



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique



جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Département Maintenance en Instrumentation

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention de diplôme Master

Filière : Génie Industriel
Spécialité : Génie Industriel

Thème

**Modélisation et simulation des chaînes de production
dans les Systèmes à Évènements Discrets : application à
ORSIM RELIZANE.**

Présenté et soutenu publiquement par :

HAMAIDA Fayçal et **FERNANE Abdelatif**

Devant le jury composé de :

Nom et prénom	Grade	Etablissement	Qualité
Mr. HASSINI Abdelatif	Prf.	IMSI-Univ .D'Oran 2	Président
Mr. BENFEKIR Abderrahim	MCB	IMSI-Univ .D'Oran 2	Encadreur
Mr. BENARBIA Taha	MCB	IMSI-Univ .D'Oran 2	Examineur

2022/2023

DEDICACES

J'ai toujours pensé faire ou offrir quelque chose à parentes en signe de reconnaissance pour tout ce qu'ils ont consenti des efforts rien que pour me voir réussir, et voilà, l'occasion est venue.

A ceux qui m'ont donné la vie, symbole de beauté, et de fierté, de sagesse et de patience.

A ceux qui sont la source de mon inspiration et de mon courage, à qui je dois de l'amour et la reconnaissance.

A ma très chère mère, mon cher père, et Mes frères "Yacine" et "Farouk" et ma sœur, mes cousin "Bouabdellah, Abdennour et Mohamed" et ma nièce "silla".

A mon binome "Fayçal" et tous mes amis "Walid, Abdelhamid, Abdelaziz, Abdelmalek, Mehdi, Farid, Hocine, Aymen, Youcef, Maamer, Mohamed, Mohamed al amine, Abdelkader, Yasser, Chamseedine"

A toute ma famille.

Enfin je dédie ce travail à ceux qui m'ont de près ou de loin.

Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire qui est le fruit de nombreuses années d'étude et de travail, tout en exprimant ma profonde gratitude et sympathie à toutes les personnes qui ont participé de près et de loin pour mener à bien ce projet et plus particulièrement :

A mon cher père «Mohamed» et ma chère mère, mes chères grands-pères qui a œuvré pour ma réussite, de son soutien tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils pour toute son assistance et sa présence

A Mon frère «Abdelbasset» et ma sœur «Amina» que j'aime sans limites, dans ma vie.

A toutes mes tantes et leur famille.

A tous mes oncles et leur famille.

A Mon amie «Mohamed» lequel que j'ai partagé les bons moments.

A mon binôme «Abdelatif», mon meilleure amie avec laquelle que j'ai partagé tous.

A tous mes ami(e)s d'IMSI

A tous mes ami(e)s avec lesquels que j'ai partagé les bons moments.

A tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près.

Hamaida Fayçal

Remerciement

Tout d'abord, nous aimerions remercier Dieu le Tout-Puissant de nous avoir donné le courage, la patience, la force et la volonté pour la réalisation de ce travail.

Nous tenons à exprimer toute notre profonde gratitude et nous remercions sincèrement notre encadrant, **M. A. BENFKIR**, pour son aide tout au long de notre travail, ainsi que pour toutes les informations et l'encouragement qu'il n'a jamais hésité à nous fournir pendant toute la période consacrée à la réalisation de notre projet de fin d'étude.

Nos remerciements s'adressent à Monsieur le président, **M. A. HASSINI**, pour l'honneur qu'il nous fait de présider ce jury de soutenance, et nous lui exprimons notre profonde gratitude.

Nous tenons également à remercier **M. T. BENARBIA**, qui a aimablement accepté d'examiner et de juger notre travail, ainsi que pour l'intérêt qu'il y porte.

Un grand merci à nos familles pour leur soutien permanent, leur présence et leurs encouragements.

Enfin, nos remerciements s'adressent également à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, cette théorie concerne la sous-classe des systèmes à événements discrets modélisables par les Graphes d'Événements Temporisés (GET). La dynamique de ces graphes peut être représentée par des équations récurrentes linéaires sur des structures algébriques particulières telles que l'algèbre $(\max, +)$ ou l'algèbre $(\min, +)$.

Ce mémoire est consacré aux modélisation et commande des systèmes dynamiques qui peuvent être modélisés graphiquement par des Graphes d'Événements Temporisés Généralisés (GETG).

Ces derniers, contrairement au GET, n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min, +)$. Pour pallier à ce problème de non linéarité, nous avons utilisé une approche de modélisation définie sur un dioïde d'opérateurs muni de deux lois internes : loi additive (\oplus) correspondant à l'opération (\min) , et loi multiplicative (\otimes) équivalente à la loi de composition usuelle. Le modèle d'état obtenu, est utilisé pour commander les GET.

Mots-clés : Systèmes à événement discrets, Réseau de Pétri, Modélisation, Commande Simulation, Chaîne de production.

LISTE DES NOTATIONS

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I :	3
1.1 Algèbre des dioïdes	3
1.2 Éléments de la théorie des systèmes linéaires	6
1.2.1 Notions sur les systèmes	6
1.2.2 Systèmes élémentaires	7
1.2.3 Opérations sur les systèmes	8
1.3 Conclusion :	9
CHAPITRE II	10
2.1 Les réseaux de Pétri	10
2.1.1 Définitions et notations	11
2.1.2 Equation fondamentale	12
2.1.3 Marquages accessibles	12
2.1.4 Concurrence et synchronisation dans les RdP	13
2.1.5 Quelques propriétés des RdP	14
2.1.6 Invariants d'un réseau de Pétri	15
2.2 Graphes d'Événements Temporisés	17
2.2.1 Conditions initiales	18
2.3 Graphes d'Événements Temporisés Généralisés	19
2.3.1 Gain d'un circuit :	20
2.4 Conclusion :	22
CHAPITRE III	23
3.1 Modélisation des GET dans l'algèbre (min, +)	23
3.1.1 Forme récurrente explicite	26
3.2 Modélisation des GETG	28
3.2.1 Equations récurrentes des GETG	28
3.2.2 Modélisation à base d'opérateurs des GETG	29
3.3 Modélisation de la chaîne de Fabrication de vis :	33
3.3.1 Description du processus de fabrication	33
3.3.2 Définition du logiciel de simulation (PIPE 2) :	36
3.3.3 Modélisation graphique	38
3.3.4 Modélisation mathématique :	39
3.3.5 Modélisation dans l'algèbre des dioïdes d'opérateur $\mathcal{D}_{\min} \delta$	40

3.4	Relation entrée-sortie dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min\delta}$	40
3.4.1	Relation entrée-sortie de la chaîne de Fabrication de vis	41
3.5	Conclusion	42
CHAPITRE IV:		43
4.1	Commande en juste-à-temps des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs	44
4.1.1	Equations backward dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min\delta}$	45
4.1.2	Commande en juste à temps de la ligne de conditionnement	48
CONCLUSION GENERALE		55
BIBLIOGRAPHIE		56

Liste des Notations

SED : Système à Evénements Discret.

RdP : Réseau de Petri.

\mathcal{P} : ensemble non vide de places d'un réseau de Petri.

\mathcal{T} : ensemble non vide de transitions d'un réseau de Petri.

m_p : nombre de jetons initialement contenus dans la place p .

τ_p : durée minimale de séjour d'un jeton dans la place p .

GET : Graphe d'Evénements Temporisé.

GETG : Graphe d'Evénements Temporisé Généralisé.

θ : vecteur T-invariant associé au graphe d'événements temporisé généralisé.

ppcm : plus petit commun multiple.

M_{qp} : poids de l'arc allant de la place p vers la transition x_q .

$M_{pq'}$: poids de l'arc allant de la transition $x_{q'}$ vers la place p .

\mathcal{N}_p : marque valuée associée à la place p .

\mathcal{N}_ρ : marque valuée associée au circuit ρ .

\oplus : addition dans un dioïde.

\otimes : multiplication dans un dioïde.

\mathbb{Z}_{\max} : algèbre $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$.

$\bar{\mathbb{Z}}_{\max}$: algèbre $(\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}, \max, +)$.

\mathbb{Z}_{\min} : algèbre $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$.

$\bar{\mathbb{Z}}_{\min}$: algèbre $(\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}, \min, +)$.

\preceq : relation d'ordre liée à un dioïde.

a^* : étoile de kleene.

$c_q(t)$: variable compteur associée à la transition c_q d'un graphe d'événements temporisé.

$\mathcal{D}_{\min}[\delta]$: dioïde d'opérateurs permettant de modéliser les graphes d'événements temporisés généralisé.

$\gamma^v, v \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$: opérateur de stock sur les compteurs.

$\delta^\tau, \tau \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$: opérateur de retard sur les compteurs.

$\mu_m, m \in \mathbb{Q}$: opérateur multiplieur sur les compteurs.

$\bar{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$: ensemble de signaux de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z}_{\min} .

$[a]$: partie entière supérieure de a .

$[a]$: partie entière inférieure de a .

C : matrice d'incidence.

K : P-invariant.

Θ : T-invariant.

M_0 : vecteur marquage initial.

u.t : unité de temps.

Liste des figures

Figure1.1: assemblage de deux barres.	4
Figure1.2: Système «Γv».	7
Figure1.3: Système «$\Delta\tau$».	8
Figure1.4: Composition série.	8
Figure1.5: Composition parallèle.	8
Figure1.6: Mise en feedback.	8
Figure2.1: Représentation graphique d'un RdP.	11
Figure2.2: Graphe des marquages atteignables du réseau de Pétri de la figure 2.1.	13
Figure2.3: Concurrence et synchronisation dans les RdP.	14
Figure2.4: Réseau de Pétri à arcs pondérés.	16
Figure2.5: Boucle de ré-entrance.	17
Figure2.6: Modèle GET d'un atelier de coupe de bois.	17
Figure2.7: Marquage initial ($t = -\infty$).	18
Figure2.8: Marquage à l'instant initial d'observation ($t=0$).	19
Figure2.9: GETG élémentaire.	20
Figure2.10: Evolution du marquage.	20
Figure3.1: GET élémentaire.	24
Figure3.2: Phénomène de synchronisation dans un GET.	24
Figure3.3: Exemple d'un GET.	25
Figure3.4: GET équivalent à celui de la figure 3.3 en vue d'une représentation markovienne.	27
Figure3.5: Exemple de GETG élémentaire.	28
Figure3.6: Exemple de GTEG.	29
Figure3.7: Opérateur «γv».	29
Figure3.8: Opérateur «$\delta\tau$».	30
Figure3.9: Opérateur μm, avec $m = a/b$.	30
Figure3.10: Flux de la chaîne de production.	33
Figure3.11: Ecran d'accueil PIPE2.	36
Figure3.12: GETG de la chaîne de production.	38
Figure3.13: -GETM simplifié de la chaîne de Fabrication de vis.	41
Figure4.1: Commande par poursuite de modèle.	43
Figure4.2: -GETM simplifié de la chaîne de Fabrication de vis.	48
Figure4.3: Sortie désirée Z (trait épais) et sortie Y (pointillé), $Y \preceq Z$.	53
Figure4.4: Trajectoires de Ksi3 (trait épais) et X3 (pointillé), $X3 \preceq Ksi3$.	54

Introduction générale

Les Systèmes à évènement discrets (SED) désignent des systèmes généralement de conception humaine. Leur évolution obéit à l'apparition d'évènements qui ont lieu à des instants discrets. Cette classe de systèmes regroupe aussi bien les systèmes de production : les réseaux de transport (routier, ferroviaire ou aérien) et les systèmes informatiques qui sont, par exemple, des processus que l'on peut considérer comme des systèmes à évènements discrets.

Les outils reconnus pour l'évaluation des performances des systèmes à événements discrets sont la simulation et les outils mathématiques tels que les chaînes de Markov, les réseaux de fils d'attente et les réseaux de Pétri.

Au début des années 80 une nouvelle théorie, permettant d'étudier une catégorie de SED, a vu le jour. Cette théorie concerne une sous classe de réseaux de pétri, appelés graphes d'évènements temporisés (GET). Ces derniers admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique particulière, connue sous le nom de l'algèbre des dioïdes [Baccelli 1992] (l'algèbre $(\min, +)$ étant un exemple de dioïde). Cependant, les techniques développées dans le cadre des SED atteignent leur limite lorsque la taille du système considéré est importante (du fait du nombre important d'entités). Il s'avère alors utile d'utiliser des GET à arcs pondérés, encore appelés GET Généralisés (GETG), ce qui permet de réduire la taille du modèle. Ces graphes permettent également de modéliser de façon simple des opérations d'assemblage et de désassemblage de produits présentes dans certains systèmes de production.

Ce mémoire est consacré l'étude d'une unité de production ORSIM à OUED RHIOU-RELIZANE, dans l'objectif de commander ce système. Pour cela on a proposés tout d'abord un modèle graphique RDP, ce modèle nous permettre de proposer un modèle mathématique définir dans une classe particulière connue sous le nom de l'algèbre de dioïdes, l'application d'un ensemble des théories développées dans ce cadre permet de définir les performances d'un systèmes dynamiques qui peuvent être modélisés graphiquement par des Graphe d'Evènement Temporisés généralisés (GETG).

Ces derniers, contrairement au GET, n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min,+)$. Pour pallier à ce problème de non linéarité, nous avons utilisé une approche de modélisation définie sur un dioïde d'opérateurs muni de deux lois internes : loi additive (\oplus) correspondant à l'opération $(\min,+)$, et loi multiplicative (\otimes) équivalente à la loi de composition usuelle. Le modèle de l'état obtenu, est utilisé pour évaluer les performances de GETG. Pour cela on présente une méthode d'entrée-sortie.

Ce mémoire comporte de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons les outils algébriques nécessaires à la modélisation et à la commande des systèmes de productions modélisable par les graphes d'événements temporisés avec multiplieurs.

Le second chapitre a trait la modélisation des graphes d'événements avec multiplieurs dans les réseaux de Pétri, qui sont un langage graphique permettant de décrire les Systèmes à Évènements Discrets.

Le troisième chapitre a traité la modélisation des graphes généralisés dans un dioïde d'opérateurs. Nous présentons le modèle de l'unité de production ORSIM instaler à OUED RHIOU de la Wilaya de RELIZANE,. Pour cela on a proposés un modèle graphique RDP, ce modèle nous permettre de proposé un modele mathématique définir dans une classe particulière connue sous le nom de l'algèbre de dioides dans l'objictif de proposer une commander pour amiliorer les performances de ce système.

Le quatrième chapitre est consacré à la commande juste-à-temps pour synthétiser une trajectoire d'entrée telle que la réponse en sortie suivre au mieux une trajectoire de consigne correspondant au comportement désiré en sortie de système.

Et finalement une conclusion générale de ce travail.

Chapitre I :

Outils algébriques

Ce premier chapitre a pour objectif d'expliciter les outils algébriques utilisés dans ce mémoire, nous présentons, tout d'abord un ensemble de définition, de notations et résultats relatifs à l'algèbre des dioïdes. Nous débutons cette partie par les définitions des dioïdes, ensuite nous intéressons à la structure ordonnée dans un dioïdes

1.1 Algèbre des dioïdes

Définition 1.1 On appelle un dioïde (ou semi-anneau idempotent) un ensemble \mathcal{D} muni de deux lois de compositions internes, l'une notée additivement \oplus , et l'autre notée multiplicativement \otimes telles que les axiomes suivants sont respectés ($\forall a, b, c \in \mathcal{D}$):

- **L'addition est associative :** $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c$,
- **L'addition est Commutative :** $a \oplus b = b \oplus a$,
- **L'addition est idempotente :** $a \oplus a = a$,
- **L'addition admet un élément neutre noté ε appelé zéro :** $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$.
- **La multiplication est associative :** $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a \otimes b \otimes c$,
- **Distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition :**

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \text{ et } (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a),$$
- **Le zéro est absorbant pour la multiplication :** $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$,
- **La multiplication admet un élément neutre noté e :** $a \otimes e = e \otimes a = a$.

De plus, un semi-anneau idempotent, couramment noté $(\mathcal{D}; \oplus; \otimes)$, est commutatif lorsque la loi multiplicative \otimes est commutatif, soit lorsque $a \otimes b = b \otimes a$.

Exemple 1.1 (dioïdes \mathbb{Z}_{\min}). $\mathbb{Z}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ est un dioïde commutatif, où la loi additive \oplus correspond à l'opération *min* usuelle ; la loi multiplicative \otimes est équivalente à l'*addition* usuelle. L'élément zéro de \mathbb{Z}_{\min} est $\varepsilon = +\infty$ et l'élément identité est $e = 0$. Ce dioïde est appelé l'algèbre $(\min, +)$.

