UNIVERSITE ORAN 2

FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES, DES SICIENCES

COMMERCIALES ET DES SCIENCES DE GESTION

MATHEMATIQUES FINANCIERES

INTRODUCTION ELEMENTAIRE

MOHAMED KENNICHE

Maitre de Conférences A

Année 2021

Avant- propos

L'objet des mathématiques financières est d'appliquer les outils mathématiques dans l'étude des opérations au cours desquelles les agents économiques prêtent, empruntent des capitaux afin d'investir et de réaliser un rendement. Dans toutes les circonstances ces opérations conduisent les agents à prendre des décision dans des situations risquées.

Parmi les opérations on peut citer en premier lieu les opérations de prêt à court termes à l'Etat, aux entreprises et aux particuliers. Dans le court terme le Trésor Public émet des obligations zéro-coupon, l'entreprise escompte des effets de commerce Ces deux opérations sont faites pour financer les déficits de trésorerie (besoin financier de court terme). Les particuliers contractent des dettes à court termes pour financer la consommation ou comme on dit dans le langage populaire, pour « arrondir » les fins de mois.

Dans le long terme les emprunts peuvent se faire au niveau des banques (finance intermédiée) ou au niveau des marchés financiers par émissions d'obligation ou d'action (finance directe).

Les obligations peuvent être émises par l'Etat, les grandes entreprises publiques et privées et les organismes collecteurs d'épargne. Une théorie relative à l'étude de cette catégorie de titre a été développée. Les résultats qu'elle a fourni est le calcul des taux effectifs de placement ou taux actuariel. Cette notion est mise en avance pour orienter les décisions des investisseurs. Sur le plan théorique, le développement des concepts de duration, de sensibilité et de convexité des obligations permet de prévoir l'évolution future des taux de rendement.

Les actions sont émises par les grades firmes. Elles constituent un moyen de financement de long terme. Cependant, le placement en action reste une opération plus risquée que l'achat d'obligation. Les coupons d'intérêt sont certains, les dividendes sont en général probables. Le risque lié à un titre est compensé par son rendement.

De nombreuses théories d'évaluation actuarielle des actions autrement dit de calcul de leur valeur de marché ont été développées depuis les années 1950. Le modèle Gordon Shapiro est le modèle le plus populaire. Il évalue le prix d'une action sur la base de la valeur actuelle des flux monétaires qu'elle permet à son porteur de réaliser.

L'approche de Gordon Shapiro a été faite sur la base de nombreuses hypothèses. Cette limite a ouvert la voie à de nombreuses recherches Bates (1962), Molodovsky (1960)[1],

Les outils des mathématiques financières et plus généralement de la finance ont connu ces dernières années un essor fulgurant. Ce développement provient de l'innovation qu'a connue le secteur des produits financiers.Cette innovation s'est accompagnée d'une grande complexité dans la compréhension de ces nouveaux produits.

Ce travail est le fruit de notre enseignement des mathématiques financières et des matières qui leur sont proche telle que la finance de marché, la gestion de porte de feuille et les marchés de change. L'enseignement de ces matières fait parties des programmes de la licence et des Master des sciences économiques.

Le travail est présenté en huit chapitres. Les trois premiers sont consacré aux opérations financières de court terme autrement dit où il n'y a pas de capitalisation des intérêts. L'opération se limite à une seule période. C'est le cas des obligations zéro-coupon, des placements à intérêt simple et de l'escompte.

La deuxième partie aborde les opérations financières de long terme. Autrement dit, chaque opération peut être considérée comme une somme actuelle d'une suite finie ou infinie de zéro-coupon. Les emprunts indivis, les emprunts obligataires ainsi que l'évaluation des actions sont largement étudiés. Des exemples d'application tel que le choix des investissements, les prêt hypothécaires, le rééchelonnement des dettes occupe une large place.

Dans les exemples qui accompagnent le cours nous avons essayé de donner des exemples avec des valeurs qui soient proche de la réalité financière et bancaire algérienne. Chaque chapitre comporte une série d'exercices et problèmes. Ils ont été classés suivant le critère de difficulté croissante. Il est souhaitable de recourir au logiciel Excel pour les résoudre. Enfin, une grande partie de ces exercices a été résolue dans le cadre des travaux dirigés de mathématiques financières et de finance de marché. Ces modules sont actuellement enseignés à différents niveaux au département des sciences économiques de l'université Oran 2.

Le contenu de ce travail constitue un prérequis indispensable pour aborder de nombreux domaines : la fiance moderne, la finance de marché, la gestion de portefeuille, la théorie des assurances, la gestion de patrimoine….

Pour concevoir le contenu de ce travail, nous nous sommes limités au programme officiel de l'université Oran-2. Des chapitres qui ne font pas partie des programmes enseignés ; ne figurent pas dans ce travail. Il s'agit essentiellement des opérations financières en avenir incertain, les instruments financiers à taux variable, les marchés à

[1] Pour une présentation des différents développement du modèle de Gordon Shapiro, on peut consulter l'ouvrage de Viviani J L « Gestion de portefeuille » cité en bibliographie de ce cours.

terme, les instruments financiers conditionnels, la gestion de portefeuille. Tous ces aspects qui constituent un développement de la finance moderne font l'objet d'un travail qui est en cours de préparation.

Les instruments de la finance islamique ou finance alternative n'ont pas été abordés dans le cadre de ce travail.

En Algérie, le secteur financier reste largement sous développé les produits proposés se limitent aux opérations de prêt et d'emprunt de placement dans des obligations émises par l'Etat. La bourse d'Alger reste à l'état embryonnaire. Cette situation génère une certaine frustration au niveau de l'enseignement de la finance. En effet, il est difficile d'illustrer les résultats théoriques par des exemples provenant de la pratique financière algérienne.

Oran, décembre 2021

à

a

Tables des matières

page

Chapitre premier : l'intérêt simple

1-Notion d'intérêt

La notion d'intérêt revoie à la notion de capital. En effet un capital représente une somme d'argent placée ou en d'autres termes investie pendant une certaine durée de temps. Dans le cas de l'intérêt le placement peut se faire au niveau d'une banque ou niveau du marché financier. Dans le premier cas la personne prête son capital à la banque, dans le deuxième cas elle prête son capital à l'émetteur de l'obligation. Dans les deux situations la personne qui a réalisé le placement, perçoit une rémunération monétaire appelée intérêt. Cette rémunération peut être obtenue au début ou à la fin de durée du placement.

L'intérêt trouve sa justification dans le fait que le créancier en mettant à la disposition du débiteur ou de l'emprunteur le capital, se retrouve privé de l'usage de cette somme d'argent pendant toute la durée du placement. Si le prêteur est un consommateur, alors tout placement d'argent revient à une renonciation de consommationprésente. L'intérêt que reçoit le créancier compense cette privation et incite les consommateurs à différer leur consommation. D'une manière identique, une personne qui loue un bien (logement, voiture,..)est privée de l'usage du bien pendant toute la durée de sa location. En contrepartie le locateur s'acquitte d'un loyer. Dans ce sens l'intérêt est appelé loyer de l'argent.

Une deuxième justification de l'intérêt est liée à l'inflation. En effet une somme d'argent prêtée aujourd'hui ; si elle est remboursée dans une année, son pouvoir d'achat peut diminuer au terme de la durée du placement. Ainsi, la somme remboursée est nominalement égale à la somme prêtée ; cependant elle ne lui est pas équivalente. Le prix de la monnaie est l'inverse des prix des biens. Quand ces derniers augmentent, la valeur de la monnaie diminue.

2 Taux d'intérêt :

Ils existent différents taux d'intérêt : des taux d'intérêt débiteurs et des taux d'intérêt créditeurs. Lorsque l'opération bancaire est à intérêt, si elle est créditrice autrement dit elle est enregistrée au passif du bilan de la banque on lui applique un taux créditeur pour calculer les intérêts. A l'opposé, toute opération bancaire à intérêt enregistrée à l'actif du bilan de la banque on lui applique un taux débiteur. Ce dernier est toujours supérieur au taux créditeur. En Algérie, les taux d'intérêt sont règlementés par la Banque d'Algérie. Cette dernière fixe un niveau moyen et un seuil excessif[2]. Les banques sont tenues d'appliquer des taux qui se situent dans cette fourchette. Sur le plan économique, les taux d'intérêt se déterminent au niveau des différents marchés monétaire et financier par la confrontation de l'offre de fonds des agents à capacité de financement et la demande des agents à besoin de financement.

3 Calcul de l'intérêt.

L'intérêt est fonction du capital placé, de la durée du placement et du taux d'intérêt.

- Le capital est noté C il est exprimé en monnaie
- La durée n peut être le nombre d'années, de mois, de jour,..Quand la durée est exprimée en jours et comprise entre deux dates ; on compte le nombre de jours qui séparent les deux dates extrêmes en négligeant l'une de ces deux dates.
- Le taux d'intérêt test donné en pourcentage : nombre d'unités monétaire d'intérêt pour un capital de 100 unités monétaires.
- ireprésente l'intérêt. Ce dernier est proportionnel au trois facteur précédents.

Dans la décision de placement, l'investisseur décide suivant sa situation du montant à placer et de la durée du placement. Le taux d'intérêt se détermine au niveau du marché monétaire.

L'intérêt i est donné par la formule suivante :

$$i = C.t.n \qquad (1)$$

Exemple :

Un capital de 1 000 UM est placé pendant 18 mois au taux de 6%. Calculer l'intérêt obtenu à la fin de la durée de ce placement.

En appliquant la formule (1) on obtient :

[2] Voir note de la Banque d'Algérie du 16 juin 2021 relative aux seuils des taux d'intérêt excessifs adressée aux banques et établissements financiers.

