جامـــــــعة وهـــران 2

كلية العلـوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير

مطبوعة

الإحصاء 3
محاضرة مع تمرين محلولة

السنة الثانية ليسانس علوم تجارية

السداسي الثالث

مقدمة من طرف :

السيد(ة) : عرباوي خيرة

الرتبة : أستاذة محاضرة (ا)

السـنـــــة : 2022/2021

« STATISTIQUE 3»

Description du cours :

Ce cours est destiné aux étudiants L2 /S3. Il comprend la théorie de probabilité qui constitue une branche de la mathématique appliquée.

Ce cours s'inscrit dans la continuité du cours L1/S1 etS2 en statistique descriptive. A souligner que ce cours n'est une fin en soi, cependant, il constitue un ensemble d'outils d'aide à l'analyse statistique des différents phénomènes étudiés et permet à l'étudiant d'acquérir une certaine démarche scientifique dans la résolution des problèmes d'estimation et de prévision.

« STATISTIQUE 3»

Course description:

This course is intended for L2 /S3 students. It includes the theory of probability which constitutes a branch of applied mathematics.

This course is a continuation of the L1/S1 and S2 course in descriptive statistics. It should be noted that this course is not an end in itself, however, it constitutes a set of tools to help with the statistical analysis of the various phenomena studied and allows the student to acquire a certain scientific approach in the resolution estimation and forecasting problems

" *إحصاء 3* "

وصف المحاضرة : هذا الدرس هو موجه لطلبة السنة الثانية ليسانس علوم تجارية الثلاثي الثالث، و هو يتعلق بنظرية الإحتمالات التي تعتبر فرع من فروع الرياضيات المطبقة.

يعتبر هذا الدرس إمتداد لدرس الإحصاء الوصفي للسنة الأولى الثلاثي الأول و الثاني.

للإشارة أيضًا، أن هذا الدرس لا يعتبر هدفًا في حد ذاته، و إنما هو عبارة عن مجموعة من الوسائل المساعدة في التحليل الإحصائي للظواهر المدروسة و التي تمكن الطالب من إكتساب منهجية علمية في حل المسائل، التقدير و التنبؤ بالنتائج.

برنامج الدرس

مقدمـــــــــــــة

الفصل الأول : مدخل لعلم الإحتمالات

أولا :تعريف علم الاحتمال
ثانيا : المفاهيم التي يبنى عليها الاحتمال
ثالثا: أهم العمليات التي تحدث على الحوادث
رابعا: تمارين تطبيقية

الفصل الثاني : طرق التعداد و الاحتمال الشرطي

أولا: التحليل التوافقي
ثانيا: نظرية الاحتمال الشرطي
ثالثا: الاستقلالية بين الحوادث
رابعا: نظرية بابيز
خامسا: تمارين تطبيقية

الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية

أولا: المتغيرات العشوائية المنفصلة
ثانيا: خصائص المتغير العشوائي المنفصل
ثالثا: التوزيع المشترك في المتغيرات العشوائية المنفصلة
رابعا: المتصل المتغيرات العشوائية المتصلة
خامسا: خصائص المتغير العشوائي
سادسا: التوزيع المشترك في المتغيرات العشوائية المتصلة
سابعا: تمارين تطبيقية

الفصل الرابع : التوزيعات النظرية المطبقة على المتغيرات العشوائية المنفصلة

أولا: توزيع ذي الحدين
ثانيا: توزيع بواسون
ثالثا: تمارين تطبيقية

الفصل الخامس : التوزيعات النظرية المطبقة على المتغيرات العشوائية المتصلة

أولا: التوزيع المنتظم
ثانيا: التوزيع الأسي
ثالثا: التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس
رابعا:تمارين تطبيقية

قامة المراجع

المقدمـــــــــــة

يعتبر علم الإحتمالات من أهم علوم الإحصاء، ذلك لأن معظم النظريات و الطرق الإحصائية بنيت أساسًا على الإحتمال. و لعلم الإحتمالات اثر كبير على حياتنا اليومية لأن معظم القرارت فردية كانت أم جماعية التي تتخذ يوميًا تبنى على توقعات مختلفة لحدوث بعض الأشياء أو عدم حدوثها.

بدأت النظرية الإحتمالية مع إنتشار لعبة القمار أو لعبة الحظ، حيث شهد القرن السادس عشر (16) و السابع عشر (17) إهتمامًا بارزًا بهذا النوع من الدراسات و البحوث بحيث كانت الظروف مواتية خاصة في فرنسا (مع إنتشار لعب الورق و رمي حجر النرد). كما شهدت هذه الفترة النهضة العلمية في أوروبا خاصة في مجال الرياضيات. و عليه، قام المقامرون بالبحث عن طرق و أسس علمية تساعدهم على حساب فرص الربح و الخسارة، ممّا جعلهم يلتجئون إلى علماء الرياضيات أمثال : "باسكال" (PASCAL 1662- 1623) الذي كتب عما أسماه آنذاك "هندسة الحظ" (La géométrie du hasard)، "فرمات" (FERMAT :1665 – 1601)، "بارنولي" (BERNOULI 1700-1782)، و غيرهم. و هنا كانت نقطة الإنطلاق في الدراسات الجدية لعلم الإحتمال.

في القرن 19 للميلاد برزت إحدى أهم عناصر نظرية الاحتمالات وهي "التوزيع الطبيعي" وذلك لقياس نسبة الخطأ في مجال الحسابات الفلكية. كان هذا من ثمرة عمل العالمين لابلاس وقوس (GAUSSE وLAPLACE). في هذا القرن أيضا ظهرت حسابات الارتباط لـ قالتو (GALTOU) كما برزت أسماء مثل كتلت (QUETLET) وآخرون .

إذن، تعتبر النظرية الإحتمالية فرع من فروع الرياضيات المطبقة كونها تستخدم الكثير من المفاهيم و القواعد الرياضية مثل التكاملات، الإشتقاقات، النهايات، ....الخ.

النظرية الإحتمالية هي العلم الذي يهتم بدراسة الظواهر العشوائية و يقوم بتحليلها إلى نتائج تبنى على أساسها توقعات مستقبلية (التنبؤ بالنتائج).

الفصل الأول : مدخل لعلم الإحتمالات

أولا : تعريف الاحتمال

هناك عدة تعاريف للإحتمال نذكر منها ما يلي:

1- **الإحتمال الذاتي :** إحتمال يتعلق بذات الشخص. مثال : في أمتحان ما، يصرح أحد الطلبة أنه قد أجاب بصورة صحيحية بنسبة 80% و أنه لم يجب بصفة صحيحة بنسبة 20%. هذه النسب تمثل إحتمال ذاتي أو شخصي.

2- **الإحتمال المجرد :** هو ذاك الإحتمال الذي لا يبنى على تخمين أو تفكير. مثال: إذا رمينا قطعة نقد متزنة و سألنا شخص ما عن إحتمال ظهور الوجه الذي سوف يحصل عليه، فإنه بدون تخمين سيجيب 1/2

3- **الإحتمال التجريبي :** هو الذي يبنى على تجارب سابقة و يأخذ هذه النتائج و يعمّمها على الدراسات المستقبلية.

أما فيما يخص كيفية حساب الإحتمال، هناك عدة تعاريف تلقي الضوء كيفية تقويم الإحتمال، نذكر منها :

1- التقويم الإحصائي للإحتمال (R. VON MISES 1883-1953)

$$f_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}$$

حيث لدينا :

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A)$$ و بما أن $0 \le f_n(A) \le 1$ فانه $0 \le P(A) \le 1$

:يعرف الاحتمال P(A) للحدث A كحد التكرار النسبي الى A بمعنى : قيمة التكرار النسبي ستقترب اذا كررت التجربة بعدد لا نهائي من المرات . تفترض بأن النسخ مستقلة عن بعضها البعض .

نشير $h_n(A)$ للتكرار المطلق الى A الذي يقع في n تكرار سيعرف التكرار النسبي الى A حسب الصيغة السابقة.

نشير الى أن هذا التعريف غير عملي و غير مجدي ذلك لأنه يشترط اعادة التجربة ما لا نهاية من المرات، بمعنى آخر، تكون قيمة التقريب جيدة عندما تكون n كبيرة جدًا.

2- التقويم الكلاسيكي للإحتمال (LAPLACE 1742-1827):

هو تعريف كلاسيكي يسمى بتعريف لابلاس و يعرف وفق الصيغة التالية :

احتمال حدوث الحدث = عدد الحالات الموافقة / عدد الحالات الممكنة

الشرط الأساسي في ذلك هو أن يكون لكل الأحداث نفس الفرصة في الظهور.

بعض الخواص :

- حدث مستحيل الوقوع $h(A) = 0 \rightarrow P(A) = 0/h(S) = 0$
- حدث تام الوقوع $h(A) = h(S) \rightarrow P(A) = h(S)/h(S) = n/n = 1$

و منه : $\mathbf{0} \leq P(A) \leq 1$

ثانيا : المفاهيم الأساسية التي يبنى عليها علم الاحتمالات

كمجال علمي، يتوفر الإحتمال على عدة مفاهيم و مبادئ أساسية و هي:

1- **التجربة العشوائية :** هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها، ولكن تخضع فيها النتيجة إلى الصدفة (العشوائية) أي حدوث نتائج غير معلومة مسبقًا و تكون هذه النتائج مستقلة عن بعضها البعض.

2- **المجموعة الأساسية أو فضاء العينة :** هي مجموعة النتائج الممكن الحصول عليها جراء قيام بتجربة عشوائية، ويرمز لها بالرمز **S**، ويرمز لعدد النتائج المكونة لفراغ العينة بالرمز $n(S)$، و كل أحداث التجربة عبارة عن مجموعات جزئية من هذه المجموعة فهي المجموعة الكلية الحاوية لجميع الأحداث، و احتمالها دائما يكون مساويًا للواحد.

3- **الحدث أو الحادث أو الظاهرة:** هو فئة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة، ويرمز للحدث بحرف من الحروف الهجائية **[A, B, C,...]** ، وينقسم إلي نوعين هما:

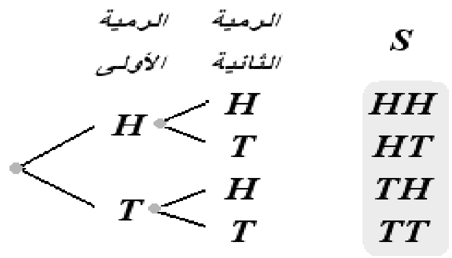
- حدث بسيط: وهو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة.
- حاث مركب: ويشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة، أي

أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة.

أمثـــــــلة :

1- عند إلقاء قطعة نقدية متزنة مرة واحدة، نجد أن فضاء العينة هو: **S:{H , T }** ، وعدد النتائج هي: $n(S) = 2$.

2- عند إلقاء قطعة عملة متزنة مرتين (أو إلقاء قطعتين مرة واحدة)، فإن فراغ العينة يمكن الحصول عليه من خلال شجرة الاحتمالات كما يلي:



أي أن $n(S) = 4$ ، و تستعمل هذه الطريقة كلما كانت لدينا تجربة تمر بعدة مراحل و لا تنتهي بمرحلة واحدة، و هنا نلاحظ أن فضاء العينة هو مرآة عاكسة لكل الأحداث الممكن حدوثها من جراء القيام بالتجربة العشوائية.

3- عند رمي زهرة نرد متزنة مرة واحدة، فإن فضاء العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجه، وهي: **S:{1, 2, 3, 4, 5, 6}** ، أي أن : $n(S) = 6$.

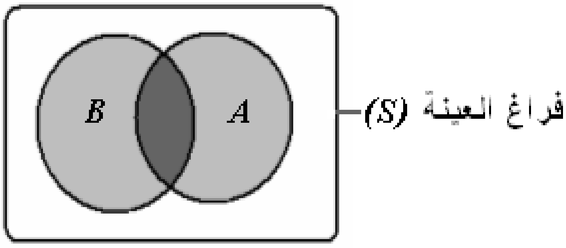
4- فعند إلقاء قطعة عملة متزنة مرتين ، وعرف الحادث **A** بأنه ظهور الصورة مرتين ، والحادث **B** ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، نجد أن فراغ العينة في هذه الحالة هي **S:{HH, HT, TH, TT}** ، وبالنسبة للحادث **A** فهو حادث بسيط ، يشمل نتيجة واحدة هي **A:{HH}** ، أي أن **n(A)=1** ، أما الحادث **B** فهو حادث مركب يشمل ثلاث نتائج هي **B:{HT, TH, HH}** ، أي أن **n(B)=3** ، وهذا الحادث يمكن تقسيمه إلى أحداث بسيطة .

ثالثا : أهم العمليات التي تجرى على الحوادث.

تستعين نظرية الاحتمالات عموما بنظرية المجموعات، بل انها مستنبطة منها و كل العمليات الموجودة في الاحتمالات من جمع و ضرب ما هي الا ترجمة لأهم العمليات الموحودة في المجموعات من تقاطع و اتحاد.

- **عملية الاتحاد ($\cup$)**

يعبر اتحاد الحدثان **B , A** عن وقوع أحدها على الأقل، وبمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A\cup B)$ ، كما هو موضح في الشكل التالي:



الجزء المظلل يعبر عن الاتحاد $(A\cup B)$

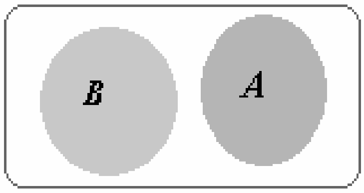
و عموما يعبر عن الاتحاد أدبيا بالضمير "أو"، و هي عبارة عن قضية الفصل في المنطق، و سنرى أنها ستتحول الى عملية الجمع في الاحتمالات وفق العلاقة التالية :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A\cap B)$$

و تسمى هذه العلاقة بقاعدة الجمع أو الاتحاد للأحداث غير المتنافية، و نقصد بالأحداث غير المتنافية تلك الأحداث التي يمكن أن تحدث معا ، بمعنى أنه يوجد عناصر مشتركة بينهما.أما اذا كانت الأحداث متنافية لا يمكن أن تحدث في آن واحد حيث حدوث أحد الحدثين ينفي حدوث الآخر ، كالوجه و الظهر في القطعة النقدية، الذكر و الأنثى في اختيار طفل، فان قاعدة الجمع ستكون على النحو التالي :

$$P(AUB) = P(A) + P(B)$$

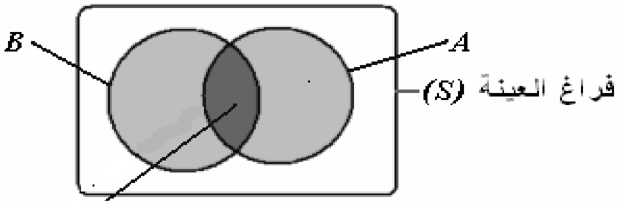
و تسمى هذه القاعدة بقاعدة الجمع لدى الأحداث المتنافية بمعنى $A\cap B=\phi$ ، وفق الشكل التالي:



إذن : الإتحاد (**U**) ← الجمع (+) ← أو

- **التقاطع ($\cap$)**

يعبر تقاطع الحادثان **B , A** عن وقوع الحدثان معا وفي آن واحد ، ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A \cap B)$ ، ويظهر ذلك في الشكل التالي :



عموما يعبر عن التقاطع بالضمير "و" أدبيا، وهو عبارة عن عملية الوصل في المنطق ،وتترجم الى عملية الضرب في الاحتمالات عن طريق العلاقات التالية :

$$P(A \cap B)= P(A)*P(B)$$

و تسمى هذه القاعدة بقاعدة الضرب في الأحداث المستقلة، و تعرف الأحداث المستقلة بأنها تلك الأحداث غير المرتبطة ببعضها البعض، بمعنى أن حدوث أحد الحدثين لا يتعلق بحدوث الآخر، و أن احتمال وقوع أحدهما لا يتأثر و لا يتغير بوقوع الحدث الآخر أو عدم وقوعه.

أما اذا كانت الأحداث غير مستقلة و كانت مرتبطة ببعضها البعض، فان قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة ستكون وفق النحو التالي :

$$P(A\cap B) = P(A)* P(B/A)$$

أو

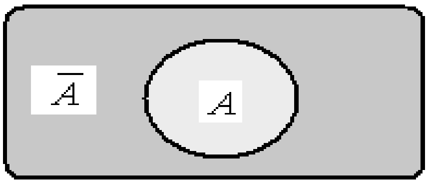
$$P(A\cap B) = P(B)* P(A/B)$$

و يسمى $P(B/A)$ بالاحتمال الشرطي الذي سيعرف لاحقا ، و هو يعبر عن احتمال وقع الحدث B علما بوقوع الحدث A

- **الحدث المتنافي:**

الحدث المتنافي للحدث **A** هو الذي ينفي وقوعه، بمعنى آخر هو الحدث الذي يشمل

كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحدث **A**، ويرمز للحدث المتنافي بالرمز $\overline{A}$ ، ومن ثم نستنتج أن : $\left(A\cap\overline{A}\right)=\phi$, $\left(A\cup\overline{A}\right)=S$ كما هو مبين بالشكل التالي:



إذن : التقاطع (∩) ← الضرب (**x**) ← و

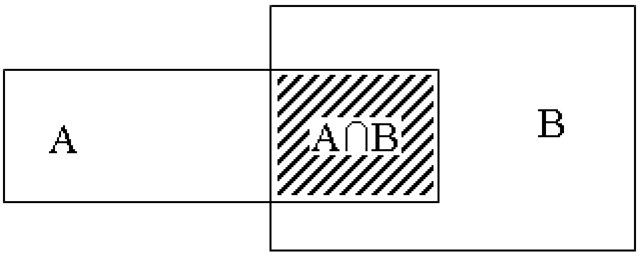
خامسا : تمارين تطبيقية توضيحية

التمرين الأول : لدينا حدثان A و B ، حيث: P(A)=3/8 // P(B)=1/2 // P(A∩B)=1/4

* أحسب ما يلي: $P(A\cup B)$ ، $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ ، $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$ ، $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ ، $P(A-B)$، $P(B-A)$ ؟

الحل :

لدينا حدثان A و B ، حيث : P(A)=3/8 // P(B)=1/2 // P(A∩B)=1/4



حساب الاحتمالات التالية:

1. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \mathbf{0.625}$
2. $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \mathbf{0.75}$
3. $P(\overline{A}) = P(S) - P(A) = 1 - P(A) = 1-\frac{3}{8} = \frac{5}{8} = \mathbf{0.625}$

4. $P(\overline{B}) = P(S) - P(B) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}$
5. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = \mathbf{0.375}$
6. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \mathbf{0.125}$
7. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \mathbf{0.25}$

التمرين الثاني :

عند رمي قطعة نقد متوازنة مرتين متتاليتين.

* أوجد احتمال ظهور الصورة (H) مرة واحدة على الأقل ؟

الحل:

نفرض أن:

F : الحدث الذي يمثل ظهور الكتابة.

H : الحدث الذي يمثل ظهور الصورة.

نرمي قطعة نقد متوازنة أي ($P(F) = P(H) = \frac{1}{2}$) مرتين.

فضاء التجربة العشوائية هو:

$$S = \{ FF ; FH ; HF ; HH \} = 4 \text{ cas}$$

* حساب احتمال ظهور الصورة (H) مرة واحدة على الأقل:

عدد الحالات الملائمة للحدث (A) هو:

$$A = \{ FH ; HF ; HH \} = 3 \text{ cas}$$

✓ الطريقة 1:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{3}{4} = \mathbf{0.75}$$

✓ الطريقة 2:

$$P(A) = P(FH \text{ ou } HF \text{ ou } HH)$$

$$P(A) = P(FH) + P(HF) + P(HH)$$

$$P(A) = [P(F).P(H)] + [P(H).P(F)] + [P(H).P(H)]$$

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = \mathbf{0.75}$$

التمرين الثالث :

لعائلة ثلاثة أطفال.

* ما هو احتمال أن يكون لديها ذكران وبنت (أنثى) ؟

الحل :

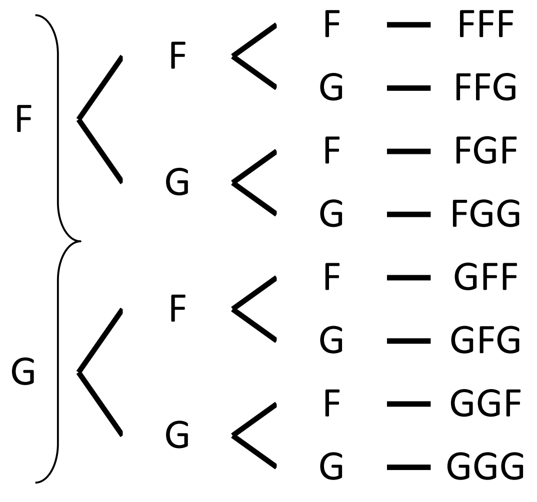
نفرض أن:

F : الحدث الذي يمثل للعائلة بنت (أنثى).

G : الحدث الذي يمثل للعائلة ذكر.

للعائلة ثلاثة أطفال، إذن فضاء التجربة العشوائية (S) هو:

الشجرة الاحتمالية:



$$S = \{ FFF, FFG, FGF, FGG, GFF, GFG, GGF, GGG \} = 8 \ cas$$

- ✓ حساب احتمال أن يكون لدى العائلة ذكرتن وبنت (الحدث A) :

عدد الحالات الملائمة للحدث A :

$$A = \{ FGG , GFG , GGF \} = 3\ cas$$

- ✓ الطريقة 1:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{3}{8} = \mathbf{0.375}$$

- ✓ الطريقة 2:

لدينا: $P(F) = P(G) = \frac{1}{2}$

$$P(A) = P(FGG\ ou\ GFG\ ou\ GGF)$$

$$P(A) = P(FGG) + P(GFG) + P(GGF)$$

$$P(A) = [P(F).P(G).P(G)] + [P(G).P(F).P(G)] + [P(G).P(G).P(F)]$$

$$P(A) = \left[\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right]$$

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = \mathbf{0.375}$$

التمرين الرابع :

عند رمي حجر نرد متوازن مرة واحدة بصورة أن فرصة ظهور العدد الزوجي تساوي ضعف فرصة ظهور العدد الفردي:

1- ما هو احتمال الحدث (A) الذي يقع إذا وفقط إذا كان الناتج أقل من (4) ؟
2- ما هو احتمال الحدث (B) الذي يقع إذا وفقط إذا كان الناتج يقبل القسمة على (3) ؟
3- ما هو احتمال الحدث (C) الذي يقع إذا وفقط إذا كان الناتج عدد زوجيا ؟
4- ما هو احتمال الحدث (D) الذي يقع إذا وفقط إذا كان باقي القسمة على 2 يساوي (1) ؟

الحل :

نرمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة بصورة أن فرصة ظهور العدد الزوجي تساوي ضعف فرصة ظهور العدد الفردي.