Application : On s'intéresse à la production de barres assemblées, on peut dire qu'une barre assemblée est la "somme" de deux barres et d'une vis et d'un écrou. Cette nouvelle "somme", notée \oplus pour la distinguer du + habituel, correspond à l'opération d'assemblage. On notera que l'on se permet alors d'"ajouter" des grandeurs ne s'exprimant pas dans les mêmes unités. Si on a 2 barres et 1 vis et 1écrou, on ne peut fabriquer qu'une seule barre assemblée, donc $2 \oplus 1 \oplus 1 = 1$, ce qui est équivalent dans l'algèbre usuelle à la min $(2, 1, 1) = 1$.

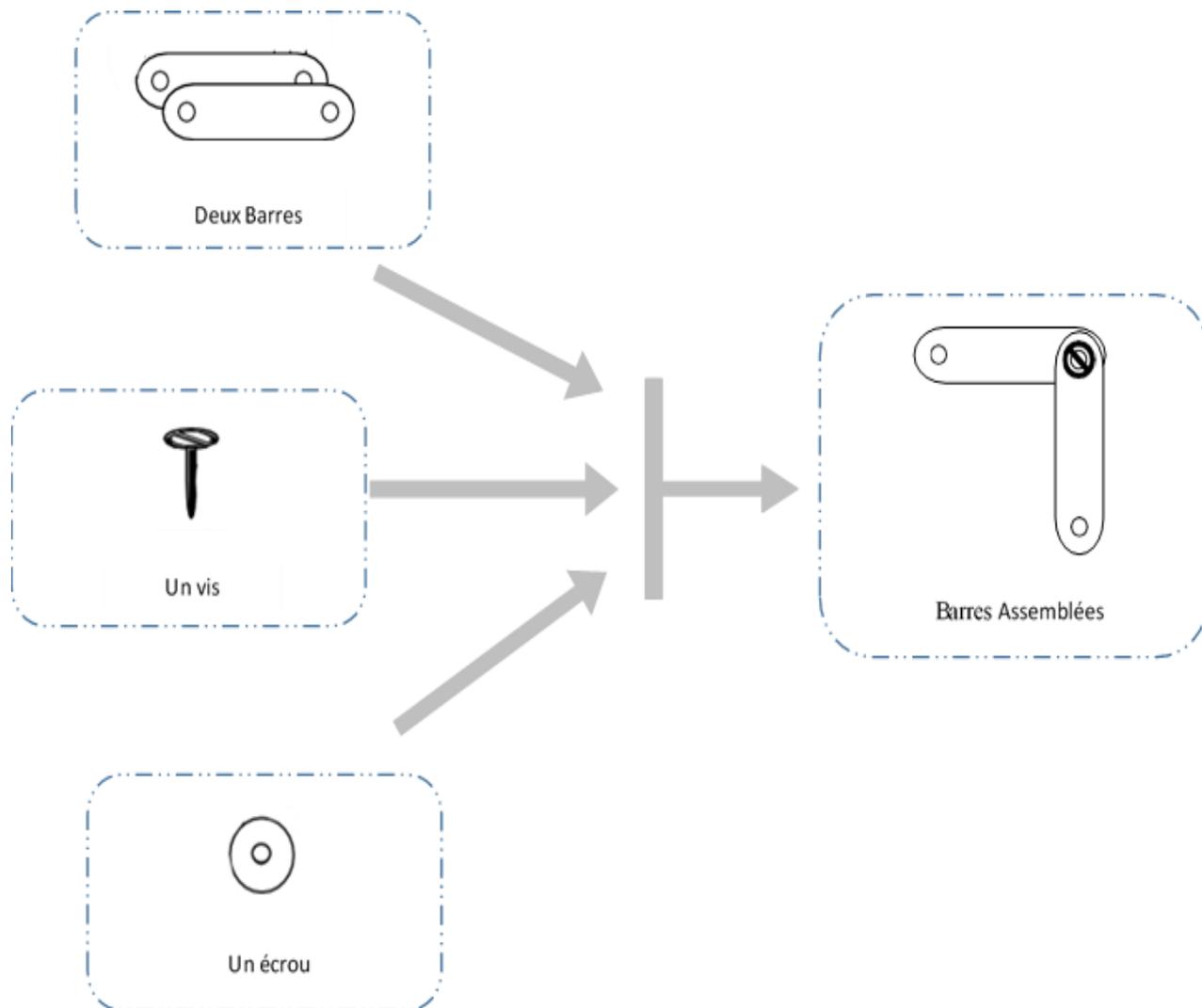


Figure1.1: assemblage de deux barres.

Exemple 1.2 (Dioides \mathbb{Z}_{\max}). $\mathbb{Z}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \max, +)$ est un dioïde commutatif, où la loi additive \oplus correspond à l'opération max usuelle ; la loi multiplicative \otimes est équivalente à l'addition usuelle. L'élément zéro de \mathbb{Z}_{\min} est $\varepsilon = -\infty$ et l'élément identité est $e = 0$. Ce dioïde est appelé l'algèbre $(\max, +)$.

Application : $1 \oplus 3 = 3 \Leftrightarrow \max(1, 3) = 3$

Définition 1.2 (Dioïde complet). Un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est complet si :

- Il est fermé pour les sommes infinies ;
- La loi \otimes distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $a \in \mathcal{D}$ et tout sous ensemble $\beta \subseteq \mathcal{D}$,

$$a \otimes \left(\bigoplus_{b \in \beta} b \right) = \bigoplus_{b \in \beta} (a \otimes b) \quad \text{Et} \quad \left(\bigoplus_{b \in \beta} b \right) \otimes a = \bigoplus_{b \in \beta} (b \otimes a)$$

Un dioïde complet admet un élément maximum $\bigoplus_{a \in \mathcal{D}} a$, que l'on notera T pour Top. Il est absorbant pour l'addition, autrement dit $\forall a \in \mathcal{D}, T \oplus a = T$.

Notons que, d'après la définition d'un dioïde, l'élément zéro ε est absorbant pour la multiplication pour tout élément de \mathcal{D} , aussi, on a : $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$.

Exemple 1.3 On vérifie facilement que les dioïdes suivants sont complets :

$(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$ avec $\varepsilon = +\infty, e = 0$ et $T = -\infty$ est un dioïde noté par $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$

On a dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ la règle suivante :

$$(-\infty) + (+\infty) = (+\infty).$$

$(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ avec $\varepsilon = -\infty, e = 0$ et $T = +\infty$ est un dioïde noté par $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$

On a dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ la règle suivante :

$$(-\infty) + (+\infty) = (-\infty).$$

Définition 1.3 (Dioïde matriciel). L'ensemble des matrices carrées de dimension n, à coefficients dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, est un dioïde matriciel, noté $(\mathcal{D}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$, où les opérations sont définies, à partir des opérations du dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ de manière analogue à l'algèbre classique, de la façon suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{D}^{n \times n} ;$$

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n,$$

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}, \forall i, j = 1, \dots, n,$$

L'élément identité de $\mathcal{D}^{n \times n}$ est la matrice, notée Id_n , composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs. L'élément zéro est la matrice composée exclusivement de ε .

La somme et le produit de deux matrices de dimensions compatibles, pas nécessairement carrées, peuvent être définis de la façon suivante :

- $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$, $B \in \mathcal{D}^{n \times p}$;

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p,$$

- $C \in \mathcal{D}^{n \times p}$, $B \in \mathcal{D}^{p \times q}$;

$$C \otimes D : (C \otimes D)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, q,$$

Exemple 1.4 Calcul Matriciel dans l'algèbre $(\max, +)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- $a = (2 \otimes 4) \oplus (6 \otimes 5) = \max(2 + 4, 6 + 5) = 11$
- $b = (2 \otimes 1) \oplus (6 \otimes 7) = \max(2 + 1, 6 + 7) = 13$
- $c = (3 \otimes 4) \oplus (8 \otimes 5) = \max(3 + 4, 8 + 5) = 13$
- $d = (3 \otimes 1) \oplus (8 \otimes 7) = \max(3 + 1, 8 + 7) = 15$

1.2 Éléments de la théorie des systèmes linéaires

1.2.1 Notions sur les systèmes

Cette partie est consacrée à la présentation des éléments de la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes.

Définition : 1.4 (Signal). On appelle *signal* une application u de $\mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$.

$t \rightarrow u(t)$. On note $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des signaux muni de deux opérations :

- Une loi additive interne, notée \oplus , définie par :

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, (u_1 \oplus u_2)(t) = u_1(t) \oplus u_2(t).$$

- Une loi externe, qui joue le rôle du produit d'un signal par un scalaire, notée « \bullet », définie par :

$$\forall a \in \mathcal{D}, \forall u \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, (a \bullet u)(t) = a \otimes u(t).$$

L'ensemble $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ est composé de signaux. En effet :

- Un signal est croissant s'il satisfait

$$\forall t \in \mathcal{D}, \forall \tau \in \mathbb{N}, u(t + \tau) \succcurlyeq u(t).$$

- Un signal est décroissant s'il satisfait

$$\forall t \in \mathcal{D}, \forall \tau \in \mathbb{N}, u(t + \tau) \leq u(t).$$

Définition 1.5 (Système linéaire). Un système, noté \mathcal{S} , est un opérateur définie de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$ vers $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{S}(u_1 \oplus u_2) = \mathcal{S}(u_1) \oplus \mathcal{S}(u_2) \text{ (Propriété d'additivité)}$$

$$\forall u_1 \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall a \in \mathcal{D}, \mathcal{S}(a \otimes u_1) = a \otimes \mathcal{S}(u_1) \text{ (Propriété d'homogénéité)}$$

Définition 1.6 (Produit de convolution). Le produit de convolution de deux signaux est noté \otimes et est défini par :

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, (u_1 \otimes u_2)(t) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} u_1(\tau) u_2(t - \tau) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} u_1(t - \tau) u_2(\tau)$$

Exemple 1.5 Le produit de convolution de deux signaux de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$ satisfait la relation suivante :

$$\forall u_1, u_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, (u_1 \otimes u_2)(t) = \min_{\tau \in \mathbb{Z}} \{u_1(\tau) + u_2(t - \tau)\}$$

On parle de produit d'*inf-convolution*.

De manière duale, le produit de convolution de deux signaux de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$ donne :

$$\forall u_1, u_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, (u_1 \otimes u_2)(t) = \max_{\tau \in \mathbb{Z}} \{u_1(\tau) + u_2(t - \tau)\}$$

On parle de produit de *sup-convolution*.

Définition 1.7 (Système continu). Un système \mathcal{S} est continu si pour tout sous-ensemble fini ou infini $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$, on a :

$$\mathcal{S}\left(\bigoplus_{i \in I} u_i\right) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{S}(u_i)$$

Sachant que $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est dioïde complet.

Définition 1.8 (Système causal). Un système \mathcal{S} est causal si pour toutes entrées u_1 et u_2 , on a : $\forall \tau \in \mathbb{Z}, u_1(t) = u_2(t)$ pour $t \leq \tau \Rightarrow [\mathcal{S}(u_1)](t) = [\mathcal{S}(u_2)](t)$ pour $t \leq \tau$.

1.2.2 Systèmes élémentaires

On présente dans cette partie deux systèmes élémentaires linéaires :

- Système gain Γ^v défini de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$ vers $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall u, y \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}, v \in \overline{\mathbb{Z}}, y(t) = [\Gamma^v(u)](t) = v \otimes u(t).$$



Figure 1.2: Système « Γ^v ».

- Système retard Δ^τ défini de $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{Z}}$ vers $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{Z}}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall u, y \in \overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{Z}}, \tau \in \overline{\mathbb{Z}}, y(t) = [\Delta^\tau(u)](t) = u(t - \tau).$$



Figure1.3: Système « Δ^τ ».

1.2.3 Opérations sur les systèmes

Il existe trois opérations élémentaires permettant de mettre en relation des systèmes : la composition série, la composition parallèle et la mise en feedback.

- Composition série : $S = S_1 \otimes S_2$ est définie par :

$$[S(u)](t) = [S_2(S_1(u))](t).$$



Figure1.4: Composition série.

- Composition parallèle : $S = S_1 \oplus S_2$ est définie par :

$$[S(u)](t) = [S_1(u)](t) \oplus [S_2(u)](t).$$

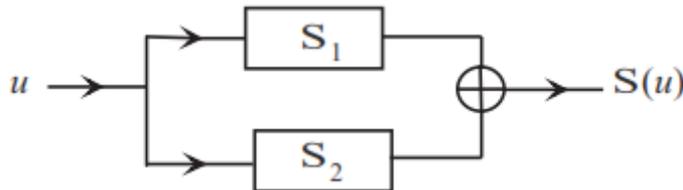


Figure1.5: Composition parallèle.

- Mise en feedback : On considère le schéma suivant, où S_1 et S_2 sont deux opérateurs linéaires

La relation entre la sortie y et l'entrée u satisfait :

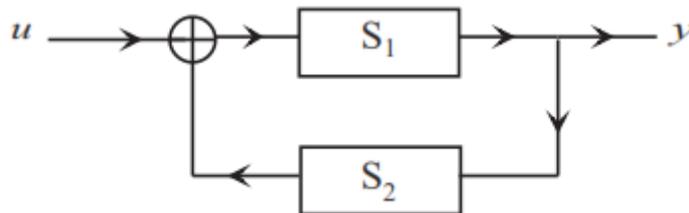


Figure1.6: Mise en feedback.

$$y = S_1(S_2(y) \oplus u) = S_1(S_2(y)) \oplus S_1(u).$$

1.3 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre les outils mathématiques utilisés par la suite. Après un bref rappel sur la structure algébrique des dioïdes, et nous avons donné un ensemble de définitions sur la théorie des systèmes utiles pour aborder, dans le chapitre suivant, la représentation de certains systèmes dynamique, modélisables dans un dioïde d'opérateurs.

Chapitre II

Introduction aux GETG

Il y'a des nombreuses classes de modèles sont proposées pour l'étude des systèmes de production. Le choix d'un type de modèle est en fonction des objectifs recherchés. Dans le cas des systèmes de production, des concepts de modélisation ont été élaborés : par exemple, les chaîne de Karkov [Baynat, 2000], les files d'attentes [Bayant, 2000] ou bien les réseaux de Pétri [Murata, 1989, Porth and Xie, 1995].

Certains systèmes à évènement discrets (SED) qui mettent en jeu uniquement des phénomènes de synchronisation peuvent être décrits de façon linéaire dans certains dioïdes. Ces systèmes peuvent également être représentés par un modèle graphique appelé graphe d'évènements temporisé (GET). Cette représentation découle directement de la théorie des réseaux de pétri.

2.1 Les réseaux de Pétri

On présente sommairement dans la première section de ce chapitre les réseaux de Pétri, qui sont un langage graphique permettant de décrire les Systèmes à Evènements Discrets (SED). L'emploi des réseaux de Pétri pour la spécification, la simulation et l'analyse de ces systèmes remonte aux années 60 et s'est maintenant généralisé. La littérature sur les réseaux de Pétri généraux est très abondante. On s'est limité aux préliminaires indispensables dans cette partie.

Les réseaux de Pétri (RdP) constituent un formalisme graphique propre à la modélisation des Systèmes à Evènements Discrets (SED) introduit en 1962 par Carl Adam Pétri [Pétri 1962]. Ils sont particulièrement adaptés à l'étude des processus complexes mettant en jeu des propriétés de synchronisme et de partage de ressources. Leur support mathématique a permis en outre d'établir de nombreux résultats analytiques. Le lecteur intéressé par plus amples développements trouvera une présentation générale et des références bibliographiques dans [Murata 1989], [Proth 1995] et [David 1992]. Pour l'étude des SED dans l'algèbre des dioïdes, les RdP sont souvent utilisés comme un outil de modélisation intermédiaire.

2.1.1 Définitions et notations

Définition 2.1 : Un réseau de Pétri est un graphe biparti constitué de deux types de sommets : places (représentées par des cercles) et transitions (représentées par des barres). Des arcs orientés relient certaines places à certaines transitions, ou certaines transitions à certaines places. A chaque arc on associe un poids (entier positif). Le nombre de places (resp. de transitions) est fini, et non nul. Chaque place, peut contenir un ou plusieurs jetons (représentés par des points) qui modélisent la dynamique du système. A chaque place on associe une temporisation. Cette dernière correspond au temps de séjour des jetons dans une place.

D'une façon plus formelle, un RdP est un 5-tuplet $\mathcal{R} = (\mathcal{P}, \text{Pré}, \text{Post}, \tau)$, où :

- \mathcal{P} (resp. \mathcal{T}) est un ensemble non vide et fini de place (resp. transitions) ;
- $\text{Pré} : \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ une application d'incidence avant : $\text{Pré}(p ; c_q)$ contient la valeur entière M_{qp} associée à l'arc allant de la place p à la transition c_q ;
- $\text{Post} : \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ une application d'incidence arrière : $\text{Post}(p ; c_q)$ contient la valeur entière M_{pq} associée à l'arc allant de la transition c_q à la place p ;
- $\tau \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$ définit les temporisations associées aux places : τ_p désigne la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place p .