$i = 1000 \times 0.06 \times 1.5 = 90$ UM

Dans l'application de la formule (1) la durée doit correspondre au taux d'intérêt donné. Dans l'exemple, le taux d'intérêt est annuel et la durée est mensuelle (18 mois) ; exprimée en années : 18 mois = 1.5 années. Quand la durée du placement est exprimée en mois et le taux d'intérêt est annuel, on peut utiliser la formule ci-dessous et obtenir le même résultat.

$$i = \frac{C.t.n}{12} \quad (1')$$

Quand la durée du placement est exprimée en jours on divise la formule (1) par 360. Par convention, on considère que le nombre de jours que compte l'année est de 360 jours. Cette pratique est utilisée depuis l'antiquité défavorise l'emprunteur. L'année de 360 jours est appelée année Lombarde. Son utilisation revient au moyen âge.

$$i = \frac{C.t.n}{360} \quad (1'')$$

4Modalités de paiement des intérêts

En général, les intérêts sont payés à l'échéance du placement. Dans ce cas ils sont appelés intérêt post-compté. Cependant, dans certaines situations le débiteur et le créditeur peuvent s'entendre pour un paiement des intérêts à l'avance c'est-à-dire le premier jour de la durée du placement. Les intérêts sont dits précomptés. Exemple une obligation-zéro coupon peut être émise à un prix de 950 UM et rachetée à 1000 UM. Le souscripteur reçoit 50 UM d'intérêt le jour de l'achat de l'obligation. A l'échéance de l'obligation qui ne doit pas dépasser une année il encaisse 1000 UM. Dans cette opération le taux d'intérêt est de 5 %.

5-Valeur acquise d'un placement.

La valeur acquise ou valeur future d'un placement est la somme que reçoit l'investisseur à l'échéance de la durée du placement. Cette somme est égale au capital placé augmenté des intérêts. Ainsi, un placement à intérêt simple peut être défini comme un vecteur de dimension 2, où la première composante est c_0 , la deuxième est c_n. A l'opposé, un emprunt est un vecteur avec les mêmes composantes mais de signe opposés

Si on note par $C_n$la valeur acquise et par C_0 le capital placé on peut donner la formule qui permet le calcul de C_n :

$$C_n = C_0 + C_0.t.n \quad (2)$$

$$C_n = C_0(1+tn) \quad (2)'$$

a

Dans la formule (2), on voit que la valeur acquise est exprimée par une fonction linéaire de n, les autres variables sont supposées constantes durant la durée n. Ainsi $C_n$croit avec n.

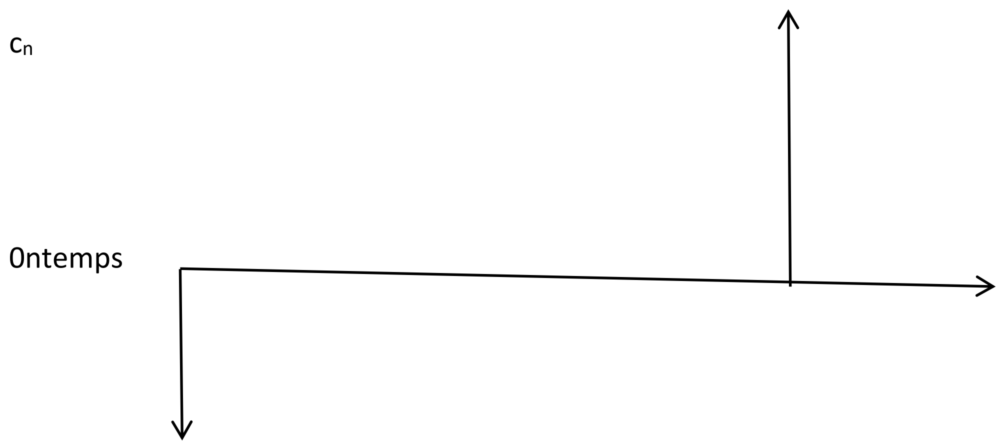


Figure-1 : situation du créancier.

Dans la fugure-1 la valeur C_0 représente le capital placé ou la valeur présente (actuelle) elle constitue un flux monétaire négatif pour l'investisseur. C_n est la valeur future ou valeur à l'échéance. Elle constitue un flux monétaire positif. A l'opposé l'emprunteur est dans une situation inverse. Au temps 0, il reçoit C_0 . A la date il rembourse C_n.

6 Valeur actuelle d'un placementTapez une équation ici.

C'est la valeur initiale ou valeur à la date 0 elle est égale au capital placé. On peut la déduire de C_n.

$$C_0 = \frac{Cn}{1+t.n} \quad (3)$$

D'après (3) C_0 décroit avec n. Autrement dit quand n tend vers l'infini, C_0 tend vers 0

1-7 Taux d'intérêt effectif

a

Le taux d'intérêt effectif est calculé quand les intérêts sont précomptés. Il s'agit du taux réellement appliqué à l'opération. Le taux annoncé par la banque quand les intérêts sont précomptés constitue un taux nominal. En effet pour les intérêts payés d'avance, le capital réellement placé est égal à la valeur actuelle auquel C_0 auquel il faut déduire les intérêts puisqu'ils sont payés au temps 0. Cependant les intérêts versés ont été calculés sur la base de C_0. Ce dernier ne constitue pas le capital réellement placé. Le taux d'intérêt effectif ou réel noté t_r est le taux, qui appliqué au capital effectivement placé pendant une durée n donne les intérêts effectivement encaissés par le créancier.

Capital effectivement placé : $C_0 – C_0.t.n = C_0(1\text{-}tn)$

Intérêts encaissés : $i = C_0.t.n$.

Le taux d'intérêt effectif est t_r ainsi on peut écrire en appliquant (1)

$C_0(1\text{-}tn)t_r.n = C_0.t.n.$

$t_r = \frac{t}{1-tn}$(4)

Le taux t_r est équivalent à t. Autrement dit,si vous placer votre capital au taux t avec intérêts post comptés ou au taux d'intérêt effectif t_r avec intérêt précomptés ; si la durée des deux placements est égale ; vous réaliser le même rendement pour les deux opérations.

Le calcul du taux d'intérêt effectif est utilisé pour comparer le rendement de placements différents dont certains sont à intérêt précompté et d'autres à intérêt post-compté. Sur le marché primaire, l'émission des bons du trésor à taux fixe se fait en général avec intérêt précomptés. Cependant, sur le marché secondaire ces bons sont négociés avec intérêts post comptés.

Exemple vous désirer placer 10000 UM. La banque A vous propose un taux d'intérêt de 4.2 % et les intérêts sont payables à l'échéance de l'opération. La banque B quant à elle pratique l'intérêt précompté avec un taux de 4% . La durée du placement est de 18 mois. Quelle est la meilleure offre ?

Pour comparer entre les offres des deux banques, on calcule le taux d'intérêt effectif pour la banque B qui pratique l'intérêt précompté. Ainsi en appliquant (4)et en exprimant la durée en années on calcule t_r comme suit :

$t_r = \frac{0.04}{1-0.04\text{x } 1.5}$ =0.0425 soit 4.25 %

La banque B présente la meilleure offre. Le taux nominal quelle affiche est de 4 %. Cependant comme les intérêts sont précomptés tout se passe comme si le placement est effectué à un taux de 4.25 % supérieur à 4.2 % taux appliqué par la banque A.

8-Taux d'intérêt moyen

Quand on possède différents placement de même nature (à intérêt simple, intérêt composé) mais de durées différentes ; dans une même banque, on peut théoriquement demander au banquier d'appliquer un taux moyen à l'ensemble des placements. L'application d'un taux unique facilite la gestion de ces placements. Cette méthode ne modifie pas l'intérêt global des placements. Ainsi on note C_1, C_2, …C_k , …C_P les différents placements. Les taux d'intérêt simple et les durées des placements sont respectivement : t_1 , t_2 , …t_k ,..t_p. et n_1 , n_2,…n_k,…n_p. L'intérêt total de tous ces placement est égal à :

$i = C_1t_1n_1 + C_2t_2n_2+…+ C_kn_kt_k +…+ C_Pn_pt_p$

$= \sum_k^p \quad C_kn_kt_kK = 1$ à p.

On note le taux d'intérêt moyen $\bar{\text{ı}} = \frac{\sum_k^p C_kn_kt_k}{\sum_k^p C_kn_k}$ (5)

9 Application de la notion d'intérêt simple

En général, on applique la notion d'intérêt simple pour les opérations bancaires et financières dont la durée est inférieure à une année. Autrement dit les opérations de court terme. Dans ces dernières il y a absence de capitalisation des intérêts. Ainsi, les bons de caisse, les obligations zéro coupon dont la durée n'excède pas une année sont à intérêt simple. Les comptes courants et d'intérêt, les compte d'épargne, l'escompte des effets de commerce ; sont à intérêt simple.

Exercices et problèmes :

1-Une personne emprunte 4000 UM pour quatre mois à un taux d'intérêt de 8 %. Calculer le montant que cette dernière devra remettre à l'échéance.

2-Un créancier a reçu sur une période de deux ans un montant de 11900 UM sur un prêt de 10000 UM .

a- Quel est le taux d'intérêt simple appliqué par le prêteur.
b- Quel est le taux d'intérêt simple, si le prêteur applique un taux d'intérêt mensuel est si la durée est de 18 mois.

3- Pendant combien de jours devrez-vous prêter 25000 UM à un taux de 7 % à intérêt simple pour recevoir 350UM d'intérêt.

4- Un placement de 10000 UM est réalisé à intérêt simple. Le taux d'intérêt est de 6%. La durée est égale à 2 années. Les intérêts sont postcomptés.

a- Calculer les intérêts
b- Calculer la valeur acquise (valeur encaissée par l'investisseur à l'échéance du placement)

5- Un placement de 20000 UM est fait à intérêt simple. Le taux d'intérêt est de 4 %. La durée du placement est de 26 mois.

a- Calculer les intérêts
b- Calculer la valeur acquise.

6- Un placement de 30000 UM est réalisé avec un taux d'intérêt semestriel de 1.5 %. La durée du placement est de 23 mois .

a- Calculer les intérêts et la valeur acquise.
b- En supposant que les intérêts sont précomptés, calculer le taux d'intérêt effectif.
c- Reprendre l'exercice en supposant un taux mensuel de 0.5 %.

7-Une personne, suite à l'achat d'un appareil électroménager a le choix entre payer comptant le montant de la facture qui est de 50000 UM ou de 52400 UM dans 146 jours. Une banque lui propose le financement de cet achat par un crédit à intérêt simple au taux de 9.25 %. Que conseillerez-vous à cette personne ? Justifier votre réponse.

8-Avec les données de l'exercice-5 et en supposant que les intérêts du placement sont précomptés, calculer :

a- les intérêts
b- le capital effectivement placé
c- la valeur acquise.
d- le taux d'intérêt effectif.

9- Un bon du trésor à taux fixe (BTF) dont l'échéance est à 32 semaines a pour valeur nominale(le montant notionnel) 5000 000 UM. Les intérêts sont précomptés, le taux appliqué est de 5 %.

a- Calculer le prix que doit payer le souscripteur à ce bon
b- Sachant que ce bon est cédé 30 jours plus tard sur le marché secondaire, calculer le prix que doit payer le nouvel acquéreur. Le taux du marché est de 8 %.