فضاء التجربة العشوائية (S) هو:

$$S = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

نفرض أن احتمال ظهور العدد الفردي هو: x ، فإن احتمال ظهور العدد الزوجي هو: 2x

$$P(S) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$1 = x + 2x + x + 2x + x + 2x$$

$$1 = 9x \Longrightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} P(1) = P(3) = P(5) = \frac{1}{9} \\ P(2) = P(4) = P(6) = \frac{2}{9} \end{cases}$$

1- حساب احتمال الحدث A : ? =P(A)

A : الحدث الذي يمثل الناتج أقل من (4) إذن:

$$A = \{ 1,2,3 \}$$

$$P(A) = P(1 \; ou \; 2 \; ou \; 3)$$

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3)$$

$$P(A) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} = \mathbf{0.444}$$

2- حساب احتمال الحدث B : ? =P(B)

B : الحدث الذي يمثل الناتج يقبل القسمة على (3) إذن:

$$B = \{ 3,6 \}$$

$P(B) = P(3\ ou\ 6)$

$P(B) = P(3) + P(6)$

$P(B) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \mathbf{0.333}$

3- حساب احتمال الحدث C : ? =P(C)

C : الحدث الذي يمثل الناتج عدد زوجي إذن:

$\mathrm{C} = \{\ 2,4,6\ \}$

$P(\mathrm{C}) = P(2\ ou\ 4\ ou\ 6)$

$P(\mathrm{C}) = P(2) + P(4) + P(6)$

$P(\mathrm{C}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \mathbf{0.666}$

4- حساب احتمال الحدث D : ? =P(D)

D : الحدث الذي يمثل الناتج باقي القسمة على (2) يساوي (1) إذن:

$\mathrm{D} = \{\ 1,3,5\ \}$

$P(\mathrm{D}) = P(1\ ou\ 3\ ou\ 5)$

$P(\mathrm{D}) = P(1) + P(3) + P(5)$

$P(\mathrm{D}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \mathbf{0.333}$

التمرين الخامس :

نفرض أننا ألقينا ثلاث قطع نقد متوازنة، ولتكن الأحداث التالية:

A : في الرمية الأولى نحصل على صورة (H).

B : في الرمية الثانية نحصل على صورة (H).

C : ظهور الصورة (H) مرتين متتاليتين وفقط.

* هل الأحداث C , B , A هي مستقلة عن بعضها البعض مثنى مثنى ؟

الحل :

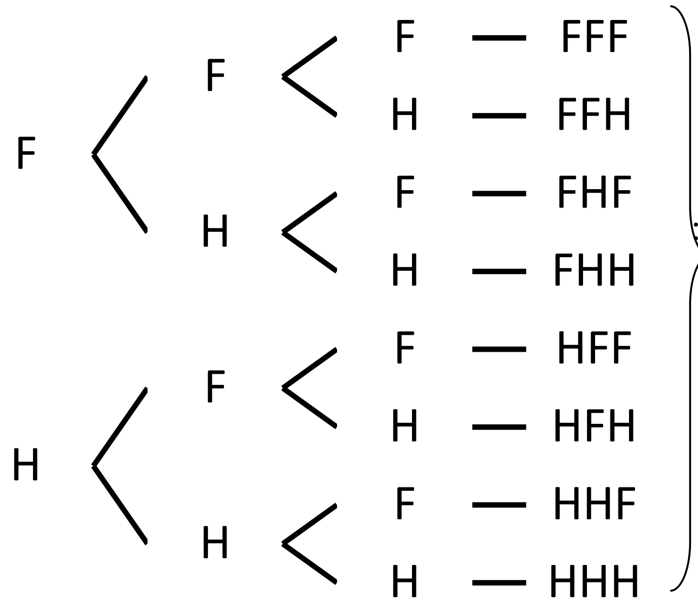
نفرض أن:

F : الحدث الذي يمثل ظهور الكتابة.

H : الحدث الذي يمثل ظهور الصورة.

نرمي قطعة نقد ثلاثة مرات إذن فضاء التجربة العشوائية (S) هو:

الشجرة الاحتمالية :



$$S = \{ FFF\ , FFH\ , FHF\ , FHH\ , HFF\ , HFH\ , HHF , HHH \} = 8\ cas$$

A : ظهور الصورة في الرمية الأولى إذن:

$$A = \{ HFF\ , HFH\ , HHF\ , HHH \} = 4\ cas$$

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}$$

B : ظهور الصورة في الرمية الثانية إذن:

$B = \{ FHF\ , FHH\ , HHF\ , HHH\} = 4\ cas$

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}$$

C : ظهور الصورة مرتين متتاليتين وفقط إذن:

$C = \{ FHH\ , HHF\ \} = 2\ cas$

$$P(C) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \mathbf{0.25}$$

* هل الأحداث A ، B ، C مستقلة عن بعضها البعض مثنى مثنى:

1- هل الحدثان A و B مستقلان:

يكون الحدثان A و B مستقلان إذا كان:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$P(A \cap B) = \{ HHF\ , HHH\ \} = 2\ cas$

$$\begin{cases} P(A \cap B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{2}{8} = \mathbf{0.25} \\ P(A) * P(B) = 0.5 * 0.5 = \mathbf{0.25} \end{cases}$$

بما أن : $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ فإن $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ حدثان مستقلان.

2- هل الحدثان A و C مستقلان:

يكون الحدثان A و C مستقلان إذا كان:

$$P(A \cap C) = P(A) * P(C)$$

$P(A \cap C) = \{ HHF\ \} = 1\ cas$

$$\begin{cases} P(A \cap C) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{1}{8} = \mathbf{0.125} \\ P(A) * P(C) = 0.5 * 0.25 = \mathbf{0.125} \end{cases}$$

بما أن : $P(A \cap C) = P(A) * P(C)$ فإن $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{C}$ حدثان مستقلان .

3- هل الحدثان B و C مستقلان:

يكون الحدثان B و C مستقلان إذا كان:

$$P(B \cap C) = P(B) * P(C)$$

$$P(B \cap C) = \{ FHH\ , HHF \} = 2\ cas$$

$$\begin{cases} P(B \cap C) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{2}{8} = \mathbf{0.25} \\ \\ P(B) * P(C) = 0.5 * 0.25 = \mathbf{0.125} \end{cases}$$

بما أن : $P(B \cap C) \neq P(B) * P(C)$ فإن $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$ حدثان غير مستقلان.

الفصل الثاني :طرق التعداد و الاحتمال الشرطي

ان المبدأ الذي تقوم عليه الاحتمالات يتمثل في تعداد الحالات الممكنة أو الكلية. عندما يحتوي فضاء العينة على عدد كبير من العناصرالتي يصعب تعدادها، نستعين ببعض القواعد الرياضية المساعدة في تحديد عدد عناصرS و كذا عناصر الحالات المواتية لحدوث الحدث. و يعد التحليل التوافقي من أهم الطرق المستعملة في هذا الشأن على غرار التوفيقات ، التراتيب و التباديل ، وهو ما سيكون محل دراستنا في هذا الفصل لنعرج بعد ذلك الى دراسة الاحتمال الشرطي و ما يليه من تعميم للإحتمال الشرطي المتثل في نظرية "بابيز".

أولا : التحليل التوافقي

قبل التطرق إلى الطرق الحسابية لتحديد الحلات المواتية و الحالات الكلية، نسلط الضوء على تقنية بسيطة للتعداد ألا و هي : الشجرة الإحتمالية أو مخطط "فين"

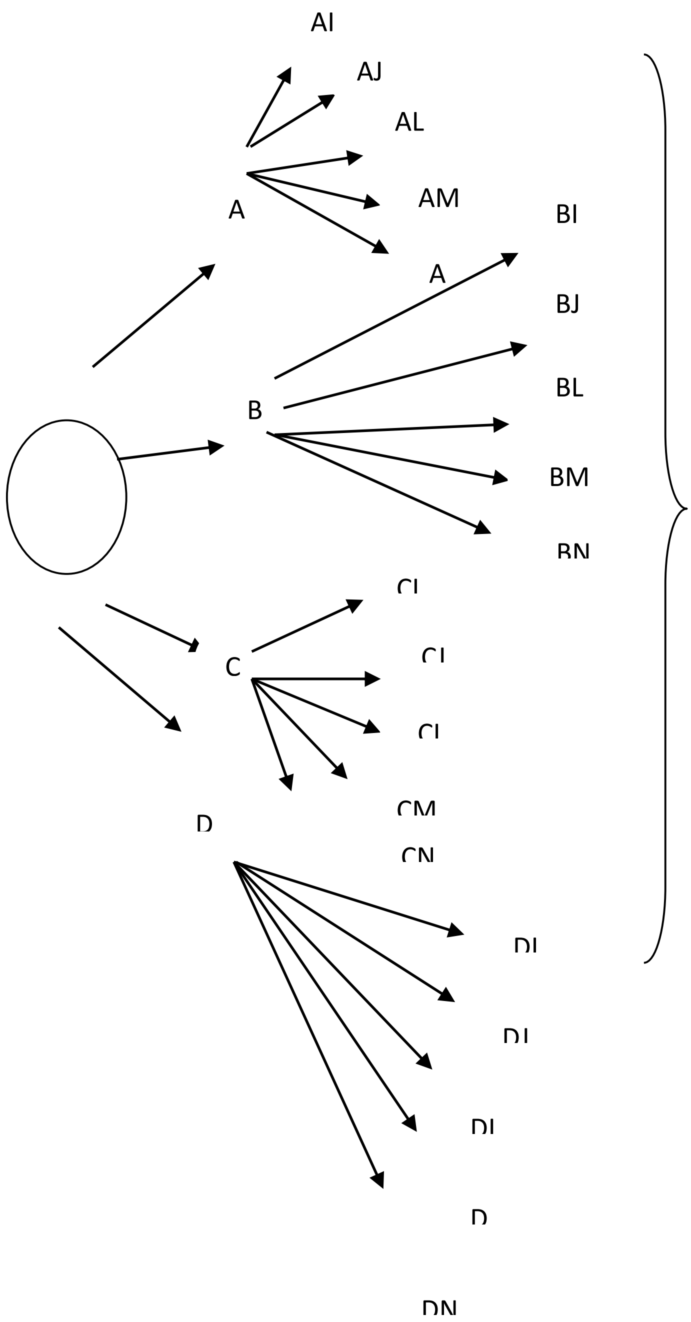
مثال : أعلنت شركة تجارية عن توفر وظيفتين شاغرتين، فتقدم 5 رجال و 4 نساء. بكم طريقة يمكن توظيف رجل و إمرأة ؟

الحل :

نفرض الحدثين التاليين :

$$F = \{A\,;B\,;C\,;D\}$$

$$H = \{I\,;J\,;K\,;L\,;M\}$$



يوجد 20 طريقة لتوظيف رجل و إمرأة

- **التراتيب :** و هي تعبر عن الكيفيات التي يمكن أ نرتب بها عناصر مجموعة معينة بكيفية معينة، و تستعمل في الحالات التي تتميز بعدم وجود تكرار و لكن الترتيب مهم، و تعني أهمية الترتيب أنه كلما غيرنا ترتيب عنصر معين في كيفية معينة فإننا نحصل على كيفية جديدة بالرغم أننا من لازلنا في نفس عناصر الكيفية. ويتم حسابها بالصيغة التالية :

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

A : هي مجموع الكيفيات التي يمكن أن نرتب بها عناصر مجموعة معينة.

n: مجموع العناصر التي يراد ترتيبها.

r:كيفية ترتيب هذه العناصر.

ملاحظة : الترتيب مهم مع عدم قبول التكرار.

- **التباديل :** للتباديل نفس خصائص التراتيب ، بل تعد حالة خاصة من التراتيب و تكمن الخصوصية في كون n = r ، وتحسب بالصيغة التالية :

$$Pn = n!$$

ملاحظة : الترتيب غير مهم مع عدم قبول التكرار.

- **التوفيقات :** وهي تعبر عن عدد الكيفيات التي يمكن أن نأخذ r عنصر من بين n عنصر ، و تستعمل في الحالات التي تتميز بقبول وجود تكرار، والترتيب غير مهم. و يتم حسابها وفق الصيغة التالية :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

C : هي مجموع الكيفيات التي يمكن أن نأخذ بها عناصر مجموعة معينة.

n: مجموع العناصر التي يراد أخذها.

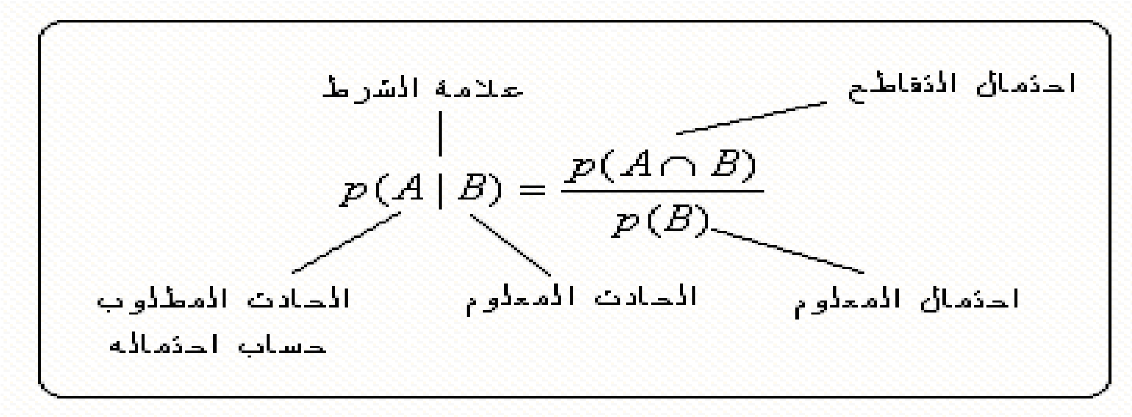
r: كيفية أخذ هذه العناصر

ملاحظة : الترتيب غير مهم مع قبول التكرار.

ثانيا : نظرية الاحتمال الشرطي

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حدث ما علما بوقوع حدث آخر له علاقة بالحدث الأول، ويسمى الحدث بمعلوم وقوعه بالشرط، و لأجل ذلك سمي الاحتمال في هذا المقام بالاحتمال الشرطي،

فإذا كان B حدث معلوم الوقوع، و A حدث آخر يراد حساب احتمال وقوعه، بشرط معلومية حدوث الحدث B، فإن هذا الاحتمال يحسب وفق العلاقة الرياضية التالية:



ويعرف الاحتمال $p(A|B)$ بقانون الاحتمال الشرطي، ويقرأ "احتمال وقوع الحدث A علما بوقوع الحدث B"، أو يقرأ "احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B".

ثالثا: الاستقلالية العشوائية بين الأحداث

عموما نقول عن حدثان أنهما مستقلان عشوائيًا، اذا كان حدوث أحدهما لا يؤثر على الحدث الآخر، بمعنى احتمال الحدث الأول يبقى ثابت سواءا بحدوث أو عدم حدوث الحدث الآخر، و تتحقق الاستقلالية اذا تحققت القاعدة التالية :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

تحقق هذه القاعدة يشير الى تحقق العلاقات التالية :

$$P(A) = P(A|B)$$

$$P(B) = P(B|A)$$

$$P(A|B) = P(A|\overline{B})$$

$$P(B|A) = P(B|\overline{A})$$

رابعا: نظرية بابيز BAYES

إذا وقع الحدث E مع أحد الأحداث الشاملة $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ لفضاء عينة S و $P(E) > 0$ فإن:

$$P(A_k / E) = \frac{P(A_k)P(E / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E / A_i)}, i = 1,2,3,...,n$$

نظرية بابيز تعد تعميم لنظرية الاحتمال الشرطي تستعمل لما عدد الحوادث تفوق الإثنين، حيث تعد الأحداث $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ أحداثا مكملة لبعضها البعض بالنسبة لفضاء العينة S

خامسا: تمارين تطبيقية حول طرق التعداد و نظرية الاحتمال الشرطي

التمرين 01 :

ليكن لدينا 4 عناصر a ، b ، c ، d .

* كم ثنائية مرتبة يمكن تشكيلها من هذه العناصر ؟ (مع عدم تكرار العنصر الواحد في الثنائية الواحدة).

التمرين 02 :

بكم طريقة يمكن تكوين لجنة تتألف من ثلاثة (3) رجال وامرأتان (2) من ضمن مجموعة تضم سبعة (7) رجال وستة (6) نساء ؟

التمرين 03 :

يبين الجدول التالي عدد طلاب السنة الأولى علوم تجارية (C) والسنة الأولى علوم التسيير (G) وموزعين حسب الجنسين:

الشعبة / الجنس	C	G

إناث	390	315
ذكور	110	85
المجموع	**500**	**400**

اخترنا شخصا بصفة عشوائية من المجموعة.

1- ما هو احتمال أن يكون أنثى ؟
2- ما هو احتمال أن يكون من طلاب السنة الأولى علوم التسيير (G) ؟
3- ما هو احتمال أن يكون أنثى من طلاب السنة الأولى علوم التسيير ؟
4- ما هو احتمال أن يكون أنثى علما أنه من طلاب السنة الأولى علوم التسيير ؟

التمرين 04 :

لتكن لدينا تسعة (9) بطاقات مرقمة من 1 إلى 9، نسحب بطاقتين (2) بصفة عشوائية من هذه المجموعة.

* نعلم أن المجموع المحصل عليه هو زوجي، أحسب احتمال أن يكون الرقمين المسحوبين فرديين؟

التمرين 05 :

يوجد في قسم (12) ذكر و (4) إناث، إذا سحبنا عشوائيا (3) تلاميذ من هذا القسم.

* ما هو احتمال أن يكون هؤلاء الثلاثة ذكور؟ (السحب الواحد تلوى الآخر وبدون إرجاع).

التمرين 06 :

نرمي زهرتي نرد (2 Dés) متزنتين.

* أحسب احتمال لكي يكون مجموع الوجهين المحصل عليه أكبر أو يساوي 10 في الحالتين :

1- الزهرة الأولى ناتجها رقم 5 ؟
2- على الأقل إحدى الزهرتين ناتجها 5 ؟

التمرين 07 :

لدينا (3) آلات: A ، B ، C ، تنتج على التوالي: 50%، 30%، 20% من مجموع قطع الغيار المنتجة من طرف مصنع قطع الغيار يوجد بها قطع فاسدة، حيث نجد أن نسبة القطع الفاسدة من طرف الآلات الثلاثة هي على الترتيب: 3%، 4%، 5%.

وضعت جميع القطع في مستودع التخزين. أخذنا قطعة عشوائيا:

1- ما هو احتمال أن تكون القطعة فاسدة؟
2- سحبنا هذه القطعة وتبين أنها فاسدة، ما هو احتمال أن تكون هذه القطعة منتجة من طرف الآلة (A) ؟

التمرين 08 :

يملك السيد أحمد مصنع لإنتاج القارورات البلاستيكية، قام بشراء ثلاث ماكينات عصرية آلية: M1 ، M2 ، M3 ، واستغنى على الآلات القديمة، أصبح إنتاجه اليومي هو 1000 قارورة حيث أن إنتاج الآلة M1 هو 100 قارورة يوميا بنسبة تشوه 5%، وإنتاج الآلة M2 هو 400 قارورة يوميا بنسبة تشوه 4%، والباقي يمثل إنتاج الآلة M3 بنسبة تشوه 2%.

قام أحمد في نهاية اليوم باختيار قارورة من مجموع الإنتاج الكلي للماكينات الثلاثة لفحصها.

1- ما هو احتمال أن تكون القارورة المفحوصة جيدة ؟ وذلك بطريقتين مختلفتين.
2- إذا كانت القارورة المفحوصة جيدة، ما هو احتمال أن تكون منتجة من طرف الآلة M2 ؟

التمرين 09 :

في مؤسسة تعليمية يوجد 4% من الذكور و 1% من الإناث قامتهم تفوق 1.60م. نعلم أن 60% من التلاميذ إناث.

* أخذنا تلميذ عشوائيا ووجد أن قامته تفوق 1.60م، ما هو احتمال أن يكون هذا التلميذ أنثى ؟

الحلول :

حل التمرين 01 :

لدينا 4 عناصر a ، b ، c ، d .

* عدد الثنائيات المرتبة الممكن تكوينها من مجموعة هذه العناصر كما يلي:
- ✓ الطريقة 1 : استعمال فضاء التجربة العشوائية (S) :

$$S=\{ (a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,a) , (b,c) , (b,d) , (c,a) , (c,\text{b}) , (c,d) ,$$

$$(d,a) , (d,b) , (d,c)\} = \mathbf{12}$$ ثنائية مرتبة

* الطريقة 2 : استعمال التراتيب (Arrangements)

بما أن في تكوين المجموعة الترتيب مهم وتكرار العنصر غير مقبول في الاختيار، نستعمل الترتيبة:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4*3*2!}{2!} = 4*3 = \mathbf{12}$$ ثنائية مرتبة

حل التمرين 02 :

نكون لجنة من < 3رجال
امرأتان

من مجموعة مكونة من < 7 رجال
6 نساء

* عدد الطرق التي يمكن تكوين بها اللجنة:

بما أن في تكوين المجموعة الترتيب غير مهم وتكرار العنصر غير مقبول في الاختيار نستعمل قانون التوفيقة (Combinaison)

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

= = نأخذ 3رجال من 7رجال وامرأتان من 6 نساء عدد الطرق التي يمكن تكوين بها اللجنة

$C_7^3 * C_6^2 = C_6^2$ و $\frac{3}{7}$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7*6*5*4!}{3!\,4!} = 7*5 = 35$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6*5*4!}{2!\,4!} = \frac{30}{2} = 15$$

عدد الطرق التي يمكن تكوين بها اللجنة = 35 * 15 = **525 طريقة**

حل التمرين 03 :

نفرض أن :

C : الحدث الذي يمثل اختيار طالب من السنة الأولى علوم تجارية.

G : الحدث الذي يمثل اختيار طالب من السنة الأولى علوم التسيير.

F : الحدث الذي يمثل اختيار أنثى.

H : الحدث الذي يمثل اختيار ذكر.

الجدول التالي يمثل تقسيم الطلاب حسب الشعبة والجنس:

الشعبة / الجنس	C	G	**تقسيم حسب الجنس**
إناث	390	315	**705**
ذكور	110	85	**195**
المجموع	**500**	**400**	**900**

اخترنا شخص عشوائيا من مجموع الطلاب:

1- حساب احتمال أن يكون الشخص المختار أنثى: ? =P(F)

$$P(F) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{705}{900} = \mathbf{0.723}$$

2- حساب احتمال أن يكون الشخص المختار طالب من السنة الأولى علوم التسيير: ? =P(G)

$$P(G)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}=\frac{400}{900}=\mathbf{0.444}$$

3- حساب احتمال أن يكون الشخص المختار أنثى من طلاب السنة الأولى علوم التسيير:

$P(F\cap G)$= ?

$$P(F\cap G)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}=\frac{315}{900}=\mathbf{0.35}$$

4- حساب احتمال أن يكون الشخص المختار أنثى علما أنها من طلاب السنة الأولى علوم التسيير: $P(F/G)$)= ?

$$P(F/G)=\frac{P(F\cap G)}{P(G)}=\frac{315/900}{400/900}=\frac{315}{400}=\mathbf{0.787}$$

حل التمرين 04 :

لدينا تسعة (9) بطاقات مرقمة من 1 إلى 9، نسحب بطاقتين بصفة عشوائية ونعلم أن المجموع المحصل عليه هو زوجي.

فضاء التجربة العشوائية (S): هو $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

* يكون المجموع المحصل عليه هو زوجي إذا وفقط إذا كان الرقمين المسحوبين: معا فرديين أو معا زوجيين.