Le marquage \mathcal{M} d'un réseau de Petri est une application $\mathcal{M} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$. La quantité $\mathcal{M}(p)$ détermine le marquage de la place p . un réseau marqué est déterminé par le couple $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ formé d'un réseau de Petri \mathcal{R} est d'un marquage initial \mathcal{M}_0 .

Une transition sans place en amont est dite transition source, une transition sans place en aval est dite transition puits. La figure 2.1 représente un RdP ordinaire (tous les poids sont unitaires) dont les places sont représentées par des cercles et les transitions par des barres.

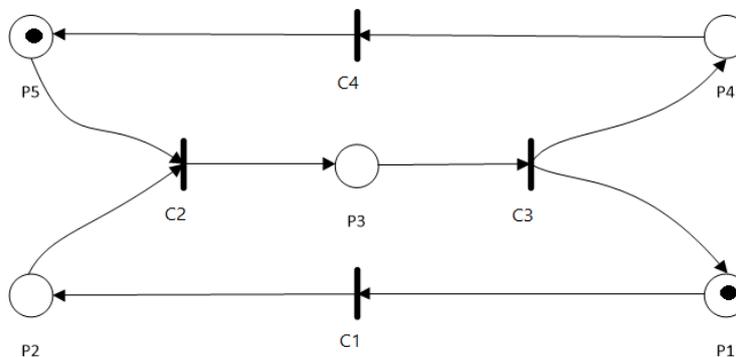


Figure 2.1: Représentation graphique d'un RdP.

2.1.2 Equation fondamentale

L'évolution d'un RdP est décrite par le franchissement des transitions par des jetons séjournant dans les places du graphe.

Considérant un RdP et un marquage m , on dit que la transition $c_q \in \mathcal{T}$ est franchissable pour le marquage \mathcal{M} si l'on a :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \mathcal{M}(p) \geq \text{Pré}(p, c_q).$$

Lorsque cette condition est validée, le *franchissement* de la transition c_q conduit à nouveau marquage, \mathcal{M}' , qui est nouvel état du modèle, défini par :

$$\mathcal{M}'(p) = \mathcal{M}(p) - \text{Pré}(p; c_q) + \text{Post}(p; c_q).$$

Exemple 2.1 Considérons le RdP de la figure 2.1. En partant du marquage $\mathcal{M}_0^t = (1,0,0,0,1)$ ($\mathcal{M}(p_1)=1, \mathcal{M}(p_2)=0, \mathcal{M}(p_3)=0, \mathcal{M}(p_4)=0, \mathcal{M}(p_5)=1$), On atteint le marquage $\mathcal{M}_1^t = (0,1,0,0,1)$, par franchissement de la transition c_1 .

Plus généralement, on note $[\mathcal{C}^+] = [\text{Post}(p; c_q)]$ (élément de la matrice d'incidence arrière) et $[\mathcal{C}^-] = [\text{Pré}(p; c_q)]$ (élément de la matrice d'incidence avant), $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ - \mathcal{C}^-$ (la matrice d'incidence) et en considérant \mathcal{F} une séquence franchissement réalisable à partir d'un marquage \mathcal{M}_i , on a l'équation fondamentale suivante, qui traduit la dynamique de fonctionnement du RdP :

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_i + \mathcal{C} \times \overline{\mathcal{F}}. \quad (2.1)$$

$\overline{\mathcal{F}}$ est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement \mathcal{F} , c'est-à-dire un vecteur de dimension égale à $|\mathcal{T}|$; $\overline{\mathcal{F}}_q$ correspond au nombre de franchissement de la transition c_q dans la séquence \mathcal{F} . Dans la figure 2.1 où la séquence de tir était $\mathcal{F} = \{c_1\}$, le vecteur caractéristique est égal à $\overline{\mathcal{F}}^t = (1,0,0,0)$.

2.1.3 Marquages accessibles

Soit $\mathcal{N} = (\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$ un réseau de Pétri. L'ensemble des marquages accessibles $\mathcal{A}(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$ d'un réseau de Pétri marqué est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial \mathcal{M}_0 par une séquence de franchissement, après un temps τ , c-à-d :

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0) = \{ \mathcal{M}_i, \exists c_q, \mathcal{M}_0 \xrightarrow{c_q/\tau} \mathcal{M}_i \}.$$

On peut, lorsque cet ensemble est fini, le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux marquages accessibles de $\mathcal{A}(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$.

Un arc orienté relie deux sommets \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_j s'il existe une transition c_q franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre après un temps τ : $\mathcal{M}_i \xrightarrow{c_q} \mathcal{M}_j$.

La figure 2.2 représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Pétri de la figure 2.1 avec un marquage initial $\mathcal{M}_0 = (1,0,0,0,1)$.

2.1.4 Concurrency and synchronization in RdP

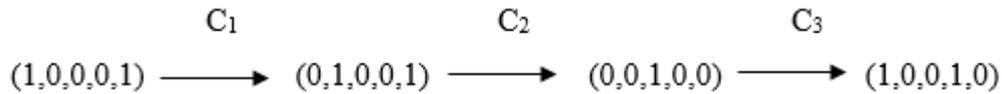


Figure 2.2: Graphe des marquages atteignables du réseau de Pétri de la figure 2.1.

Le formalisme des réseaux de Pétri est très puissant, il permet de représenter une grande variété de comportement des systèmes réels mettant en jeu des phénomènes de concurrence et de synchronisation. Sur la figure 2.3, nous avons représenté quatre structures de réseaux de Pétri permettant de décrire ces phénomènes :

- La figure 2.3 (a) représente une structure de choix. La place p_1 a deux transitions en aval, notées c_1 et c_2 . Le tir de c_1 ou c_2 consommera le jeton de place p_1 et exclura donc le tir de l'autre. Une telle configuration permet de modéliser un phénomène de concurrence à la consommation comme par exemple le partage d'un processeur entre tâches concurrentes dans un système informatique ;
- La configuration de la figure 2.3(b) permet de représenter une concurrence à l'apport de jetons dans une place, ici p_1 ;
- La configuration de la figure 2.3(c) permet de modéliser un phénomène de synchronisation. La transition c_1 n'est franchissable que lorsque les places p_1 et p_2 contiennent toutes les deux au moins un jeton ;
- Dans la structure de la figure 2.3(d), l'apport de jetons dans les places p_1 et p_2 est synchronisé par le tir de la transition c_1 et permet, par exemple, de modéliser l'initiation simultanée de différentes tâches dans un système à événements discrets.

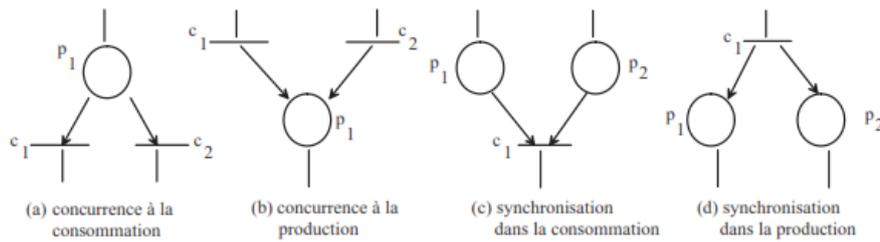


Figure 2.3: Concurrency et synchronisation dans les RdP.

2.1.5 Quelques propriétés des RdP

Le graphe des marquages associé à un RdP fournit des indications essentielles sur le fonctionnement du système qu'il représente. Suivant que le graphe des marquages est fini ou infini, qu'il présente ou non des circuits, il reflète certaines des propriétés caractéristiques du système modélisé.

Définition 2.2 (Bornitude). Une place $p \in \mathcal{P}$ d'un réseau de Petri marqué $(\mathcal{R} ; \mathcal{M}_0)$ est k -bornée ($k \in \mathcal{N}$) si pour tout marquage accessible $\mathcal{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R} ; \mathcal{M}_0)$, le marquage de cette place vérifie $\mathcal{M} \leq k$. dans le cas contraire, nous dirons que p est non-bornée. Enfin si p est 1-bornée, on dit que p est binaire. Si on considère le réseau de Pétri de la figure 2.1, on voit que pour le marquage initial \mathcal{M}_0 , les places p_1 , p_2 et p_3 sont binaires (1-bornée) et le réseau est dit sauf.

Lorsqu'un RdP modélise un système manufacturier, certaines places représentent des convoyeurs ou bien des zones de stockages intermédiaires. La bornitude du marquage du modèle est alors synonyme de limitation de la taille des stocks internes du système. La bornitude du RdP reflète alors en quelque sorte une propriété de "stabilité" du système de production modélisé.

Définition 2.3 (Vivacité). Etant donné un réseau de Pétri \mathcal{R} et un marquage initial \mathcal{M}_0 , une transition c est vivante pour le réseau marqué $(\mathcal{R} ; \mathcal{M}_0)$ est dit vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

Remarque 2.1 (L'intérêt d'étude de la vivacité d'un modèle). L'évolution du marquage d'un RdP se fait par franchissement de transitions. Lorsqu'au cours de son évolution, certaines transitions ne sont jamais franchies, cela indique que l'événement associé à la transition ne se produit pas et que le marquage d'une partie du RdP n'évolue pas. Cela indique que le sous-système modélisé par cette partie-là ne fonctionnera pas. Il y a donc un problème au niveau de la conception du système.

L'idée est d'être capable de détecter systématiquement ce phénomène par l'analyse de propriétés du modèle RdP, afin de disposer d'un outil d'aide à la conception des systèmes.

2.1.6 Invariants d'un réseau de Pétri

Il existe deux types d'invariants (appelés *semiflotts*) dans un RdP [David 1992] : les invariants de marquage (notés également P-invariant) et les invariants de franchissement (notés également T-invariant).

Définition 2.4 Les invariants de marquage, appelés P-invariant, ou encore *P-semiflotts*, illustrent la conservation du nombre de jetons dans un sous ensemble de places du RdP. Un vecteur, noté \mathcal{K} , de dimension égale au nombre de places du RdP est un P-invariant si, et seulement s'il vérifie l'équation suivante :

$$\mathcal{K}^t \times \mathcal{C} = \vec{0}, \quad \mathcal{K} \neq \vec{0}.$$

Où \mathcal{C} correspond à la matrice d'incidence du RdP.

D'après l'équation (2.1), on déduit que si \mathcal{K} est un P-invariant, alors pour un marquage donné, noté m_i , obtenu à partir d'un marquage initial m_0 , on a :

$$\mathcal{K}^t \times \mathcal{M}_i = \mathcal{K}^t \times \mathcal{M}_0 = n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette équation représente un invariant de marquage, elle signifie que si \mathcal{K} est un P-invariant du RdP alors la transposé du vecteur \mathcal{K} pondéré par le vecteur marquage m_i du RdP est une constante entière quel que soit le marquage m_i atteignable à partir du marquage initial m_0 . L'ensemble des places pour lesquelles la composante associée dans le P-invariant est non nulle, est appelée la composante conservative du RdP.

Définition 2.5 Un vecteur non nul d'entiers Θ de dimension $|\mathcal{T}| \times 1$ est un T-invariant, ou encore *T-semiflotts*, du RdP si, et seulement s'il vérifie l'équation suivante :

$$\mathcal{C} \times \Theta = \vec{0}$$

D'après l'équation (2.1), le franchissement à partir d'un marquage m_i d'une séquence dont le vecteur caractéristique est Θ ramène le graphe au même marquage $m_k = m_i$.

Un T-invariant correspondant à une séquence de franchissement réalisable est appelé *composante répétitive*. L'ensemble des transitions pour lesquelles la composante associée dans le T-invariant est non nulle est appelé le support du T-invariant.

Définition 2.6 Un RdP est dit consistant s'il possède un T-invariant Θ couvrant toutes les transitions du réseau. Un RdP qui possède cette propriété est dit répétitif ou réinitialisable. Le réseau atteint un régime périodique dès lors qu'il existe une séquence de franchissement réalisable avec Θ , comme vecteur caractéristique.

Définition 2.7 Un RdP est dit conservatif si toutes les places du graphe forment une composante conservative.

Remarque 2.2

- Un réseau de Pétri consistant est dit fortement connexe si, et seulement s’il est conservatif.
- Si toutes les places d’un RdP forment une composante conservative, le graphe est dit conservatif.
- Toute combinaison de T-invariants (resp, P-invariants) est un T-invariant (resp, P-invariant).
- Un réseau de Pétri consistant à un unique T-invariant élémentaire.
- Le produit des poids d’un circuit d’un réseau de Pétri conservatif est égal à 1.

Exemple 2.2 Considérons le RdP de la figure 2.4 qui suit, un P-invariant est le vecteur \mathcal{K} vérifiant :

$$\mathcal{K}^t \times \mathcal{C} = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Il existe un P- invariant : $\mathcal{K}^t = (0, 0, 1, 1, 1)$. L’invariant de marquage est :

$$1 \times m(p_3) + 1 \times m(p_4) + \times m(p_5) = 6.$$

Ceci signifie que les places p_1 et p_2 forment une composante conservative du graphe.

Le RdP de la figure 2.4 admet un T- invariant, $\Theta^t = (6, 2, 3)$; vérifiant :

$$\mathcal{C} \times \Theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

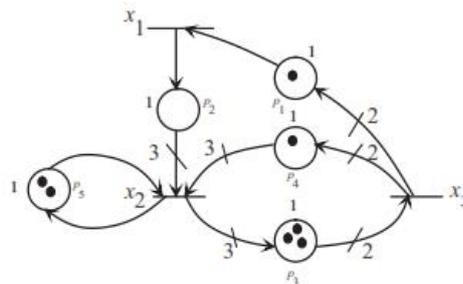


Figure2.4: Réseau de Pétri à arcs pondérés.

Définition 2.8 Un RdP est dit k-serveur si, pour chaque transition, il ne peut y avoir au maximum que k franchissements simultanés. Une boucle de réentrance implicite contenant k jetons est alors associée à chaque transition du graphe :

- Dans le cas où $k = 1$, le RdP est dit mono-serveur.
- Dans le cas où le nombre de franchissement de transitions n’est pas limité, le RdP est dit infinié - serveur.

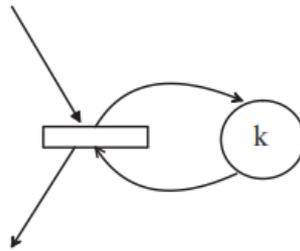


Figure2.5: Boucle de ré-entrance.

2.2 Graphes d'Événements Temporisés

Suite à cette brève présentation succincte des réseaux de Pétri, notre intérêt va maintenant se porter sur une structure particulière des réseaux de Pétri qui permet de modéliser les systèmes où interviennent des phénomènes de synchronisation et de délai (les phénomènes de conflits étant supposés résolus au préalable).

Définition 2.9 Un Graphe d'Événements Temporisé (GET) est un RdP tel que toute place a exactement une transition en amont et une transition en aval.

Pour illustrer ce type de modèles temporisés, nous proposons l'exemple d'un graphe d'événements temporisé représentant le fonctionnement d'un atelier de coupe de bois.

Exemple 2.3 Le GET de la figure 2.6 modélise un atelier constitué d'une machine de coupe de bois. Quand une pièce arrive et que la machine de coupe est disponible, cette dernière est traitée (découpée).

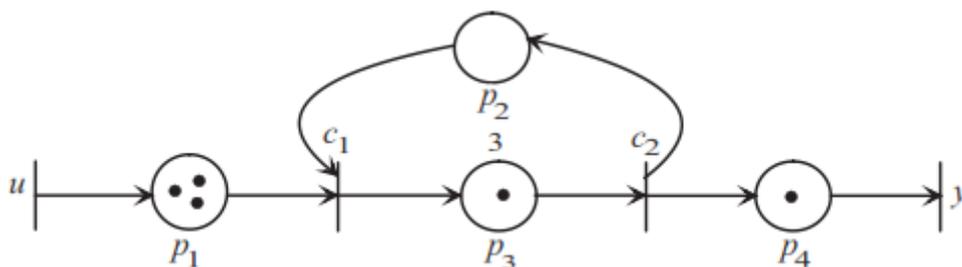


Figure2.6: Modèle GET d'un atelier de coupe de bois.

Le nombre de jetons dans une place s'interprète comme le nombre de *ressources* disponible. Par exemple, le nombre de jetons dans la place p_1 correspond au nombre de pièces en attente d'être traitées par la machine de coupe, c'est-à-dire le nombre de « ressources » qui vont être consommées. Un jeton dans la place p_3 indique qu'une pièce est en train de traitée par la machine de coupe. La durée de ce traitement est de 3 *u.t* (unités de temps). La fin de la coupe par la machine se traduit par l'enlèvement d'un jeton dans la place p_3 et par l'ajout d'un jeton dans la place p_2 et dans la place p_4 . Le nombre de jetons dans la place p_4 correspond au nombre de pièces qui ont été traitées. La présence d'un jeton dans la place p_2 indique que la machine est disponible.