10-Une personne à sollicité un crédit auprès de la banque BEA. Le montant du crédit est de 1000.000 UM. Le taux d'intérêt simple semestriel est de 4 %. La durée du crédit est de 25 mois.

a- Calculer les intérêts que doit payer l'emprunteur
b- Le montant total à rembourser à l'expiration de la durée du crédit.
c- Si les intérêts étaient payés d'avance, calculer la somme que reçoit l'emprunteur.
d- Calculer le taux d'intérêt effectif du crédit.

11- Une banque a octroyé un crédit d'un million de dinars algériens. La durée de ce crédit est d'une année. Le taux d'intérêt simple appliqué par la banque est de 8 %. En plus des intérêts, l'emprunteur paye le jour de l'obtention de ce crédit une commission bancaire de 10000 dinars. En supposant que les intérêts sont soumis à la TVA taux de 19 %.

a- Calculer les intérêts de ce prêt.
b- Calculer le taux d'intérêt effectif global hors taxe de cette opération
c- Calculer le coût de revient de ce crédit pour l'emprunteur. Par définition le coût de revient est la somme des intérêts et des différentes commissions bancaires et de tous les droits et taxe à la charge de l'emprunteur.

12- Une personne a réalisé 6 placements dans une même banque.

Le premier placement de 10000 UM, durée 6 mois, taux d'intérêt 5 %

Le deuxième placement de 20000 UM, durée 2 ans, taux d'intérêt 4 %

Le troisième placement de 6000 DA, durée 5 mois taux d'intérêt 7 %

Le quatrième placement de 12000 UM, durée 15 mois taux d'intérêt 8 %

13- Un capital C est partagé en trois parts C_1, C_2 et C_3 . Ces parts constituent une progression arithmétique. Sachant que C_1 est dans une proportion égale à 70 % de C_3

a- Déterminer la proportion de C_2 relativement à C_3 et en déduire la raison de la progression arithmétique.
b- Les trois parts C_1, C_2 et C_3 ont été placées dans une même banque aux taux d'intérêt simple respectifs t_1,t_2 et t_3. Ces trois taux forment une progression géométrique dont la somme des termes est de 36.4 %. Par ailleurs, on sait que l'intérêt annuel rapporté par C_1 et l'intérêt annuel rapporté par C_2 ; sont proportionnels aux nombre 84 et 85. Calculer les trois taux d'intérêt et calculer leur moyenne.

14- Trois capitaux en progression arithmétique ont été placépendant un an au taux d'intérêt simple. L'intérêt total produit est de 180 UM. Sachant que la différence entre le troisième et la premier capital est de 3000 UM.

Calculer les trois capitaux.

15-Un capital de 8000 UM a été placé à intérêt simple au taux de 12 %. Quatre mois plus tard, un deuxième capital de 8250 UM a été placé au taux de 10 %.

a- Calculer la durée en mois qui permet à la valeur acquise du premier placement de dépasser la valeur acquise de deuxième placement d'un montant de 250 UM.
b- Reprendre la question précédente en supposant un taux d'intérêt du deuxième placement égal à t_2

16- Le 2 janvier 2020, une personne réalise un placement bancaire à intérêt simple de 20000 UM. Le taux d'intérêt est 3.5 %. Le 31 décembre 2020, elle retire le capital initialement placé et encaisse les intérêts.

a- Calculer ces intérêts
b- Calculer la valeur acquise le 31 décembre 2020.
c- En 2020, le taux d'inflation annuel moyen a été de 2.4 %. Calculer la valeur acquise déflatée.
d- Quel est le taux d'intérêt réel (taux nominal déflaté) du placement.

17- Le deux janvier 2016, une personne ouvre un compte d'épargne logement selon les conditions suivantes :

Le dépôt initial est de 20000 UM. Il est réalisé le jour de l'ouverture du compte. Le taux d'intérêt annuel est de 3.5 %. A la suite de ce premier dépôt, l'épargnant effectue une suite de versements trimestriels de 10000 UM. Le premier versement est fait le 1 avril 2016, le deuxième versement est daté du 1 juillet 2016 ainsi de suite. Le dernier versement est réalisé le 1 octobre 2021. Le 31 décembre 2021 l'épargnant se voit remettre par sa banque toutes les sommes qu'il a versé augmentées des intérêts produits et d'une prime égale à 30000 UM.

a- Calculer le montant total des intérêts (la durée à utiliser doit être le trimestre exprimé en année)
b- Calculer la valeur acquise.
c- En tenant compte de la prime, calculer le taux d'intérêt effectif.

Rappel : $\sum \mathrm{k} = \frac{n(n+1)}{2}$ avec kun entier variant de 1 à n.

18 – Un emprunt est amorti par 5 annuités annuelles de fin de période.Ces annuités varient suivant une progression géométrique de raison égale à 1.2. Sachant que le dernier versement est de 20736 UM et l'intérêt global versé durant les 5 années est de 25000 UM. Calculer :

a- Le taux d'intérêt simple
b- Le montant de l'emprunt.

19- Deux capitaux ont été placés le même jour à intérêt simple. Le premier est d'un montant de 10000 UM avec un taux d'intérêt annuel de 8 %. Le deuxième a une valeur de 9800 UM et il a été placé au taux de 9.18 %.

a- Déterminer la durée de placement n en années qui permet à ces deux capitaux d'arriver à la même valeur acquise.
b- Représenter graphiquement la solution. (en ordonnés en représente la valeur acquise et les abscisses représente la durée en années)
c- Déterminer n en supposant que le premier capital est x et son taux de placement est t_x. Le deuxième capital est noté y et son taux d'intérêt est t_y.
d- Discuter les conditions qui permettent d'arriver aux solutions possibles.

20- Un capital x placé pendant 25 ans à intérêt simple au taux t % a produit une valeur acquise A. Un deuxième capital y, placé pendant 10 ans au taux t % une valeur acquise A.

a- A donné évaluer x en fonction de y et y en fonction de x
b- Sachant que x est les 2/3 de y calculer la valeur de t.
c- En remplaçant A par 1 et en supposant que t est strictement positif. Etudier les variations de la fonction x en fonction de t.

Annexe : Suites arithmétiques et suites géométriques

1-Suites arithmétiques :

U_n est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout n appartenant à l'ensemble des entiers naturels :

$U_{n+1} = U_n + r$.

Ou plus généralement, pour tout n et p, deux entiers naturels on a :

$U_n = U_p + (n-p)r$

Somme des termes d'une suite arithmétique :

Pour tout entier n : $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Et : $U_p + U_{p+1} + \ldots\ldots + U_n = \frac{Up+Un}{2}\ (n-p+1)$.

2-Suites géométriques :

U_n est une suite géométrique si et seulement si, il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n alors ;

$U_{n+1} = U_n.q$.

$U_n = U_0.q^n$

Ou plus généralement :

$U_n = U_p.\ q^{n-p}$

Somme des termes d'une suite géométrique : q^{n+1}

$1+q+q^2+\ldots.+q^n = \frac{1-qn+1}{1-q}$avec a$\neq 1$

Si q= 1 alors : $\frac{1-qn+1}{1-q}$ = n+1

a

$U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = U_p \frac{1-qn-p+1}{1-q}$

Chapitre deuxième : l'escompte à intérêt simple

L'opération d'escompte revoit à la notion d'effets de commerce ou plus généralement titre de créance. En effet, l'escompte est une opération qui permet de liquider un effet de commerce avant son échéance. Ou en termes comptables, permet de transformer des valeurs réalisables en valeurs disponible. Cette opération se fait moyennant un coût appelé l'escompte.

Ainsi, escompter un effet de commerce[3] (billet à ordre, traite, ou lettre de change) est une opération par laquelle une personne, une banque,… avance le montant de cet effet qui est non échu moyennant une retenue qui sera fonction d'un taux d'escompte et de la durée qui reste à courir pour le billet à ordre. Cette durée s'étale de la date de l'opération d'escompte à l'échéance de l'effet.

L'escompte permet de rendre liquide les effets de commerce avant leur échéance. A cet effet, il est souvent utilisé par les entreprises comme moyen pour résorber leurs difficultés de trésorerie. En effet, l'opération d'escompte porte sur le bas de l'actif du bilan de l'entreprise. Il permet de transformer certaines valeurs réalisables en valeurs disponibles.

L'escompte en permettant aux porteurs d'effets de commerce de pouvoir encaisser à tout moment leur valeur actuelle ; facilite leur acceptation et leur négociation sur les marchés des effets à cours termes. C'est dans ce sens qu'on les nomme titres de créances négociables(TCN)

Ils existent deux types d'escompte : l'escompte commercial et l'escompte réel ou rationnel. Le premier est pratiqué par les banques, le deuxième reste un escompte théorique réservé à l'analyse.

<u>1 L'escompte commerciale</u>

---

[3] Un effet de commerce peut prendre la forme:

- D'une traite ou lettre de change, quand il est d'abord établi par le créancier, puis accepté et signé par le débiteur.
- D'un billet à ordre quand il est directement établi et signé par le débiteur et remis au créancier.

a- L'escompte

Le calcul de l'escompte commercial noté e nécessite :

La valeur nominale, définitive ou à l'échéance de l'effet à escompter ; elle représente la somme d'argent que peut recevoir le porteur de l'effet à l'échéance de ce dernier. La valeur nominale est notée V.

Le taux d'escompte t exprimé en % relativement à une période de temps.

La durée d'escompte s'étale de la date de l'escompte à l'échéance du titre. Elle est notée n

Ainsi e sera égal à :

$$e = V.\ t.\ n \qquad (1)$$

L'application de la formule (1) exige que t correspond à n. Pour un taux annuel, la durée doit être exprimée en années, un taux mensuel nécessite une durée en mois… Si le taux d'escompte est annuel et la durée de l'escompte est exprimée en jours, la formule (1) devient :

$$e = \frac{V.t.n}{36000} (1')$$

En divisant le numérateur et le dénominateur de (1') par t et posant 36000/t égale à N, on obtient :

$$e = \frac{V.n}{D} (1'')$$

b- La valeur actuelle de l'effet de commerce

La valeur actuelle de l'effet de commerce escompté est la somme d'argent que reçoit le porteur de l'effet le jour de l'escompte de ce dit effet. Cette valeur est égale à la différence entre la valeur nominale V et l'escompte commercial e.

$$a = V - V.t.n$$

$$= V\,(1- t.n) \qquad (2)$$

Si le taux d'escompte est annuel et la durée est en jours, a est égale à :

$$a = V - \frac{V.n}{D}$$

a

$$= \frac{V(D-n)}{D} (2')$$

La formule (2) montre que la valeur actuelle est une fonction linéaire décroissante par rapport à n. V et t sont supposés constants. La valeur actuelle est égale à V pour n = 0. L'effet est échu. La valeur actuelle décroit quand n croit .