أ- معا فرديين: الأعداد الفردية من فضاء التجربة هي:

$I=\{1,3,5,7,9\}$

✓ عدد الحالات الموافقة للأعداد الفردية هو:

$$C_5^2=\frac{5!}{2!\,(5-2)!}=\frac{5*4*3!}{2!\,3!}=\mathbf{10\ \mathit{cas}}$$

ب- معا زوجيين: الأعداد الزوجية من فضاء التجربة هي:

$p=\{2,4,6,8\}$

✓ عدد الحالات الموافقة للأعداد الزوجية هو:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4*3*2!}{2!\,2!} = \mathbf{6\ \boldsymbol{cas}}$$

إذن عدد الحالات الكلية حتى يكون المجموع المحصل عليه زوجي هو:

$$C_5^2 + C_4^2 = \mathbf{16}$$

* حساب احتمال أن تكون البطاقتين المسحوبتين فرديتين معا:

نفرض أن A الحدث الذي يمثل الرقمين المسحوبين فرديين معا:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{10}{16} = \mathbf{0.625}$$

حل التمرين 05 :

إخترنا عشوائيا 3 تلاميذ من قسم به: 12 ذكر، 4 إناث

نفرض أن:

F : الحدث الذي يمثل اختيار أنثى.

G : الحدث الذي يمثل اختيار ذكر.

* حساب احتمال أن نكون قد اخترنا عشوائيا 3 تلاميذ من قسم ذكور:

نفرض أن:

A : الحدث الذي يمثل 3 تلاميذ من القسم ذكور.

✓ الطريقة 1:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

بما أن السحب الواحد تلوى الآخر وبدون إرجاع نستعمل الترتيبة.

* عدد الحالات الملائمة = سحب 3 ذكور من بين 12 ذكر وسحب 0 أنثى من 4 إناث

=

$A_{12}^{3} \qquad * \qquad A_{4}^{0}$

* عدد الحالات الكلية = سحب 3 تلاميذ من بين 16 تلاميذ.

A_{16}^{3}

$$P(A) = \frac{A_{12}^{3} * A_{4}^{0}}{A_{16}^{3}}$$

$$A_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 * 11 * 10 * 9!}{9!} = 1320$$

$$A_{4}^{0} = \frac{4!}{(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1$$

$$A_{16}^{3} = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16 * 15 * 14 * 13!}{13!} = 3360$$

$$P(A) = \frac{1320 * 1}{3360} = \mathbf{0.392}$$

✓ الطريقة 2 : نستعمل الاحتمال الشرطي:

$$P(A) = P(3G) = P(G_1 \cap G_2 \cap G_3)$$

$$P(A) = P(G_1) * P\left({}^{G_2}/_{G_1}\right) * P\left({}^{G_3}/_{G_2 \cap G_3}\right)$$

$$P(A) = \frac{12}{16} * \frac{11}{15} * \frac{10}{14} = \mathbf{0.392}$$

حل التمرين 06 :

نرمي زهرتي نرد متزنتين.

* حساب احتمال أن يكون مجموع الوجهين المحصل عليه أكبر أو يساوي 10 في الحالتين :

* نفرض أن A الحدث الذي يمثل حالة المجموع الوجهين المحصل عليه أكبر أو يساوي 10.
- ✓ الحالة 1 : الزهرة الأولى ناتجها رقم 5.

فضاء التجربة العشوائية S هو:

$$S = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\} = 6\ cas$$

$$A = \{(5,5), (5,6)\} = 2\ cas$$

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{2}{6} = \mathbf{0.666}$$

- ✓ الحالة 2 : على الأقل إحدى الزهرتين ناتجها 5.

فضاء التجربة العشوائية S هو:

$$S=\{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\} = 11\ cas$$

$$A = \{(5,5), (5,6), (6,5)\} = 3\ cas$$

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{3}{11} = \mathbf{0.272}$$

حل التمرين 07 :

نفرض أن :

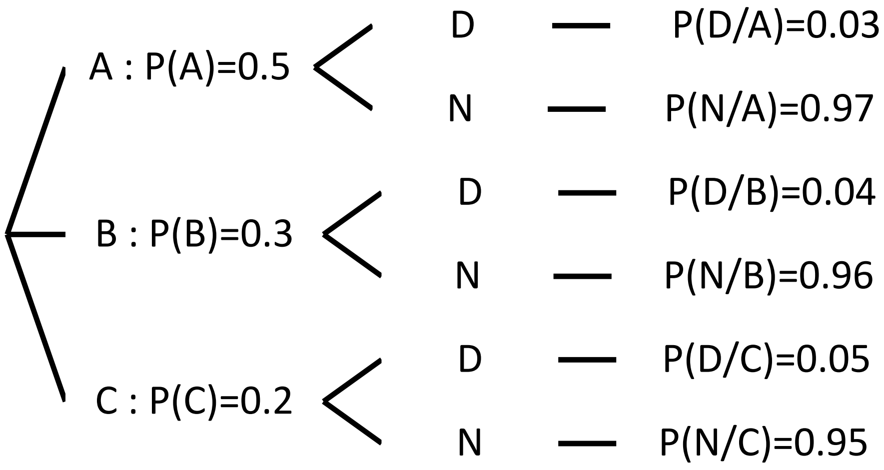
A : الحدث الذي يمثل إنتاج الآلة (A).

B : الحدث الذي يمثل إنتاج الآلة (B).

C : الحدث الذي يمثل إنتاج الآلة (C).

D : الحدث الذي يمثل اختيار قطعة فاسدة.

N : الحدث الذي يمثل اختيار قطعة صالحة.



1- حساب احتمال أن تكون القطعة المختارة فاسدة :

احتمال أن تكون قطعة فاسدة من الآلة A أو احتمال أن تكون قطعة فاسدة من الآلة B أو احتمال أن تكون قطعة فاسدة من الآلة C إذن:

$$P(D) = [0.03 * 0.5] + [0.04 * 0.3] + [0.05 * 102] = \mathbf{0.037}$$

2- سحبنا قطعة وتبين أنها فاسدة، احتمال أن تكون القطعة المختارة من الآلة A :

P(A/D)= ? **نستعمل نظرية بايز (Bayes) :**

$$P(A/D) = \frac{0.03 * 0.5}{0.037} = \mathbf{0.4054}$$

حل التمرين 08 :

نفرض أن :

M1 : الحدث الذي يمثل إنتاج الآلة (M1).

M2 : الحدث الذي يمثل إنتاج الآلة (M2).

M3 : الحدث الذي يمثل إنتاج الآلة (M3).

D : الحدث الذي يمثل القارورة المفحوصة فاسدة.

N : الحدث الذي يمثل القارورة المفحوصة صالحة.

M1: P(M1)=100/1000=0.1
- D — P(D/M1)=0.05
- N — P(N/M1)=0.95

M2: P(M2)=400/1000=0.4
- D — P(D/M2)=0.04
- N — P(N/M2)=0.96

M3: P(M3)=500/1000=0.5
- D — P(D/M3)=0.02
- N — P(N/M3)=0.98

1- حساب احتمال أن تكون القارورة المفحوصة جيدة : ? =P(N)

✓ الطريقة 1 :

احتمال أن تكون القارورة المفحوصة جيدة من الماكينة (M1) أو احتمال أن تكون القارورة المفحوصة جيدة من الماكينة (M2) أو احتمال أن تكون القارورة المفحوصة جيدة من الماكينة (M3) إذن:

$$= [0.95 * 0.1] + [0.96 * 0.4] + [0.98 * 0.5] = \mathbf{0.969}$$

✓ الطريقة 2 :

$$P(N)=1-\left[\left(P(D/M1).P(M1)\right)+\left(P(D/M2).P(M2)\right)+(P(D/M3).P(M3))\right]$$

$$P(N) = 1 - [(0.05 * 0.1) + (0.04 * 0.4) + (0.02 * 0.5)]$$

$$P(N) = 1 - 0.031 = \mathbf{0.969}$$

2- إذا كانت القارورة المفحوصة جيدة، حساب احتمال أن تكون منتجة من طرف الآلة (M2)

: ? =P(M2/N) **نستعمل نظرية بايز (Bayes)**

$$P(M2/N)=\frac{P(N/M2).P(M2)}{[P(N/M1).P(M1)]+[P(N/M2).P(M2)]+[P(N/M3).P(M3)]}$$

$$P(M2/N) = \frac{0.96 * 0.4}{0.969} = \mathbf{0.3962}$$

حل التمرين 09 :

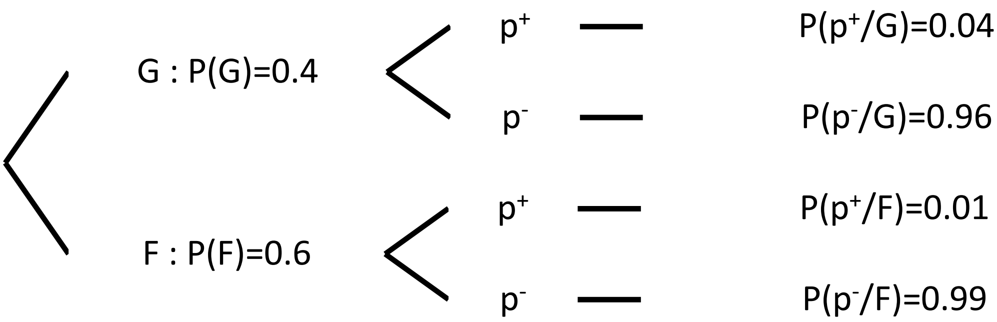
نفرض أن :

F : الحدث الذي يمثل اختيار أنثى.

G : الحدث الذي يمثل اختيار ذكر.

p^+ : الحدث الذي يمثل اختيار تلميذ تفوق قامته 1.60م.

p^- : الحدث الذي يمثل اختيار تلميذ تقل قامته 1.60م.



* اخترنا تلميذا عشوائيا فوجد أن قامته تفوق 1.60م، حساب احتمال أن يكون التلميذ أنثى:

$P(F/ p^+)= ?$ **نستعمل نظرية بايز (Bayes)**

$$P(F/p^+) = \frac{P(p^+/F).P(F)}{[P(p^+/F).P(F)] + [P(p^+/G).P(G)]}$$

$$P(F/p^+) = \frac{0.01 * 0.6}{[0.01 * 0.6] + [0.04 * 0.4]} = \mathbf{0.2727}$$

الفصل الثالث : المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي هو الذي ينتج جراء تجربة عشوائية و يمكن تعريفه أنه تطبيق قابل للقياس l_i مزود بالعناصر التالية (S ; A ; P) في مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة

2- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

أولا: المتغيرات العشوائية المنفصلة

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم منفصلة، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة ***X, Y, Z,....*** ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة، ***x, y, z, ...***، ومن أمثلة هذه المتغيرات:

1- عدد العاملين في الأسرة المكونة من 05 أشخاص ***X***، ***X:{x=0,1,2,3,4,5}*** .

2- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج ***200*** وحدة كل موسم.

3- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

خصائص المتغير المتغير العشوائي المنفصل

- **التوزيع الاحتمالي (الكثافة الإحتمالية) أو جدول التوزيع الاحتمالي :**

هو عبارة عن جدول يضم القيم التي يأخذها المتغير العشوائي و الاحتمالات المناسبة لكل قيمة من قيمه ، و له شرطان، الأول أن لا يكون هناك احتمال سالب و الثاني أن يكون مجموع الاحتمالات مساويا الى الواحد.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل ***X*** يأخذ القيم، $X:\{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$ ، وكان $P(X = x_i) = f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i ، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ***X*** ، وهو جدول مكون من سطرين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X:\{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$ ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X = x_i) = f(x_i)$ ، أي أن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل يكون بهذا الشكل :

X	x1	x2	x3	x4	.....	xn	Σ

P(X = x)	**P(X = x1)**	**P(X = x2)**	**P(X = x2)**	**P(X = x3)**	**.....**	**P(X = xn)**	**1**

و كما أشرنا سابقا فاننا نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية ولكي تكون دالة ما، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\sum_{x} f(x) = 1$

مثـــال: إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي **0.60** ، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح **0.40**، اشترى أحد العملاء عبوتين، والمطلوب:

1- فضاء العينة

2- إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.

الحــل:

1- تكوين فضاء العينة

التجربة هنا هو شراء وحدتين من عبوات التفاح، ومن ثم فراغ العينة يتكون من أربع نتائج، هي:

- التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي X

من المعلوم أن العميل اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

x=0 إذا كانت العبوتين من النوع الآخر، أى إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر)

$x=1$ إذا كان أحد العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر, أمريكي) أو (أمريكي,آخر)

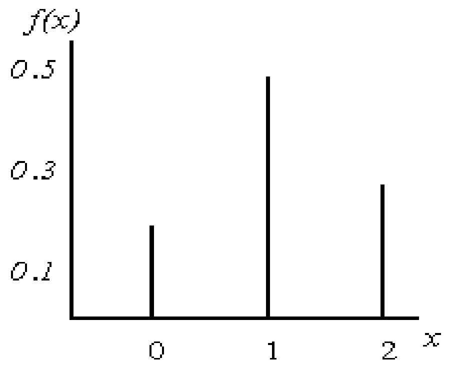
$x=2$ إذا كان العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (أمريكي , أمريكي)

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ ، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي

x_i	0	1	2	$\sum$
$f(x_i)$	0.16	0.48	0.36	1

- رسم دالة الاحتمال $f(x)$:



- **دالة التوزيع الاحتمالي F(x) للمتغيرة العشوائية المتقطعة**

تعرف دالة التوزيع - وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" – كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ كما يلي:

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{u\le x} f(u)$$

إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن F(x) يمكن تحديدها وفق المثال السابق كما يلي :

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0)=P(X\le 0)=0.16$
1	0.48	$F(1)=P(X\le 1)=0.16+0.48=0.64$
2	0.36	$F(2)=P(X\le 2)=0.64+0.36=1.00$
Σ	1	

ملاحظة:تأخذ دالة التوزيع للم ع المتقطعة شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي 1.

- **التوقع الرياضي أو الأمل الرياضي و التباين الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل**

يرمز للوسط الحسابي للمتغير العشوائي بالرمز μ أو E(x)، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$E(x)=\sum x.p(x)$$

أما التباين فيرمز له بالرمز σ^2 ، فيحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$V(x)=\sum E(x^2)-(E(x))^2$$

$$E(x^2)=\sum X^2 p(x)$$

في المثال السابق احسب ما يلي:

أ- الوسط الحسابي لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي:

ب- احسب الانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي.

الحل

أ- الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع الأمريكي:

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتم استخدام القوانين السابقة وهذا يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية:

$\sum x_i\ P(x_i)\ ,\ \sum x_i^2\ P(x_i)$ ، وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	**0.16**	**0**	**0**
1	**0.48**	**0.48**	**0.48**
2	**0.36**	**0.72**	**1.44**
Σ	**1**	**1.20**	**1.92**

إذن، الوسط الحسابي هو: **E(X) =** $\mu = \sum x_i\ f(x_i) = 1.20$

ب- لحساب الانحراف المعياري يجب أولا حساب التباين وهو:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2\ f(x_i) - \mu^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

إذا الانحراف المعياري قيمته هي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$$

و نشير الى أن أهم خصائص التوقع الرياضي تتمثل فيمايلي:

$$E(C) = C$$

$$E(CX) = CE(X)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$E(XY) = E(X)E(Y)$ إذا كانت المتغيرتان مستقلتان

- **التوزيع المشترك في المتغيرات العشوائية المنفصلة**

المتغيرة المشتركة هي متغيرة تتوقف ليس على قيمة واحدة هي قيمة X مثلا و إنما تتوقف على قيمة متغيرتين اثنتين. بحيث يكون لدينا متغيرتان عشوائيتان متقطعتان X و Y، لنرمز للاحتمال: $P(X = x,Y = y)$ ب $f(x,y)$:

$$f(x,y) = P(X = x,Y = y)$$

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

و بالتالي يكون لدينا جدول للتوزيع المشترك بالشكل التالي :

X \ Y	y_1	y_2	. . .	y_m	$f_1(x)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	. . .	$f(x_1,y_m)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	. . .	$f(x_2,y_m)$	$f_1(x_2)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	. . .	$f(x_n,y_m)$	$f_1(x_n)$
$f_2(y)$	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	. . .	$f_2(y_n)$	1

احتمال $X = x$ يحسب ويكتب كما يلي $P(X = x) = f_1(x) = \sum_{k=1}^{m} f(x,y_k)$

احتمال $Y = y$ يحسب و يكتب كما يلي $P(Y = y) = f_2(y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y)$

الدالتين $f_1(x)$ و$f_2(y)$ تسميان الدالتان الهامشيتان (الحديتان) حيث : $\sum f_1(x) = 1$ و$\sum f_2(y) = 1$

Y_j \ X_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$P(Y_j = y_j)$
y_1					α_1
y_2					α_2
$\vdots$					$\vdots$
y_m					α_m

$P(X_i = x_i)$	P_1	P_2	$\cdots$	P_n	**1**

ثانيا : المتغيرات العشوائية المتصلة

هي متغيرة ع تأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو هي تأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغيرة المستمرة تكون غير قابلة للتجزئة داخل مجال التغير مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...و بالتالي المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى ***(a,b)***، فإن:

$$\{X = x : a < x < b\}$$

للمتغير $\boldsymbol{X}$ عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى ***(a,b)***، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية العسل الذي ينتجه النحل بالكلغ في الاسبوع:

$$\{X = x : 10 < x < 40\}$$

- قامة طلبة السنة الأولى جامعي

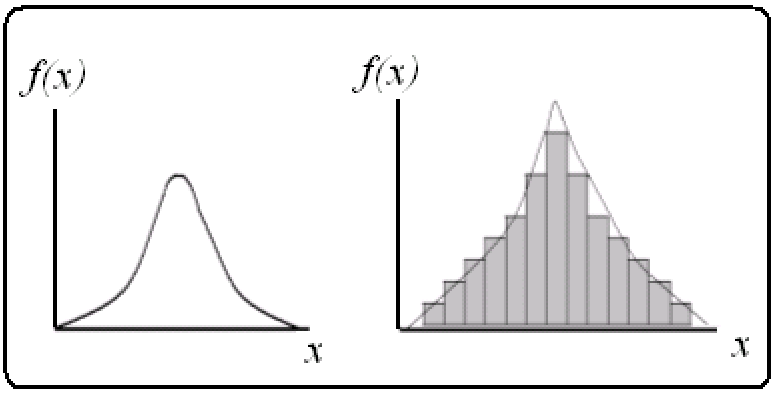
$$\{X = x : 150 < x < 180\}$$

و نشير الى أن الانتقال من متغير منفصل الى متغير متصل، لا بد من مراعاة تغيرين، الأول هو اشارة $\sum$في المنفصل ستصبح $\int$ في المتصل ، و الاحتمال يصبح عبارة عن دالة في المتصل يرمز لها ب **f(x).**

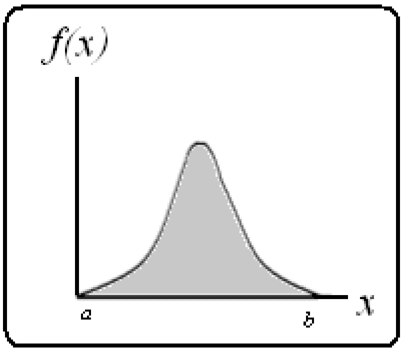
خصائص المتغير المتغير العشوائي المتصل

- **التوزيع الاحتمالي المستمر**

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة ع المستمرة والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.



والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح، وتسمى الدالة ***f(x)*** بدالة كثافة الاحتمال ، وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X = \{x : a \prec x \prec b\}$ ، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:



فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

1- الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى ***(a,b)*** أي أن:

$$x \in (a,b) \text{ ، } f(x) \succ 0$$

2- التكامل من **a** الى **b** يكون مساويا الى الواحد، لأنه يعبر عن المساحة الكلية.

و هذه الدالة انما تخضع لنفس الشروط الموجودة لدى المتغيرات العشوائية المنفصلة ، بمعنى يجب أن تكون موجبة داخل المجال ***(a,b)*** *و يسمى* بمجال الاستمرارية ، كما ان تكاملها داخل هذا المدى يجب أن يكون مساويا الى الواحد.

و في هذا المقام لا بد من الاشارة الى أن التكامل يحسب فقط داخل مجال ، اذ أن احتمال نقطة معينة لا بد

أن يكون معدوما ، و أن الاحتمال يحسب عن طريق تكامل بين نقطتين ، مداهما ينتمي الى مدى الاستمرارية ***(a,b)***.

- **دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المستمرة**

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة المستمرة كما يلي:

لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغيرة المستمرة. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغيرة المستمرة، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث $b > a$. لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b[: $F(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right)$

حيث أن المتغير t هو المتغير x و أن التكامل يكون بالمجال .

- **التوقع الرياضي و التباين الرياضي**

يحسب التوقع الرياضي بالنسبة للمتغيرات العشوائية المتصلة وفق العلاقة التالية :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_X.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$V(X) = E(x^2) - (E(x))^2$$

لكل من التوقع و التباين 4 خصائص أساسية تتمثل فيما يلي:

E (C) = C توقع عدد ثابت	V(C) = 0
E(CX) = CE(X)	$V(CX) = C^2V(X)$
E(X+Y) = E(X) + E(Y)	في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما V(X + Y) = V(X) + V(Y) , V(X - Y) = V(X) + V(Y)

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$	في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما. $E(XY) = E(X)E(Y)$

التوزيع المشترك للمتغيرات العشوائية المتصلة

لتكن لدينا X وYمتغيرتان ع متصلتان، نعرف دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهما كما يلي:

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y)$$

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

- **الكثافة الهامشية**

الدالتان الهامشيتان (الحديتان) للكثافة الاحتمالية للثنائية (X, Y) فيعبر عنها كما يلي:

$$f_1(x) = \int_{v=-\infty}^{+\infty} f(x, v)\, dv , \qquad f_2(y) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, du$$

- **الكثافة الشرطية**

في حالة X، Y متغيرتان عشوائيتان متقطعتان، فإن دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية ل $(X|Y = y)$ تكتب كما يلي $f(x/y)$ وتحسب كما يلي:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

و هذا استنادا إلى القانون التقليدي للاحتمالات الشرطية:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

التوزيع الاحتمالي ل X حيث $Y = y$ هو مجموعة قيم المتغيرة X عند تثبيت Y والاحتمالات $f(x/y)$ المقابلة لها.

- **تعريف استقلال متغيرتين**

رأينا في الفصل الأول أن حدثين عشوائيين A وB يكونان مستقلان إذا كان:

$$P(A \text{ et } B) = P(A)\, P(B)$$

انطلاقا من هذه القاعدة، تكون المتغيرتان العشوائيتان المتقطعتان X وY مستقلتان إذا وفقط إذا كان:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y)$$

$$f(x, y) = f_1(x)\,f_2(y)$$

في حالة كون المتغيرتين متصلتين نكتب: $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)\,P(Y \le y)$

$$F(x, y) = F_1(x)\,F_2(y)$$

أي أن المتغيرتان المستقلتان هما اللتان يمكن كتابة دالة التوزيع المشتركة لهما (أو دالة الكثافة المشتركة) في شكل جداء دالتين هامشيتين تراكميتين (أو دالتين هامشيتين للكثافة).