2.2.1 Conditions initiales

Définition 2.10 (Conditions initiales canoniques). On dira que les conditions initiales d'un GET sont canoniques si tous les jetons du marquage initial sont considérés comme disponibles depuis l'instant $-\infty$.

Considérer des conditions initiales canoniques, implique de prendre pour hypothèse que le marquage initial du graphe n'est pas nécessairement égal au marquage à l'instant initial d'observation, (égal à 0 par convention). En effet, si les jetons initiaux sont supposés disponibles depuis $-\infty$, ils sont susceptibles d'avoir validé et tiré des transitions également à $-\infty$, aussi le marquage peut avoir évolué avant l'instant initial d'observation.

Exemple 2.4 La figure 2.7 représente un GET. Si on considère des conditions initiales canoniques, le marquage à l'instant initial d'observation est différent du marquage initial du graphe. En effet, le jeton contenu dans la place p_3 a validé et tiré la transition c_3 à l'instant $t = -\infty$. Un jeton a alors été ajouté dans les places p_4 et p_5 . Finalement, le marquage, après qu'il ait évolué librement depuis l'instant $t = -\infty$, à l'instant d'observation est celui représenté sur la figure 2.8.

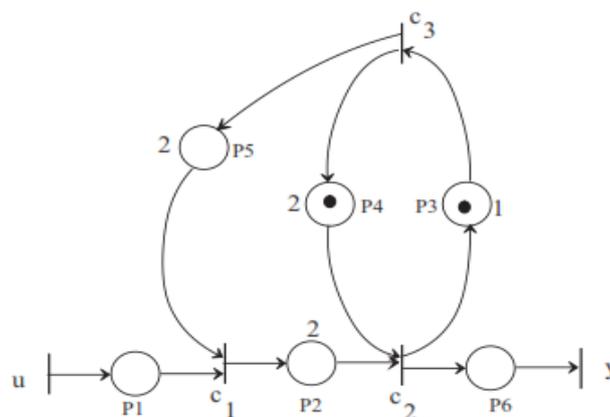


Figure 2.7: Marquage initial ($t = -\infty$).

Définition 2.11 (Conditions initiales faiblement compatibles non canoniques). On dira que les conditions initiales d'un GET sont faiblement compatibles si tout jeton du marquage initial est disponible qu'à partir de à l'instant $t = 0$. Pour $t < 0$, le graphe est considéré comme étant "gelé".

Les jetons visibles à l'instant initial d'observation $t = 0$ sont alors ceux du marquage initial. Ces jetons sont supposés avoir été introduits dans le graphe avant l'instant 0, de telle sorte qu'à l'instant $t = 0$ un jeton du marquage initial est :

- Soit en train de subir la temporisation de la place dans laquelle il a été introduit,
- Soit tout juste disponible pour le tir de la transition aval.

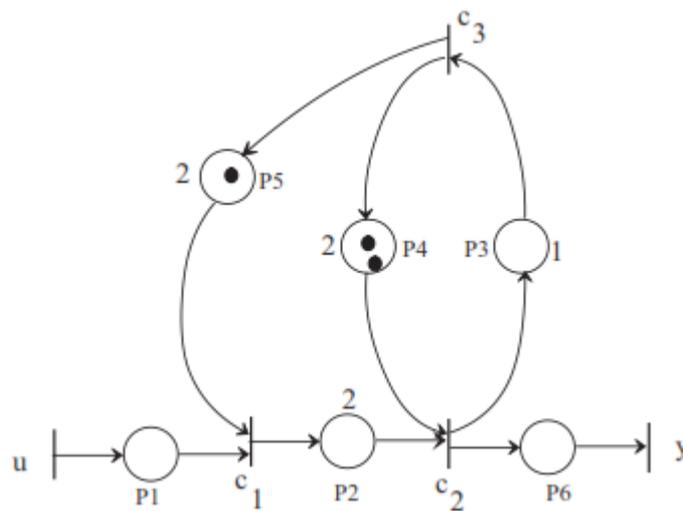


Figure 2.8: Marquage à l'instant initial d'observation ($t=0$).

2.3 Graphes d'Événements Temporisés Généralisés

De nombreux systèmes sont tels que les entités qui les traversent subissent des phases d'assemblage ou de désassemblage. La classe des Graphes d'Événements Temporisés Généralisés GETG permet une modélisation simple et intuitive de tels systèmes.

Définition 2.12 Un GETG est un GET dans lequel des poids (nombres entiers strictement positifs) sont associés aux arcs. Ces graphes sont aussi appelés graphes d'évènements *avec multiplicateurs* ou *valués*.

Dans ce type de graphe, dont un exemple élémentaire est donné par la figure 2.9, le poids M_{pq} rattaché à l'arc $x_q \rightarrow p$ est tel que lors d'un franchissement de la transition x_q , M_{pq} jetons sont ajoutés à la place p , le poids M_{qp} associé à l'arc $p \rightarrow x_q$ implique que la transition x_q ne sera validée que si p contient au moins M_{qp} jetons. Lors du franchissement de cette transition, après un séjour τ_p unités de temps dans la place p , M_{qp} jetons y seront retirés.

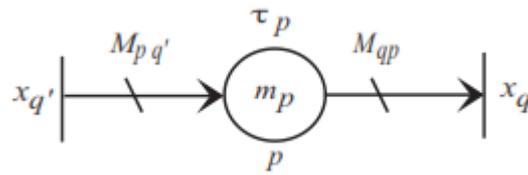


Figure 2.9: GETG élémentaire.

La figure 2.10 représente un GETG tel que l'arc $p_1 \rightarrow x_1$ a un poids de 2, et l'arc $x_1 \rightarrow p_4$ a un poids de 3. Les arcs dont le poids n'est pas explicitement spécifié ont un poids égal à 1. La transition x_1 est validée puisque la place p_2 contient un jeton. Après un séjour de deux unités de temps des jetons dans la place p_1 , le franchissement de x_1 consiste à retirer deux jetons de p_1 et un jeton de p_2 , et à ajouter un jeton à p_3 et trois jetons à p_4 . On obtient le marquage de la figure 2.10.b.

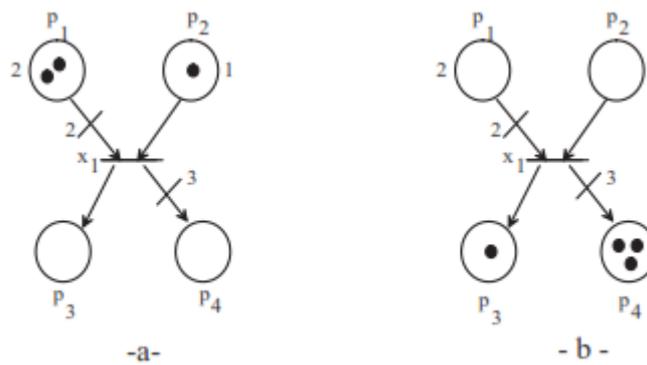


Figure 2.10: Evolution du marquage.

2.3.1 Gain d'un circuit :

Définition 2.13 (Gain d'un circuit [Teruel 1992]). Le gain d'un circuit, noté $G(\varrho)$, est le produit du quotient des poids des arcs entrants par le produit des poids des arcs sortants de toutes les places du circuit ϱ . Formellement, ce gain est défini comme suit :

$$G(\varrho) = \prod_{p_i \in \varrho} \frac{a_i}{b_i}$$

Où :

- a_i est égal au poids de l'arc entrant dans la place p_i ,
- b_i est égal au poids de l'arc sortant dans la place p_i ,

Selon la valeur de son gain, un circuit ϱ est classé dans l'une des trois catégories suivantes :

- $G(\varrho) > 1$: circuit générateur,
- $G(\varrho) = 1$: circuit neutre,
- $G(\varrho) < 1$: circuit absorbant.

La valeur de $G(\varrho)$ informe sur la conservation des marques dans le circuit ϱ . Si un circuit est générateur, alors le nombre de marques dans le circuit augmente avec l'évolution du marquage. Si le circuit est neutre, ce gain reste constant au cours de l'évolution du marquage. Enfin, si le circuit est absorbant, le nombre de marque diminue.

Dans le cas des GET ordinaires, le nombre total de jetons dans un circuit est constant. De par la *valuation* des arcs dans \mathbb{N}^* , ceci n'est plus vrai dans le cas des GETG. Chao et al. [Chao 1993] ont utilisé un principe similaire en introduisant la notion de marques *valuées* des places d'un circuit. La marque *valuée*, notée \mathcal{N}_p , d'une place p d'un circuit peut se calculer comme suit :

$$\mathcal{N}_p = \frac{m_p}{M_{qp}\theta_q}$$

Où :

- m_p correspond au marquage initial de la place p ,
- M_{qp} correspond au poids de l'arc sortant de la place p ,
- θ_q correspond à la composant de T-invariant associé à la transition en aval de la place p .

La marque *valuée totale* d'un circuit neutre ϱ , est donnée par la somme des marques valuées des places de ce circuit. Elle ne dépend pas du temps et est constante quel que soit l'évolution du circuit. Par conséquent, elle est généralement calculé pour le marquage initial M_0 et est donnée par :

$$\mathcal{N}(\varrho) = \sum_{p \in \varrho} \mathcal{N}_p$$

L'étude de la vivacité des GETG est difficile. Des résultats ont été obtenus dans ce domaine par D.T. Chao [Chao 1993] : un circuit d'un GETG est vivant s'il contient initialement au moins une place marquée dont le marquage value est supérieur à un ($\mathcal{N}(\varrho) \geq 1$).

Contrairement aux GET ordinaires, il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante pour vérifier la vivacité des GETG.

2.4 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté le langage graphique (les réseaux de pétri) qui permettent de décrire les systèmes à événements discrets (SED). Qu'on a besoins pour modéliser notre chaine de fabrication des vis par la suit dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Modélisation des GETG dans l'algèbre des dioïdes

3.1 Modélisation des GET dans l'algèbre (min, +)

Dans le cas des RdP, l'état modélisant l'évolution du modèle est associé aux marquages des places. Si l'on se réfère à la figure 2.6, la seule caractéristique que traduit une telle représentation concerne l'état de la machine M (au sens logique) : machine libre ou occupée. Pour pouvoir discuter des performances du système temporisé, c'est-à-dire déterminer son régime transitoire et/ou son régime permanent, l'équipe (max, +) de l'INRIA a proposé dans [Cohen 1985] une modélisation considérant non pas l'état du marquage mais les compteurs et les dates de franchissements des transitions.

Pour étudier les GET dans l'algèbre (min, +), Les variables d'état considérées sont de type compteurs d'événements. De telles variables permettent d'aboutir à une représentation linéaire de ces modèles dans les dioïdes. On a privilégié la représentation compteur à celle de dateur (*cf.* remarque 3.2) du fait des dioïdes inspirés de l'algèbre (min, +) qui seront utilisés par la suite pour représenter des Graphes d'Événements Temporisés Généralisés.

Définition 3.1 Un compteur associé à une transition c_j est une application croissante, notée c_j de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $t \rightarrow c_j(t)$, où $c_j(t) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ correspond au nombre de tirs de la transition q_j ayant lieu jusqu'à la date t .

Le vecteur d'état pour un GET, est défini par :

$$C(t) = (c_1(t) \dots c_{|\mathcal{T}|}(t))^t$$

Contrairement aux marquages, ces compteurs ont une propriété de monotonie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \beta \geq 0, \forall c_j \in \mathcal{T}, c_j(t + \beta) \geq c_j(t).$$

Remarque 3.1 Comme le franchissement des transitions est ici supposé être instantané, il n'y a pas à formuler d'hypothèses sur les tirs des transitions, leur fonctionnement est évidemment de type FIFO (First-In, First-Out).

Pour illustrer l'évolution d'un compteur associé à la transition c_j d'un GET considérons le GET élémentaire suivant :

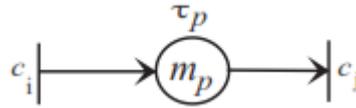


Figure 3.1: GET élémentaire.

Sous l'hypothèse de fonctionnement au plus tôt, qui est un comportement limite du GET, l'évolution du compteur $c_j(t)$, associé à la transition c_j du GET élémentaire de la figure 3.1, est modélisé par l'équation suivant :

$$c_j(t) = m_p + c_i(t - \tau_p).$$

Dans un GET, le phénomène de synchronisation se produit lorsque plusieurs arcs convergent sur une même transition (cf. figure 3.2).

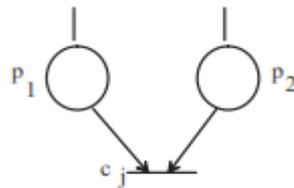


Figure 3.2: Phénomène de synchronisation dans un GET.

En général, l'évolution d'un compteur associé à une transition de synchronisation d'un GET est donnée par l'équation suivante :

$$C_j(t) = \min_{p \in \bullet c_j, i \in c_p} (m_p + c_i(t - \tau_p)).$$

On note $\bullet c$ (resp, $c \bullet$) l'ensemble des places situées immédiatement en amont (resp aval) de la transition c . Similairement, $\bullet p$ (resp, $p \bullet$) représente l'ensemble des transitions situées immédiatement en amont (resp, en aval) de la place p .

On remarque que cette équation est non linéaire dans l'algèbre usuelle de par la présence de l'opérateur min qui modélise le phénomène de synchronisation au niveau de la transition c_j . Par contre, elle se décrit de façon linéaire dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. Le compteur $c_j(t)$ vérifie l'équation récurrente suivante :

$$C_j(t) = \bigoplus_{p \in {}^\circ j, i \in {}^\circ p} (m_p \otimes c_i(t - \tau_p)).$$

L'opération \oplus du dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ représente un phénomène de synchronisation au niveau de transition c_j , et l'opération \otimes représente un décalage *événementiel* du compteur $c_j(t)$ par rapport à tout compteur associé à une transition en amont de la transition c_j .

D'une manière générale, les équations modélisant le fonctionnement au plus tôt des GET ont la forme suivante dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$.

$$\begin{cases} C(t) \stackrel{T}{=} \bigoplus_{a=0} A_a C(t-a) \oplus \bigoplus_{a=0} B_a U(t-a), \\ Y(t) = \bigoplus_{a=0} C_a C(t-a), \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec $T = \max_{pa \in \mathcal{P}} (\tau(p_a))$. $C(t)$ est le vecteur d'état, composé des compteurs associés aux transitions internes du graphe. $U(t)$ et $Y(t)$ sont respectivement les vecteurs d'entrées (commandes) et de sorties, composés des transitions sources, respectivement puits, du graphe.

Exemple 3.1 Dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$, l'évolution des compteurs du GET de la figure 3.3 sont régies par les relations suivantes :

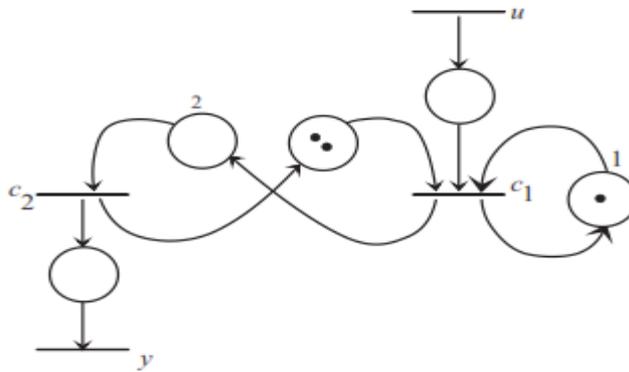


Figure 3.3: Exemple d'un GET.

$$\begin{cases} c_1(t) = 1 \otimes c_1(t-1) \oplus 2 \otimes c_2(t) \oplus u(t), \\ c_2(t) = c_1(t-2) \\ y(t) = c_2(t) \end{cases}$$

Il en résulte la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} C(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} C(t) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} C(t-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon \end{pmatrix} C(t-2) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(t), \\ Y(t) = (\varepsilon \quad e)C(t), \end{cases}$$

Avec $C=(c_1 \quad c_2)t$, $U=u$ et $Y=y$.

3.1.1 Forme récurrente explicite

La représentation d'état sous une forme ARMA (Auto Regressive Moving Average) donnée par la représentation (3.1) peut se ramener, moyennant une extension de la dimension du vecteur d'état, à une forme récurrente markovienne du type :

$$\begin{cases} C(t) = AC(t-1) \oplus BU(t), \\ Y(t) = CC(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

Le GET équivalent auquel va correspondre une représentation de la forme (3.2) est tel que :

- La temporisation d'une place située entre deux transitions internes doit être égale à un ;
- La temporisation d'une place située entre une transition source et une transition interne, ou entre une transition interne et une transition puits, doit être nulle.