2 L'escompte rationnel

L'escompte commercial est en réalité un prêt avec intérêt payé d'avance. En effet, la valeur actuelle encaissée par le porteur de l'effet représente le capital effectivement prêté. Elle est égale à la différence entre la valeur nominale et l'escompte de l'effet. Autrement dit, la banque qui escompte l'effet prête, encaisse e à l'avance et V à l'échéance. Ainsi, on peut calculer le taux d'escompte effectif en utilisant la formule (4) du chapitre précédent.

L'escompte rationnel e' est par définition un escompte qu'on calcule sur la base de la valeur actuelle rationnelle a'. Il est égale à :

e' = a'.t.navec e'+ a' = V (3)

A partir de (2-4), on peut écrire :

V = a' + a'.t.n

= a'(1 + t.n)

$$a' = \frac{V}{(1+t.n)} \quad (4)$$

Si la durée est en jours et t par rapport à l'année a' est égale à :

a'= VD/(D+t) ou en divisant par D, on obtient :

a'= V/(1+t/D) et en posant t/D = x, a'= V/(1+x) voir exercice -15 et 16.

On obtient e' en remplaçant dans (2-4) l'expression de a' donné par (2-5).

$$e' = \frac{V.t.n}{1+tn} \quad (5)$$

En divisant le numérateur et le dénominateur de (2-6) par t, on obtient :

$$e' = \frac{V.n}{D+n} (5')$$

a

3 Comparaison entre l'escompte commercial et l'escompte rationnel

L'escompte commercial est supérieur l'escompte rationnel en effet :

$$e > e' \text{ car } \frac{V.n}{D} > \frac{V.n}{D+n}$$

Et $\quad e > e' \iff a' < a'$

Exemple : Calculer l'escompte commercial et l'escompte rationnel d'un effet dont la valeur nominale est égale à 10000 UM. L'effet a été escompté 90 jours avant son échéance à un taux de 9 %.

Escompte commercial : 10000 x 0.09 x 90/360 = 10000 x 90/4000 = 225 DA.

Valeur actuelle commerciale : 10000-225 = 9775 UM.

Escompte rationnel : $\frac{10\ 000 \text{ x } 0.09 \text{x } 0.25}{1+0.09 \text{ x } 0.25} =$ 220.05 UM

Remarque : 90 jours = 0.25 année.

Valeur actuelle rationnelle : 10000 – 220.05 = 9779.95 UM.

Taux effectif de l'escompte commercial :

$$t_e = \frac{0.09 \text{ x } 360}{360 - 0.09\text{x}90} = 9.21\ \%$$

4 Equivalence des effets de commerce : notion d'actualisation

Deux effets sont équivalents à une date donnée lorsque, escomptés au même taux, ils ont la même valeur actuelle. De même, un effet sera équivalent à plusieurs effets si sa valeur actuelle est égale à la somme de celle des autres effets. Ainsi un effet de nominal V_1 sera équivalent à un effet des nominal V_2 si et seulement si $a_1 = a_2$ et on écrit l'équation qui donne l'équivalence des effets comme suit :

$$V_1 - V_1.t.\ n_1 = V_2 - V_2.t.\ n_2$$

L'équivalence des effets de commerce permet leur remplacement. L'effet de commerce représente pour le tiré (débiteur) une dette envers le porteur de l'effet. Ainsi, le débiteur peut se retrouver dans une situation de trésorerie qui ne lui, permet pas d'honorer sa dette (valeur nominale de l'effet) à l'échéance convenu avec son créancier. Il demande à ce dernier d'allonger le délai de paiement en remplaçant l'effet qu'il détient par un autre effet de valeur nominale supérieure. Cette opération n'est possible que si les deux effets s'avèrent équivalent à la date de négociation du remplacement du premier effet qui vient à échéance par un deuxième effet dont l'échéance est retardée d'une durée donnée.

Exemple : Un effet de commerce de valeur nominale 10000 UM a pour échéance 31/12/2021. Le débiteur qui doit honorer la dette matérialisée par l'effet, demande à son créancier le détenteur de l'effet en question de remplacer l'effet dont l'échéance est le 31/12/2021 par un deuxième effet dont le délai de paiement est fixé au 31/1/2022. La date de négociation du remplacement de l'effet est le 4/12/2021. Le taux d'escompte est de 6 %. Calculer la valeur nominale de l'effet remplaçant.

L'équation qui donne l'équivalence des deux effets est :

$$V_1 - \frac{V_1 n_1}{D} = V_2 - \frac{V_2 n_2}{D}$$

$$10000 - \frac{10000 \text{ x } 27}{6000} = V_2 - \frac{V2\text{x } 58}{6000}$$

$$= V_2\left(1 - \frac{58}{6000}\right)$$

V_2= 10052.16UM.

Les exercices qui ont pour objet le remplacement d'un ou des effets de commerce par un ou d'autre effets sont tous basés sur l'équation d'équivalence de ces effets. Ils se proposent, toute chose égale par ailleurs de calculer :

- La valeur nominale de l'effet remplacé,
- La valeur de l'effet remplaçant,
- La date d'équivalence,
- L'échéance de l'effet remplacé,
- L'échéance de l'effet remplaçant

Remarques :

- Deux effets de même valeur nominale et dont les échéances sont différentes, ne sont jamais équivalents.
- La date d'équivalence si elle existe ; elle est unique et elle est antérieure à l'échéance de l'effet le plus proche.
- Deux effets dont le premier à une valeur nominale supérieure à celle du deuxième. Si le premier a une échéance antérieure à celle du deuxième ; les deux ne sont pas équivalents

Représentation graphiques de l'équivalence de deux effets.

a

La valeur actuelle exprimée par rapport à la durée n de l'escompte est une fonction linéaire. L'intersection de deux droites représentatives de la valeur actuelle de deux effets de valeurs nominales différentes donne la durée et la date qui rend les deux effets équivalents.

Exemple : Un effet de commerce de valeur nominale 10000UM a pour échéance 31/12/2021. Le débiteur qui doit honorer la dette matérialisée par l'effet, demande à son créancier le détenteur de l'effet en question de remplacer l'effet dont l'échéance est le 31/12/2031 par un deuxième effet de valeur nominale égale à 10037.82UM.L'échéance du deuxième effet est fixée au 30 janvier 2022. Le taux d'escompte est de 4.5 %. Déterminer la date d'équivalence des deuxeffets.

On écrit les expressions des valeurs actuelles des effets :

$$a_1(n_1) = 10000 - \frac{10000 \text{ x } n1}{8000}$$

$$a_2(n_1)= 10052.16 - \frac{10052.16\text{x}(n1+30)}{8000}$$

$$a_1(n_1) = 10000 – 1.25\ n_1$$

$$a_2(n_{1)}\ =10037.82 - 1.254n_1$$

en posant $a_1(n_1) = a_2(n_1)$ on trouve : $n_1 =$ 38 jours.

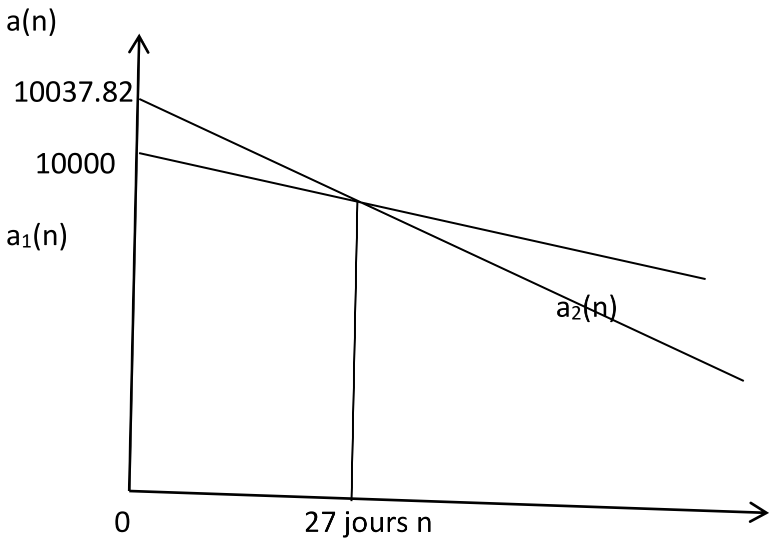


Figure -1 : représentation de l'équivalence de deux effets de commerce.

L'équivalence des effets de commerce ne se limite pas à sa portée pratique de remplacement d'un effet de commerce par un autre ; elle fonde la notion d'actualisation. Cette dernière constitue la base de la finance moderne. En effet, dans les problèmes de la finance, on est souvent confrontés à des flux monétaires ou financiers qui se réalisent à des

a

dates différents. La valeur de l'unité monétaire dans laquelle son exprimés ces flux, varie dans le temps et toute comparaison directe des flux suivant leur valeur nominale est erronée du point de vue financier. Ainsi, deux ou plusieurs flux financiers qui se réalisent à des dates différentes ne peuvent être comparés, additionnés, soustraits,…que s'ils sont exprimée suivant leur valeur actuelle. L'actualisation est l'opération qui consiste à exprimer ces différents flux suivant l'unité monétaire d'une date donnée. En général, on actualise par rapport à l'instant présent, tous les flux monétaires qui se sont réalisés dans le passé et ceux qui vont se réaliser dans le future seront exprimé en unité monétaire présente. Cette notion d'actualisation sera largement utilisée dans les chapitres qui sont réservés aux opérations financières de long terme.