- **توقع المشترك و التباين المشترك**

$$\mu_x = E(X) = \sum_x\sum_y x\, f(x, y) \quad , \quad \mu_y = E(Y) = \sum_x\sum_y y\, f(x, y)$$

$$\sigma^2_x = E[(x - \mu_x)^2] = \sum_x\sum_y (x - \mu_x)^2 f(x, y) \ , \ \sigma^2_y = E[(y - \mu_y)^2] = \sum_x\sum_y (y - \mu_y)^2 f(x, y)$$

في حالة X و Y متغيرتان مستمرتان:

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x, y)\, dx\, dy \ , \ \mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)\, dx\, dy .$$

$$\sigma^2_x = E[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x, y)\, dx\, dy ,$$

$$\sigma^2_y = E[(y - \mu_y)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y)^2 f(x, y)\, dx\, dy$$

أما التباين المشترك فيعرف كما يلي:

$$Cov(X, Y) = \sigma_{xy} = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

في حالة X و Yمتغيرتان متقطعتان:

$$\sigma_{xy} = \sum_x\sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y)$$

في حالة X و Yمتغيرتان مستمرتان:

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

- **معامل الارتباط**

لقياس الارتباط بين المتغيرتين، وتسمى معامل الارتباط. $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

في حالة r معدوم نقول أن **المتغيرتان غير مرتبطتين،** من غير أن نجزم أنهما مستقلتان، و معامل الارتباط يقدم لنا معنيين :

- اشارته تدل على نوع الارتباط حيث اذا كان سالب فهذا يدل على ان الارتباط عكسي ، واذا كان موجب فهذا يدل على ان الارتباط طردي.

-قربه من الواحد أو بعده عنه يدل على قوة أو ضعف الارتباط ، حيث كلما كانت قريبة من الواحد فان الارتباط قوي و كلما اقترب من الصفر ، دل ذلك أن الارتباط ضعيف.

ثالثا : تمارين تطبيقية في المتغيرات العشوائية المتصلة و المنفصلة

- **المتغيرات العشوائية المنفصلة**

التمرين 01

ليكن لدينا (4) قارورات من الماء العادي و (3) قارورات من الماء المعطر. اخترنا قارورتين عشوائيا.

1- أذكر فضاء العينة لهذه التجربة ؟
2- نفرض أن x متغير عشوائي والذي يمثل عدد القارورات من الماء العادي المختارة. أوجد جدول التوزيع الاحتمالي ل x ؟
3- أحسب احتمال أن نكون قد اخترنا قارورة ماء عادي على الأقل؟
4- أوجد دالة التوزيع $F(x)$ ومثلها بيانيا؟

التمرين 02

اخترنا عشوائيا ثلاثة أشخاص من مجموعة مكونة من (3) رجال و(4) نساء.

X_i متغير عشوائي يدل على عدد النساء في المجموعة المختارة.

1- أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X_i ؟
2- أحسب دالة التوزيع $F(x)$ ؟
3- أحسب الانحراف المعياري للمتغير X_i ؟

التمرين 03

مجموعة مكونة من (6) طلاب من بينهم اثنان من كلية طب الأسنان، اخترنا اثنين من المجموعة عشوائيا.

نفرض أن X_i متغير عشوائي يمثل عدد طلاب كلية طب الأسنان في المجموعة المختارة.

* أحسب الانحراف المعياري للمتغير X_i ؟

التمرين 04

X_i متغير عشوائي منفصل يأخذ الأعداد الصحيحة بحيث :

$$-2 \leq X \leq 2$$

حسب القانون الاحتمالي :

$$f(x) = \frac{1}{K}$$

1- حدد قيمة الثابت K ؟
2- أحسب تباين ؟

ليكن

$$Y_i = |X_i|.$$

3- ما هو القانون الاحتمالي ل Y_i ؟
4- أحسب الانحراف المعياري ل Y_i ؟

التمرين 05:

ليكن التوزيع الاحتمالي المشترك ل X_i و Y_j كما يلي:

Y_j \ X_i	**-2**	**-1**	**4**	**5**
1	0.1	0.2	0	0.3
2	0.2	0.1	0.1	0

1- هل X_i و Y_j متغيران مستقلان عشوائيا ؟
2- هل X_i و Y_j متغيران مستقلان في التباين ؟
3- أحسب معامل الارتباط إن كان موجود بين X_i و Y_j ؟ ماذا تستنتج ؟
4- أحسب

$$P(x = 1/y = y_j) = ? \text{ ؛ } P(y = -1/x = x_i) = ?$$

التمرين 06:

لدينا X_i و Y_j متغيران مستقلان عشوائيا، ولديهم جدول التوزيع الاحتمالي المشترك التالي:

X_i \ Y_j	**-1**	**0**	**2**	**Total**
-3	؟	؟	؟	0.2
-1	؟	0.09	؟	؟
2	؟	؟	0.23	؟
Total	؟	0.3	؟	؟

1- هل X_i و Y_j هما متغيران مستقلان في التباين ؟
2- أحسب معامل الارتباط إن أمكن ذلك ؟ ماذا تستنتج ؟

التمرين 07 :

قام طالبان من كلية العلوم الاقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية بعد حصولهما على شهادة الليسانس بانشاء مؤسسة صغيرة، بعد سنة أصبح عدد العمال في هذه المؤسسة 10 أشخاص : 02 مديرين، 03 إداريين، و 05 تقنيين.

إهتم مفتش العمل بهذه المؤسسة فأجرى مقابلة مع 03 أشخاص من هذه المؤسسة كانوا قد أختيروا عشوائيا:

ليكن X_i متغير عشوائي يمثل عدد المدراء و Y_j متغير عشوائي يمثل عدد التقنيين من بين الأشخاص المختارين.

1- حدد جدول التوزيع الاحتمالي لكل من X_i و Y_j ؟
2- ليكن في علمك أن X_i و Y_j غير مستقلين عشوائيا : ماهو التوزيع الاحتمالي المشترك بينهما؟
3- هل X_i و Y_j متغيران مستقلان في التباين ؟

التمرين 08 :

ليكن X_i و Y_j متغيران عشوائيان، حيث أن X_i يأخذ القيم 0 و 2 بنفس الاحتمال و Y_jيأخذ القيم 0 و 1 بالاحتمالات 1/3 و 2/3 على التوالي:

إذا علمت أن : $P(x = 0et y = 0) = p$

1- إذا كان X_i و Y_j متغيران غير مستقلان عشوائيا، أكتب جدول التوزيع الاحتمالي المشترك بينهما ؟

2- حدد قيمة p حتى يكون فيها المتغيران مستقلان عشوائيا.

3- حدد قيمة p حتى يكون فيها المتغيران مستقلان في التباين.

الحلول :

حل التمرين 01 :

نفرض أن :

N : قارورة ماء عادي

D : قارورة ماء معطر

4 قارورات ماء عادي (N)

اخترنا قارورتين من الماء

3 قارورات ماء معطر (D)

1- فضاء العينة لهذه التجربة :

$$S = \{NN, ND, DN, DD\}$$

2- X_i متغير عشوائي يمثل عدد القارورات من الماء العادي المختارة.

S	NN	ND	DN	DD
X_i	2	1	1	0

$$X_i = \{0,1,2\}$$

جدول التوزيع الاحتمالي ل X_i :

$$X_i = 0 \Rightarrow P(X = 0) = \frac{C_4^0 * C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

$$X_i = 1 \Rightarrow P(X = 1) = \frac{C_4^1 * C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21}$$

$$X_i = 2 \Rightarrow P(X = 2) = \frac{C_4^2 * C_3^0}{C_7^2} = \frac{6}{21}$$

$$\mathrm{C_n^r} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{r!\,(n-r)!}}$$

$$\mathrm{C_7^2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7 * 6 * 5!}{2!\,5!} = 21$$

X_i	0	1	2	Total
$P(X_i)$	3/21	12/21	6/21	1

3- احتمال أن نكون قد اخترنا قارورة ماء عادي على الأقل : ? $P(X\geq1)$

✓ الطريقة 1 :

$$\mathrm{P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{12}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21} = \mathbf{0.86}$$

✓ الطريقة 2 :

$$\mathrm{P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1} - \frac{3}{21} = \frac{18}{21} = \mathbf{0.86}$$

4- دالة التوزيع $F(x)$:

$$\mathrm{F(X) = P(X < X_i)}$$

$$\mathrm{Si\ X < 0} \Rightarrow F(\mathrm{X_1}) = \mathrm{P(X < 0)} = \mathbf{0}$$

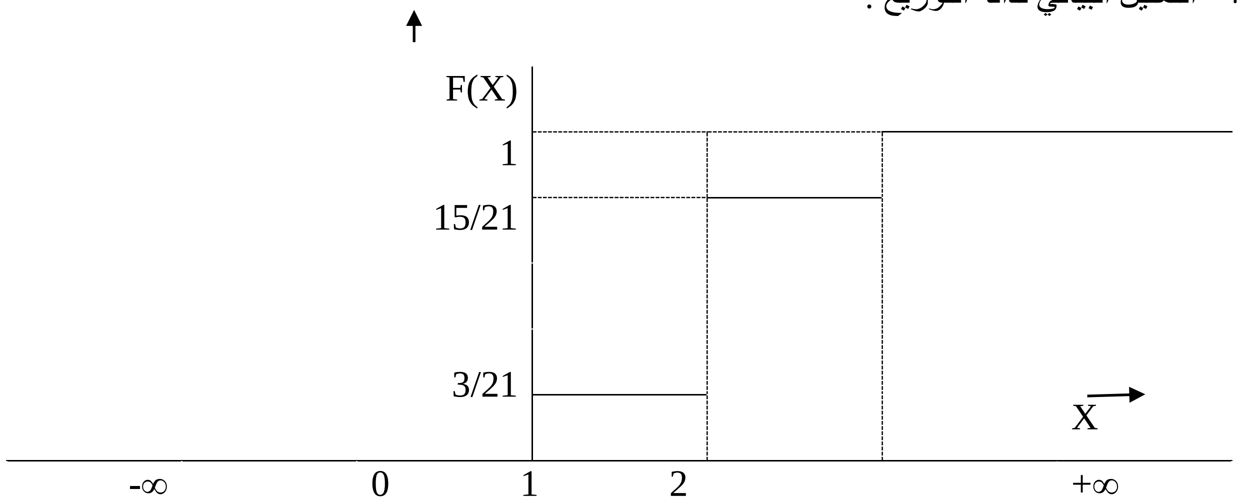
$$\mathrm{Si\ X < 1} \Rightarrow F(\mathrm{X_2}) = \mathrm{P(X < 1) = P(X = 0)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{21}}$$

$$\mathrm{Si\ X < 2} \Rightarrow F(\mathrm{X_3}) = \mathrm{P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{21}}$$

$$\mathrm{Si\ X \geq 2 \Rightarrow F(X_4) = P(X \geq 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=}\mathbf{1}$$

$$\mathbf{F(X)} = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \frac{3}{21} & \text{si } X < 1 \\ \frac{15}{21} & \text{si } X < 2 \\ 1 & \text{si } X \geq 2 \end{cases}$$

* التمثيل البياني لدالة التوزيع :



حل التمرين 02 :

اختـرنـا ثلاثـة أشخـاص من مجمـوعـة مكـونـة من 3 رجال و 4 نساء

X_i: متغير عشوائي منفصل يمثل عدد النساء في المجموعة المختارة:

$$X_i = \{0,1,2,3\}$$

1- جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X_i :

$$X_i = 0 \Rightarrow P(X = 0) = \frac{C_4^0 * C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$$

$$X_i = 1 \Rightarrow P(X = 1) = \frac{C_4^1 * C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

$$X_i = 2 \Rightarrow P(X = 2) = \frac{C_4^2 * C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

$$X_i = 3 \Rightarrow P(X = 3) = \frac{C_4^3 * C_3^0}{CS_7^3} = \frac{4}{35}$$

$\mathbf{X_i}$	0	1	2	3	Total
P($\mathbf{X_i}$)	1/35	12/35	18/35	4/35	1

2- دالة التوزيع F(x) : $F(X) = P(X < X_i)$

$$\text{Si } X < 0 \Rightarrow F(X_1) = P(X < 0) = \mathbf{0}$$

$$\text{Si } X < 1 \Rightarrow F(X_2) = P(X < 1) = P(X = 0) = \mathbf{\frac{1}{35}}$$

$$\text{Si } X < 2 \Rightarrow F(X_3) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1 + 12}{35} = \mathbf{\frac{13}{35}}$$

$$\text{Si } X < 3 \Rightarrow F(X_4) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1 + 12 + 18}{35}$$

$$= \mathbf{\frac{31}{35}}$$

$$\text{Si } X \geq 3 \Rightarrow F(X_5) = P(X \geq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \mathbf{1}$$

$$\mathbf{F(X)} = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \frac{1}{35} & \text{si } X < 1 \\ \frac{13}{35} & \text{si } X < 2 \\ \frac{31}{35} & \text{si } X < 3 \\ 1 & \text{si } X \geq 3 \end{cases}$$

3- حساب الانحراف المعياري للمتغير δ_{X_i} :

أ/ حساب التوقع الرياضي ل X_i :

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i . P(X_i)$$

$$E(X_i) = \left(0 * \frac{1}{35}\right) + \left(1 * \frac{12}{35}\right) + \left(2 * \frac{18}{35}\right) + \left(3 * \frac{4}{35}\right) = \frac{50}{35} = \mathbf{1.71}$$

ب/ حساب التباين ل X_i :

$$V(X_i) = E(x^2) - [E(X)]^2$$

$$E\left({X_i}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 . P(X_i)$$

$$E(X^2) = \left(0^2 * \frac{1}{35}\right) + \left(1^2 * \frac{12}{35}\right) + \left(2^2 * \frac{18}{35}\right) + \left(3^2 * \frac{4}{35}\right) = \frac{120}{35} = 3.42$$

$$V(X_i) = 3.42 - (1.71)^2 = \mathbf{0.5}$$

ج/ الانحراف المعياريل X_i :

$$\delta_{X_i} = \sqrt{V(X_i)} = \sqrt{0.5} = \mathbf{0.70}$$

حل التمرين 03 :

اخترنا اثنين من مجموعة مكونة من 6 طلاب

32 طلاب من كلية طب الأسنان

4 طلاب من كلية أخرى

X_i : متغير عشوائي منفصل يمثل عدد طلاب من كلية طب الأسنان.

$$X_i = \{0,1,2\}$$

* جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X_i :

$$X_i = 0 \Rightarrow P(X = 0) = \frac{C_4^2 * C_2^0}{C_6^2} = \frac{6}{15}$$

$$X_i = 1 \Rightarrow P(X = 1) = \frac{C_4^1 * C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$$

$$X_i = 2 \Rightarrow P(X = 2) = \frac{C_4^0 * C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

$\mathbf{X_i}$	0	1	2	Total
P($\mathbf{X_i}$)	6/15	8/15	1/15	1

* حساب التوقع الرياضي ل X_i :

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i . P(X_i)$$

$$E(X_i) = \left(0 * \frac{6}{15}\right) + \left(1 * \frac{8}{15}\right) + \left(2 * \frac{1}{15}\right) = \frac{10}{15} = \mathbf{0.66}$$

* حساب التباين ل X_i :

$$V(X_i) = E(x^2) - [E(X)]^2$$

$$E\left({X_i}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 . P(X_i)$$

$$E(X^2) = \left(0^2 * \frac{6}{15}\right) + \left(1^2 * \frac{8}{15}\right) + \left(2^2 * \frac{1}{15}\right) = \frac{12}{15} = 0.8$$

$$V(X_i) = 0.8 - (0.66)^2 = \mathbf{0.36}$$

ج/ الانحراف المعياريل X_i :

$$\delta_{X_i} = \sqrt{V(X_i)} = \sqrt{0.5} = \mathbf{0.6}$$

حل التمرين 04 :

X_i متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $-2 \leq X \leq 2$ حسب القانون الاحتمالي : $f(x) = \frac{1}{K}$ إذن جدول التوزيع الاحتمالي ل X_i هو:

$\mathbf{X_i}$	-2	-1	0	1	2	Total
$\mathbf{P(X_i)}$	1/K	1/K	1/K	1/K	1/K	1

1- تحديد قيمة K :

$$\sum_{i=1}^{n} P(X_i) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = 1$$

$$\frac{5}{K} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{K = 5}$$

$\mathbf{X_i}$	-2	-1	0	1	2	Total
$\mathbf{P(X_i)}$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1

2- حساب التوقع الرياضي ل X_i :

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i . P(X_i)$$

$$E(X_i) = \left(-2 * \frac{1}{5}\right) + \left(-1 * \frac{1}{5}\right) + 0 + \left(1 * \frac{1}{5}\right) + \left(2 * \frac{1}{5}\right) = \mathbf{0}$$

* حساب التباين ل X_i :

$$V(X_i) = E(x^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X_i{}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 . P(X_i) = \left((-2)^2 * \frac{1}{5}\right) + \left((-1)^2 * \frac{1}{5}\right) + 0 + \left(1^2 * \frac{1}{5}\right) + \left(2^2 * \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{10}{5} = 2$$

$$V(X_i) = 2 - 0 = \mathbf{2}$$

3- القانون الاحتمالي ل Y_i حيث $Y_i = |X_i|$:

$$Y = |X_i| = \{0,1,2\}$$

$$Y = 0 \Rightarrow P(Y = 0) = P(|X| = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{5}$$

$$Y = 1 \Rightarrow P(Y = 1) = P(|X| = 1) = P(X = -1 \text{ou } X = 1) = P(X = -1) + P(X = 1)$$
$$= 2/5$$

$$Y = 2 \Rightarrow P(Y = 2) = P(|X| = 2) = P(X = -2 \text{ou } X = 2) = P(X = -2) + P(X = 2)$$
$$= 2/5$$

$\mathbf{Y_i}$	0	1	2	Total
$\mathbf{P(Y_i)}$	1/5	2/5	5/5	1

4- حساب التوقع الرياضي ل Y_i :

$$E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} Y_i . P(Y_i)$$

$$E(Y_i) = \left(0 * \frac{1}{5}\right) + \left(1 * \frac{2}{5}\right) + \left(2 * \frac{2}{5}\right) = \frac{6}{5} = \mathbf{1.2}$$

* حساب التباين ل X_i :

$$V(Y_i) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{n} Y_i{}^2 . P(Y_i)$$

$$E(Y^2) = \left(1^2 * \frac{2}{5}\right) + \left(2^2 * \frac{2}{5}\right) = \frac{10}{5} = 2$$

$$V(Y) = 2 - (1.2)^2 = 2 - 1.44 = \mathbf{0.56}$$

* حساب الانحراف المعياريل X_i :

$$\delta_{X_i} = \sqrt{V(X_i)} = \sqrt{0.56} = \mathbf{0.74}$$

- **المتغيرات العشوائية المتصلة**

التمرين 01

نفرض أن x متغير عشوائي متصل لديه التوزيع الاحتمالي التالي :

$$f(x) = \begin{cases} kx & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1- حدد قيمة الثابت k ؟
2- أحسب دالة التوزيع F(x) ومثلها بيانيا ؟
3- أحسب الاحتمال : $P(1 \leq x \leq 1.5)$ ؟
4- أحسب: E(x) ، V(x) ؟

التمرين 02

ليكن x متغير عشوائي معرف بدالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1- أحسب دالة التوزيع F(x) ومثلها بيانيا ؟
2- أحسب الاحتمال : $P(1 \leq x \leq 2)$ ؟
3- أحسب الانحراف المعياري ل x_i ؟

التمرين 03

x متغير عشوائي يأخذ قيمة في المجال [-1,+1] بقانون احتمالي :

$f(x) = k(1 - x^2)$ حيث k ثابت.

1- أحسب الاحتمال : $P(x \leq 0)$ ؟

2- أحسب : E(x) ، V(x) ؟

التمرين 04

ليكن لدينا القانون الثنائي ل (x,y) والمعرف كالتالي:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & si\ x,y \in [0,1]^2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1- أحسب : $f_{x/y}(x)$ ، $f_{y/x}(y)$ ؟

2- هل x و y متغيران مستقلان عشوائيا ؟

3- هل x و y متغيران مستقلان في التباين ؟

حل التمرين 01

x متغير عشوائي متصل له دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} kx & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1- تحديد قيمة k :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx = 1} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} kxdx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{2} kxdx = 1$$

$$k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow k\left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 1$$

$$2k = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2- حساب دالة التوزيع F(x) : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$si\ x < 0 \Rightarrow F(x_1) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = \mathbf{0}$$

$$si\ x < 2 \Rightarrow F(x_2) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{4} - 0$$

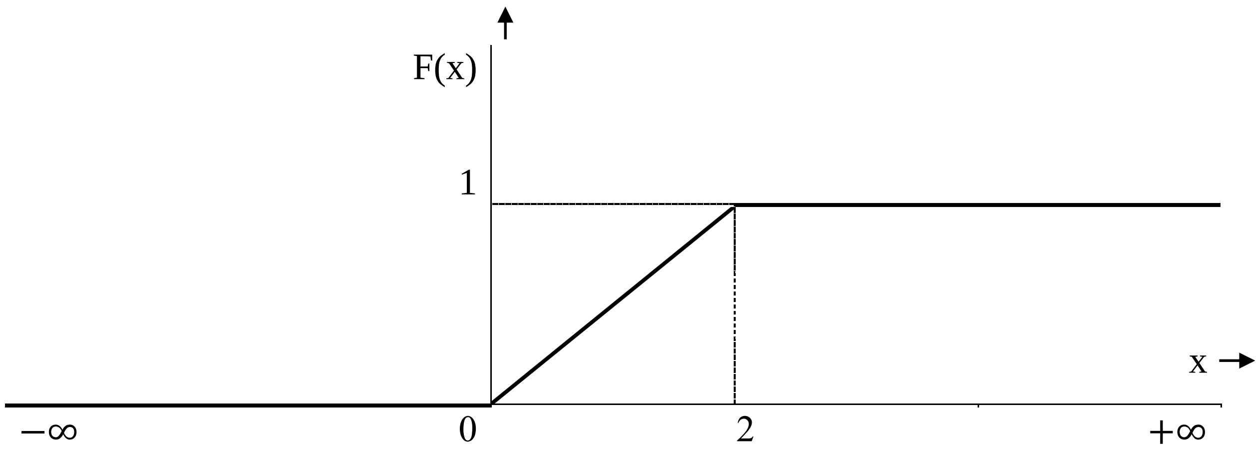
$$= \boldsymbol{\frac{x^2}{4}}$$

$$si\ x \geq 2 \Rightarrow F(x_3) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} f(t)dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{2} \frac{t}{2}dt + 0 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2^2}{4} - 0 = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

* التمثيل البياني لدالة التوزيع :



3- حساب الاحتمال $P(1 \leq x \leq 1.5)$:

$$P(1 \le x \le 1.5) = \int_{1}^{1.5} f(x)dx = \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{1.5} = \frac{1}{2}\left[\frac{1.5^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] = \mathbf{0.3125}$$

4- حساب E(x) و V(x) :

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{2} xf(x)dx + \int_{2}^{+\infty} xf(x)dx = 0 + \int_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx + 0 = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2^3}{3} - 0\right] = \frac{4}{3} = \mathbf{1.33}$$

$$\mathrm{V(x)} = \mathrm{E(x^2)} - [\mathrm{E(x)}]^2$$

$$E(\mathrm{x}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2f(x)dx + \int_{0}^{2} x^2f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x^2f(x)dx$$

$$E(\mathrm{x}^2) = 0 + \int_{0}^{2} x^2f(x)dx + 0 = \int_{0}^{2} x^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2^4}{4} - 0\right] = 2$$

$$\mathrm{V(x_i)} = 2 - (1.33)^2 = \mathbf{0.23}$$

حل التمرين 02

x متغير عشوائي لديه دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & si\ 0 \le x \le 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

* تحديد قيمة k :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx = 1} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$0+\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{6}x+k\right)dx+0=1 \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{12}+kx\right]_0^3=1$$

$$\left[\frac{3^2}{12}+3k\right]-\left[\frac{0^2}{12}+0\right]=1 \Leftrightarrow \frac{9}{12}+3k=1$$

$$3k=1-\frac{9}{12}=\frac{3}{12} \Leftrightarrow \boldsymbol{k}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\frac{1}{6}x+\frac{1}{12} & si\ 0\le x\le 3\\ 0 & sinon\end{cases}$$