Exemple 3.2 La figure 3.4 représente un GET dont le comportement entrée-sortie est équivalent à celui de la figure 3.3. En introduisant un nouvel état c'_1 , on aboutit à la représentation d'état suivante sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$:

$$\begin{cases} C(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} C(t) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} C(t-1) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(t), \\ Y(t) = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad e)C(t). \end{cases}$$

Avec $C=(c_1 \quad c'_1 \quad c_2)t$, $U=u$ et $Y=y$.

On obtient, après utilisation du théorème 1.3 pour supprimer la partie implicite de l'équation d'état, la forme récurrente markovienne suivante :

$$\begin{cases} C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} C(t-1) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(t), \\ Y(t) = (\varepsilon \ \varepsilon \ e) C(t). \end{cases}$$

Remarque 3.2 (Equations aux dateurs). Au lieu de considérer les nombres cumulés de tirs d'une transition d'un GET à chaque instant, on s'intéresse aux différentes dates de tirs de cette transition. A chaque transition c_i , on associe l'application $d_i : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{max}, k \rightarrow i(k)$ où $d_i(k)$ désigne la date du k -ième tir de la transition d_i . Cette application est non décroissante et est appelée dateur.

Par un raisonnement analogue à celui effectué pour les compteurs, on montre que la description du comportement d'un GET peut se représenter *via* des équations $(max, +)$ linéaires.

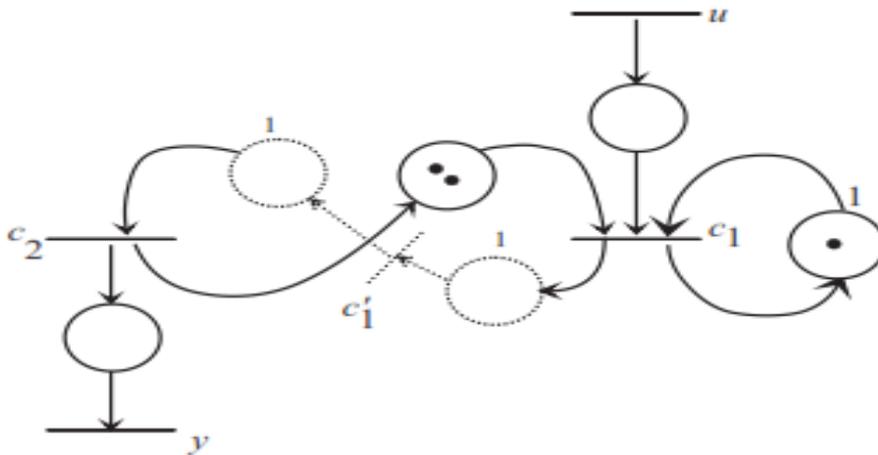


Figure 3.4: GET équivalent à celui de la figure 3.3 en vue d'une représentation markovienne.

Le graphe de la figure 3.4 peut être modélisé par les équations $(max, +)$ linéaires suivantes :

$$\begin{cases} d_1(k) = 1 \otimes d_1(k-1) \oplus d_2(k-2) \oplus u(k), \\ d_2(k) = 2 \otimes d_1(k), \\ y(k) = d_2(k). \end{cases}$$

3.2 Modélisation des GETG

3.2.1 Equations récurrentes des GETG

Comme dans le cas des GET ordinaires, on se propose d'étudier les GETG à travers leurs représentations d'état de type compteur.

Assertion 1 L'évolution du compteur associé à la transition x_q du GETG élémentaire de la figure 2.9 est donnée par l'équation suivante :

$$x_q(t) = \lfloor M_{qp}^{-1}(m_p + M_{pq'}x_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor \quad (3.3)$$

La présence de la partie entière inférieure dans l'équation (3.3) assure la valeur discrète du compteur indépendamment de la valeur M_{qp} . En général, une transition x_q peut avoir plusieurs transitions en amont $\{x_{q'} \in \bullet\bullet q\}$, ce qui implique que l'équation compteur associée fasse intervenir le min entre les compteurs associés aux transition en amont.

Exemple 3.3 La variable compteur associée à la transition x_q du GETG représenté par la figure 3.5 satisfait l'équation suivante :

$$x_q(t) = \left\lfloor \frac{2 + 3x_{q'}(t - 6)}{4} \right\rfloor$$

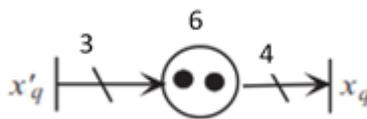


Figure 3.5: Exemple de GETG élémentaire.

Exemple 3.4 L'évolution des compteurs associés aux transitions du GETG représenté par la figure 3.6, est décrite par les équations récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) = \min(3 + x_3(t - 1), u(t)), \\ x_2(t) = \min\left(\left\lfloor \frac{2x_1(t - 5)}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3 + 4x_3(t - 3)}{2} \right\rfloor\right), \\ x_3(t) = 1 + 3x_2(t - 1), \\ y(t) = x_2(t). \end{cases}$$

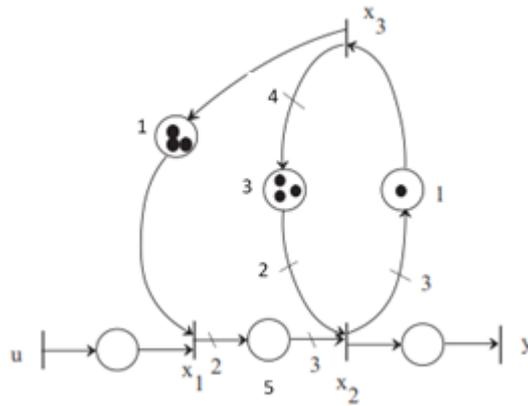


Figure 3.6: Exemple de GETG.

3.2.2 Modélisation à base d'opérateurs des GETG

Le modèle mathématique représentant l'évolution de la dynamique des GETG n'admet pas une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min, +)$. Cette non linéarité est due aux parties entières engendrées par la présence des poids sur les arcs. De ce fait, il s'avère difficile d'utiliser l'algèbre $(\min, +)$ pour aborder, par exemple, le problème de commande d'évaluation de performances des GETG. Pour pallier à ce problème de non linéarité, nous utilisons un autre type de modélisation qui se base sur un dioïde d'opérateurs développé par Guy Cohen dans [Cohen 1998a].

Trois types d'opérateur définis de $\overline{\mathbb{Z}^Z}$ vers $\overline{\mathbb{Z}^Z}$ sont utilisés pour modéliser les GETG.

1. Opérateur de stock γ^v : Il représente un décalage événementiel de v événement ($v \in \overline{\mathbb{Z}}$) et modélise un système gain élémentaire.

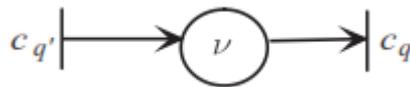


Figure 3.7: Opérateur « γ^v ».

Il est défini comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall c_{q'} \in \overline{\mathbb{Z}^Z}, c_q(t) = \gamma^v c_{q'}(t) = c_{q'}(t) + v$$

L'opérateur γ^v satisfait les règles suivantes :

- $(\gamma^v \oplus \gamma^{v'})c_q(t) = \gamma^{\min(v, v')}c_q(t)$.
- $(\gamma^v \otimes \gamma^{v'})c_q(t) = \gamma^{v+v'}c_q(t)$.

En effet, on a

$$(\gamma^v \oplus \gamma^{v'})c_q(t) = \min(c_q(t) + v, c_q(t) + v') = c_q + \min(v, v') = \gamma^{\min(v, v')} c_q(t).$$

$$(\gamma^v \otimes \gamma^{v'})c_q(t) = \gamma^v(c_q(t) + v') = c_q(t) + v + v' = \gamma^{v+v'} c_q(t).$$

2. Opérateur de retard δ^τ : Il représente un retard temporel de τ unité de temps ($\tau \in \overline{\mathbb{Z}}$), et modélise un système retard élémentaire.

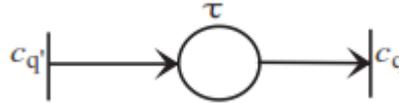


Figure3.8: Opérateur « $\delta\tau$ ».

Il est défini comme suite :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall c_{q'} \in \overline{\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}}, c_q(t) = \delta^\tau c_{q'}(t) = c_{q'}(t - \tau)$$

L'opérateur δ^τ satisfait les règles suivantes :

- $(\delta^\tau \oplus \delta^{\tau'}) c_q(t) = \delta^{\max(\tau, \tau')} c_q(t).$
- $(\delta^\tau \otimes \delta^{\tau'}) c_q(t) = \delta^{\tau + \tau'} c_q(t).$

Du fait que le signal $c_q(t)$ soit non décroissant, on a :

$$(\delta^\tau \oplus \delta^{\tau'}) c_q(t) = \min(c_q(t - \tau), c_q(t - \tau')) = c_q(t - \max(\tau, \tau')) = \delta^{\max(\tau, \tau')} c_q(t).$$

$$(\delta^\tau \otimes \delta^{\tau'}) c_q(t) = \delta^\tau c_q(t - \tau') = c_q(t - \tau' - \tau) = \delta^{\tau + \tau'} c_q(t).$$

3. Opérateur multiplieur μ_m : Il représente un facteur de mise à l'échelle m .



Figure3.9: Opérateur μ_m , avec $m = a/b$.

Il est défini comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall c_{q'} \in \overline{\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}}, c_q(t) = \mu_m c_{q'}(t) = \lfloor m \times c_{q'}(t) \rfloor,$$

Avec $m \in \mathbb{Q}^+$ (« m » est égal au quotient de deux nombres naturels strictement positifs).

Remarque 3.3 contrairement aux opérateurs γ^v et δ^τ , l'opérateur μ_m n'admet pas de règles de simplification pour l'opération \otimes :

$$\forall m, m' \in \mathbb{Q}^+, \forall c_q \in \overline{\mathbb{Z}^Z}, (\mu_m \otimes \mu_{m'})c_q(t) \text{ peut être différent de } (\mu_{m \times m'})c_q(t).$$

L'opérateur μ_m satisfait les règles suivante lorsqu'il composé avec les opérateurs γ^v et δ^τ :

- $(\mu_m \otimes \gamma^v)c(t) = (\gamma^{v \times m} \otimes \mu_m)c(t)$, pour $v \in \mathbb{N}$.
- $(\mu_m \otimes \delta^\tau)c(t) = (\delta^\tau \otimes \mu_m)c(t)$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \forall v \in m^{-1} \times \mathbb{N}, (\mu_m \otimes \gamma^v)c(t) &= [m \times v + m \times c(t)] = m \times v + [m \times c(t)] = \\ &(\gamma^{v \times m} \otimes \mu_m)c(t), \text{ puisque } v \times m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$(\mu_m \otimes \delta^\tau)c(t) = [m \times c(t - \tau)] = (\delta^\tau \otimes \mu_m)c(t)$$

Si les opérateurs, γ^v et δ^τ , habituellement utilisé dans le cas des GET ordinaires, sont linéaires, l'opérateur μ_m est, par contre, seulement additif, en effet, on a :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall c_1, c_2 \in \overline{\mathbb{Z}^Z},$$

$$\begin{aligned} \mu_m(c_1(t) \oplus c_2(t)) &= [m \times (\min(c_1(t), c_2(t)))] = \min([m \times c_1(t)], [m \times c_2(t)]) = \\ &\mu_m c_1(t) \oplus \mu_m c_2(t). \end{aligned}$$

La non linéarité de l'opérateur μ_m est due à sa non homogénéité, en effet : $\forall \lambda \in \mathbb{N}$,

$$\lambda \otimes (\mu_m c_1(t)) = \lambda + [m \times c_1(t)]$$

Est différent de

$$\mu_m(\lambda \otimes c_1(t)) = [m \times (\lambda + c_1(t))]$$

On note $\mathcal{D}_{\min}[[\delta]]$ le dioïde d'opérateur où la loi additive \oplus correspond à l'opération *min*, et la loi multiplicative \otimes est équivalente à la loi composition usuelle. Ce diode a pour élément neutres $\varepsilon = \mu_{+\infty} \gamma^{+\infty} \delta^{-\infty}$ et $e = \mu_1 \gamma^0 \delta^0$. Pour des détails [Hamaci et al, 2004].

Un élément de $\mathcal{D}_{\min}[[\delta]]$ permet de coder un signal $c(t)$ sous forme d'une série formelle en δ , et il permet également de modéliser la relation entrée-sortie liant deux transitions d'un GETG.

Exemple 3.5 Dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min}[[\delta]]$, le compteur $x_q(t)$, associé à la transition x_q du GETG élémentaire de la figure 2.9, satisfait l'équation suivante :

$$X_q(\delta) = \mu_{M_{qp}^{-1}} \gamma^{m_p} \delta^{\tau_p} \mu_{M_{pq}} X_{q'}(\delta)$$

Pour $X_{q'}$ correspondant à une impulsion, notée $E(\delta)$, et égal à $e = \mu_1 \gamma^0 \delta^0$, on obtient la relation liant la transition x_q et $x_{q'}$ sous forme d'une composition d'opérateurs donnée par $:\mu_m \gamma^v \delta^\tau$.

Assertion 2 L'évolution de la dynamique d'un GETG est donnée par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} X(\delta) = AX(\delta) \oplus BU(\delta), \\ Y(\delta) = CX(\delta) \oplus DU(\delta). \end{cases} \quad (3.4)$$

Où $X(\delta)$ est le vecteur d'état composé des compteurs associés aux transitions internes du graphe, codé dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min}[[\delta]]$. $U(\delta)$ et $Y(\delta)$ sont les vecteurs d'entrées et de sorties codés dans $\mathcal{D}_{\min}[[\delta]]$.

Les matrices A , B , C et D sont composées des monômes de formelles en δ , chaque monôme modélise une relation liant deux transitions du graphe dans $\mathcal{D}_{\min}[[\delta]]$.

Exemple 3.6 Dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min}[[\delta]]$, le GETG de la figure 3.6 admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1(\delta) \\ x_2(\delta) \\ x_3(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3 \delta^1 \\ \mu_1 \delta^5 \mu_2 & \varepsilon & \mu_1 \gamma^3 \delta^3 \mu_4 \\ \varepsilon & \gamma^1 \delta^1 \mu_3 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\delta) \\ x_2(\delta) \\ x_3(\delta) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(\delta), \\ Y(\delta) = (\varepsilon \quad e \quad \varepsilon) \begin{pmatrix} x_1(\delta) \\ x_2(\delta) \\ x_3(\delta) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

3.3 Modélisation de la chaîne de Fabrication de vis :

Les systèmes considérés, sont ceux modélisables par les GETG. Un système réel sera modélisé dans ce chapitre, il s'agit bien d'une chaîne de Fabrication de vis, appartenant à ORSIM.