5 Echéance moyenne de plusieurs effets de commerce.

Dans le remplacement des effets de commerce par un ou plusieurs autres effets, on peut parfois être amené à substituer p titres de valeurs nominale V_1, V_2, V_k, $V_p$par un titre unique V dont la valeur nominale est la somme des valeurs nominale de la suite des titre précédents. Cette situation peut se produire dans la pratique bancaire. En effet, un débiteur qui doit honorer plusieurs traites d'échéances différentes envers son créancier peut proposer à ce dernier d'éteindre toutes ses dettes par un paiement unique V. Etant donné que la valeur nominale de V est égale à la somme des dettes ; le problème revient à déterminer l'échéance de cet effet unique V. Le principe de détermination de cette échéance est l'équivalence de l'effet unique V avec la somme des effets remplacés V_1, V_2 ,..V_K , … V_p. Ainsi on écrit l'équation d'équivalence comme suit :

$V \Leftrightarrow V_1 + V_2 + \ldots + V_k + \ldots + V_p$ si et seulement si :

$a = a_1 + a_2 + \ldots a_k + \ldots + a_p$

Où a représente la valeur actuelle de l'effet unique et a_1 , a_2 ,.. a_k,..a_p les valeurs actuelle de la suite d'effets. En remplaçant chaque terme de l'équation précédente par son expression, on écrit :

$$V - \frac{V.\bar{n}}{D} = V_1 - \frac{V_1 n_1}{D} + V_2 - \frac{V_2 n_2}{D} + \ldots V_k - \frac{V_k n_k}{D} + \ldots V_p - \frac{V_p n_p}{D}$$

Après développement et simplification de l'équation précédente, on obtient :

$$\bar{n} = \frac{\sum V_k n_k}{V} \quad (6)$$

L'échéance moyenne est indépendante du taux d'escompte.

a

Exemple : On se propose de remplacer 4 traites dont les valeurs nominales et les échéances sont

V_1 = 10000 UM, échéance : 55 jours.

V_2 = 20000 UM, échéance : 80 jours.

V_3 = 15000 UM, échéance : 15 jours.

V_4 = 12000 UM, échéance : 50 jours.

Par une traite de valeur nominale = 57000 UM. Calculer l'échéance de cet effet de substitution. En appliquant (6), on obtient :

$$\bar{n} = \frac{10000x55+20000x80+15000x15+12000x50}{57000} =\approx 52 \text{ jours.}$$

L'échéance de l'effet remplaçant V est à 52 jours de la date d'origine retenue pour déterminer l'équivalence des titres. Quel que soit la date d'origine retenue pour calculer la date d'échéance moyenne, celle-ci ne varie pas.

6 L'escompte réel : taux d'agio.

Dans la pratique bancaire, l'escompte des effets de commerce ne se limite pas au calcul de l'escompte commercial. En effet, les banques qui acceptent d'escompter un effet de commerceencaissent l'escompte commercial et opèrent d'autres retenues supplémentaires. L'ensemble des coûts à la charge de la personne qui escompte l'effet est appelé agio. Il comprend l'escompte et les différentes commissions bancaires. L'ensemble des commissions que la banque applique sont appelées « conditions de banque » L'agio peut être hors taxe s'il n'inclus pas les taxes sur les opérations bancaires.

a- Les différentes commissions :

- La commission d'endossement : elle se calcule sur la même base que l'escompte. Autrement dit elle est fonction de la valeur nominale de l'effet et de la durée de l'escompte. son taux est faible que celui de l'escompte.
- Les commissions et de manipulation sont des commissions fixes.
- La commission de bordereau est calculée sur la valeur nominale totale des effets escomptés. L'ensemble des commissions ainsi que les taux appliqués peuvent varier suivant la concurrence bancaire.

b- Taux réel d'escompte ou taux d'agio.

Le taux réel d'escompte ou taux d'agio est le taux qui prend en compte dans son calcul l'ensemble des frais bancaires de l'opération d'escompte. Ainsi, l'agio est la somme de l'escompte et des différentes commissions.

Agio = escompte commercial + commission d'endossement + commission de manipulation.

Escompte commercial = V.t.n.

Commission d'endossement avec un taux h, se calcule de la même manière que l'escompte. Elle est égale à : h.V. n

Commission de manipulation = k.V dinars.

En notant le taux d'escompte ou réel ou taux d'agio t_r on peut écrire :

Agio = V.t.n + h.V.n + k.V ou en exprimant l'agio en fonction de son taux t_r, on peut écrire : agio = $V.t_r.n$ = V.t.n + h.V.n + k.V .

En simplifiant par division des deux membres de l'équation précédente par V.n ; on obtient :

$$t_r = t+h+k/n \qquad (7)$$

L'expression (7) montre que le taux d'agio est de la forme d'une fonction quotient. Il varie en fonction de n. Il est décroissant pour des valeurs croissantes de n et il tend vers t+h quand n tend vers l'infini.

Le calcul du taux d'agio permet de déterminer le coût de revient de la liquidité de l'effet de commerce. En outre, il facilite la comparaison entre les différentes conditions d'escompte offertes par les banques. Ainsi, suivant la valeur de n, on retient la banque dont le taux d'agio est le plus bas. La solution peut être algébrique par comparaison des différents taux d'agio, ou par la représentation sur un même graphe des fonctions du taux d'agio des banques considérées. Suivant les valeurs de n on retient le taux d'agio qui apparait le plus faible sur l'axe des ordonnés.

a

<u>Exercices et problèmes</u>

1-Suposons que M. A., a consenti un prêt à M.B. Ce dernier a signé un billet à ordre pour le bénéfice de A. L'effet a été établi le 15 novembre 2021 pour une valeur initiale de 2000 UM. Il porte un intérêt simple au taux de 6 %. Son échéance est fixé au 30 /12/2021.

a- Calculer la valeur nominale de l'effet.
b- Supposant que M. A. présente à l'escompte le billet à ordre le 10 novembre 2021, calculer la valeur qu'il encaisse et l'escompte commercial qu'il doit verser à la banque qui a accepté d'escompter l'effet.
c- Reprendre la question b appliquant l'escompte rationnel. Comparer les résultats avec ceux obtenus en b.

2-Un commerçant pratique une politique qui consiste en des paiements au comptant ou d'accepter des billets à ordre pour ses bons clients. A la suite d'une vente de 50000 UM, le client remet au commerçant un billet à ordre portant intérêt à 9.5 % pour une échéance de 120 jours. Dix jours plus tard, le commerçant remet le billet à ordre à l'escompte auprès de sa banque. Cette dernière applique un taux d'escompte de 10 %.

a- Calculer la somme que la banque remettra au commerçant.
b- Calculer le taux effectif d'escompte.

3-Un effet de commerce de 90 jours portant intérêt au taux de 8 jours avant %a été escompté 60 jours avant son échéance au taux de 9.2 %. Le produit net de la transaction fut de 1506.80 UM. Calculer la valeur nominale de l'effet.

4-Soient deux effets de commerce dont le premier a une valeur nominale de 7370 UM et son échéance est dans 35 jours, deuxième vaut nominalement 7430 UM et il échoit dans 65 jours. Ces deux effets ont été présentés à l'escompte le même jour. La banque a versé à leur porteur une somme égale pour les deux effets. Calculer le taux d'escompte que la banque a appliqué.

5-Lors de l'achat d'un appareil d'un appareil électroménager, une personne a le choix entre les modes de paiement suivants :

- Payer au comptant le prix dont la valeur est de 94200 UM.
- Payer au comptant une somme de 30000 UM et remettre au vendeur 12 billets ordre dont la valeur nominale de chaque billet est de 6000 UM. Les échéances de ces billet

est fixé a un mois pour le premier effet, deux mois pour le deuxième jusqu'au douzièmes dont l'échéance est dans 12 mois de la date d'achat.

a- Calculer le taux de ce crédit commercial. Commenter le résultat.
b- Supposant que le client propose au commerçant de remplacer les 12 effets par un effet unique de valeur nominale égale à 72000 UM. Calculer la date d'échéance de cet effet.
c- Un troisième mode de paiement est proposé par le client. Ce dernier paye comptant la somme de 46800 UM, le solde restant dû est payé en trois versements en forme de progression géométrique de raison 2. Les dates de paiement de trois versement sont fixés au quatrième moi, huitième mois et douzième mois. Calculer la valeur de chaque versement.

6-Un effet de commerce de 2000 UM et portant intérêt au taux de 9 % pour une durée de 160 jours. La banque escompte le billet à un taux de 12 % et prélève un escompte de 54 UM.

7-Trois effets de commerce de valeur nominale V, 2V et 3V , sont à échéance respective dans 1, 2 et 5 mois.

a- Calculez leur valeur actuelle a et a' en fonction de V et taux d'escompte t
b- Application numérique : V = 100 UM et t = 1.5 %.

8-Soient les trois effets suivants dont les valeurs nominales et les durée d'échéance sont :

- 10000 UM, échéance dans 52 jours.
- 5000 UM, échéance dans 45 jours.
- 7400 UM, échéance dans 90 jours.

On se propose de remplacer ces trois effets par un effet unique dont l'échéance est dans 60 jours. Le taux d'escompte est égal à 9 %.

a- Calculer la valeur de l'effet équivalent.
b- Si l'effet de substitution vaut 22400 UM, calculer son échéance.

9-Un créancier doit encaisser trois effets dont les valeurs nominales et les échéances sont respectivement : 140 UMà échéance d'un mois, 280 UMà échéancede deux mois et 420 UM dans cinq mois. Un banquier accepte d'escompter les trois effets. L'escompte total est de 40 UM. Calculez le taux d'escompte mensuel t en supposant :

a- Actualisation commerciale
b- Actualisation suivant la formule $a = a_n(1 - nt + n^2)$

10-Dix versements de valeur 1000 UM sont effectués au dates : 1,2,3,….10. Le taux d'escompte périodique et de 0.005.

a- Calculer l'escompte commercial et la valeur actuelle commerciale
b- Calculer l'escompte rationnel et la valeur actuelle rationnelle.

c- Reprendre l'exercice en supposant que les dix versements forment une progression arithmétique de raison r = 5. (rappel : $\sum \quad k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour k=1à n.)

11-Un effet de valeur nominale 10000 UMet de date d'échéance 31/12/2021 est remplacé le 5/11/2021 par un effet de valeur nominal V et d'échéance fixée au 25/1/2022. Taux d'escompte 6 %.

a- calculer la valeur de l'effet remplaçant.
b- En supposant que V est connu, retrouver la date d'équivalence. Donner une représentation graphique qui permet de donner cette date.