1- حساب دالة التوزيع F(x) : $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

$$si\ x<0 \Rightarrow F(x_1)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=\mathbf{0}$$

$$si\ x<3 \Rightarrow F(x_2)=\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt=0+\int_{0}^{x}\left(\frac{t}{6}+\frac{1}{12}\right)dt=\left[\frac{t^2}{12}+\frac{t}{12}\right]_0^x$$

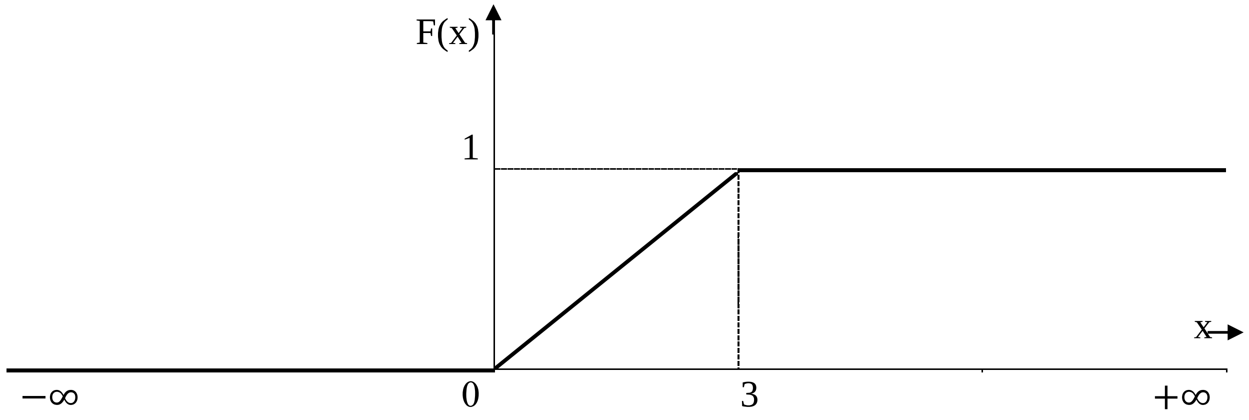
$$=\left[\frac{x^2}{12}+\frac{x}{12}\right]-0=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}}{\mathbf{12}}$$

$$si\ x\ge 3 \Rightarrow F(x_3)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{3}f(t)dt+\int_{3}^{x}f(t)dt$$

$$=0+\int_{0}^{3}\left(\frac{t}{6}+\frac{1}{12}\right)dt+0=\left[\frac{t^2}{12}+\frac{t}{12}\right]_0^2=\left[\frac{3^2}{12}+\frac{3}{12}\right]-0=\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ \frac{x^2+x}{12} & si\ x<3\\ 1 & si\ x\ge 3\end{cases}$$

* التمثيل البياني لدالة التوزيع :



2- حساب الاحتمال $P(1 \leq x \leq 2)$:

$$P(1 \leq x \leq 2) = \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{12}\right) dx = \left[\frac{x^2}{12} + \frac{x}{12}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2^2}{12} + \frac{2}{12}\right] - \left[\frac{1^2}{12} + \frac{1}{12}\right] = \frac{1}{3} = \mathbf{0.33}$$

3- حساب الانحراف المعياري ل x_i : δ_{X_i}

$$\delta_{X_i} = \sqrt{V(X_i)} = \sqrt{E(x^2) - [E(X)]^2}$$

* حساب التوقع الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{3} xf(x)dx + \int_{3}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{3} x\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{12}\right) dx + 0 = \int_{0}^{3} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{12}\right) dx = \left[\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{24}\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{3^3}{18} + \frac{3^2}{24}\right] - 0 = \frac{15}{8} = \mathbf{1.875}$$

* حساب $V(x)$:

$$V(X_i) = E(x^2) - [E(X)]^2$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^3 x^2\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{12}\right)dx = \int_0^3 \left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{12}\right)dx = \left[\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{36}\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{3^4}{24}+\frac{3^3}{36}\right] - 0 = \frac{33}{8} = 4.125$$

$$V(x_i) = 4.125 - (1.875)^2 = \mathbf{0.609}$$

$$\delta_{X_i} = \sqrt{V(X_i)} = \sqrt{0.609} = \mathbf{0.78}$$

حل التمرين 03 :

x متغير عشوائي متصل لديه دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} K(1-x^2) & si -1 \le x \le +1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

* تحديد قيمة الثابت k :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx = 1} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{+1} f(x)dx + \int_{+1}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$0 + k\int_{-1}^{+1}(1-x^2)dx + 0 = 1 \Leftrightarrow k\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = 1$$

$$k\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = 1 \Leftrightarrow k\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right] = 1$$

$$\frac{4}{3}k = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k = \frac{3}{4}}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & si -1 \le x \le +1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1- حساب الاحتمال $P(x \leq 0)$:

$$P(x \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx = 0 + \int_{-1}^{0} \frac{3}{4}(1 - x^2)dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4}\left[0 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{3}{4} - \frac{3}{12} = \frac{2}{4} = \mathbf{0.5}$$

2- حساب $\mathrm{E(x)}$:

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} xf(x)dx + \int_{-1}^{+1} xf(x)dx + \int_{+1}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1} (x - x^3)dx + 0 = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \mathbf{0}$$

* حساب $\mathrm{V(x)}$:

$$\mathrm{V}(x) = \mathrm{E(x^2)} - [\mathrm{E(x)}]^2$$

$$E(\mathrm{x}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1} (x^2 - x^4)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right] = \frac{3}{4}\left[\frac{10 - 6}{15}\right] = \frac{3}{4}.\frac{4}{15} = \frac{1}{5}$$

$$= 0.2$$

$$\mathrm{V(x_i)} = 0.2 - (0)^2 = \mathbf{0}$$

حل التمرين 04 :

لدينا القانون الثنائي ل (x,y) والمعرف كالتالي:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & si\ x, y \in [0,1]^2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1- حساب $f_{x/y}(x)$ ، $f_{y/x}(y)$:

$$\boldsymbol{f_{x/y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)}}$$

$$f_y(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 4xydx = 4y\int_0^1 xdx = 4y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 4y\left[\frac{1}{2} - 0\right] = 2y$$

$$f_{x/y}(x) = \frac{4xy}{2y} = \boldsymbol{2x}$$

$$\boldsymbol{f_{y/x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}}$$

$$f_x(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 4xydy = 4x\int_0^1 ydy = 4x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 4x\left[\frac{1}{2} - 0\right] = 2x$$

$$f_{y/x}(y) = \frac{4xy}{2x} = \boldsymbol{2y}$$

2- هل x و y متغيران مستقلان عشوائيا :

يكون x و y مستقلان عشوائيا إذا كان :

$$\boldsymbol{f(x,y) = f_x(x).f_y(y)}$$

$$\begin{cases} f(x,y) = 4xy \\ f_x(x).f_y(y) = 2x.2y = 4xy \end{cases}$$

إذن **x و y مستقلان عشوائيا** .

3- هل x و y متغيران مستقلان في التباين :

يكون متغيران مستقلان في التباين إذا كان :

$$\mathbf{Cov(x;y) = 0}$$

$$\mathrm{Cov(x;y) = E(x;y) - [E(x).E(y)]}$$

$$* \quad E(x) = \int_0^1 x f_x(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - 0\right] = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$* \quad E(y) = \int_0^1 y f_y(y)dy = \int_0^1 2y^2 dy = 2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - 0\right] = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$* \quad E(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 x.yf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 x.y4xydxdy = \int_0^1 \int_0^1 4x^2y^2dxdy$$

$$= \int_0^1 4y^2 \int_0^1 x^2dxdy = \int_0^1 4y^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy = \int_0^1 4y^2 \left[\frac{1}{3} - 0\right] dy$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{3}y^2dy = \frac{4}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{3} - 0\right] = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

$$Cov(x,y) = \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} * \frac{2}{3}\right) = \mathbf{0}$$

إذن **x و y متغيران مستقلان في التباين.**

التمرين 05 :

ليكن التوزيع الاحتمالي المشترك ل و كما يلي:

Y_j X_i	**-2**	**-1**	**4**	**5**	**$P(X=x_i)$**
1	0.1	0.2	0	0.3	0.6
2	0.2	0.1	0.1	0	0.4
$P(Y=y_j)$	0.3	0.3	0.1	0.3	**1**

-1 هل X_i و Y_j متغيران مستقلان عشوائيا :

يكون X و Y متغيران مستقلان عشوائيا إذا كان:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{X} = \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}} \cap \boldsymbol{Y} = \mathbf{y}_{\boldsymbol{j}}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{X} = \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}) * \mathbf{P}(\boldsymbol{Y} = \mathbf{y}_{\boldsymbol{j}})$$

$$\begin{cases} P(X = 1 \cap Y = -2) = 0.1 \end{cases}$$

$$P(X = 1) * P(Y = -2) = 0.6 * 0.3 = 0.18$$

بما أن $P(X = 1 \cap Y = -2) \neq P(X = 1) * P(Y = -2)$:

إذن **X و Y متغيران غير مستقلان عشوائيا.**

2- هل X_i و Y_j متغيران مستقلان في التباين :

يكون X و Y متغيران مستقلان في التباين إذا كان :

$$\mathbf{Cov(x; y) = 0}$$

$$\mathrm{Cov(x; y) = E(x; y) - [E(x). E(y)]}$$

$$\mathrm{E(x; y)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \,. P(x = x_i; y = y_j)$$

$$\mathrm{E(x; y)} = (1 * -2 * 0.1) + (1 * -1 * 0.2) + 0 + (1 * 5 * 0.3) + (2 * -2 * 0.2) + (2 * -1 * 0.1) + (2 * 4 * 0.1) + 0 = \mathbf{0.9}$$

$$\mathrm{E(x)} = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(x = x_i)$$

$$E(x) = (1 * 0.6) + (2 * 0.4) = \mathbf{1.4}$$

$$E(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j . P(y = y_j)$$

$$E(y) = (-2 * 0.3) + (-1 * 0.3) + (4 * 0.1) + (5 * 0.3) = \mathbf{1}$$

$$Cov(x; y) = 0.9 - (1 * 1.4) = \mathbf{-0.5} \neq 0$$

إذن **X و Y غير مستقلان في التباين.**

3- حساب معامل الارتباط بين X و Y : (r)

$$\boldsymbol{r = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{V(x). V(y)}}}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(x = x_i)$$

$$E(x^2) = (1^2 * 0.6) + (2^2 * 0.4) = 2.2$$

$$V(x_i) = 2.2 - (1.4)^2 = \mathbf{0.24}$$

$$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$$

$$E(y^2) = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 . P(y = y_j)$$

$$E(y^2) = ((-2)^2 * 0.3) + ((-1)^2 * 0.3) + (4^2 * 0.1) + (5^2 * 0.3) = 10.6$$

$$V(y_j) = 10.6 - (1)^2 = \mathbf{9.6}$$

$$r = \frac{-0.5}{\sqrt{(0.24).(9.6)}} = \mathbf{-0.3294}$$

الاستنتاج :

نستنتج أن هناك **علاقة عكسية ضعيفة** بين X و Y .

5- حساب: $P(x = 1/y = y_j) = ?$ ؛ $P(y = -1/x = x_i) = ?$

$\mathbf{P(x=1/y=y_j)=\frac{P(x=1;y=y_j)}{P(y=y_j)}}$	$\mathbf{P(y=-1/x=x_i)=\frac{P(y=1;x=x_i)}{P(x=x_i)}}$
$P(x=1/y=-2)=\frac{P(x=1;y=-2)}{P(y=-2)} = \frac{0.1}{0.3} = \mathbf{\frac{1}{3}}$	$P(y=-1/x=1)=\frac{P(y=-1;x=1)}{P(x=1)} = \frac{0.2}{0.6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

$P(x=1/y=-1)=\frac{P(x=1;y=-1)}{P(y=-1)}=\frac{0.2}{0.3}$ $=\mathbf{\frac{2}{3}}$ $P(x=1/y=4)=\frac{P(x=1;y=4)}{P(y=4)}=\frac{0}{0.1}=\mathbf{0}$ $P(x=1/y=5)=\frac{P(x=1;y=5)}{P(y=5)}=\frac{0.3}{0.3}=\mathbf{1}$	$P(y=-1/x=2)=\frac{P(y=-1;x=2)}{P(x=2)}=\frac{0.1}{0.4}$ $=\mathbf{\frac{1}{4}}$

التمرين 06 :

X و Y متغيران مستقلان عشوائيا، ولديهم جدول التوزيع الاحتمالي المشترك التالي:

X_i \ Y_j	**-1**	**0**	**2**	**$P(y=y_j)$**
-3	0.048	0.06	0.092	0.2
-1	0.072	0.09	0.138	0.3
2	0.12	0.15	0.23	0.5
$P(x=x_i)$	0.24	0.3	0.46	**1**

بما أن X و Y متغيران مستقلان عشوائيا فإن :

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{X}=\mathbf{x}_{\boldsymbol{i}} \cap \boldsymbol{Y}=\mathbf{y}_{\boldsymbol{j}}\right)=\mathbf{P}(\boldsymbol{X}=\mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}) * \mathbf{P}(\boldsymbol{Y}=\mathbf{y}_{\boldsymbol{j}})$$

$$P(X=0 \cap Y=-1)=P(X=0) * P(Y=-1)$$

$$P(Y=-1)=\frac{P(X=0 \cap Y=-1)}{P(X=0)}=\frac{0.09}{0.3}=0.3$$

ولدينا كذلك$\sum_{i=1}^{3} P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{3} P(Y=y_j)=1$:

نستعمل نفس الطريقة لملئ الخانات في كامل الجدول.

1- هل X_i و Y_j هما متغيران مستقلان في التباين :

يكون X و Y متغيران مستقلان في التباين إذا كان :

$$\mathbf{Cov(x;y) = 0}$$

$$\mathrm{Cov(x;y) = E(x;y) - [E(x).E(y)]}$$

$$\mathrm{E(x;y)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \,.P(x = x_i; y = y_j)$$

$$\mathrm{E(x;y)} = (-1*-3*0.048) + (0) + (2*-3*0.092) + (-1*-1*0.072) + 0 + (2*-1*0.138) + (-1*2*0.12) + 0 + (2*2*0.23) = \mathbf{0.068}$$

$$\mathrm{E(x)} = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(x = x_i)$$

$$E(x) = (-1*0.24) + 0 + (2*0.46) = \mathbf{0.68}$$

$$E(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j.P(y = y_j)$$

$$E(y) = (-3*0.2) + (-1*0.3) + (2*0.5) = \mathbf{0.1}$$

$$Cov(x;y) = 0.068 - (0.68*0.1) = \mathbf{0}$$

إذن **X و Y متغيران مستقلان في التباين.**

4- حساب معامل الارتباط : (r)

$$\boldsymbol{r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x).V(y)}}}$$

بما أن X و Y متغيران مستقلان في التباين إذن معامل الارتباط يساوي الصفر.

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x).V(y)}} = \mathbf{0}$$

الاستنتاج:

نستنتج أنه لايوجد علاقة بين المتغريين X و Y وأنه عندما يكونان المتغيران مستقلان في التباين فإنه لا يوجد ارتباط بينهما.

التمرين 07 :

اخترنا (03) أشخاص من مجموعة مكونة من (10) أشخاص كما يلي:

- (02) مديرين
- (03) إداريين
- (05) تقنيين

X_i متغير عشوائي يمثل عدد المدراء من بين الأشخاص المختارة.

Y_j متغير عشوائي يمثل عدد التقنيين من بين الأشخاص المختارة.

$X_i = \{0,1,2\}$

$Y_j = \{0,1,2,3\}$

1- جدول التوزيع الاحتمالي:

أ/ جدول التوزيع الاحتمالي ل X_i :

$$X_i = 0 \Rightarrow P(X = 0) = \frac{C_2^0 * C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120}$$

$$X_i = 1 \Rightarrow P(X = 1) = \frac{C_2^1 * C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{56}{120}$$

$$X_i = 2 \Rightarrow P(X = 2) = \frac{C_2^2 * C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{120}$$

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 * 9 * 8 * 7!}{3!\,7!} = 120$$

x_i	0	1	2	Total
P(x_i)	56/120	56/120	8/120	1

ب/ جدول التوزيع الاحتمالي ل Y_j :

$$Y_j = 0 \Rightarrow P(Y = 0) = \frac{C_5^0 * C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$

$$Y_j = 1 \Rightarrow P(Y = 1) = \frac{C_5^1 * C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{50}{120}$$

$$Y_j = 2 \Rightarrow P(Y = 2) = \frac{C_5^2 * C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{50}{120}$$

$$Y_j = 3 \Rightarrow P(Y = 3) = \frac{C_5^3 * C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$

$\mathbf{Y_j}$	0	1	2	3	Total
P($\mathbf{Y_j}$)	10/120	50/120	50/120	10/120	1

-2 التوزيع الاحتمالي المشترك ل X_i و Y_j : حيث X_i و Y_j غير مستقلين عشوائيا

$$P\left(x = x_i \cap y = y_j\right) = \frac{C_2^i . C_5^j . C_3^{3-i-j}}{C_{10}^3}$$

$$P(x = 0 \cap y = 0) = \frac{C_2^0 . C_5^0 . C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

$$P(x = 0 \cap y = 1) = \frac{C_2^0 . C_5^1 . C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{15}{120}$$

$$P(x = 0 \cap y = 2) = \frac{C_2^0 . C_5^2 . C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$$

$P(x = x_i \cap y = y_j) = 0$ حدث مستحيل وقوعه

X_i / Y_j	0	1	2	3	$P(x=x_i)$
0	1/120	15/120	30/120	10/120	56/120
1	6/120	30/120	20/120	0	56/120
2	3/120	5/120	0	0	8/120
$P(y=y_j)$	10/120	50/120	50/120	10/120	1

3- هل X_i و Y_j متغيران مستقلان في التباين :

$$\mathrm{Cov}(x;y) = \mathrm{E}(x;y) - [\mathrm{E}(x).\mathrm{E}(y)] = 0$$

$$\mathrm{E}(x;y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, .P(x = x_i; y = y_j)$$

$$\mathrm{E}(x;y) = 0+0+0+0+0+\left(1*1*\frac{30}{120}\right)+\left(1*2*\frac{20}{120}\right)+0+0$$
$$+\left(2*1*\frac{5}{120}\right)+0+0 = \frac{80}{120} = \mathbf{0.666}$$

$$\mathrm{E}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0+\left(1*\frac{56}{120}\right)+\left(2*\frac{8}{120}\right) = \mathbf{0.6}$$

$$E(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j.P(y = y_j) = 0+\left(1*\frac{50}{120}\right)+\left(2*\frac{50}{120}\right)+\left(3*\frac{10}{120}\right) = \frac{180}{120}$$
$$= \mathbf{1.5}$$

$$Cov(x;y) = 0.666 - (0.6*1.5) = -\mathbf{0.23} \neq 0$$

إذن **X و Y متغيران غير مستقلان في التباين.**

التمرين 08 :

X_i متغير عشوائي يأخذ القيم 0 و 2 بنفس الاحتمال.

Y_j متغير عشوائي يأخذ القيم 0 و 1 بالاحتمالات 1/3 و 2/3 على التوالي.

حيث أن : $P(x = 0ety = 0) = p$

* الجدول التوزيع الاحتمالي ل x_i هو :

$\boldsymbol{x_i}$	0	2	Total
P($\mathbf{x_i}$)	½	1/2	1

* الجدول التوزيع الاحتمالي ل y_j هو :

$\mathbf{Y}_j$	0	1	Total
P($\mathbf{Y}_j$)	2/3	1/3	1

1- الجدول التوزيع الاحتمالي المشترك بين X_i و Y_j :

$\mathbf{Y}_j$ / $\mathbf{X_i}$	**0**	**1**	**P(y=$\mathbf{y_j}$)**
0	p	1/2-p	1/2
2	1/3-p	p+1/6	1/2
P(x=$\mathbf{x_i}$)	1/3	2/3	**1**

2- تحديد قيمة p حتى يكون فيها x و y متغيران مستقلان عشوائيا:

يكون X و Y متغيران مستقلان عشوائيا إذا كان :

$$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i) * P(Y = y_j)$$

$$\begin{cases} P(X = 0 \cap Y = 0) = \mathbf{p} \\ P(X = 0) * P(Y = 0) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

إذن$\boldsymbol{P} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$:

3- تحديد قيمة p حتى يكون فيها x و y متغيران مستقلان في التباين :

يكون X و Y متغيران مستقلان في التباين إذا كان :

$$\mathrm{Cov(x;y)} = \mathrm{E(x;y)} - [\mathrm{E(x)}.\mathrm{E(y)}] = 0$$

$$\mathrm{E(x;y)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \,.\, P(x = x_i; y = y_j)$$

$$\mathrm{E(x)} = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(x = x_i)$$

$$E(x) = \left(0 * \frac{1}{2}\right) + \left(2 * \frac{1}{2}\right) = \mathbf{1}$$

$$E(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j . P(y = y_j)$$

$$E(y) = \left(0 * \frac{1}{3}\right) + \left(1 * \frac{2}{3}\right) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

حتى يكون x و y مستقلان في التباين يجب أن يكون :

$$\mathrm{E(x;y)} = [\mathrm{E(x)}.\mathrm{E(y)}] = 1 * \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{E(x;y)} = 0 + 0 + 0 + \left(2 * 1 * \left(\mathrm{p} + \frac{1}{6}\right)\right) = \frac{2}{3}$$

$$2p + \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2p = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

الفصل الرابع : التوزيعات النظرية المطبقة على المتغيرات العشوائية المنفصلة

بعد أن عرفنا مفهوم المتغيرات العشوائية والتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سواءا المنفصل أو المتصل ، لا بد من دراسة التوزيعات الاحتمالية الأكثر انتشارا. هذه التوزيعات يتم استخدامها في حل العديد من المسائل في مجال التسيير الصناعي والتجاري والاداري. و بنفس التقسيم الكائن في المتغيرات العشوائية نجد هناك توزيعات تطبق على المتغيرات العشوائية المنفصلة و توزيعات تطبق على المتصلة ، و سنبدأ في هذا الفصل بالتوزيعات النظرية التي تطبق على المنفصلة ومن أكثر هذه التوزيعات شيوعا: التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون.

- **أولا : توزيع ذي الحدين** (Binomiale)

- **توزيعة بارنولي** (Bernouli)**:**

تعتبر توزيعة بارنولي تعميم لتوزيع ذي الحدين و تنتج جراء تجربة "برنولية" تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين A و A’. نسمي A نجاح و A’ فشل.

نعتبر المتغيرة X التي تمثل **عدد مرات النجاح**، تأخذ X القيمة 1 عند وقوع الحدث A و0 في الحالة المعاكسة.

نرمز عادة ب p "احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A و $q = 1 - p$ احتمال الحدث المعاكس (الفشل). يعين توزيع برنولي كما يلي :

$$\boxed{P(X=1)=p, \qquad P(X=0)=q, \qquad X=0,1.}$$

ونكتب $\mathbf{X \sim B(1, p)}$ **حيث :** $\mathbf{p + q = 1}$

يعتبر توزيع ذي الحدين أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة. ويستخدم لإيجاد احتمال وقوع حدث معين (نجاح) عدداً من المرات مقداره **X** من بين **n** من المحاولات لنفس التجربة (ونرمز لهذا الاحتمال بالرمز **(P(X)** عندما تتحقق الشروط التالية :

1- هناك فقط ناتجان ممكنان ومتنافيان لكل محاولة، بمعنى كل محاولة من محاولات التجربة تنتهي بنتيجة من نتيجتين ممكنتين، احداهما تسمى بالنجاح و يرمز لاحتماله ب Pوهو الحدث المدروس و الذي يرد في الأسئلة، و النتيجة الأخرى هي تمثل الفشل، و يرمز لاحتماله ب q، حيث p+q=1

2- المحاولات وعددها **n** **مستقلة** عن بعضها البعض، بمعنى أن كل نتيجة تكون مستقلة عن سابقها أو عن التي تليها.