3.3.1 Description du processus de fabrication

Le flux de production sont illustré sur la figure suivante

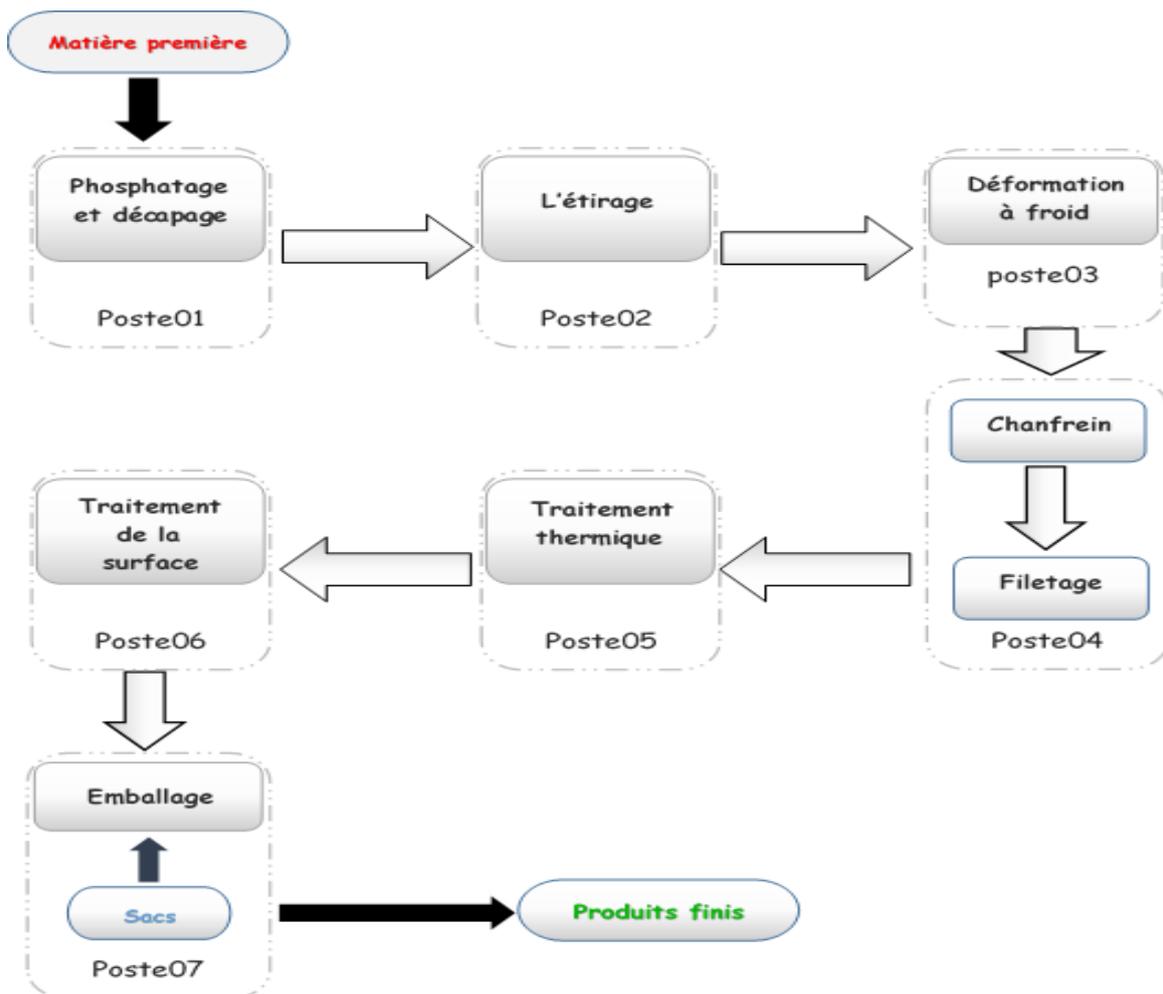


Figure3.10: Flux de la chaîne de production.

Thèse :

Ce modèle est divisé en deux étapes :

1^{er}étape (Poste 1, 2,3) :

Dans ces postes la matière utilise sont des rouleaux.

2^{ème} étape (Poste 4, 5,6) :

Dans ces postes la matière utilise sont des pièces.

Le Problème :

Lorsque nous transférons ce modèle de **flux de la chaine de production** (figure 3.10) au **GETG de réseaux pétri** nous avons rencontré dans un problème qui est dans les deux étapes il n'y a pas la même unité de jetons :

-Les trois premiers postes (unité de jeton est rouleaux)

-Les trois deuxièmes postes (unité de jeton est pièces)

La solution proposée :

Nous avons donc proposé une solution qui est normalisé les unités des jetons et elle transformer les rouleaux en pièces afin que :

$$\mathbf{1 \text{ rouleau} = 3375 \text{ pièces}}$$

Les postes :

Poste 1 Phosphatage et décapage

La matière première est amenée au lieu de traitement chimique. La matière première est insérée dans les salles des bains avec des produits chimiques et traitée dans ces bains pour être prêt à entrer dans les machines. Dans Cette opération 2 rouleaux de la matière première sont traités, et Cette opération dure 76 minutes.

Poste 2 L'étirage

Après l'opération de Phosphatage, les rouleaux sont amenés au lieu d'opération de tirage, Cette opération consiste en la réduction du diamètre du fil pour l'usage projeté, Cette opération dure 20 minutes et sa capacité est d'un rouleau.

Poste 3 Déformation à froid

Après l'opération de réduction du diamètre du fil le fil est amené dans une machine(**WB7**), dans Cette opération le fil est coupé à la longueur appropriée et formé en une forme de vis Cette machine coupe un rouleau dans un temps de 225 minutes.

Poste 4

La vis dans ce poste est équipée dans la machine (**w60**) à travers deux étapes : chanfrein et filetage.

✓ **Chanfrein :**

C'est une opération qui utilise un outil spécial pour modèle le bas de la vis, elle produit 17 vis dans un temps de 1 minute.

✓ **Filetage :**

C'est une opération qui utilise deux rouleaux à haut pression, (un rouleau fixe est l'autre en mouvement) pour presse le motif de filetage, c'est opération aussi produit 17 vis dans un temps de 1 minute.

Poste 5 Traitement thermique

Ce traitement se fait sur le produit fini en fin de procès pour lui confiner les caractéristiques mécaniques demandées. Il s'agit généralement d'une trempe à l'eau ou à l'huile suivie d'un revenu, Ce traitement dure 135 minutes pour capacité de 1591 pièces.

Poste 6 Traitement de la surface

Dans cette opération, les produits subissent une protection de surface en utilisant du zinc afin de prolonger leur durée de vie. Dans Cette opération 350 pièces sont traitées dans un temps de 90 minutes.

Poste 7 Emballage

Dans ce poste, emballent les pièces dans des sacs, Cette opération dure 5 min.

3.3.2 Définition du logiciel de simulation (PIPE 2) :

Performance. La théorie des Réseaux de Pétri a été largement utilisée pour mettre en œuvre une variété d'outils de modélisation et d'évaluation. Cet article passe en revue divers de ces outils et décrit certaines extensions récentes d'un outil de Réseau de Pétri gratuit et open-source indépendant de la plate-forme appelé PIPE. Les extensions comprennent : une augmentation de la puissance de modélisation grâce à l'introduction d'arcs inhibiteurs, un nouveau module d'analyse pour générer des siphons et des pièges, quelques nouvelles fonctionnalités d'interface et diverses présentations améliorations. Nous illustrerons la modélisation et l'analyse du système avec des arcs inhibiteurs dans une étude de cas d'un jeton réseau en anneau.

Première approche de PIPE2 :

Après avoir lancé PIPE2, vous devriez obtenir cette fenêtre :

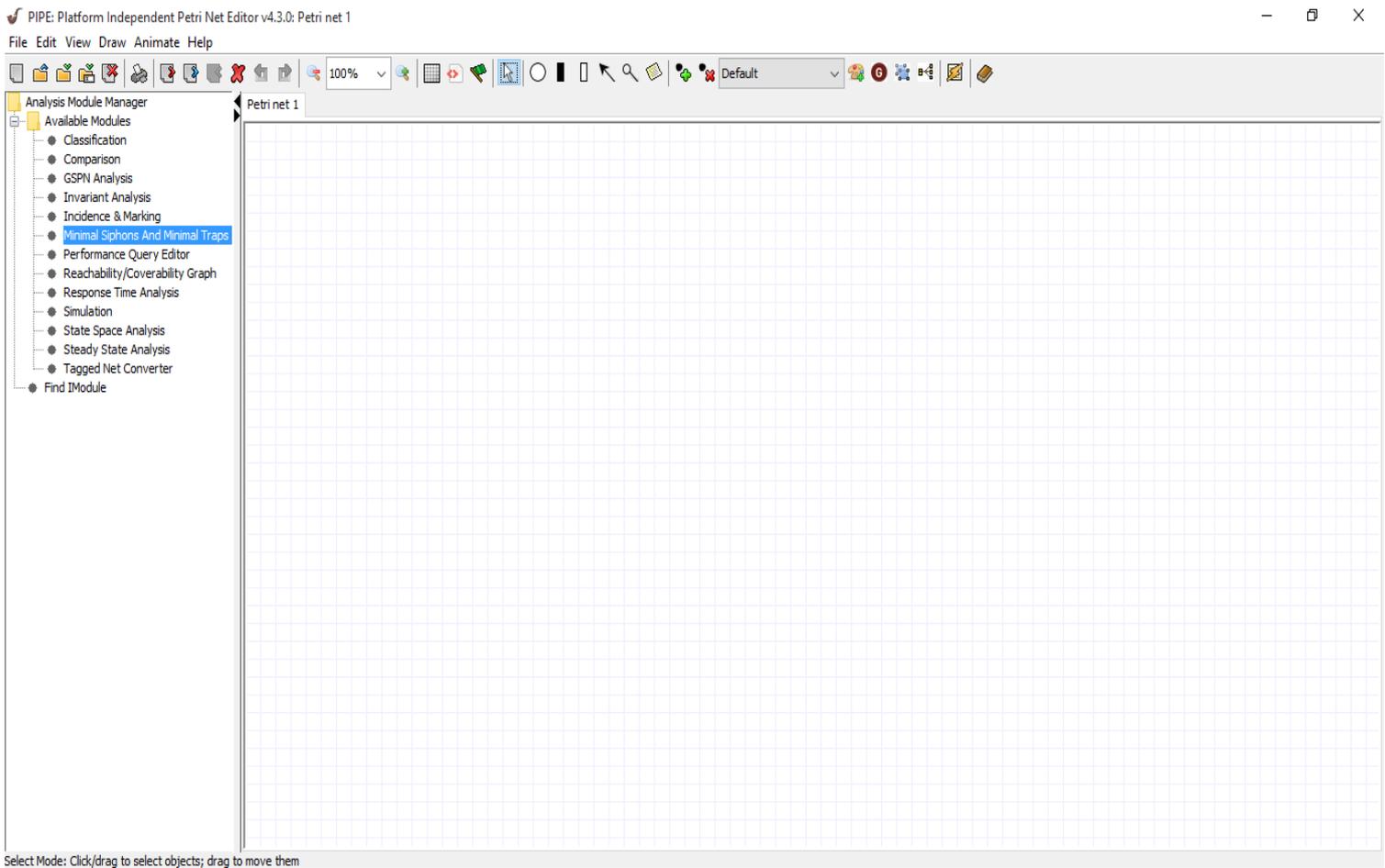


Figure3.11: Ecran d'accueil PIPE2.

Regardons plus en détails les éléments de la barre d'outils :



Dans cette barre d'outils, les éléments importants sont :

-  Outils création de place : en cliquant sur la grille avec cet outil, on crée une place ;
-  Outils création de transition : en cliquant sur la grille avec cet outil, on crée une transition ;
-  Outils création d'arc : en cliquant sur une transition puis sur une place (ou sur une place puis une transition) avec cet outil on crée un arc de la transition vers la place (de la place vers la transition) ;
-  Outils ajout de jeton : en cliquant sur une place avec cet outil, on ajoute un jeton dans cette place ;
-  Outils suppression de jetons : en cliquant sur une place contenant des jetons avec cet outils, on supprime un jeton de cette place ;
-  Outils sélection : permet de déplacer une transition ou une place sur la grille. En sélectionnant un objet (transition, place, arc) et en appuyant sur le bouton Suppr du clavier, on supprime l'objet. En double cliquant sur un objet (ou clique droit), on peut accéder à ses propriétés (nom des places ou transitions par exemple) ;
-  Outils simulation : permet de lancer la simulation du réseau de Pétri.

3.3.3 Modélisation graphique

Dans cette partie, en basant sur cahier des charges décrivant, pour une gamme de fabrication, le fonctionnement global de la chaîne de production, on a établi le modèle réseau de Pétri qui modélise le fonctionnement de cette chaîne.

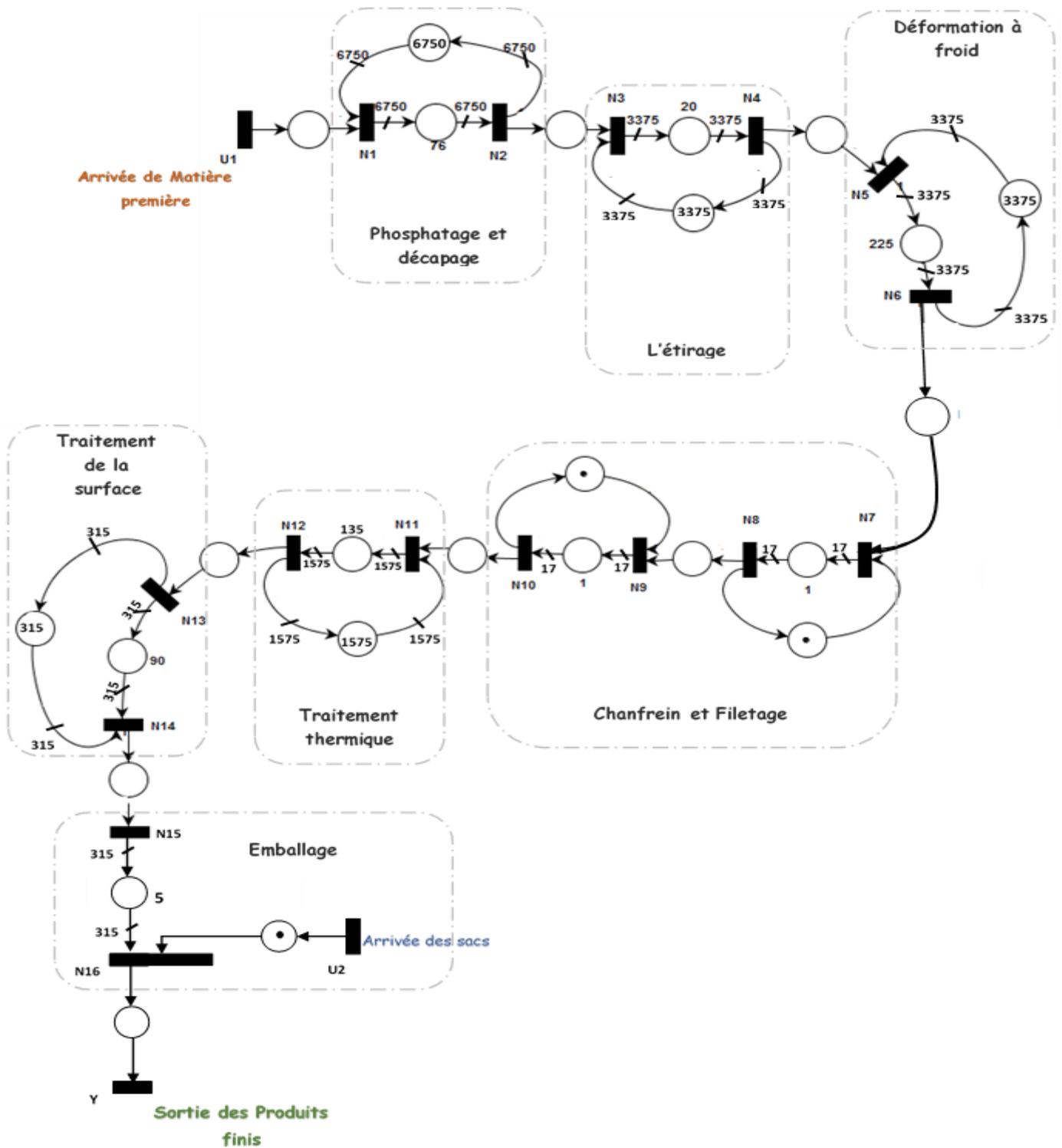


Figure 3.12: GETG de la chaîne de production.

3.3.4 Modélisation mathématique :

Cette modélisation est donnée par les équations récurrentes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1(t) = \min \left(u_1(t), \left\lfloor \frac{6750}{6750} n_2(t) + 6750 \right\rfloor \right) \\ n_2(t) = \frac{6750}{6750} n_1(t - 76) \\ n_3(t) = \min \left(n_2(t), \left\lfloor \frac{3375}{3375} n_4(t) + 3375 \right\rfloor \right) \\ n_4(t) = \frac{3375}{3375} n_3(t - 20) \\ n_5(t) = \min \left(n_4(t), \left\lfloor \frac{3375}{3375} n_6(t) + 3375 \right\rfloor \right) \\ n_6(t) = \frac{3375}{3375} n_5(t - 225) \\ n_7(t) = \min(n_6(t), n_8(t) + 1) \\ n_8(t) = \frac{17}{17} n_7(t - 1) \\ n_9(t) = \min(n_8(t), n_{10}(t) + 1) \\ n_{10}(t) = \frac{17}{17} n_9(t - 1) \\ n_{11}(t) = \min \left(n_{10}(t), \left\lfloor \frac{1575}{1575} n_{12}(t) + 1575 \right\rfloor \right) \\ n_{12}(t) = n_{11}(t - 135) \\ n_{13}(t) = \min \left(n_{12}(t), \left\lfloor \frac{315}{315} n_{14}(t) + 315 \right\rfloor \right) \\ n_{14}(t) = \frac{315}{315} n_{13}(t - 90) \\ n_{15}(t) = n_{14}(t) \\ n_{16}(t) = \min \left(u_2(t) + 1, \left\lfloor \frac{315}{315} n_{15}(t - 5) \right\rfloor \right) \\ y(t) = n_{16}(t) \end{array} \right.$$

3.3.5 Modélisation dans l'algèbre des dioïdes d'opérateur $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} N1(\delta) = U1(\delta) \oplus \mu_{\frac{6750}{6750}} \gamma^{6750} N2(\delta) \\ N2(\delta) = \mu_{\frac{6750}{6750}} \delta^{76} N1(\delta) \\ N3(\delta) = N2(\delta) \oplus \mu_{\frac{3375}{3375}} \gamma^{3375} N4(\delta) \\ N4(\delta) = \mu_{\frac{3375}{3375}} \delta^{20} N3(\delta) \\ N5(\delta) = N4(\delta) \oplus \mu_{\frac{3375}{3375}} \gamma^{3375} N6(\delta) \\ N6(\delta) = \mu_{\frac{3375}{3375}} \delta^{225} N5(\delta) \\ N7(\delta) = N6(\delta) \oplus \gamma^1 N8(\delta) \\ N8(\delta) = \mu_{\frac{17}{17}} \delta^1 N7(\delta) \\ N9(\delta) = N8(\delta) \oplus \gamma^1 N10(\delta) \\ N10(\delta) = \mu_{\frac{17}{17}} \delta^1 N9(\delta) \\ N11(\delta) = N10(\delta) \oplus \mu_{\frac{1575}{1575}} \gamma^{1575} N12(\delta) \\ N12(\delta) = \delta^{135} N11(\delta) \\ N13(\delta) = N12(\delta) \oplus \mu_{\frac{315}{315}} \gamma^{315} N14(\delta) \\ N14(\delta) = \mu_{\frac{315}{315}} \delta^{90} N13(\delta) \\ N15(\delta) = N14(\delta) \\ N16(\delta) = \gamma^1 U2(\delta) \oplus \mu_{\frac{315}{315}} \delta^5 N15(\delta) \\ Y(\delta) = N16(\delta) \end{array} \right.$$

3.4 Relation entrée-sortie dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$

Comme il a été vu précédemment, l'évolution dynamique d'un graphe d'événements temporisé avec multipliers peut être représentée par les équations d'état dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$.