12-Un effet de commerce de valeur nominale V et de durée égale à n jours est remplacé par une suite de k effets dont les valeurs nominales sont toutes égales *à* $\frac{V}{k}$. L'échéance du premier effet de cette suite est x, l'échéance du deuxième est 2x, et ainsi de suite jusqu'au dernier effet dont l'échéance est k.x. Toutes les durées sont exprimées en jours. Le taux d'escompte est t.

a- Calculer la durée x en prenant le début de la durée du premier effet de la suite comme origine pour l'établissement de l'équation d'équivalence.
b- Reprendre la question précédente en prenant une date quelconque comme origine de l'équation d'équivalence.

13- On dispose d'un effet de commerce de valeur nominale V et d'échéance dans n années. On peut escompter cet effet auprès de trois banques A, B et C qui offrent les conditions d'escompte suivantes :

Banque A : taux d'escompte : 6 %, commission d'endossement ; 4 %

Banque B : taux d'escompte : 8%, commission d'endossement : 2 %

Banque C : taux unique de 12 %.

En supposant que la durée n est comprise entre 0 et 1.

a- Classer les banques par ordre de préférence pour le porteur de l'effet. Une banque est préférée à une autre si son taux d'agio est inférieur à celui pratiqué par cette dernière.
b- Représenter graphiquement les différents classements de ces banques.

14-On reprend l'étude de la comparaison des conditions d'escompte proposées par les trois banques de l'exercice précédent. Avec les mêmes notations et données, utiliser la formule d'actualisation rationnelle et :

a- Calculer le taux réel (d'agio) t'_r en fonction de la durée n et du taux de commission d'endossement h, du taux de commission de manipulation de compte : k

a

b- Comparer le taux nominal t_a obtenu dans l'exercice précédent avec t'_r.
c- Etudier les variations de t'_r en fonction de n et déterminer pour quelle valeur t'_r est minimum.

15-On sait (cours) que la valeur actuelle rationnelle est égale à V/(1+t/d)) en procédant par un changement variable, montrer que $a' = V(1- x+ x^2 -x^3 \ldots)$ avec x=n/D et n< D[4].

16-V désigne la valeur nominale d'un effet de commerce, avec les résultats de l'exercice précédent ; démontrer : $V= a(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$

17-On se propose de comparer la valeur actuelle commerciale et la valeur actuelle rationnelle. Ainsi, on donne un réel t strictement positif et trois fonctions qui expriment la valeur actuelle d'une unité monétaire suivant trois modes d'actualisation différents. Ces trois fonctions sont :

$a(n) = 1-nt$, $a'(n) = 1/(1 + nt)$, $a''(n) = 1- nt +n^2t^2$

1- Démontrer que $a(n) < a'(n) < a''(n)$.
2- Représenter graphiquement les trois fonctions précédentes sur un même graphe et vérifier le résultat précédent en étudiant la position de chaque courbe.

18-Soient n versements de valeurs nominales : V_1, V_2,….V_k,….V_n ; effectués aux dates : 1,2,…k,…n. En reprenant expressions des valeurs actuelles de l'exercice précédent et en supposant que n est inférieur à 1/t

a- Donner, en reprenant les résultats de l'exercice 13 un minorant de a'_0 et un majorant de a_0'' de a_0.
b- Calculer a_0' et a_0'' avec $a_k= \beta +kr$, $\beta>0$ et $r>0$.
c- Application numérique : $\beta = 95$, r = 5 , t =0.5 % et n = 10.

[4] Une fonction f(x) admet un développement limité au point 0, alors :
$f(x)= f(0)+xf'(o) + x^2f''(0)/2! +\ldots+x^{n+1}f^{n+1}/(n+1)!$

Chapitre troisième : les comptes courants à intérêt simple

1-Notions de compte bancaire

Un compte bancaire est un contrat entre une banque et une personne physique ou morale, par lequel la banque accepte d'enregistrer sur ses comptes les opérations monétaires faites par cette personne (client). Ces opérations peuvent alimenter le compte et sont inscrites à son crédit. Les opérations qui entrainent des prélèvements sur le compte sont inscrites au débit. Le compte bancaire est soldé périodiquement par compensation du total des sommes inscrites au débit par le total des sommes inscrites au débit. Le compte bancaire est un contrat, ainsi il peut prendre fin par accord entre les deux parties et le compte est clôturé par un solde définitif.

Tout compte bancaire comprend les informations suivantes : La date d'opération : c'est la date d'enregistrement de l'opération sur le compte, la date de valeur : c'est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir. Cette date est donnée dans les conditions de banque. En général, elle précède la date de l'opération quand celle-ci est inscrite au débit. Pour une opération enregistrée au crédit, la date coïncide avec la date de l'opération ou la succède.

Ils existent différents comptes bancaires :

- Le compte à vue, il s'agit de compte qui enregistre les opérations au débit ou au crédit suivant leur nature La banque qui tient le compte encaisse des frais bancaires pour toute opération faites par le client et inscrites sur ce compte. Ces frais sont appelés agio et comptabilisés au débit du compte. En général, le compte ne peut pas présenter de solde débiteur sans un accord du banquier. Dans cette situation, le détenteur du compte supporte des intérêts avec un taux élevé.
- Le compte à terme ou compte d'épargne. Dans ce compte, le client s'engage à déposer des sommes d'argent pour une durée déterminée (15 jours, un mois,…). Le compte enregistre deux types d'opération : versement ou retrait. Le compte est maintenu en permanence dans une situation de solde créditeur.
- Le compte courant et d'intérêt. Il s'agit de compte à vue mais ils se différencient des comptes cités ci-dessus. Les comptes courant et d'intérêt génèrent des intérêts pour toutes les opérations qu'elles soient inscrites au débit ou au crédit.

Dans ce qui suit, seules seront étudiées les méthodes de tenue des comptes courant et d'intérêt et des comptes d'épargne.

2-Les comptes d'épargne

En Algérie, les comptes d'épargne peuvent être ouverts auprès des banques commerciales ou auprès de la caisse d'épargne. Cette dernière propose à ses clients le choix entre deux comptes : le compte épargne logement(LEL) ou le compte d'épargne populaire (LEP). Le premier est avec un taux d'intérêt simple de 2 % et le second est avec un taux de 2.5 %. Ces deux taux sont en dessous du taux d'inflation annuelle. Autrement, l'épargne se fait avec un taux d'intérêt négatif. Cependant, le compte LEL permet à son détenteur sous certaines conditions de bénéficier d'un crédit immobilier. En France, la caisse d'épargne propose aux ménages le livret A à un taux d'intérêt annuel de 0.5 %, il est similaire au LEP et un compte appelé plan d'épargne logement (PEL) à un taux d'intérêt annuel de 1 % mais la durée du placement doit dépasser quatre ans.

a- Tenu d'un compte d'épargne

Le compte d'épargne enregistre deux types d'opération : un versement ou un retrait. Ces dernières peuvent se faire en numéraire, par chèque ou par virement bancaire. Les dates de valeur des opérations se déterminent suivant la règle suivante :

Pour les retraits, la date de valeur est le premier du mois si l'opération s'est faite durant la première quinzaine du même mois. Elle a lieu le 16 du mois si l'opération est enregistrée la deuxième quinzaine du mois.

Pour les versements, la date de valeur est le 16 du mois si l'opération s'est faite la première quinzaine du mois. Si le versement est fait durant la deuxième quinzaine, la date de valeur est le premier jour du mois qui suit.

Remarque le compte est toujours créditeur. En général, il ne supporte aucun frais bancaire.

b- Méthode de tenue du compte

La durés du placement est exprimée en nombre de quinzaines. L'année compte 24 quinzaines. Les intérêts sont calculés à chaque fois que le solde varie. A la fin de l'année on ajoute au dernier solde la somme des intérêts produits par le compte durant l'année.

c- Exemple : La caisse nationale d'épargne et de logement (CNEP)a enregistré durant l'année 2021 sur le compte d'épargne LEP d'une personne, les opérations suivantes :

- Le 13/1/2021 : versement de 150000 UM
- Le 25/1/2020 : versement de 20000 UM.
- Le 4/3/2021 : retrait de 10000 UM.
- Le 8/5/2021 : versement de 15000 UM
- Le 5/7/2021 retrait de 10000 UM.
- Le 17 /9/2021 retrait de 10000 UM
- Le 17/11/ 2021 versement de 30000 UM

Enregistrement des opérations et calcul des intérêts, taux : 2.5 %

date	libellé	débit	crédit	solde	Dv	durée	Intérêt
13/1/	versement		150000	150000	16/1/21	1	156.25
25/1/	versement		20000	170000	1/2/21	2	354.16
4/3/	retrait	10000		160000	1/3/21	5	833.33
8/5/	versement		15000	175000	16/5/21	3	546.87
5/7/	retrait	10000		165000	1/7/21	1	171.87
17/7/	retrait	10000		155000	16/7/21	9	1453.12
17/11/	versement	30000		184000	1/12/21	2	383.33
31/12	Intérêt total						3898.93
31/12	Solde			187898.33			
1/1/22	Solde à nouveau			187898.33			

Dv : date de valeur, durée en quinzaine.

3-Les comptes courants à intérêt simple.

Il existe trois méthodes pour tenir un compte courant et d'intérêt : la méthode directe, la méthode indirecte et la méthode hambourgeoise.

a- La méthode directe : les intérêts sont calculés pour chaque somme inscrite au débit ou au crédit de la date de valeur à la date de solde du compte. Les intérêts obtenus sont inscrits dans la partie du compte qui leur est réservée au débit ou au crédit suivant que laà soit débitrice ou créditrice. A la date d'arrêté du compte, on solde les intérêts et les sommes pour obtenir la situation finale du compte.
Le solde final des intérêts s'obtient comme suit :
La durée qui sépare la date de valeur de la date d'arrêté du compte :
la première somme : n_1, la deuxième : n_2,…, celle de la dernière somme :n_p
le solde total des intérêts débiteurs et créditeurs noté I

$I = c_1n_1/D + c_2n_2/D +…+ c_pn_p/D$ (1)

b- La méthode indirecte : dans une première étape, on calcule les intérêts pour chaque somme sur une période fictive qui va de la date d'ouverture à la date de valeur. Dans une deuxième étape, on calcule les intérêts pour chaque somme sur une période globale qui va de la date d'ouverture à la date d'arrêté du compte. Les intérêts définitifs pour chaque somme sont obtenus par différence entre ceux de la deuxième et ceux obtenu dans la première étape. Formellement on peut écrire en notant la période globale N :

$$I = (c_1N + c_2N + \ldots + c_pN)/D - c_1(N - n_1)/D - c_2(N-n_2)/D - \ldots - c_p(N-n_p)/D \qquad (2)$$

Après développement de la forme (2), on obtient :

$$I = c_1n_1/D + c_2n_2/D + \ldots + c_pn_p/D$$

c- La méthode de Hambourg : après avoir enregistrées toutes les opérations au débit ou au crédit suivant leur libellé, on solde les valeurs et les intérêts sont calculés sur les soldes à chaque fois que leur valeur change. L'intérêt global I sera égale à :

$$I = c_1(n_1 - n_2)/D + (c_1+c_2)(n_2 - n_3)/D + \ldots + ((c_1+ c_2 + \ldots + c_p)n_p)/D \qquad (3)$$

Comme ci-dessus, après développement de (3), on obtient le même résultat que ceux obtenus par les méthodes précédentes.