3- احتمال وقوع الحدث المعين فى كل محاولة (النجاح) **P** ، ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى، بمعنى آخر ان التجارب التي تتم بالارحاع لا مكن لها أن تتبع توزيع ذي الحدين.

وبالتالي فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة يحسب كما يلي**:**

$$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}, \qquad x=0,1,2,3,...,n \qquad , \qquad n=1,2,3,...$$

حيث x عدد مرات النجاح

p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)، q = 1-p احتمال الفشل وn عدد التجارب.

و هو تعريف " قانون التوزيع الثنائي" ويكتب قانون التوزيع الاحتمالي أيضا كما يلي:

$$P(X=x)=C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

أو **X ~ B(n, p).**

- **خصائص توزيع ذي الحدين**

. التوقع والتباين:

- **E(X) = np**
- **V(X) = npq**

- **ثانيا :توزيع بواسون** (Poisson)

توزيع بواسون هو توزيع احتمالى منفصل آخر . ويستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات فى وحده الزمن ، وذلك عندما تكون الأحداث أو "النجاحات " مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتاً لوحدة الزمن . العبارة الرياضية التالية تعبر عن دالة توزيع بواسون :

$$P(X)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!}$$

حيث : **x** = العدد المعين من النجاحات.

P (x) = احتمال عدد **x** من النجاحات.

λ = رمز متوسط عدد النجاحات فى وحدة الزمن .

e = أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعى ، أو **2.71828**

عمومًا تكون التجارب التي تتبع توزيع بواسن هي تلك التي نجد فيها معدل أو متوسط لحدوث ظاهرة معينة ، و هذا المعدل يكون مرتبط بالزمن أو بمكان معين أو بكلاهما، و نذكر على سبيل المثال التجارب التالية :

- متوسط عدد امكالمات الهاتفية التي تصل الى مركز المراقبة بالجامعة في الفترة الصباحية
- متوسط عدد النساء الحوامل التي تصلن الى عيادة التوليد ما بين منتصف الليل و الرابعة صباحا.
- متوسط عدد الأخطاء المطبعية الموجود في صفحة واحدة من كتاب معين
- متوسط عدد الطائرات التي تصل الى المطار الدولي بالسانيا مابين الثامنة صباحا و منتصف النهار.

و ذلك المتوسط هو معلم توزيع بواسن و هو يتغير بتغير الزمن ، كما هو موضح لاحقا في التمارين المحلولة

- **خصائص توزيع بواسون**

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

- **مسائل تقريب توزيع ذو الحدين الى توزيع بواسن**

يمكن تقريب توزيع ذو الحدين الى توزيع بواسن ، اذا كان حدث النجاح حدثا ناذرا، و يكون حدث النجاح ناذرا عندما $n \to \infty$ واحتمال النجاح صغيرا جدا. عمليا يعطي توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي لما:

$n \geq 30$ و	أو $np < 5$	$nq < 5$

ويستخدم بعض من الإحصائيين أيضا كشرط لاستعمال قانون بواسون بدلا من القانون الثنائي القاعدة التالية:

$n \geq 25$ و $p \leq 0{,}1$

ثالثا : تمارين تطبيقية حول التوزيعات النظرية المطبقة على المتغيرات العشوائية المنفصلة

التمرين 01

نرمي قطعة نقد متزنة (06) مرات، نفرض أن ظهور الوجه « Face » يمثل النجاح.

1- أحسب احتمال الحصول على وجهين (2 Faces) ؟
2- أحسب احتمال الحصول على الأقل 4 أوجه ؟
3- أحسب احتمال عدم الحصول على أي وجه ؟

التمرين 02

نرمي قطعة نرد متزنة (07) مرات، نفرض أن ظهور الرقم (5) أو (6) يمثل النجاح .

1- أحسب احتمال الحصول على رقم (5) أو (6) ثلاث مرات ؟
2- أحسب احتمال عدم الحصول على أي رقم من الأرقام (5) أو (6) خلال هذه التجربة؟
3- أحسب احتمال الحصول على الأقل على الرقم (5) أو (6) مرة واحدة ؟

التمرين 03

ظهر دواء جديد لمعالجة مرض معين، معدل نجاحه هو 80%، أعطي هذا الدواء ل (15) مريض مصاب بهذا المرض.

1- ماهو احتمال شفاء (12) منهم ؟
2- ما هو احتمال شفاء (12) منهم على الأقل ؟

التمرين 04

إذا علمت أن احتمال شفاء مريض مصاب بالزكام خلال أسبوع دون اللجوء إلى الطبيب هو 0.60. وعلمت أنه يوجد (10) مرضى مصابين بالزكام ولم يراجعو الطبيب. فما هو احتمال أن يشفى خلال أسبوع :

1- ثلاث مرضى ؟
2- (08) مرضى على الأقل ؟
3- من (02) إلى (05) مرضى ؟
4- (06) مرضى تماما ؟

التمرين 05

نفرض أنه بمصنع ما يوجد 2% من الانتاج فاسد. أخذنا عينة عشوائية تتألف من 100 وحدة.

1- أوجد أن تكون في هذه العينة (03) وحدات فاسدة ؟
2- ما هو متوسط الانتاج الفاسد ؟

التمرين 06

ليكن x_i و y_j متغيران مستقلان عشوائيا ويتبعان توزيع ذو الحدين على النحو التالي :

$$X_i \leadsto B(n,p)$$
$$Y_i \leadsto B(m,p)$$

إذا لدينا : S = X+Y

1- برهن على قانون توزيع S ؟
2- إذا كان لدينا : p=0.6 / n=20 / m=25 .

أحسب : $P(S=5)$ ؛ $P(4\leq S\leq 5)$ ؛ $P(4<S<6)$ ؟

3- أحسب : $E(X_i), E(\mathrm{Y_i}), E(S), V(X_i), V(\mathrm{Y_i}), V(S)$ ؟

التمرين 07

في طريق ما معدل حوادث المرور هو (5) في الأسبوع.

1- أحسب احتمال عدم حدوث أي حادث على هذا الطريق خلال يوم معين ؟
2- أحسب احتمال حدوث (4) حوادث خلال يوم معين ؟

التمرين 08

ليكن x_i و y_j متغيران مستقلان عشوائيا ويتبعان توزيع بواسون كما يلي :

$$X_i \backsim P(\lambda) \quad / \quad Y_i \backsim P(m)$$

ولدينا S=X+Y

1- برهن على قانون توزيع S ؟
2- إذا علمت أن : $n(x_i) = 60\,, n(y_j) = 40\,, p = 0.01$.

أحسب E(S) ، V(S) ؟

التمرين 09

نفرض أنه لدينا كتاب يتألف من 500 صفحة. ويوجد به 300 خطأ مطبعي موزع عشوائيا على الصفحات، نفتح الكتاب بطريقة عشوائية فنحصل على صفحة.

1- أحسب احتمال احتواء هذه الصفحة على خطأين بالضبط ؟
2- أحسب احتمال احتواء هذه الصفحة على خطأين على الأقل ؟

حل التمرين 01

من المعطيات نستخلص مايلي :

* عدد التجارب n=6 .
* **احتمال النجاح :** هو احتمال الحصول على وجه. $p = \frac{1}{2}$
* **احتمال الفشل :** هو احتمال عدم الحصول على وجه. $\mathrm{q} = \frac{1}{2}$

بما أن :

- في كل تجربة تكون النتيجة إما نجاح أو فشل (وجه أو ظهر).
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة المحاولة السابقة.
- احتمال النجاح أو الفشل ثابت في كل محاولة (قطعة متزنة).

وبالتالي فإن :

x_i متغير عشوائي منفصل يدل على ظهور الوجه يتبع قانون ذو الحدين (توزيع ثنائي الحدين).

$$\boldsymbol{X_i \backsim B(n = 6, p = \frac{1}{2})}$$

$$P(X = k) = C_n^k . p^k . q^{n-k}$$

1- احتمال الحصول على وجهين (2Faces) :

$$P(X = 2) = C_6^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6*5*4!}{2!*4!} = 15$$

$$P(X = 2) = 15 * \frac{1}{4} * \frac{1}{16} = \frac{15}{64} = \mathbf{0.2343}$$

2- حساب احتمال الحصول على الأقل 4 أوجه :

$$P(x \geq 4) = P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

$$P(x = 4) = C_6^4 . \left(\frac{1}{2}\right)^4 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

$$P(x = 5) = C_6^5 . \left(\frac{1}{2}\right)^5 . \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6}{64}$$

$$P(x = 6) = C_6^6 . \left(\frac{1}{2}\right)^6 . \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64}$$

$$P(x \geq 4) = \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64} = \mathbf{0.3437}$$

3- حساب احتمال عدم الحصول على أي وجه :

$$P(x = 0) = C_6^0 . \left(\frac{1}{2}\right)^0 . \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} = \mathbf{0.0156}$$

حل التمرين 02

من المعطيات نستخلص مايلي :عدد التجارب n=7 .

p : **احتمال النجاح:** ظهور الرقم (5) أو الرقم (6) إذن :

$$p = P(x = 5ou x = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

q **احتمال الفشل :** : $q = 1 - p = \frac{2}{3}$

x_i متغير عشوائي يمثل ظهور الرقم (5) أو الرقم (06) يتبع قانون ذو الحدين :

$$\boldsymbol{X_i \sim B\left(n = 7, p = \frac{1}{3}\right)}$$

1- حساب احتمال الحصول على رقم (5) أو (6) ثلاث مرات:

$$P(x = 3) = C_7^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{560}{2187} = \mathbf{0.256}$$

2- حساب احتمال عدم الحصول على أي رقم من الأرقام (5) أو (6) خلال هذه التجربة:

$$P(x = 0) = C_7^0 . \left(\frac{1}{3}\right)^0 . \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 1.1. \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{128}{2187} = \mathbf{0.0585}$$

3- حساب احتمال الحصول على الأقل على الرقم (5) أو (6) مرة واحدة :

$$P(x \geq 1) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6) + P(x = 7)$$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \left(C_7^0 . \left(\frac{1}{3}\right)^0 . \left(\frac{2}{3}\right)^7 \right) = 1 - 0.0585 = \mathbf{0.9415}$$

حل التمرين 03

من المعطيات نستخلص مايلي :

- عدد التجارب : عدد المصابين الذين أعطي لهم الدواء n=15 .
- p : **احتمال النجاح :** معدل نجاح الدواء : $p = 0.8$
- q : **احتمال الفشل :** هو احتمال عدم الحصول على وجه. $q = 1 - p = 0.2$

x_i متغير عشوائي يمثل عدد المرضى الذين أفادهم الدواء يتبع قانون ذو الحدين :

$$X_i \backsim B(n = 15, p = 0.8)$$

1- حساب احتمال شفاء (12) مريض :

$$P(x = 12) = C_{15}^{12} . (0.8)^{12} . (0.2)^2 = \frac{15!}{12!\,(15-12)!} . (0.8)^{12} . (0.2)^2 = \mathbf{0.2501}$$

2- حساب احتمال شفاء (12) مريض على الأقل :

$$P(x \geq 12) = P(x = 12) + P(x = 13) + P(x = 14) + P(x = 15)$$

$$P(x \geq 12) = C_{15}^{12} . (0.8)^{12} . (0.2)^3 + C_{15}^{13} . (0.8)^{13} . (0.2)^2 + C_{15}^{14} . (0.8)^{14} . (0.2)^1 + C_{15}^{15} . (0.8)^{15} . (0.2)^0$$

$$P(x \geq 12) = 0.2501 + 0.2308 + 0.1319 + 0.0351 = \mathbf{0.6479}$$

حل التمرين 04

من المعطيات نستخلص مايلي :

- n: عدد التجارب : عدد المصابين المصابين بالزكام الذين لم يراجعو الطبيب n=10.
- p : احتمال النجاح : شفاء مريض مصاب بالزكام دون اللجوء إلى الطبيب $p = 0.6$
- q : احتمال الفشل : عدم شفاء مريض مصاب بالزكام دون اللجوء إلى الطبيب $q = 1 - p = 0.4$

x_i متغير عشوائي منفصل يدل على شفاء مريض مصاب بالزكام دون اللجوء إلى الطبيب ويتبع قانون ذو الحدين :

$$\boldsymbol{X_i \backsim B(n = 10, p = 0.6)}$$

1- حساب احتمال شفاء (3) مرضى :

$$P(x = 3) = C_{10}^{3}.(0.6)^3.(0.4)^7 = \frac{10!}{3!\,7!}.(0.6)^{12}.(0.4)^2 = 0.0424$$

2- حساب احتمال شفاء (8) مرضى على الأقل :

$$P(x \geq 8) = P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$$

$$P(x \geq 8) = C_{10}^{8}.(0.6)^8.(0.4)^2 + C_{10}^{9}.(0.6)^9.(0.4)^1 + C_{10}^{10}.(0.6)^{10}.(0.4)^0$$

$$P(x \geq 8) = 0.1209 + 0.0403 + 0.0060 = \mathbf{0.1672}$$

3- حساب احتمال شفاء من (2) إلى (5) مرضى :

$$P(2 \leq x \leq 5) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5)$$

$$P(x \geq 8) = C_{10}^{2}.(0.6)^2.(0.4)^8 + C_{10}^{3}.(0.6)^3.(0.4)^7 + C_{10}^{4}.(0.6)^4.(0.4)^6 + C_{10}^{5}.(0.6)^5.(0.4)^5$$

$$P(x \geq 8) = 0.0106 + 0.0425 + 0.1114 + 0.2006 = \mathbf{0.3653}$$

4- حساب احتمال (6) مرضى تماما :

$$P(x = 6) = C_{10}^{6}.(0.6)^6.(0.4)^4 = \mathbf{0.2508}$$

حل التمرين 05

من المعطيات نستخلص مايلي :

* n : عدد التجارب : عدد وحدات العينة . n=100
* p : احتمال النجاح : احتمال حدوث الحدث الانتاج الفاسد $p = 0.02$
* q : احتمال الفشل : احتمال حدوث الحدث الانتاج غير فاسد $\mathrm{q} = 0.98$

x_i متغير عشوائي منفصل يمثل عدد الوحدات الفاسدة ويتبع قانون ذو الحدين :

- ✓ الطريقة 01 : نستعمل قانون ذو الحدين.

1- حساب حساب احتمال أن تكون في العينة (3) وحدات فاسدة :

$$\boldsymbol{X_i \sim B(n = 100, p = 0.6)}$$

$$P(x = 3) = C_{100}^{3}.(0.02)^3.(0.98)^{97} = \mathbf{0.1822}$$

2- حساب متوسط الانتاج الفاسد :

$$E(x) = n.p = 100 * 0.02 = \mathbf{2}$$

- ✓ الطريقة 02 : يمكن حل التمرين بتقريب قانون ذو الحدين إلى قانون بواسون :

بما أن الشروطة محققة :

$$0.1 \geq 0.02 = p \quad / \quad 18 > 2 = n.p \quad / \quad 50 \leq 100 = n$$

إذن نقوم **بتقريب قانون ذو الحدين إلى قانون بواسون** حيث : $\lambda = n.p = 2$

$$\boldsymbol{X \sim B(n; p) \sim P(\lambda = 2)}$$

$$P(x = k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$$

1- حساب حساب احتمال أن تكون في العينة (3) وحدات فاسدة :

$$P(x = 3) = e^{-2}.\frac{2^3}{3!} = \mathbf{0.1822}$$

2- حساب متوسط الانتاج الفاسد :

$$E(x) = \lambda = \mathbf{2}$$

حل التمرين 06

x_i و y_j متغيران مستقلان عشوائيا ويتبعان توزيع ذو الحدين على النحو التالي :

$$\boldsymbol{X_i \sim B(n, p)} \quad / \quad \mathbf{Y_i \sim B(m, p)}$$

ولدينا : S = X+Y

بما أن x_i و y_j **متغيران مستقلان عشوائيا** فإن :

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{X} = \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}} \cap \boldsymbol{Y} = \mathbf{y}_{\boldsymbol{j}}\right) = \mathbf{P}(\boldsymbol{X} = \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}) * \mathbf{P}(\boldsymbol{Y} = \mathbf{y}_{\boldsymbol{j}})$$

1- البرهان على قانون توزيع S :

$$S = X + Y \Leftrightarrow s = x + y$$

$$P(x = \mathrm{x}_i) = C_n^x . p^x . q^{n-x}$$

$$P(x = \mathrm{y}_i) = C_m^y . p^y . q^{m-y}$$

$$P(S = s) = \sum_{x+y=s} P(x = \mathrm{x}_i) * P(y = \mathrm{y}_i)$$

$$P(S = s) = \sum_{x+y=s} [C_n^x . p^x . q^{n-x}] * \left[C_m^y . p^y . q^{m-y}\right]$$

$$P(S = s) = \sum_{x+y=s} C_n^x . C_m^y . p^x . p^y . q^{n-x} . q^{m-y}$$

$$P(S = s) = C_{n+m}^{x+y} . p^{x+y} . q^{n+m-(x+y)}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{s}} . \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{s}} . \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}-\boldsymbol{s}}$$

وبالتالي فإن S يتبع قانون ذو الحدين كما يلي :

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \backsim \mathbf{B}(\mathbf{n} + \mathbf{m}, \mathbf{p})$$

2- حساب الاحتمالات:

لدينا p=0.6 / n=20 / m=25 .

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \backsim \mathbf{B}(\mathbf{n} + \mathbf{m} = \mathbf{45}, \mathbf{p} = \mathbf{0.6})$$

- $P(S = 5) = C_{45}^5 . (0.6)^5 . (0.4)^{40} = \mathbf{1.14853.E^{-11}}$
- $P(4 \leq S \leq 5) = P(S = 4) + P(S = 5) = C_{45}^4 . (0.6)^4 . (0.4)^{41} + 1.14853.\mathrm{E}^{-11}$

$P(4 \leq S \leq 5) = \mathbf{1.2419.E^{-11}}$

$* \quad P(4 < S < 6) = P(S = 5) = \mathbf{1.14853.E^{-11}}$

3- حساب $E(X_i), E(\mathrm{Y_i}), E(S), V(X_i), V(\mathrm{Y_i}), V(S)$:

$* \quad E(X_i) = \mathrm{n.p} = 20 * 0.6 = \mathbf{12}$

$* \quad E(\mathrm{Y_i}) = m.p = 25 * 0.6 = \mathbf{15}$

$* \quad E(S) = (n + m).p = 45 * 0.6 = \mathbf{27}$

$* \quad V(X_i) = n.p.q = 20 * 0.6 * 0.4 = \mathbf{4.8}$

$* \quad V(\mathrm{Y_i}) = m.p.q = 25 * 06 * 0.4 = \mathbf{6}$

$* \quad V(S) = (n + m).p.q = 45 * 0.6 * 0.4 = \mathbf{10.8}$

حل التمرين 07

* معدل حوادث المرور في الأسبوع هو 5. (بدلالة الزمن)
* نلاحظ أن التجربة متعلقة بوحدة الزمن وبالتالي فإن هذه التجربة تتبع قانون بواسون.
* معدل حوادث المرور في اليوم هو $\frac{5}{7}$.

x_i متغير عشوائي منفصل يمثل عدد حوادث المرور في اليوم ويتبع قانون بواسون.

$$X_i \backsim P\left(\lambda = \frac{5}{7}\right)$$

$$P(x = k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$$

1- حساب احتمال عدم حدوث أي حادث على هذا الطريق خلال يوم معين :

$$P(x = 0) = e^{-5/7}.\frac{\left(5/7\right)^0}{0!} = \mathbf{0.49}$$

2- حساب احتمال حدوث (4) حوادث خلال يوم معين :

$$P(x=4)=e^{-5/7}.\frac{\left(5/7\right)^4}{4!}=\mathbf{0.0053}$$

حل التمرين 08

ليكن X_i و Y_j متغيران مستقلان عشوائيا ويتبعان توزيع بواسون كما يلي :

$$X_i \leadsto P(\lambda) \quad / \quad Y_i \leadsto P(m)$$

$$S=X_i+Y_j \Rightarrow y_i=s-x_i$$

بما أن X_i و Y_j متغيران مستقلان عشوائيا فإن :

$$P(S=s)=\sum_x P(x=\mathrm{x}_i)*P(y=\mathrm{y}_i)$$

$$P(S=s)=\sum_x e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}.e^{-m}.\frac{m^y}{y!}$$

$$P(S=s)=\sum_x e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}.e^{-m}.\frac{m^{s-x}}{(s-x)!}$$

$$P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}\sum_x \lambda^x.m^{s-x}.\frac{1}{x!\,(s-x)!}$$

نضرب المعادلة في $\frac{s!}{s!}$ نحصل على :

$$P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}.\frac{1}{s!}\sum_x \lambda^x.m^{s-x}.\frac{s!}{x!\,(s-x)!}$$

$$P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}.\frac{1}{s!}\sum_x C_s^x.\lambda^x.m^{s-x}$$

نضرب المعادلة في $\frac{(\lambda+m)^{s-x}}{(\lambda+m)^{s-x}}$ نحصل على :

$$P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}.\frac{1}{s!}\sum_x C_s^x.\lambda^x.m^{s-x}.\frac{(\lambda+m)^{s-x}}{(\lambda+m)^{s-x}}$$

$$P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}.\frac{1}{s!}\sum_{x}C_s^x.\lambda^x.m^{s-x}.\frac{(\lambda+m)^s.(\lambda+m)^x}{(\lambda+m)^{s-x}}$$

$$P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}.\frac{1}{s!}\sum_{x}C_s^x\frac{\lambda^x}{(\lambda+m)^x}.\frac{m^{s-x}}{(\lambda+m)^{s-x}}.(\lambda+m)^s$$

$$P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}.\frac{(\lambda+m)^s}{s!}\sum_{x}C_s^x\left(\frac{\lambda}{\lambda+m}\right)^x.\left(\frac{m}{\lambda+m}\right)^{s-x}$$

لنضع : $p=\frac{\lambda}{\lambda+m}$ فإن : $q=1-p=1-\frac{\lambda}{\lambda+m}=\frac{m}{\lambda+m}$

$$P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}.\frac{(\lambda+m)^s}{s!}\sum_{x}C_s^x p^x.q^{s-x}$$

نعلم أن : $\sum_x C_s^x p^x.q^{s-x}=1$

إذن:

$$\boldsymbol{P(S=s)=e^{-(\lambda+m)}.\frac{(\lambda+m)^s}{s!}}$$

وهو عبارة عن قانون بواسون بمعامل $(\lambda+m)$ وبالتالي :

$$\boldsymbol{S \sim P(\lambda+m)}$$

2- نعلم أن : $n(x_i)=60\,, n(y_j)=40\,, p=0.01$:

حساب E(s) :

$$E(s)=\left(n(x_i)+n(y_j)\right)*p=(60+40)*0.01=\mathbf{1}$$

حساب V(s) :

$$E(s)=\left(n(x_i)+n(y_j)\right)*p.q=(60+40)*0.01*0.99=\mathbf{0.99}$$

حل التمرين 09

نستخلص المعطيات التالية :

* n :عدد التجارب : عدد الأخطاء. $50 < n=300$
* p : احتمال النجاح : احتمال وجود خطأ مطبعي في الصفحة. $p = \frac{1}{500} < 0.1$
* q : احتمال الفشل : احتمال عدم وجود خطأ مطبعي في الصفحة.

$$q = 1 - p = \frac{499}{500}$$

تحت هذه الشروط يمكن **تقريب توزيع ذو الحدين إلى توزيع بواسون**.

x_i متغير عشوائي منفصل يدل على عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة.

$$X_i \backsim B\left(n = 300, p = \frac{1}{500}\right) \backsim \mathrm{P}(\lambda = \mathrm{m.p} = 0.6)$$

1- حساب احتمال احتواء هذه الصفحة على خطأين بالضبط :

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = 2) = e^{-0.6}.\frac{(0.6)^2}{2!} = \mathbf{0.0987}$$

2- حساب احتمال احتواء هذه الصفحة على خطأين على الأقل :

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} \geq 2) = 1 - [\mathrm{P}(\mathrm{x} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{x} = 1)]$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} \geq 2) = 1 - \left[e^{-0.6}.\frac{(0.6)^0}{0!} + e^{-0.6}.\frac{(0.6)^1}{1!}\right] = \mathbf{0.123}$$

الفصل الخامس : التوزيعات النظرية المطبقة على المتغيرات العشوائية المتصلة

تمهيد :

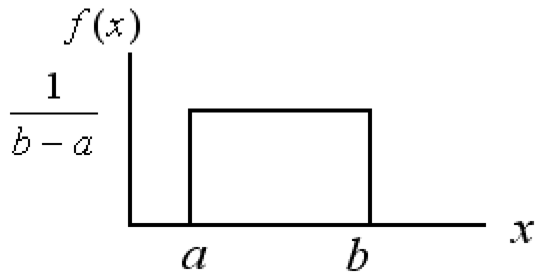
في هذا الفصل سنقدم بعض التوزيعات النظرية المطبقة على المتغيرات العشوائية المتصلة الأكثر انتشارا و استعمالا ، و سنخص بالذكر التوزيع المنتظم ، فالأسي و أخيرا التوزيع العادي .