Aussi, en appliquant le théorème 1.5, on peut déduire que la sortie Y s'exprime comme :

$$Y = HU \quad \text{Où} \quad H = D \oplus CA^*B \text{ avec } A^* = e \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \quad (2.10)$$

Les éléments de la matrice H appartiennent au dioïde $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$, chaque élément étant une composition d'opérateurs utilisés pour la modélisation des GETM.

3.4.1 Relation entrée-sortie de la chaîne de Fabrication de vis

Pour déterminer la relation entrée-sortie de la chaîne de Fabrication, on a établi un modèle réseau de pétri simplifié, composé de trois transition internes.

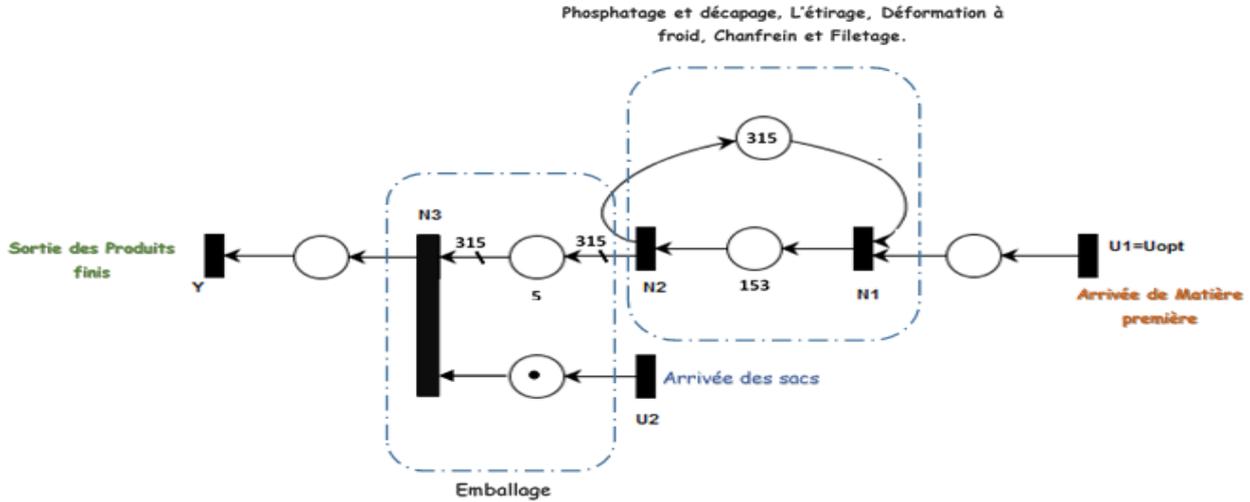


Figure3.13: -GETM simplifié de la chaîne de Fabrication de vis.

L'évolution dynamique du modèle de la ligne de production est donnée par les équations récurrentes suivantes, codées dans le dioïdes $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$:

$$\begin{cases} N1 = U1 \oplus \gamma^{315} N2 \\ N2 = \delta^{153} N1 \\ N3 = \gamma^1 U2 \oplus \mu_{315}^{315} \delta^5 N2 \\ Y = N3 \end{cases}$$

En remplaçant $N2$ par son expression dans l'équation de $N1$, on obtient :

$$N1 = \delta^{153} (\gamma^{315} \delta^{153})^* U1$$

On remplace l'expression de $N2$ dans l'équation de $N3$, on obtient :

$$N3 = \gamma^1 U2 \oplus \mu_{315}^{315} \delta^{158} (\gamma^{315} \delta^{153})^* U1$$

En remplaçant $N3$ par son expression dans l'équation de Y , on obtient :

$$Y = \gamma^1 U2 \oplus \mu_{315}^{315} \delta^{158} (\gamma^{315} \delta^{153})^* U1$$

Ce modèle mathématique sera utilisé par la suite pour calculer la commande en juste-à-temps qu'on va appliquer à la ligne de conditionnement. Cette commande a pour objectif de synthétiser une trajectoire d'entrée (commande) telle que la réponse en sortie suive "au mieux" une trajectoire de consigne correspondant au comportement désiré en sortie du système.

3.5 Conclusion

Ce modèle mathématique a une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min, +)$, pour palier à ce problème de non linéarité et pour pouvoir appliquer certains résultats développés dans le cadre de l'analyse de performances des systèmes linéaire dans l'algèbre des diodes et qui ne sera pas traité dans ce mémoire, une approche de modélisation de ces graphes a été utilisée. Cette approche est permet de décrire la dynamique de modèle et les relations reliant les différentes transitions du graphe. Le modèle d'équations récurrentes sera utilisé par la suite pour évaluer les performances des GETG et sera simulé dans un environnement de logiciel réseau de Pétri PIPE2.

Chapitre IV:

Commande optimale des systèmes de production

Classiquement, commander un système revient à piloter ses entrées dans le but d'obtenir des performances spécifiées par un cahier des charges. Dans le domaine des systèmes à événements discrets, deux notions de commande ont été développées via l'approche algébrique des diodes : la commande par poursuite de modèle et la commande par poursuite de trajectoire.

La commande par poursuite de modèle a pour objectif le calcul d'un correcteur, noté F , tel que le comportement entrée-sortie du système corrigé, noté G_f , composé d'un système nominal, noté H , et du correcteur F , soit aussi proche que possible de celui du modèle de référence, noté G_{ref} . Plusieurs études ont été menées. Une étude consiste à placer le correcteur en amont du système nominal, autrement dit, à pré compenser le système [Libeaut and Loiseau, 1996] [Cottenceau, 1999, §3.2]. Une autre étude consiste à placer le correcteur au niveau de la boucle de retour [Cottenceau et al, 2000, Cottenceau et al, 2001, Lüders and Santos-Mendes, 2002]. La figure 3.1 présente les schémas blocs du système nominal, du système en boucle fermée avec un correcteur situé au niveau de la boucle de retour et du modèle de référence.

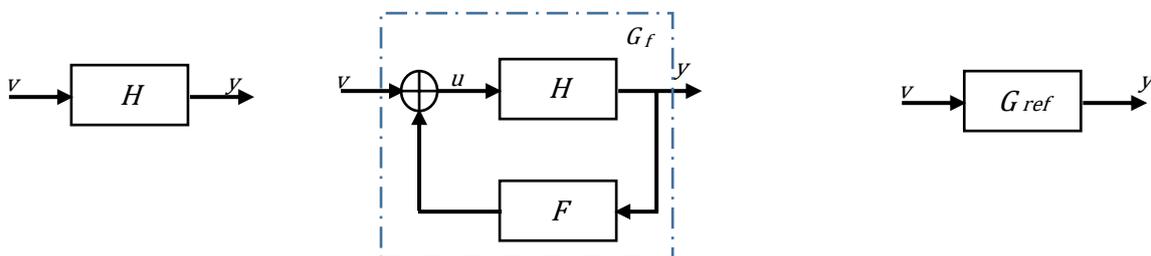


Figure4.1: Commande par poursuite de modèle.

Une structure de commande généralisant ces approches a été proposée dans [Maia et al, 2003]. Elle est basée sur l'utilisation simultanée d'un pré compensateur et d'un bloc situé dans la boucle de retour de sortie.

La deuxième technique est un problème de commande par poursuite de trajectoire connue a priori. Autrement dit, il s'agit d'établir une trajectoire d'entrée (commande) du système telle que la réponse en sortie "suive au mieux" une trajectoire de consigne correspondant au comportement désiré en sortie du système, ce qui correspond à une inversion du modèle. Dans ce domaine, l'approche proposée dans [Cohen et al, 1989] permet d'établir une trajectoire d'entrée, notée u , telle que la réponse, notée y , soit inférieure ou égale à une trajectoire de consigne, notée z .

Une telle commande est optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps¹. Elle est notée u_{opt} , et se définit par :

$$u_{opt} = \bigoplus_{\Sigma(u) \leq z} u.$$

Dans la suite, on s'intéresse uniquement au problème de commande par poursuite de trajectoire pour les systèmes de production. Nous montrons que la synthèse de cette commande, établie pour des systèmes $(\min, +)$ linéaires, se généralise pour des systèmes non linéaires n'admettant pas une représentation linéaire dans le dioïde $(\min, +)$, cette non linéarité étant due à la présence de poids sur les arcs des graphes considérés.

4.1 Commande en juste-à-temps des graphes d'événements temporisés avec multipliers

La commande en juste-à-temps, correspond au calcul de la plus petite commande U , notée u_{opt} , telle que la sortie Y soit inférieure ou égale au comportement désiré Z , ce qui correspond à :

$$U_{opt}(t) = \text{Inf} \{ U \mid \forall t \in \mathbb{Z}, Y(t) \leq Z(t) \}.$$

La synthèse de cette commande est un problème de pseudo-inverse que la théorie de la résiduation [Blyth and Janowitz, 1972] permet de résoudre directement. En effet, la commande optimale, au sens du juste-à-temps, est solution d'un système d'équations, qui correspond au modèle d'état inversé, appelées équations d'état backward. <

4.1.1 Equations backward dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$

Considérons un système décrit dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$ par (2.8) ou (2.10). Soit Z une trajectoire désirée en sortie. La commande U_{opt} telle que

$$Y = HU_{opt} \stackrel{\text{def}}{=} (CA^*B \oplus D)U_{opt} \leq Z,$$

Est donnée par la relation suivante :

$$U_{opt} = H^\#(Z) = (CA^*B \oplus D) \oslash Z.$$

Pour calculer cette commande, on utilise la proposition suivante qui donne le système d'équations *backward* correspondant à la représentation de $H^\#$ définie par (3.2).

Proposition 3.1. [Baccelli et al., 1992] La commande U_{opt} est la solution des équations suivantes

$$\begin{cases} \xi &= A\phi\xi \wedge C\phi Z & (i) \\ U_{opt} &= B\phi\xi \wedge D\phi Z & (ii) \end{cases}$$

Où les matrices A, B, C, D correspondent aux matrices d'états du **GETM** données par la représentation (2.8). ξ est appelé le co-état, il regroupe les compteurs associés aux transitions du modèle *backward*. Il correspond au franchissement des transitions du **GETM** tel que la sortie $Y \geq Z$.

Aux équations *backward* (3.3), on associe la condition "initiale" suivante :

$$\exists t_f \text{ telle que } z(t) = z(t_f) \text{ et } \xi(t) = \xi(t_f), \forall t > t_f.$$

Cette condition "initiale" signifie qu'on ne désire contrôler la production que jusqu'à l'instant t_f , ceci peut se justifier, par exemple, si on ne dispose pas de l'information sur la production désirée, au-delà de l'instant t_f . Cette information manquante est alors fixée à la valeur $z(t_f)$.

La proposition suivante donne les résiduées des opérateurs discrets γ, δ, μ , on donne également les expressions des résiduées des opérateurs I et P utilisées pour les démonstrations.

Proposition 3.2. Les résiduées des opérateurs γ, δ, μ sont données par :

$$1 \quad \gamma^v: \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \{n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \mapsto \{n(t) - v\}_{t \in \mathbb{Z}}, v \in \mathbb{Z},$$

$$2 \quad \delta^\tau: \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \{n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \mapsto \{n(t + \tau)\}_{t \in \mathbb{Z}}, \tau \in \mathbb{Z},$$

Les résiduées des opérateurs I (injection canonique) et P (projection canonique) sont données par :

$$3 \quad I^\#: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \{n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \mapsto \{[n(t)]\}_{t \in \mathbb{Z}},$$

$$4 \quad P^\#: \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \{n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \mapsto \{n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}, \text{ soit } P^\# = I.$$

$$5 \quad \mu_m^\#: \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \{n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \mapsto \left\{ \left\lceil \frac{1}{m} \times n(t) \right\rceil \right\}_{t \in \mathbb{Z}}, m \in \mathbb{Q}^+ ([\alpha] \text{ correspond à la partie entière supérieure de}).$$

Preuve 1.

- **Point 1 :** Pour vérifier que $\gamma^{v^\#}$ est bien la résiduée de l'opérateur γ^v , on utilise le théorème 1.4, en effet :

$$\forall n \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, \gamma^v \gamma^{v^\#}(n(t)) = \gamma^v(n(t) - v) = v + n(t) - v = n(t),$$

$$\text{et } \gamma^{v^\#} \gamma^v(n(t)) = n(t) - v + v = n(t).$$

- **Point 2 :** Comme pour le point 1, en utilisant le théorème 1.4, on a :

$$\forall n \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, \delta^\tau \delta^{\tau^\#}(n(t)) = \delta^\tau(n(t + \tau)) = n(t + \tau - \tau) = n(t)$$

$$\text{et } \delta^{\tau^\#} \delta^\tau(n(t)) = n(t + \tau - \tau) = n(t).$$

- **Point 3 :**

$$\forall n \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, II^\#(n(t)) = I([n(t)]) \leq n(t)$$

$$\text{Et } \forall n \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, I^\#I(n(t)) = [n(t)] = n(t).$$

• **Point 4 :**

$$\forall n \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, PP^{\#}(n(t)) = PI(n(t)) = \lfloor n(t) \rfloor = n(t)$$

$$\text{Et } \forall n \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, P^{\#}P(n(t)) = IP(n(t)) = \lfloor n(t) \rfloor \geq n(t).$$

• **Point 5 :** On pose $\mu_m = P\mu'_m I$, le théorème 1.5 permet d'écrire :

$$\mu_m^{\#} = (P\mu'_m I)^{\#} = I^{\#}\mu_m^{\#}P^{\#}, \text{ sachant que } \mu'_m \text{ est défini comme suit :}$$

$$\begin{aligned} \mu'_m: (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}} &\rightarrow (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, \\ \{n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} &\mapsto \{m \times n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

La résiduée de l'opérateur μ'_m est donnée par :

$$\mu_m^{\#}: (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}},$$

$$\{n(t)\}_{t \in \mathbb{Z}} \mapsto \left\{ \frac{1}{m} \times n(t) \right\}_{t \in \mathbb{Z}}.$$

$$\text{On a } \forall n \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, \mu'_m \left(\mu_m^{\#}(n(t)) \right) = \mu'_m \left(\frac{1}{m} n(t) \right) = n(t) \leq n(t)$$

$$\text{et } \forall n \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}, \mu_m^{\#}\mu'_m(n(t)) = n(t) = n(t).$$

La résiduée d'opérateur I et P se prouve par l'utilisation du théorème 1.4.

Donc, on peut déduire l'application résiduée de l'opérateur μ_m , on a :

$$\mu_m^{\#} = (P\mu'_m I)^{\#} = I^{\#}\mu_m^{\#}P^{\#}, \text{ c'est-à-dire } \forall n \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}},$$

$$\mu_m^{\#}n(t) = \left[\mu_m^{\#}I(n(t)) \right] = \left[\frac{1}{m} \times n(t) \right].$$

4.1.2 Commande en juste à temps de la ligne de conditionnement

Considérons le GETM simplifié modélisant la ligne de conditionnement de l'ORSIM, donné par la figure suivante.