Remarques :

- les taux d'intérêt appliqués dans la tenue des comptes courant peuvent varier suivant que la somme soit inscrite au débit ou au crédit. Les taux d'intérêt débiteurs sont toujours supérieurs au taux d'intérêt créditeurs. Ces taux peuvent également varier dans le temps.
- Les comptes courant sont soumis à différentes commissions bancaires à la charge du client (commission de découvert, commission de tenue du compte,…) Ces charges sont inscrites au débit du compte et s'ajoutent au débit du solde d'arrêté du compte.

.

a

Exercices d'application

1-Durant le deuxième trimestre de l'année 2021, le compte courant et d'intérêt d'une personne, a enregistré les opérations suivantes :

- Le 01/4/2021 : solde créditeur de 3880 UM
- Le 28/4/2021 : retrait d'une somme de 1680 UM, date de valeur : 26/4/2021.
- Le 02/5/2021 : remise de chèque à l'encaissement de 2950 UM, date de valeur : 30/4/2021.
- Le 12 /06/2021, retour d'effet impayé montant 460 UM, date de valeur : 4/6/2021.
- Le 20/6/2021 remise d'effet à l'encaissement, date de valeur : 22/6/2021.

Le compte est arrêté le 30/6/2021. Le taux d'intérêt appliqué par la banque est de 6 % pour les opérations du débit et du crédit.

Présenter le compte courant suivant les trois méthodes.

2-A partir des données de l'exercice précédent montrer en utilisant les formules (1),(2) et (3) données dans le cours que les trois méthodes donne le même solde pour les intérêts.

3-Le compte courant de monsieur X , domicilié à la BDL. ; a enregistré durant le mois de décembre 2021, les opérations suivantes :

- Le 2/12/2021 : solde débiteur 10000 UM
- Le 5/12/2021 : dépôt d'une somme de 50000 UM, date de valeur : 7/12/2021
- Le 10/12/2021 : retour d'un effet impayé d'une valeur de 20000 UM, date de valeur : 8/12/2021.
- Le 20/12/2021 remise de chèque à l'encaissement d'un montant de 10000UM, date de valeur : 22/12/2021.
- Le 25/12/2021 alimentation du compte par dépôt d'une somme de 20000UM, date de valeur : 27/12/2021.

Le compte est à taux non réciproques, le taux d'intérêt débiteur est de 6 %, le taux d'intérêt créditeur est de 3%. Une commission bancaire de 0.05 % du total du débit et du crédit est retenue par la banque lors de l'arrêté du compte en fin de mois(31/12/2021).
Présenter le compte courant suivant les trois méthodes.

4-Reprendre l'exercice-1 en supposant un taux d'intérêt simple qui varie le 15/6/2021 : il passe de 6 % à 9%.

5-La banque BEA tient le compte courant de monsieur X avec les conditions bancaires suivantes :

Le taux d'intérêt appliqué est le taux de base bancaire(4.5 %) auquel il faut ajouter une marge de 2 % soit un taux d'intérêt débiteur de 6.5 %. Le taux d'intérêt créditeur de 2 %.

Une commission bancaire est appliquée avec un taux de 0.05 % sur le plus fort découvert du mois.

Commission de mouvement avec un taux de 0.025 % sur le total du débit, cette commission est soumise à la TVA, taux 19 %.

Les opérations suivantes ont été enregistrées dans le compte durant la période du 1/1/2021 au 31/3/2021 :

Mois	mouvement		Date de valeur
	débit	crédit	
Janvier (solde)		50	1 janvier
	80		8 janvier
		100	10 janvier
février	270	100	4 février
	250	360	17 février
Mars	90		3 mars
	30	100	15 mars
	60	130	31 mars
total	780	790	

a- Calculer les intérêts débiteurs
b- Calculer le total des agios à payer le 31/3/2021.

6-Le compte d'épargne livret A est au taux d'intérêt annuel de 0.5 %. Durant l'année 2021, les opérations suivantes ont été inscrites sur ce livret :

Le 5 janvier : versement de 20000 UM

Le 17 janvier : versement de 35000 UM

Le 25 février : retrait de 15000 UM

a

Le 14 mars : versement de 30000 UM

Le 18 aout : retrait de 7000 UM

Le 26 octobre : versement de 10000 UM

Le 3 novembre retrait de 6000 UM

Le 14 décembre : versement 20000 UM.

a- On vous demande de présenter la situation du compte au 31/12/2021.
b- En supposant que le taux d'intérêt varie le 30 juin 2021 ; il passe de 0.5 % à 1.5 %. Présenter la nouvelle situation du compte à la date du 31/12/2021

a

Chapitre quatrième : intérêts composés : actualisation et capitalisation

1-le principe de l'intérêt composé

Nous avons vu dans les chapitres précédents réservés aux opérations financières et bancaires à intérêt simple que la durée du placement ou de l'emprunt dépasse rarement une année. Les intérêts sont calculés et versés en une seule fois au début ou à la fin de la durée de l'opération. Quand la durée du placement ou de l'emprunt dépasse une année, le créancier peut demander que l'intérêt lui soit payé périodiquement, en générale une fois par an. C'est le cas par exemple des emprunts obligataires à long terme émis par l'Etat.

Le créancier a la possibilité de replacer les intérêts encaissés pendant une durée supplémentaire. Autrement dit, par cette opération de replacement, les intérêts se transforment en capital et génèrent à leur tour des intérêts.

Pour introduire la notion d'intérêt composé, nous supposerons que les intérêts produits à la fin de la période sont replacé au même taux dans la même opération. Les intérêts ne sont pas perçus périodiquement. Achaque fin de période, les intérêts sont calculés et rajoutés au capital du début de la même période. On dit qu'ils sont capitalisés. Les caractéristiques des opérations bancaires à intérêt composé sont les suivants :

- Les intérêts sont versés à l'échéance de l'opération,
- La durée de l'opération comprend n périodes égales,
- Le capital initial placé et les intérêts s'accroissentde période en période

2-formules des intérêts composés

a-la valeur acquise

Soit une opération de prêt d'un capital C_0 réalisé au taux d'intérêt annuel t pour une durée de n années.

* à la fin de la première année, le créancier aura en placement sont capital initial C_0 et les intérêts réalisés sur une année : $C_0.t$. Soit un total de $C_0 + C_0t = C_0(1+t)$.

* à la fin de la deuxième année, il aura le placement : le capital initial : $C_0(1+t)$ sachant que les intérêts de la fin de la première année ont été capitalisés. A ce capital on ajoute les intérêts de la deuxième année de placement soit : $C_0(1+t).t$ Au total, à la fin de la deuxième année, la valeur du placement sera de : $C_0(1+t) + C_0(1+t)t = C_0(1+t)^2$.

*à la fin de l'année n, le créancier aura de même : les intérêts de l'année (n-1) soit : $C_0(1+t)^{n-1}t$ auxquels il faut ajouter le capital obtenu en début d'année (n-1). Soit un total de :

$C_0(1+t)^{n-1} + C_0(1+t)^{n-1}.t = C_0(1+t)^{n-1}(1+t) = C_0(1+t)^n$.

Ainsi, d'une manière générale un capital initial C_0 placé pendant n période égales au taux périodique t devient :

$$C_n = C_0(1+t)^n \qquad (1)$$

C_n est appelée valeur acquise ou valeur future du capital initial C_0 . Ainsi, C_n exprimée en fonction de n est une fonction exponentielle. Autrement dit un capital C_0 placé à intérêt composé croît d'une manière exponentielle. Dans l'expression (1), le terme $(1+t)^n$ est appelé facteur de capitalisation.

$(1+t)^n > 1$ car $t>0$ et $n>0$

b-intérêt total encaissé par le créancier

L'intérêt total du placement est la différence entre le capital initialement placé C_0 et la valeur acquise soit :

$$I = C_n - C_0 = C_0(1+t)^n - C_0 = C_0[(1+t)^n - 1] \qquad (2)$$

c-valeur actuelle

On appelle valeur actuelle, le capital C_0 qu'il faut placer aujourd'hui au taux t pendant n années pour obtenir le capital C_n.

$$C_0 = C_n(1+t)^{-n} \qquad (3)$$

Le terme $(1+t)^{-n}$ est appelé facteur d'actualisation. Il est inférieur à 1.

3-Concepts de capitalisation et d'actualisation

Lors de la prise de décisions financières, on est souvent confronté à des séquences de flux financiers qui se réalisent à des dates différentes. Ainsi, un placement est un vecteur ou une séquence (chronique) de flux financiers dont le premier est négatif et les flux qui suivent sont tous positifs. La prise de décision nécessite le calcul de la valeur actuelle totale de tous les flux de la chronique et de la comparer avec d'autre placements alternatifs. Ainsi, l'actualisation à un taux donné rend possible l'addition de flux financiers qui se réalisent à des dates différentes.

Ainsi, en notant la chronique de flux $\{F_0, F_1, \ldots F_n\}$. Pour un placement (investissement) seul F_0 est négatif. Cependant, pour un emprunt F_0 est positif est la suite F_1, F_2, F_3,..F_n est négative. La valeur actuelle de cette séquence de flux est :

$$V_0(t) = F_0 + F_1(1+t)^{-1} + F_2(1+t)^{-2} + \ldots + F_n(1+t)^{-n} = \Sigma F_k(1+t)^{-k} \text{ avec } k = 0,1,\ldots n \quad (4)$$

L'expression (4) montre que la valeur actuelle apparait comme une somme de fonctionsquotients et d'une valeur réelle négative – F_0. Son graphe sur l'intervalle t [-t et + ∞[est une courbe monotone et décroissante suivant les valeurs du taux d'actualisation. Cette fonction admet deux asymptotes dont l'une est verticale et a pour équation t = -1, l'autre est horizontale et d'équation : $V_0 = - F_0$

lim$V_0(t) = +\infty$ quand t -1 $\longrightarrow$

lim$V_0(t) = -F_0$ quand t +∞ $\longrightarrow$

Dans le domaine des décisions de choix d'investissement, l'expression (4) représente la valeur actuelle nette de l'investissement.