أولا : التوزيع المنتظم

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم داخل مجال معين، مما يجعل الاحتمال ثابتا و متساويا ، وحتى بيانيا يكون منحنى دالة الكثافة الاحتمالية عبارة عن خط أفقي مستقيم داخل مجال معين ، حيث بداية ذلك المجال و نهايته هما معالم هذا التوزيع، فإذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم ***Uniform***، مداه هو $a < x < b$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a} \;,\; a < x < b} \qquad (١٥-٨)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع:

توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (b,a)، ولذا يكتب رمز لهذا التوزيع الصورة $x \sim U(a,b)$

خصائص التوزيع المنتظم:

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما :

$$\mu = E(x) = \frac{a+b}{2} \;,\; \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

دالة التوزيع التجميعي ***C.D.F***

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

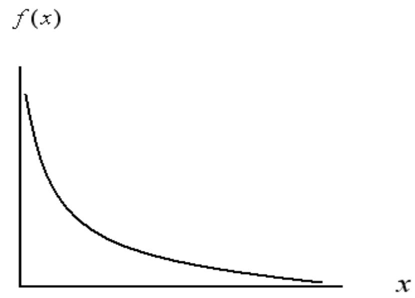
$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= p(X \le x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}} \qquad (١٦-٨)$$

ثانيا : التوزيع الأسي

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع أسي سالب ، مداه هو $0 < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x) = \theta\, e^{-\theta x},\ 0 < x < \infty\ ,\ \theta \succ 0} \qquad (١٧-٨)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة هي (θ)

خصائص التوزيع الأسى السالب

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما:

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\theta}\ ,\quad \sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

دالة التوزيع التجميعي ***C.D.F***

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x) = p(X \le x) = \int_0^x f(x)dx = \left(1 - e^{-\theta x}\right)$$

ثالثا : التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس D. Normale ou D. de Laplace -Gausse

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية.و لأجل ذلك سمي بالتوزيع العادي أو الطبيعي و ذلك لكثرة التجارب التي تخضع لهذا التوزيع ، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط يمتد الى مالا نهاية في الاتجاهين ، الا أن معظم المساحة موجودة حول الوسط الحسابي :

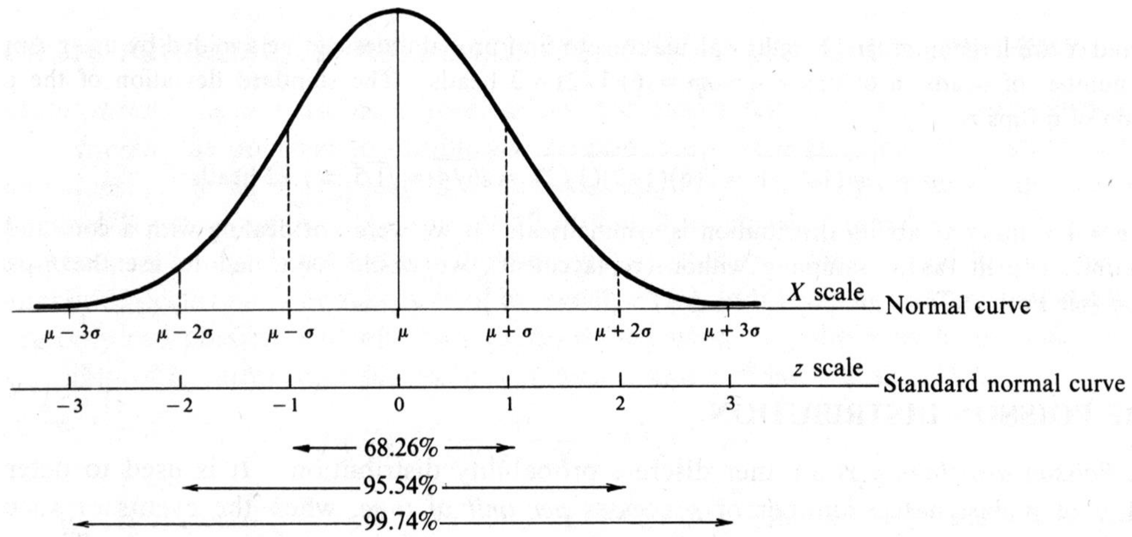


Fig. 3-4

- **صيغة القانون**

تكتب دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty}$$

حيث μ و σ هما على التوالي التوقع والانحراف المعياري. ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma)$

دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للتوزيع الطبيعي تكتب كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

و تبسيطًا للحساب و للدراسة، اقترح علماء الإحصاء قيمة معيارية عبر توزيع طبيعي معياري يتم الرجوع اليه كمرجع في ظل هذا التوزيع، و لهذا نفرق بين القيمة المعيارية أو المركزية المختصرة z و القيمة العادية x حيث :

$Z = (X-\mu)/\sigma$ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتمالات:

$F(z) = P(Z \leq z)$ أو $P(0 \leq Z \leq z)$،

بحيث يمكن كتابة الدالة f وF بدلالة مجهول واحد Z بدلا من 3 مجاهيل x وμ و σ كما يلي:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty}$$

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين X و Z، فإن Z تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي. ونعلم أن:

V(Z) = 1 E(Z) = 0

- **خصائص التوزيع الطبيعي**

- توزيع جرسي الشكل.

- توزيع متماثل بالنسبة للوسط الحسابي و بالتالي فهو توزيع متناظر.

- معظم المساحة موجودة حول الوسط الحسابي.

- **تقريب التوزيع الثنائي الى التوزيع الطبيعي**

يمكن تقريب توزع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي حالة n كبيرة وp غير قريب من 0 يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة جدًا. ونكتب :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(a \leq z \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-z^2/2} dz, \qquad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

ويسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون p قريب من 0.5. و عمليا نقرب اذا تحققت الشرط التالي :

عموما نعتبر التقريب إلى التوزيع الثنائي ملائما عندما np و nq كلاهما أكبر من 5.

رابعا: تمارين تطبيقية حول التوزيعات النظرية المتصلة

التمرين 01

ليكن x متغير عشوائي مستمر. حيث دالة كثافته الاحتمالية ثابتة على طوال المجال $[0,\theta]$:

1- أوجد f(x) ثم F(x) ومثلها بيانيا ؟
2- أحسب : E(x) ، V(x) ؟

التمرين 02

x متغير عشوائي يتبع القانون الأسي، ولديه ذالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \frac{1}{a} e^{-x/a} \quad / \quad x\epsilon[0,+\infty] \; et \; a > 0$$

1- أحسب احتمال : $P(x \geq 1)$ ؟
2- أحسب احتمال : $P(x \geq 1/x \leq 2)$ ؟
3- أحسب : E(x) ، V(x) ؟

التمرين 03

ليكن X_i متغير عشوائي يتبع القانون الطبيعي العادي ، و Z_i قيمة معيارية ل x_i تتبع N(0 ;1). أحسب الاحتمالات التالية:

$$P(Z \geq -1.96)/P(Z \geq 1.96)/P(Z \leq 1.96)/P(Z \leq 1.65)/$$

$$P(-1.20 \leq Z_i \leq 1.42)/P(-1.96 \leq Z_i \leq 1.96)/$$

$$P(Z \leq 0.51)/P(1.2 \leq Z_i \leq 2.5) \,.$$

التمرين 04

لدينا : $Z_i \backsim N(0;1)$. حدد قيمة a في الحالات التالية :

$P(Z \geq a) = 0.9115/\, P(Z \leq a) = 0.4801/\, P(Z \leq a) = 0.9809$

$P(Z \geq a) = 0.1492/\, P(Z \leq a) = 0.2578/\, P(Z \leq a) = 0.8621$

التمرين 05

إذا كان X_i متغير عشوائي يتبع القانون العادي بتوقع رياضي يساوي (3) وبانحراف معياري يساوي (2). أحسب الاحتمالات التالية:

$$P(2 \leq x \leq 5)/\, P(x > 8)/\, P\left(x > \frac{3}{2}\right)/\, P(x \leq 4).$$

التمرين 06

إذا كان لدينا : $X_i \backsim N(\mu; \delta)$

حدد قيمة μ و δ في الحالات التالية:

1/ $P(x \geq 13) = 0.0668$ و $P(x \leq 8.2) = 0.1841$

2/ $P(x < 3.1) = 0.1711$ و $P(x > 3.7 = 0.7422$

التمرين 07

نفرض أن درجة الحرارة « T » خلال شهر جوان تتبع القانون العادي (الطبيعي) بمتوسط قدره 20° و بانحراف معياري قدره 3° .

1- أحسب احتمال أن تكون درجة الحرارة تتراوح ما بين 21° و 26° ؟
2- ماهو عدد الأيام التي تكون فيها درجة الحرارة تتراوح مابين 21° و 26° ؟

التمرين 08

نفرض أن وزن 800 شخص يتبع قانون العادي بمتوسط قدره 66 كلغ وبانحراف معياري قدره 5 كلغ.

أحسب عدد الأشخاص الذين لديهم وزن:

1- مابين 65 كلغ و 70 كلغ ؟
2- أكبر أو يساوي 72 كلغ ؟

التمرين 09

ينتج معمل البطاريات بطاريات صغيرة متوسط أعمارها هو 30 ساعة وبانحراف معياري بقدر 5 ساعات. نعلم أن أعمار البطاريات يتوزع وفق التوزيع العادي.

* ما هو احتمال أن تعيش بطارية ما أقل من 23 ساعة؟

التمرين 10

ينتج معمل البطاريات بطاريات صغيرة حيث أن عمر البطاريات يتوزع وفق التوزيع العادي. إذا علمت أن احتمال أن تعيش بطارية ما أقل من 38 ساعة هو 0.9452، واحتمال أن تعيش بطارية أخرى أكثر من 36 ساعة هو 0.1151.

* ما هو احتمال أن تعيش بطارية ما أقل من 23 ساعة ؟

التمرين 11

طرح 80 سؤال في مسابقة مع كل سؤال أربعة أجوبة أحدها فقط صحيح. أجاب أحدهم فقط على جميع أسئلة المسابقة بصفة عشوائية (بدون معرفة).

* ماهو احتمال أن يكون قد أجاب على 25 إلى 30 سؤال بصورة صحيحة ؟

حل التمرين 01

x متغيرعشوائي مستمر دو دالة الكثافة الثابتة على طول المجال $[0, \theta]$ إذن x يتبع التوزيع المنتظم.

$$X \backsim U[0, \theta]$$

1- ايجاد دالة الكثافة f(x) :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta - 0} = \dfrac{1}{\theta} & si\ 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2- ايجاد دالة التوزيع F(x) :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$Si\ x < o \Rightarrow F(x_1) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \mathbf{0}$$

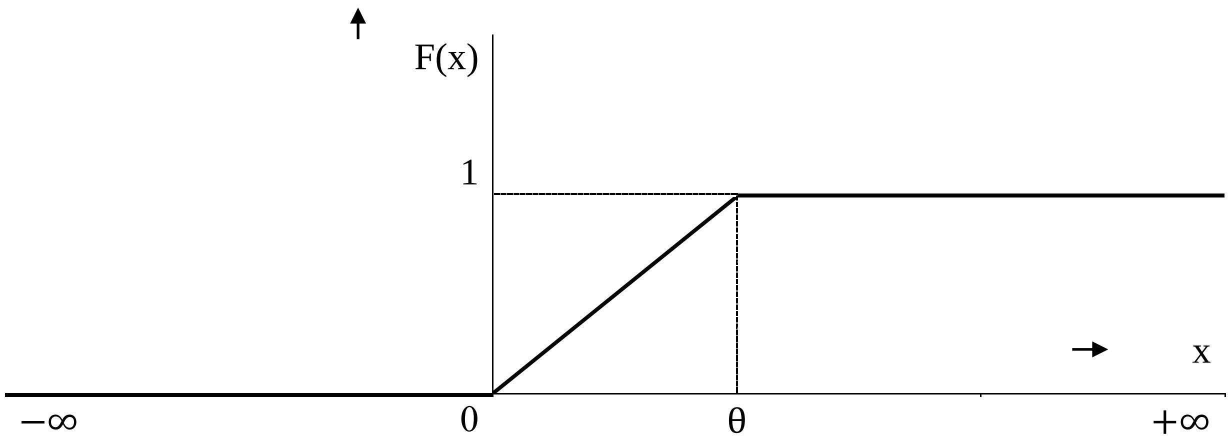
$$Si\ x < \theta \Rightarrow F(x_2) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{0}^{x} \frac{1}{\theta}dt = \left[\frac{t}{\theta}\right]_0^x$$

$$= \left[\frac{x}{\theta} - 0\right] = \boldsymbol{\frac{x}{\theta}}$$

$$Si\ x \geq \theta \Rightarrow F(x_3) = \int_{0}^{\theta} f(t)dt = \int_{0}^{\theta} \frac{1}{\theta}dt = \left[\frac{t}{\theta}\right]_0^\theta = \left[\frac{\theta}{\theta} - 0\right] = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} 0 & si\ x < o \\ \dfrac{x}{\theta} & \text{si } x < \theta \\ 1 & si\ x \geq \theta \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع F(x) :



* حساب E(x) :

$$E(x) = \frac{b+a}{2} = \frac{\theta + 0}{2} = \boldsymbol{\frac{\theta}{2}}$$

* حساب V(x) :

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(\theta - 0)^2}{12} = \boldsymbol{\frac{\theta^2}{12}}$$

حل التمرين 02

x متغير عشوائي مستمر ذو دالة الكثافة من الشكل التالي :

$$f(x) = \frac{1}{a} e^{-x/a} \quad / \quad x \epsilon [0, +\infty] \; et \; a > 0$$

وبالتالي فإن الدالة معرفة على الشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \; x \geq 0 \\ 0 & si \; x < 0 \end{cases}$$

إذن x يتبع **القانون الأسي** حيث : $X_i \backsim \mathcal{E}\left(\lambda = \frac{1}{a}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-x/a} & si \; x \geq 0 \\ 0 & si \; x < 0 \end{cases}$$

1- حساب $P(x \geq 1)$:

$$P(x \geq 1) = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{a} e^{-x/a} dx = \left[-e^{-x/a}\right]_1^{+\infty} = \lim\left[-e^{-x/a}\right] + e^{-1/a}$$

$$= 0 + e^{-1/a} = \boldsymbol{e^{-1/a}}$$

2- حساب $P(x \geq 1/x \leq 2)$:

$$P(x \geq 1/x \leq 2) = \frac{P(x \geq 1; x \leq 2)}{P(x \leq 2)} = \frac{P(1 \leq x \leq 2)}{P(x \leq 2)}$$

$$* \quad P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{a} e^{-x/a} dx = \left[-e^{-x/a}\right]_1^2 = e^{-1/a} - e^{-2/a}$$

$$* \quad P(x \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{a} e^{-x/a} dx = \left[-e^{-x/a}\right]_0^2 = 1 - e^{-2/a}$$

$$P(x \geq 1/x \leq 2) = \frac{e^{-1/a} - e^{-2/a}}{1 - e^{-2/a}} = \frac{\boldsymbol{1 - e^{1/a}}}{\boldsymbol{1 - e^{2/a}}}$$

3- حساب E(x) :

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{a} e^{-x/a} dx$$

✓ الطريقة 01 :

On intègre par parties : $U = \frac{x}{a}$; $U' = \frac{1}{a}$
$V = -ae^{-x/a}$; $V' = e^{-x/a}$

$$E(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{a} e^{-x/a} dx = \left[\frac{x}{a}.-ae^{-x/a}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{a}.-ae^{-x/a} dx$$

$$E(x) = \left[-xe^{-x/a}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x/a} dx$$

$$E(x) = \left[-xe^{-x/a}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x/a} dx$$

$$E(x) = \lim\left(-xe^{-x/a}\right) - 0 + \left[-ae^{-x/a}\right]_0^{+\infty} = \boldsymbol{a}$$

✓ الطريقة 02 :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1/a} = \boldsymbol{a}$$

* حساب V(x) : $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

✓ الطريقة 01 :

$$E(x^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2a^2$$

$$\mathrm{V(x)} = 2a^2 - a^2 = \boldsymbol{a^2}$$

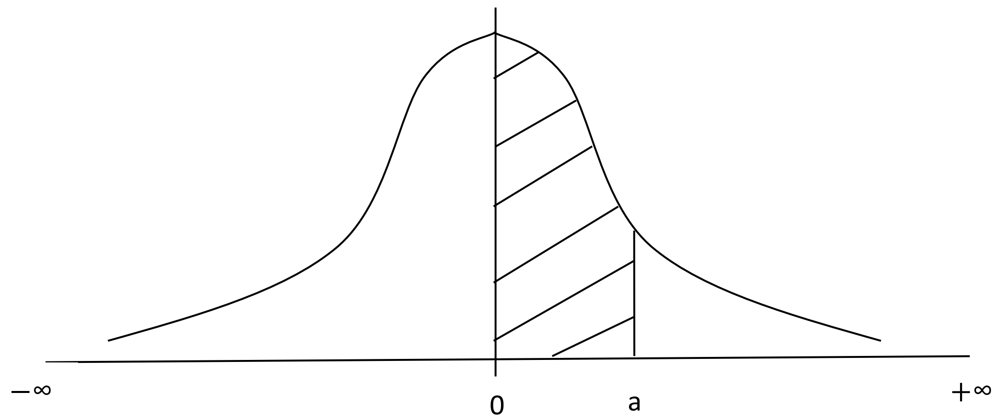
✓ الطريقة 02 :

$$\mathrm{V(x)} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\left(1/\mathrm{a}\right)^2} = \boldsymbol{a^2}$$

حل التمرين 03

$$X_i \backsim N(\mu;\delta)$$
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0;1)$$

حيث : μ هو التوقع الرياضي ل X_i ، و δ هو الانحراف المعياري ل X_i .



* حساب الاحتمالات التالية :

$$P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96) = P(-\infty \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.5 + 0.4750 = \mathbf{0.9750}$$

$$P(Z \geq 1.96) = P(0 \leq Z \leq +\infty) - P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.5 - 0.4750 = \mathbf{0.0250}$$

$$P(Z \leq 1.96) = P(-\infty \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.5 + 0.4750 = \mathbf{0.9750}$$

$$P(Z \leq 1.65) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.65) = 0.5 + 0.4505 = \mathbf{0.9505}$$

$$P(-1.20 \leq Z_i \leq 1.42) = P(0 \leq Z \leq 1.20) + P(0 \leq Z \leq 1.42) = 0.3849 + 0.4222 = \mathbf{0.8071}$$

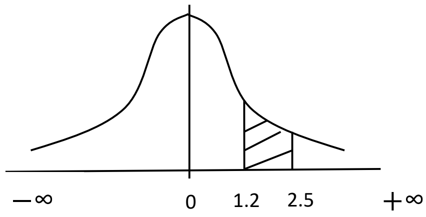
$$P(-1.96 \leq Z_i \leq 1.96) = 2 * P(0 \leq Z \leq 1.96) = 2 * 0.4750 = \mathbf{0.95}$$

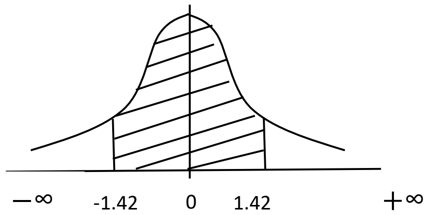
$$P(Z \leq 0.51) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.51) = 0.5 + 0.1950 = \mathbf{0.6950}$$

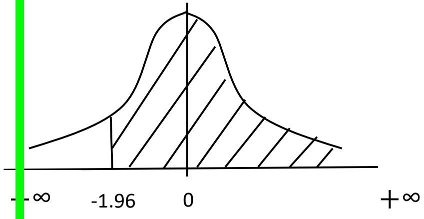
$$P(1.2 \leq Z_i \leq 2.5) = P(0 \leq Z \leq 2.5) - P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.4938 - 0.3849 = \mathbf{0.1089}$$

لدينا

من







الخواص :

$$P(-\infty \leq Z \leq +\infty) = 1$$

$$P(-\infty \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq +\infty) = 0.5$$

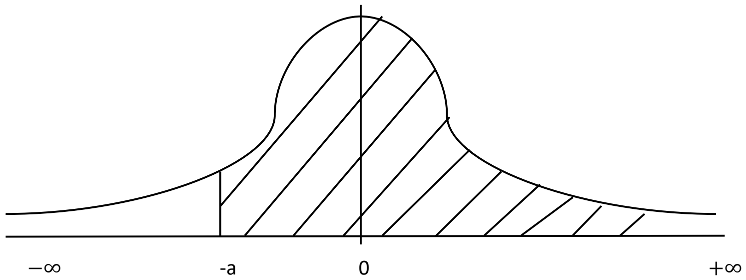
$$P(-a \leq Z \leq +a) = 2 * P(0 \leq Z \leq +a)$$

حل التمرين 04: $Z_i \sim N(0;1)$

* تحديد قيمة a في الحالات التالية :

* $P(Z \leq a) = 0.9115$

(إشارة المعادلة أكبر والاحتمال أكبر من 0.5 إذن a تأخذ قيمة سالبة)



$$0.9115 = P(a \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq +\infty)$$