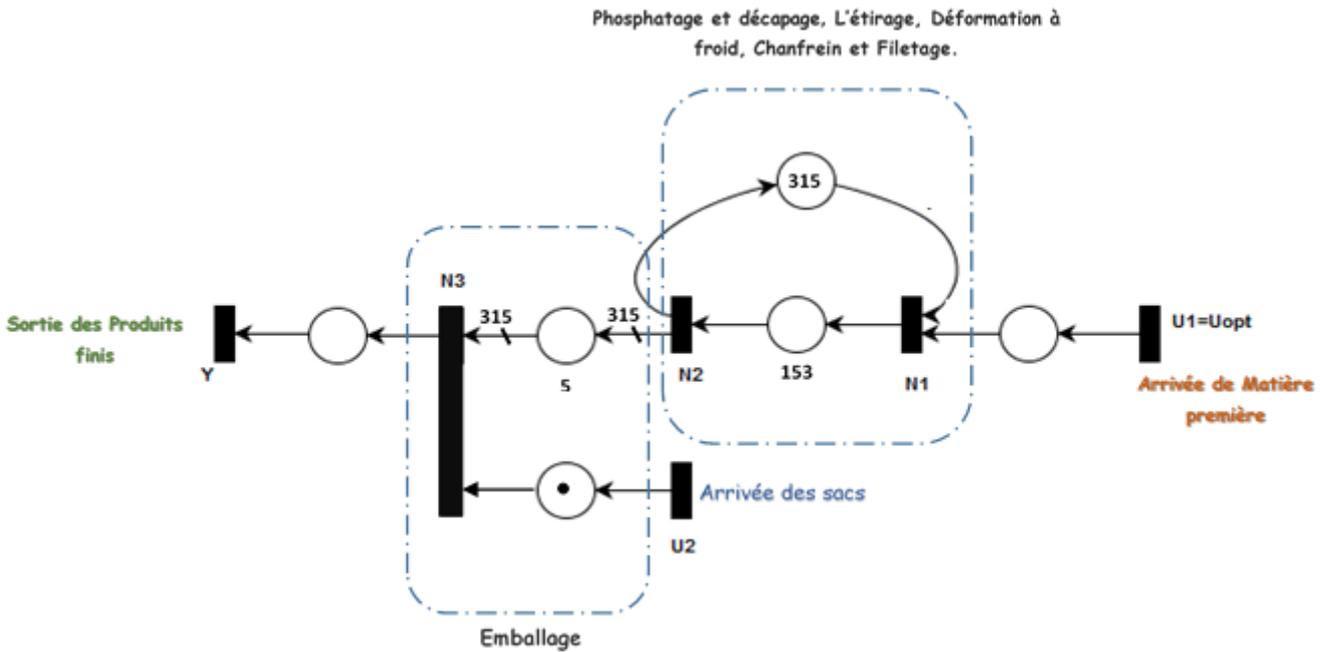


Figure4.2: -GETM simplifié de la chaîne de Fabrication de vis.

Dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min} \parallel \delta$], ce graphe admet la représentation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^{315} & \varepsilon \\ \delta^{153} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_{315}^{315} \delta^5 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{opt} \\ U_2 \end{pmatrix} \\ Y = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad e) \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Utilisant le modèle *backward* (3.3), l'expression de la commande optimale u_{opt} est donnée par la solution des équations *backward* suivantes :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{153} \phi \xi_2 \\ \gamma^{315} \phi \xi_1 \wedge \mu_{\frac{315}{315}} \delta^5 \phi \xi_3 \\ z \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} U_{opt} \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \gamma^1 \phi \xi_3 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

Soit dans l'algèbre classique :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2(t + 153) \\ \max(\xi_1(t) - 315, \xi_3(t + 5)) \\ z(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} U_{opt}(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_1(t) - 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

Pour les conditions initiales suivantes, on considère que :

$$\forall t \leq 153, z(t) = z(153) = 0, \text{ et } \forall t > t_f = 445, z(t) = z(t_f) = 315 \text{ et } \xi(t) = \xi(t_f)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \xi_1(t_f) \\ \xi_2(t_f) \\ \xi_3(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2(t_f) \\ \max(\xi_2(t_f) - 315, z(t_f)) \\ z(t_f) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} U_{opt}(t_f) \\ U_2(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(t_f) \\ \xi_3(t_f) - 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

Dans la suite, on s'intéresse qu'au calcul de la commande U_{opt} . Pour cela, on fixe la valeur finale de $\xi_2(t_f)$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2(t) = \max(\xi_1(t_f) - 315, z(t_f)) \\ \text{Dans le dioïde } \mathcal{D}_{\min}[\delta]: \\ \xi_2(\delta) = \gamma^{-315} \xi_2 \wedge Z \\ \xi_2(\delta) = (\gamma^{-315}) * Z \\ \xi_2(\delta) = (e \oplus -315 \oplus -630 \oplus \dots) Z \\ \xi_2(\delta) = Z \\ \text{Ce qui est équivalent dans l'algèbre classique :} \\ \xi_2(t_f) = z(t_f) \end{array} \right.$$

Pour une trajectoire désirée z , la commande u_{opt} et la sortie y du modèle sont données par le tableau suivant :

t	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	0	0	0	0	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	70	70	70	70	70	70	105	105	105	105	105	105	105	105	105
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	105	105	105	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	140	140	140	140	175	175	175	175	175	175	175	175	175	210	210
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	210	210	210	210	210	210	210	210	210	245	245	245	245	245	245
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	245	245	245	280	280	280	280	280	280	280	280	280	280	280	280
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	280	280	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	35	35
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	35	35

t	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329
z	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35

t	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344
z	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35

t	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359
z	35	35	35	35	35	35	35	35	70	70	70	70	70	70	70
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	35	35	35	35	35	35	35	35	70	70	70	70	70	70	70

t	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374
z	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	105
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	105

t	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389
z	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	140	140	140	140
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105

t	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404
z	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	175	175	175
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105

t	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419
z	175	175	175	175	175	175	210	210	210	210	210	210	210	210	210
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	105	105	105	105	105	105	105	105	140	140	140	140	140	140	140

t	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434
z	210	210	245	245	245	245	245	245	245	245	245	280	280	280	280
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	210	210	210

t	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449
z	280	280	280	280	280	280	280	280	280	280	315	315	315	315	315
u	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315	315
y	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210

On remarque que la sortie y est effectivement inférieure ou égale à la trajectoire désirée z (cf. figure3.3).

Les trajectoires associées aux franchissements des transitions x_1, x_2 et x_3 et la sortie désirée Z sont représentées dans la figure 3.3.

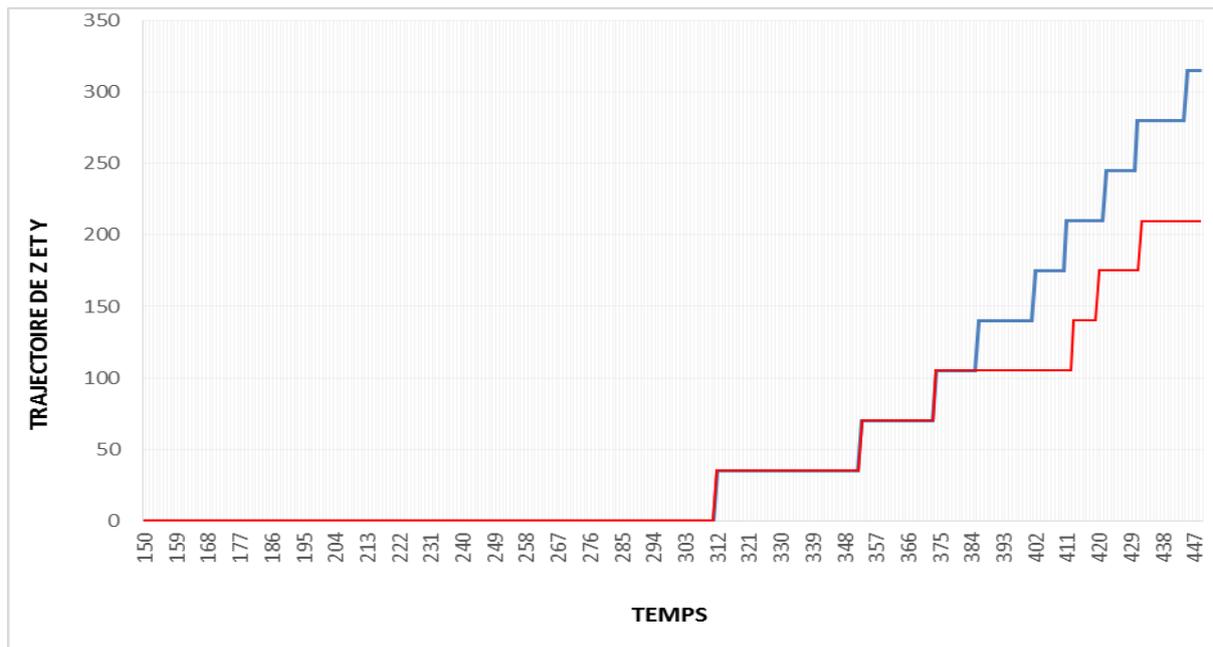


Figure4.3: Sortie désirée Z (trait épais) et sortie Y (pointillé), $Y \preceq Z$.

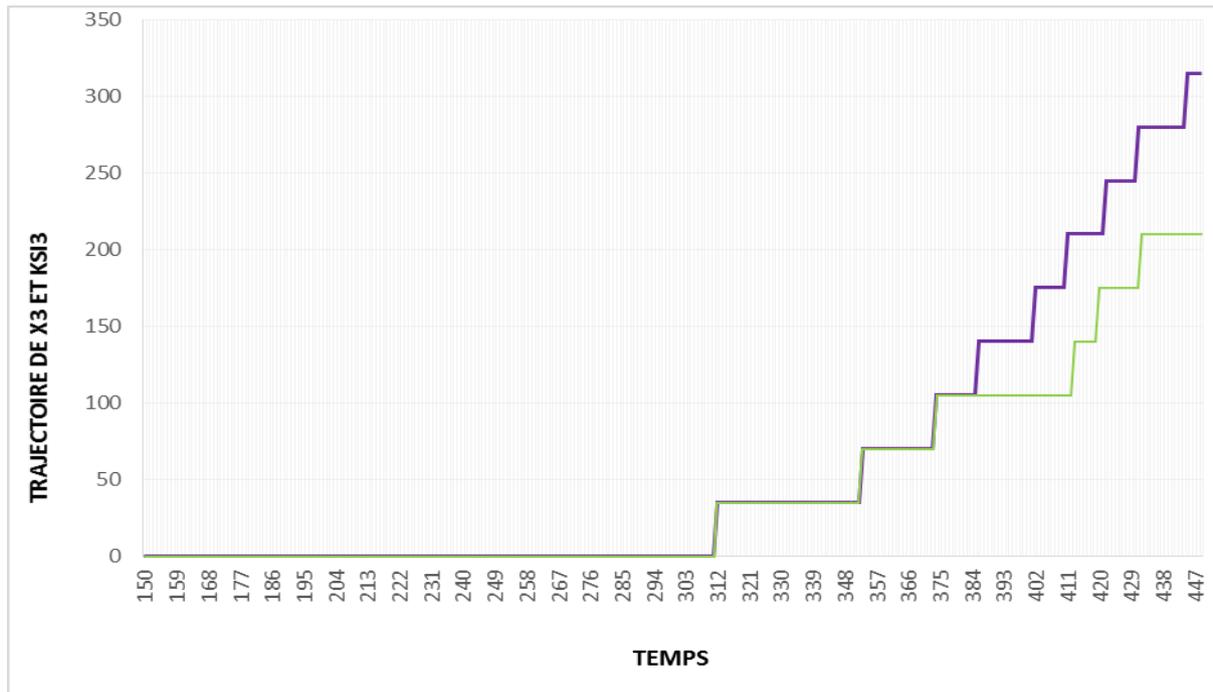


Figure4.4: Trajectoires de Ksi3 (trait épais) et X3 (pointillé), $X3 \leq Ksi3$.

Conclusion générale

Nous présentons dans ce mémoire des travaux et des résultats relatifs à la synthèse de l'observateur d'ordre réduit modélisée par les graphes d'évènements temporisés et représentée par un modèle $\text{Min}[\gamma, \delta]$ ou $\text{Max}[\gamma, \delta]$.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre on a donné quelques rappels fondamentaux concernant les propriétés mathématiques des dioïdes, la présentation des outils algébriques nécessaires à la modélisation et à la commande des graphes d'évènements temporisés généralisés.

Le deuxième chapitre traite la modélisation de systèmes à événement discrets par une sous-classe des réseaux de pétri appelée les graphes d'évènements temporisés dans différents dioïdes.

Le troisième chapitre a traité la modélisation des graphes généralisés dans un dioïde d'opérateurs. Nous présentons le dioïde d'opérateurs discrets $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$.

Ensuite, on a présenté le modèle proposé par l'étudiant qui modélise le comportement dynamique de notre système de production dans l'algèbre de dioïde.

Enfin le quatrième chapitre le modèle mathématique établi, a été utilisé par la suite pour calculer un type de commande : cette commande est optimale vis-à-vis du critère du juste-à-temps. Cette commande a pour objectif de synthétiser une trajectoire d'entrée (commande) telle que la réponse en sortie suive « au mieux » une trajectoire de consigne correspondant désiré en sortie du système.

Bibliographie

[Baccelli 1992] F. Baccelli, G. Cohen, G.-J. Olsder et J.-P. Quadrat. Synchronization and linearity : An Algebra for Discrete Event Systems. Wiley and Sons, 1992.

[Baynat 2000] B. Baynat. Théorie des files d'attentes : des chaines de markov aux réseaux à forme produit. Ed Hermès, 2000.

[Boimond and Ferrier, 1996] Boimond, J.-L. and Ferrier, J.-L. (1996). Internal Model Control and MaxAlgebra. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(3):457–461.

[Cohen 1985] G. Cohen, D. Dubois, J.-P. Quadrat et M. Viot. A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 30, no. 3, pages 210–220, March 1985.

[Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1):39–58.

[Cohen 1998a] G. Cohen, S. Gaubert et J.-P. Quadrat. Timed-Event Graphs with Multipliers and Homogeneous Min-Plus Systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 43, no. 9, pages 1296–1302, 1998.

[Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.

[Cottenceau et al., 2000] Cottenceau, B., Lhommeau, M., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2000). Data Processing Tool for Calculation in Dioid. In *Workshop On Discrete Event Systems (WODES'2000)*, Ghent, Belgium.

[Cottenceau et al., 2001] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (2001). Model Reference Control for Timed Event Graphs in Dioid. *Automatica*, 37:1451–1458.

[David 1992] R. David et H. Alla. Du grafcet aux réseaux de petri. Editions Hermès, Paris, 1992.

[Gaubert 1992] S. Gaubert. Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Thèse, Ecole des Mines de Paris, July 1992.

[Gunawardena 1998] J. Gunawardena, editeur. Idempotency. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, 1998.

[Hamaci 2004] S. Hamaci, J.-L. Boimond, S. Lahaye et Mostefaoui.M. Sur la linéarisation des graphes d'événements temporisés discrets avec multiplieurs dans l'algèbre $(\text{Min}, +)$. *Revue e-STA, Sciences et Technologies de l'Automatique*, vol. 1, no. 3, 2004.

[Hamaci et al., 2004a] Hamaci, S., Boimond, J.-L., and Lahaye, S. (2004a). On Modeling and Control of Discrete Timed Event Graphs with Multipliers Using $(\text{min}, +)$ Algebra. In *1st International Conference on Informatics in Control (ICINCO'04)*, volume 3, pages 32–37, Setùbal, Portugal.

[Hamaci et al., 2005a] Hamaci, S., Boimond, J.-L., and Lahaye, S. (2005a). On Modeling and Control of Hybrid Timed Event Graphs with Multipliers Using $(\text{min}, +)$ Algebra. *Journal of Discrete Event Dynamic Systems (à paraître)*.

[Maia et al., 2003] Maia, C.-A., Hardouin, L., Santos-Mendes, R., and Cottenceau, B. (2003). Optimal Closed-Loop Control of Timed-Event Graphs in Dioids. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48:2284–2287.

[Menguy et al., 2000a] Menguy, E., Boimond, J.-L., Hardouin, L., and Ferrier, J.-L. (2000a). A First Step Towards Adaptative Control for Linear in Max Algebra. *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 10(4):347–367.

[Murata 1989] T. Murata. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. In *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, volume 77, pages 541–581, 1989.

[Petri 1962] C.-A. Petri. *Kommunikation mit Automaten*. Thèse, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, Germany, 1962.

[Proth 1995] J.M. Proth et X. Xie. *Les réseaux de petri pour la conception et la gestion des systèmes de production*. Edition MASSON, 1995.