisie.

Conclusion générale

Nous avons traités dans ce mémoire la simulation des engrenages coniques sous ANSYS et celle-ci n'a été possible qu'après avoir fait l'état de l'art des différents engrenages dans lequel nous apprenons que ceux-ci étaient utilisés depuis la plus haute antiquité jusqu'à nos jours. De ce fait les engrenages ont toujours constitués un moyen de transmission de puissance, en passant par les méthodes archaïque à une génération mathématique.

Trois grandes famille de vérification de résistance ont été passées en revues, à savoir la méthode simplifiée ou de Lewis, la méthode américaine (AGMA) et de vérification des engrenages parallèles élaborée par ISO. En plus de ces méthodes qui ont fait leurs preuves, la tendance actuel est orientés vers la simulation par éléments finis dans ce contexte nous avons donné un aperçu sur cette méthodes et les techniques de mise en œuvres qui s'avèrent très complexe d'où la nécessité de passé par des logiciels spécialisés tel que le logiciel ANSYS. Dans ce contexte nous avons développés une simulation d'un couple d'engrenage conique avec le module Static structurale. Après de multiple essaies, nous sommes arrivés à une mise en œuvre qui nous a permis de déterminer les contraintes principales et celle de Von Mises ainsi que les déformations totales. Il en ressort ;

- Que les valeurs déduites pour une simulation à une seconde sont inférieures à ceux de six secondes.
- Que les valeurs des contraintes principales maximales restent inférieures à celles des contraintes de Von Mises.
- Que les valeurs des déformations maximales sont excessives et peuvent provoquées la rupture de la dent ou une déformation plastique où la dent devient irrécupérable.

Ces différents résultats s'expliquent par le fait que nous avons une dent de largeur de 40mm et non uniforme d'où des précautions pour le choix de la largeur de la dent en adéquation avec les charges supportés. D'où la nécessiter de faire une investigation approfondie de cette situation et de trouver les conditions optimales entre le coefficient K et la largeur de la denture pour éviter ces déformations excessives. Il est évident que ce travail est un début d'une longue investigation qui va nous permettre de comprendre beaucoup mieux le fonctionnement des engrenages coniques et les différents problèmes qui résultent, ce qui nous ne pouvions prévoir avec les méthodes classiques de calculs.