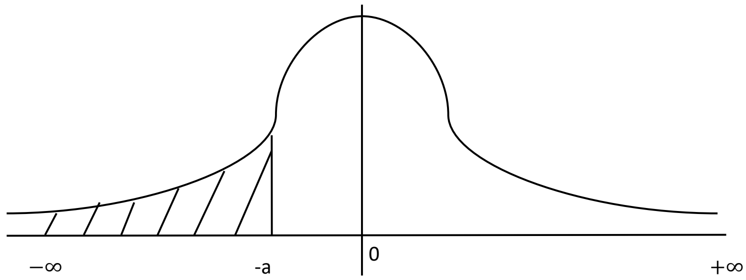
$$P(a \leq Z \leq 0) = 0.9115 - P(0 \leq Z \leq +\infty)$$

$$P(a \leq Z \leq 0) = 0.9115 - 0.5 = 0.4115$$

نقرأ قيمة (0.4115) من جدول التوزيع العادي نجد : **a = -1.35**

* $P(Z \leq a) = 0.4801$

(إشارة المعادلة أصغر والاحتمال أصغر من 0.5 إذن a تأخذ قيمة سالبة)



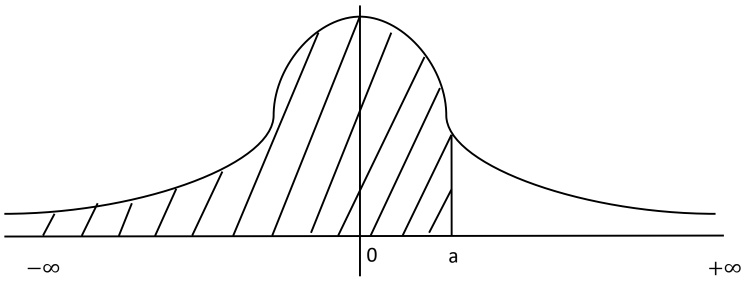
$0.4801 = 0.5 - P(a \leq Z \leq 0)$

$P(a \leq Z \leq 0) = 0.5 - 0.4801 = 0.0199$

نقرأ قيمة (0.4115) من جدول التوزيع العادي نجد : **a = -0.05**

* $P(Z \leq a) = 0.9803$

(إشارة المعادلة أصغر والاحتمال أكبر من 0.5 إذن a تأخذ قيمة موجبة)

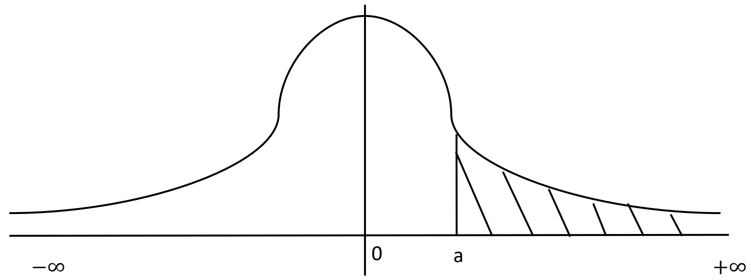


$0.9803 = 0.5 + P(0 \leq Z \leq a)$

$P(0 \leq Z \leq a) = 0.9803 - 0.5 = 0.4803 \Rightarrow \boldsymbol{a = 2.06}$

* $P(Z \geq a) = 0.1492$

(إشارة المعادلة أكبر والاحتمال أصغر من 0.5 إذن a تأخذ قيمة موجبة)



$$0.1492 = 0.5 - P(0 \leq Z \leq a)$$

$$P(0 \leq Z \leq a) = 0.5 - 0.1492 = 0.3508 \Rightarrow \boldsymbol{a = 1.04}$$

* $P(Z \leq a) = 0.2578$

(إشارة المعادلة أصغر والاحتمال أصغر من 0.5 إذن a تأخذ قيمة سالبة)

$$0.2578 = 0.5 - P(a \leq Z \leq 0)$$

$$P(a \leq Z \leq 0) = 0.5 - 0.2578 = 0.2422 \Rightarrow \boldsymbol{a = -0.65}$$

* $P(Z \leq a) = 0.8621$

(إشارة المعادلة أصغر والاحتمال أكبر من 0.5 إذن a تأخذ قيمة موجبة)

$$0.8621 = 0.5 + P(0 \leq Z \leq a)$$

$$P(0 \leq Z \leq a) = 0.8621 - 0.5 = 0.3626 \Rightarrow \boldsymbol{a = 1.09}$$

لدينا من الخواص :

* $P(Z \leq a) = p \qquad (p > 0.5 \Rightarrow a^{+})$
* $P(Z \leq a) = p \qquad (p < 0.5 \Rightarrow a^{-})$
* $P(Z \geq a) = p \qquad (p > 0.5 \Rightarrow a^{-})$
* $P(Z \geq a) = p \qquad (p < 0.5 \Rightarrow a^{+})$

حل التمرين 05 :

$$X_i \backsim N(\mu = 3; \delta = 2)$$
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0; 1)$$

* حساب الاحتمالات التالية :

$$* \quad P(2 \le x \le 5) = P\left(\frac{2-\mu}{\delta} \le \frac{x-\mu}{\delta} \le \frac{5-\mu}{\delta}\right) = P\left(\frac{2-3}{2} \le \mathrm{Z} \le \frac{5-3}{2}\right)$$
$$= P(-0.5 \le Z \le +1) = P(-0.5 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$$
$$= P(0 \le Z \le 0.5) + P(0 \le Z \le 1) = 0.1915 + 0.3413 = \mathbf{0.5328}$$

$$* \quad P(x > 8) = P\left(\frac{x-\mu}{\delta} > \frac{8-3}{2}\right) = P(\mathrm{Z} > 2.5) = 0.5 - P(0 \le Z \le 2.5)$$
$$= 0.5 - 0.4938 = \mathbf{0.0062}$$

$$* \quad P\left(x > \frac{3}{2}\right) = P\left(\frac{x-\mu}{\delta} > \frac{1.5-3}{2}\right) = P(\mathrm{Z} > 2.5) = 0.5 + P(0 \le Z \le 0.75)$$
$$= 0.5 - 0.2734 = \mathbf{0.7734}$$

$$* \quad P(x \le 4) = P\left(\frac{x-\mu}{\delta} > \frac{4-3}{2}\right) = P(\mathrm{Z} \le 0.5) = 0.5 + P(0 \le Z \le 0.5)$$
$$= 0.5 - 0.1915 = \mathbf{0.6915}$$

حل التمرين 06 :

$$X_i \backsim N(\mu; \delta)$$
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0; 1)$$

* تحديد قيمة μ و δ في الحالات التالية :

$$1/ \quad \begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{x} \ge 13) = 0.0668 \\ P(x \le 8.2) = 0.1841 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{P}\left(\frac{x-\mu}{\delta} \ge \frac{13-\mu}{\delta}\right) = 0.0668 \\ P\left(\frac{x-\mu}{\delta} \le \frac{8.2-\mu}{\delta}\right) = 0.1841 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \ge \frac{13-\mu}{\delta}\right) = 0.0668 \\ P\left(Z \le \frac{8.2-\mu}{\delta}\right) = 0.1841 \end{cases}$$

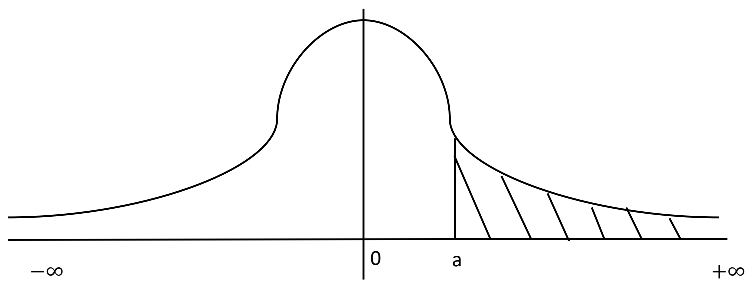
نضع $a = \frac{13-\mu}{\delta}$ و $\mathrm{b} = \frac{8.2-\mu}{\delta}$:

$$\begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{Z} \ge \mathrm{a}) = 0.0668 \\ P(Z \le \mathrm{b}) = 0.1841 \end{cases}$$

إيجاد قيم a و b :

$* \quad P(Z \geq a) = 0.0668$

(إشارة المعادلة أكبر والاحتمال أصغر من 0.5 إذن قيمة a موجبة)

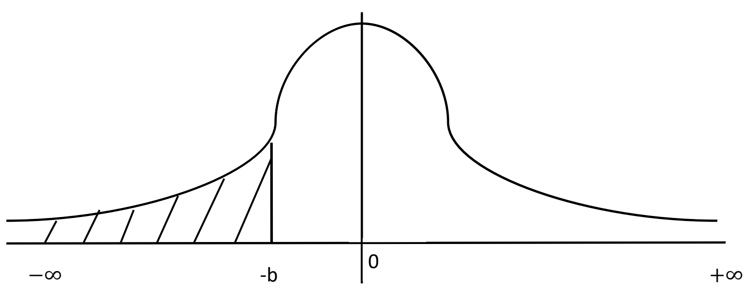


$0.0668 = 0.5 - P(0 \leq Z \leq a)$

$P(0 \leq Z \leq a) = 0.5 - 0.0668 = 0.4332 \Rightarrow \boldsymbol{a = 1.5}$

$* \quad P(Z \leq b) = 0.1841$

(إشارة المعادلة أصغر والاحتمال أصغر من 0.5 إذن قيمة b سالبة)



$0.1841 = 0.5 - P(0 \leq Z \leq b)$

$P(0 \leq Z \leq b) = 0.5 - 0.1841 = 0.3159 \Rightarrow \boldsymbol{b = -0.9}$

$$\begin{cases} a = 1.5 \\ b = -0.9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.5 = \dfrac{13-\mu}{\delta} \\ -0.9 = \dfrac{8.2-\mu}{\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.5\delta = 13-\mu \\ -0.9\delta = 8.2-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 13-1.5\delta \\ -0.9\delta = 8.2-(13-1.5\delta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = 13-1.5\delta \\ -0.9\delta = -4.8+1.5\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 13-(1.5*2) = 10 \\ \delta = \dfrac{4.8}{2.4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\mu = 10} \\ \boldsymbol{\delta = 2} \end{cases}$$

$$2/\quad \begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{x} < 3.1) = 0.1711 \\ P(x > 3.7) = 0.7422 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} < \dfrac{3.1-\mu}{\delta}\right) = 0.1711 \\ P\left(Z > \dfrac{3.7-\mu}{\delta}\right) = 0.7422 \end{cases}$$

نضع : $a = \frac{3.1-\mu}{\delta}$ و $\mathrm{b} = \frac{3.7-\mu}{\delta}$

إيجاد قيم a و b :

$*\quad P(Z < a) = 0.1711$

(إشارة المعادلة أصغر والاحتمال أصغر من 0.5 إذن قيمة a سالبة)

$$0.1711 = 0.5 - P(0 \le Z \le a)$$

$$P(0 \le Z \le a) = 0.5 - 0.1711 = 0.3289 \Rightarrow \boldsymbol{a = -0.95}$$

$*\quad P(Z > b) = 0.7422$

(إشارة المعادلة أكبر والاحتمال أكبر من 0.5 إذن قيمة b سالبة)

$$0.7422 = 0.5 + P(0 \le Z \le b)$$

$$P(0 \le Z \le b) = 0.7422 - 0.5 = 0.2422 \Rightarrow \boldsymbol{b = -0.65}$$

$$\begin{cases} a = -0.95 \\ b = -0.65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.95 = \dfrac{3.1-\mu}{\delta} \\ -0.65 = \dfrac{3.7-\mu}{\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.95\delta = 3.1-\mu \\ -0.65\delta = 3.7-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\mu = 5} \\ \boldsymbol{\delta = 4} \end{cases}$$

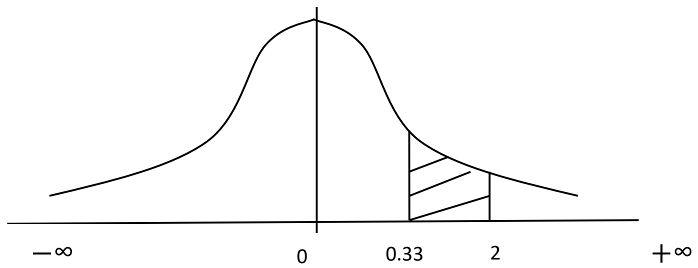
حل التمرين 07:

T متغير عشوائي يتبع القانون العادي حيث :

$$T \backsim N(\mu;\delta)$$
$$Z_i = \frac{x_i-\mu}{\delta} \backsim N(0;1)$$

1- حساب الاحتمال التالي :

$$P(21 \le T \le 26) = P\left(\frac{21-\mu}{\delta} \le \frac{x-\mu}{\delta} \le \frac{26-\mu}{\delta}\right) = P(0.33 \le Z_i \le 2)$$
$$= P(0 \le Z_i \le 2) - P(0 \le Z_i \le 0.33) = 0.4772 - 0.1293 = \mathbf{0.3476}$$



2- حساب عدد الأيام التي تكون فيها درجة الحرارة مابين 21° و 26° :

$$P(21 \le T \le 26) * 30jours = 0.3476 * 30 = \mathbf{11jours}$$

حل التمرين 08 :

نفرض أن :

x_i متغير عشوائي يمثل وزن الأشخاص ويتبع التوزيع العادي بمتوسط 66 كلغ وبانحراف معياري 5 كلغ .

n : عدد الأشخاص (800)

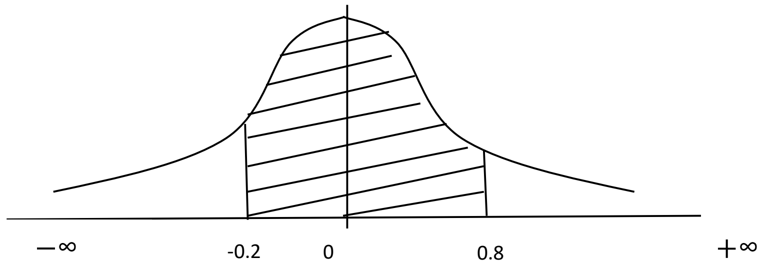
$$X_i \backsim N(\mu=66;\delta=5)$$
$$Z_i = \frac{x_i-\mu}{\delta} \backsim N(0;1)$$

1- حساب عدد الأشخاص الذين لديهم وزن مابين 65 كلغ و 70 كلغ :

* حساب احتمال أن وزن الأشخاص مابين 65 كلغ و 70 كلغ :

$$P(65 \leq X_i \leq 70) = P\left(\frac{65-66}{5} \leq Z_i \leq \frac{70-66}{5}\right) = P(-0.2 \leq Z_i \leq 0.8)$$

$$= P(0 \leq Z_i \leq 0.2) + P(0 \leq Z_i \leq 0.8) = 0.0793 + 0.2881 = \mathbf{0.3674}$$



* إذن عدد الأشخاص الذين لديهم وزن مابين 65 كلغ و 70 كلغ هو :

$P(65 \leq X_i \leq 70) * \mathrm{n} = 0.3674 * 800 = \mathbf{297}$ شخص

2- حساب عدد الأشخاص الذين لديهم وزن أكبر أو يساوي 72 كلغ :

* حساب احتمال أن وزن الأشخاص أكبر أو يساوي 72 كلغ :

$$P(x \geq 72) = P\left(\mathrm{Z} \geq \frac{72-66}{5}\right) = P(Z \geq 1.2) = 0.5 - P(0 \leq Z_i \leq 1.2) = 0.5 - 0.3849$$

$$= \mathbf{0.1151}$$

* إذن عدد الأشخاص الذين لديهم وزن أكبر أو يساوي 72 كلغ :

$P(x \geq 72) * \mathrm{n} = 0.1151 * 800 = \mathbf{92}$ شخص

حل التمرين 09 :

نفرض أن :

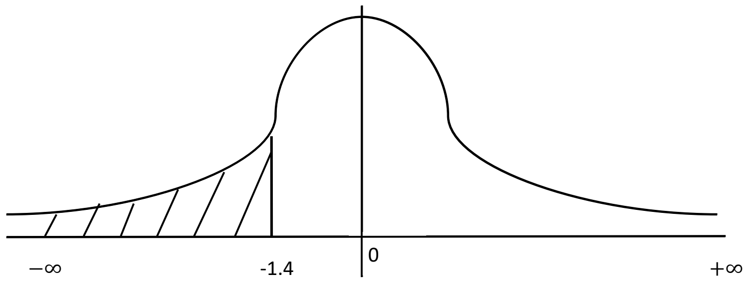
x_i متغير عشوائي يمثل عمر بطاريات صغيرة ويتبع التوزيع العادي بمتوسط 30 ساعة وبانحراف معياري 5 ساعات .

$$X_i \backsim N(\mu = 30; \delta = 5)$$
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0;1)$$

* حساب احتمال أن تعيش بطارية ما أقل من 23 ساعة :

$$P(x < 23) = P\left(Z_i \leq \frac{23-30}{5}\right) = P(Z < -1.4) = 0.5 - P(0 \leq Z_i \leq 1.4)$$

$$= 0.5 - 0.4192 = \mathbf{0.0808}$$



حل التمرين 10 :

نفرض أن :

x_i متغير عشوائي مستمر يمثل عمر بطاريات صغيرة ويتبع التوزيع العادي حيث :

$$X_i \sim N(\mu; \delta)$$
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \sim N(0; 1)$$

ولدينا كمعطيات : $P(x_i < 38) = 0.9452$ و $P(x_i > 36) = 0.1151$

* حساب التوقع الرياضي μ والانحراف المعياري δ :

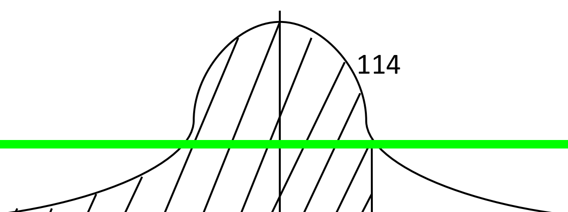
$$\begin{cases} P(x < 38) = 0.9452 \\ P(x > 36) = 0.1151 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\left(Z < \frac{38-\mu}{\delta}\right) = 0.9452 \\ P\left(Z > \frac{36-\mu}{\delta}\right) = 0.1151 \end{cases}$$

نضع : $a = \frac{38-\mu}{\delta}$ و $b = \frac{36-\mu}{\delta}$

$$\begin{cases} P(Z < a) = 0.9452 \\ P(Z > b) = 0.1151 \end{cases}$$

* $P(Z < a) = 0.9452$

(إشارة المعادلة أصغر والاحتمال أكبر من 0.5 إذن قيمة a موجبة)

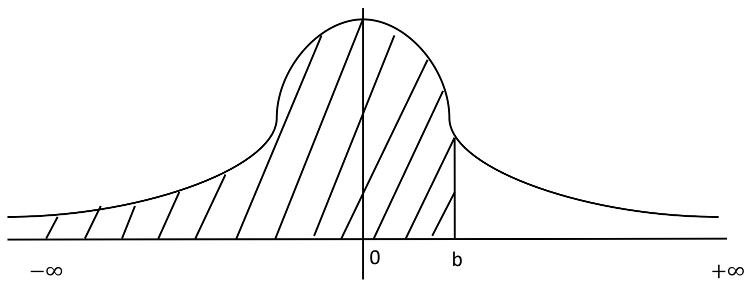


$$0.9452 = 0.5 + P(0 \leq Z \leq a)$$

$$P(0 \leq Z \leq a) = 0.9452 - 0.5 = 0.4452 \Rightarrow \boldsymbol{a = 1.6}$$

$* \quad P(Z > b) = 0.1151$

(إشارة المعادلة أكبر والاحتمال أصغر من 0.5 إذن قيمة b موجبة)



$$0.1151 = 0.5 - P(0 \leq Z \leq b)$$

$$P(0 \leq Z \leq b) = 0.5 - 0.1151 = 0.3849 \Rightarrow \boldsymbol{b = 1.2}$$

$$\begin{cases} 1.6 = \dfrac{38-\mu}{\delta} \\ 1.2 = \dfrac{36-\mu}{\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.95\delta = 3.1 - \mu \ \ldots\ldots\ldots.(1) \\ -0.65\delta = 3.7 - \mu \ \ldots\ldots\ldots.(2) \end{cases}$$

نطرح المعادلة رقم (1) من المعادلة رقم (2) نجد :

$$0.4\delta = 2 \Rightarrow \boldsymbol{\delta = 5}$$

$$1.6\delta = 38 - \mu \Rightarrow \mu = 38 - 1.6(5) = 30 \Rightarrow \boldsymbol{\mu = 30}$$

$$X_i \backsim N(\mu = 30; \delta = 5)$$
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0;1)$$

* حساب احتمال أن تعيش بطارية ما أقل من 23 ساعة :

$$P(x < 23) = P\left(Z \leq \frac{23-30}{5}\right) = P(Z < -1.4) = 0.5 - P(0 \leq Z_i \leq 1.4)$$
$$= 0.5 - 0.4192 = \mathbf{0.0808}$$

حل التمرين 11 :

نستخلص المعطيات التالية :

n : عدد التجارب : .n=80

p : احتمال النجاح : إجابة صحيحة من أربعة أجوبة $p = 0.25$

q : احتمال الفشل : ثلاثة أجوبة خاطئة من أربعة $q = 1 - p = 0.75$

نفرض أن :

x_i متغير عشوائي منفصل يمثل الأجوبة الصحيحة ويتبع توزيع ذو الحدين .

$$X_i \backsim B(n = 80, p = 0.25)$$

* حساب احتمال أن يكون الطالب قد أجاب على 25 إلى 30 سؤال بصورة صحيحة :

$$P(23 \leq x_i \leq 30) = ?$$

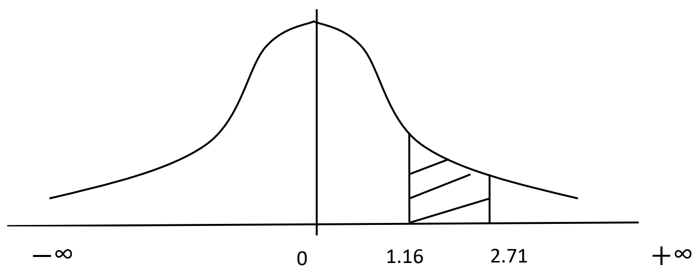
بما أن شروط تقريب توزيع ذو الحدين إلى توزيع العادي محققة و التي هي :

$$n > 50 \quad \text{و} \quad n * p = 80 * 0.25 = 20 > 5$$

إذن **نقوم بتقريب توزيع ذو الحدين إلى توزيع العادي** حيث :

$$X_i \backsim N\left(\mu = n * p = 20; \delta = \sqrt{npq} = \sqrt{15}\right)$$
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \backsim N(0;1)$$

$$P(25 - 0.5 \leq x_i \leq 30 + 0.5) = P(24.5 \leq x_i \leq 30.5)$$
$$= P\left(\frac{24.5-20}{3.87} \leq Z_i \leq \frac{30.5-20}{3.87}\right) = P(1.16 \leq Z_i \leq 2.71)$$
$$= P(0 \leq Z_i \leq 2.71) - P(0 \leq Z_i \leq 1.16) = 0.4966 - 0.3770 = \mathbf{0.1196}$$



المراجع:

- عرباوي خيرة (1987-1991) تكوين ليسانس في الاقتصاد القياسي.
- بوكعبار بوجلال (1996-2003) النماذج الإحصائية و تحليل البيانات : دروس و تطبيقات.
- فريق إحصاء 3 : عرباوي خيرة – بوناب علي- بن لحسن هواري دروس و تطبيقات منسقة.
- José Destours (2003) « Outils d’aide à la décision ».
- Labrousse Christian (1996) « Statistique ».
- Maurice Telhielleux (2010) « Probabilités ».
- Série Schaum « Probabilités : Cours et Problèmes ».