La valeur actuelle a été utilisée dans le cadre de l'équivalence des effets de commerce afin de calculer la valeur nominale d'un effet remplaçant d'autres effets de commerce, de déterminer l'échéance moyenne de plusieurs effets,.. L'application de cette notion de valeur présente peut être étendue à des effets de commerce portant intérêt composé.

Ainsi, on suppose une suite J dettes de valeur nominale V_j et d'échéance n_j jours. L'indice j est un nombre naturel qui varie de 1 à J. On se propose de remplacer cette suite de dette par une dette unique d'échéance n jours et dont la valeur nominale V est égale à la somme des valeurs nominales des J dettes. Par application de l'expression (4), et en supposant un taux t, n peut écrire :

$$V(1+t)^{-n/360} = V_1(1+t)^{-n1/360} + V_2(1+t)^{n2/360} + \ldots + V_j(1+t)^{nj/360} + .. + V_J(1+t)^{nJ/360}$$

$$= \sum_{j=1}^{j=J} V_j \ (1+t)^{-n_j/360} \quad (5)$$

En posant : $V = \sum_{j=1}^{j=J} V_j$, l'équation (5) devient :

$$(1+t)^{-n/360} = \frac{\sum_{j=1}^{j=J} V_j \ (1+t)^{-n_j/360}}{\sum_{j=1}^{j=J} V_j} (5')$$

$$n \ln(1+t)/360 = - \ln \left[\frac{\sum_{j=1}^{j=J} V_j \ (1+t)^{-n_j/360}}{\sum_{j=1}^{j=J} V_j}\right] (5'')$$

De (5'') on déduit l'échéance de l'effet unique :

a

$$n = -\ \frac{360}{\ln(1+t)} \ln \left[\frac{\sum_{j=1}^{j=J} V_j \ \ (1+t)^{-n_j/360}}{\sum_{j=1}^{j=J} V_j}\right] (6)$$

Remarque : l'échéance commune dépend du taux d'intérêt ; dans le cas de l'intérêt simple, nous avons montré que n dépend du taux.

La capitalisation permet de déterminer la valeur à une date future notée n d'une séquence de flux qui se réalisent à des dates différentes. Ainsi, si on veut se constituer un capital C_n disponible dans n années ; la capitalisation au t d'une chronique de flux (de versements) nous permet de calculer les montants des différents versements qu'il faut placer aux différentes dates pour pouvoir obtenir Cn. La notion de capitalisation est moins utilisée que l'actualisation. Les décision financières sont prises au présent. Elle nécessitent un raisonnement sur des valeurs financières présentes (actuelles)

4-Calcul de la valeur acquise et de la valeur actuelle d'un placement

Les calculs sur la valeur acquise et de la valeur actuelle peuvent se faire moyennant une calculatrice, par tableur Excel ou par le recours aux tables financières.

Exemple-1 : une personne achète un bien, elle paie 60000 UM au comptant et 60000 dans deux ans. Le taux d'intérêt composé est de 9 %. Quelle est la valeur actuelle du bien acheté ?.

$60000 + 60000(1+0.09)^{-2} = 110508.8$ UM.

Exemple-2 : une personne emprunte 50000 UM au taux d'intérêt composé de 6 %. Elle rembourse 10000 dans un an, 30000 dans deux ans et le solde dans 5 ans. Calculer ce solde.

La valeur actuelle des remboursements doit être égale à la somme empruntée (valeur actuelle de l'emprunt)

$50000 = 10000(1+0.06)^{-1} + 30000(1+0.06)^{-2} + X(1+0.06)^{-5}$, X= 18557.50 UM.

Exemple-3 : Une personne achète une obligation dont la durée de vie est de 10 ans à un prix de 10000 UM. Cette obligation donne droit à un coupon d'intérêt annuel de 100 UM. En supposant que le taux d'intérêt prévalant sur le marché est de 10 %. Calculer la valeur actuelle nette de ce placement.

La séquence de flux généré par ce placement est :{-10000, 100,,…100}.

$V_0= -10000 + 100(1+0.1)^{-1} + 100(1+0.1)^{-2} + \ldots.. + 100 (1+0.1)^{-10} = -9385.54$ UM.

Exemple -4 Une personne place 1000 UM pendant 10 ans à intérêt composé au taux de 6%. Calculer la valeur acquise de ce placement. A quel taux cette personne devra-t-elle placer les 1000 UM pour bénéficier au bout de 10 ans de 2000 UM ?

La valeur acquise est : $C_{10} = 1000(1+0.06)^{10} = 1790.08$ UM.

Pour bénéficier de 2000 UM par placement de 1000 UM pendant 10 ans il faudra déterminer le taux d'intérêt nécessaire à cette opération

$$C_{10} = 1000(1+t)^{10} = 2000 \text{ UM}$$

Soit $(1+t)^{10} = 2$ => $t = 7.18$ % par année.

5-Comparaison entre intérêt simple et intérêt composé.

En se rapportant aux formules de calcul des deux modalités d'intérêt, il apparait que l'intérêt simple est un intérêt proportionnel à la durée de placement. Il est payable en une seule fois. L'intérêt composé est payable périodiquement et est capitalisable. Pour une durée de placement donnée n supérieure à une année, la valeur acquise d'un placement à intérêt composé est supérieure à celle d'un placement à intérêt simple. En effet, le facteur de capitalisation de l'intérêt composé est supérieur à celui de l'intérêt simple. ☹

$$(1+t)^n > 1+tn \text{ pour } n > 1$$

6-Taux d'intérêt composé moyen.

L'intérêt composé est généralement appliqué pour les opérations financières et bancaires de long terme. Dans cette situation le taux d'intérêt est rarement constant. Ainsi, on peut s'intéresser au taux moyen qui peut s'appliquer dans cette opération pour pouvoir le comparer à d'autres taux d'intérêt ou d'autre variables macroéconomiques tel que le taux d'inflation,le taux de change…

Soit un capital C_0 placé pendant n_1 années au taux t_1, pendant n_2 années au taux t_2,….et pendant n_p années au taux t_p. Le taux d'intérêt composé moyen se défini comme le taux qui est appliqué aux différentes périodes qui forment la durée du placement ; donne la même valeur acquise. Ainsi, on peut écrire :

$$C_p = C_0(1+t_1)(1+t_2)\text{….}(1+t_k)\text{…}(1+t_p) = C_0(1+\bar{t})^p$$

$$(1+\bar{t})^p = \prod_{k=1}^{k=p}(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_k)\ldots(1+t_p) \quad (5)$$

$$\bar{t} = \sqrt[p]{\prod_{k=1}^{k=p}(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_k)\ldots(1+t_p)} - 1 \quad (5')$$

On obtient le même résultat en utilisant la forme logarithmique de (5)

Exemple : soit un capital d'une unité monétaire placé pendant 10 ans à intérêt composé. Pendant les trois premières années le taux est de 6 %, les trois années suivantes le taux passe à 8 %. Pour les quatre dernières années il est de 9 %. Calculer le taux moyen de ce placement.

En appliquant la formule (5), on écrit :

$$(1+\bar{t})^{10} = (1+0.06)^3(1+0.08)^3(1+0.09)^4 = 2.117849$$

$$\ln(1+\bar{t}) = (\ln(2.117849))/10 = 0.07504$$

$$\bar{t} = e^{0.07504} - 1 = 7.79\ \%$$

7-Capitalisationde intérêts et inflation : le paradoxe

La capitalisation des intérêts fait croître le capital placé d'une manière exponentielle. Ainsi, une unité monétaire placée à intérêt composé au taux de 7.18 % est multipliée par deux au bout de 10 ans ; avec un taux de 10.41 % la durée de multiplication est réduite à sept ans. Cependant, la capitalisation des intérêts n'enrichit pas les épargnants. Ce paradoxe lié à la capitalisation trouve peut s'expliquer par l'érosion du pouvoir d'achat de la monnaie. En effet si le taux d'intérêt permet au capital placé de croître dans le temps ; le taux d'inflation ralentit cette croissance.

En effet, sur le plan nominal, l'épargnant peut voir son capital croître d'année en année. Cependant, exprimé en termes de pouvoir d'achat, le capital placé décroit et peut conduire d'une manière tendancielle à l'appauvrissement de l'épargnant.Pour calculer les gains réels que procure un placement il est nécessaire de déflaté le taux d'intérêt nominal autrement dit de calculer un taux d'intérêt réel. Si on note par π le taux d'inflation annuel et par t_r le taux d'intérêt réel (déflaté). On peut écrire :

$$1 + t_r = \frac{1+t}{1+\pi}$$

$$t_r = \frac{1+t}{1+\pi} - 1 = \frac{1+t-1-\pi}{1+\pi} = \frac{t-\pi}{1+\pi} \approx t - \pi \qquad (6)$$

L'expression (6) montre que le placement peut croitre pendant la durée du placement si et seulement si le taux d'intérêt est supérieur au taux d'inflation. Si la durée compte plusieurs années ; le taux d'intérêt réel est égal à la différence entre le taux d'intérêt moyen et le taux d'inflation moyen. On aboutit même résultat en calculant les taux d'intérêt des différentes années par la formule (6) et leur moyenne par la formule (5').

En Algérie, sur la période 2010-2020, le taux d'intérêt sur les dépôts bancaires a été de 1.75 % . Les comptes d'épargne ont été 2 % pour le livret épargne logement et 2.5 % pour un compte d'épargne ordinaire. Les prêts accordés par les banques et la caisse d'épargne ; ont été à taux d'intérêt moyen annuel de 6.25 %. Le taux d'inflation pour la même période est donné par le tableau qui suit :

Evolution du taux d'inflation en Algérie.

a

annéé	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Taux en %	3.91	4.52	8.89	3.25	2.91	4.78	6.40	5.60	4.27	1.95	2.41

Source : Banque Mondiale.

Les statistiques du tableau, montrent que les taux d'intérêt des comptes d'épargne et des dépôts bancaires sont en moyenne inferieurs au niveau de l'inflation sur toute la période 2010-2020. Ainsi, le taux d'intérêt effectif de l'épargne est négatif. Quant aux crédits accordés par les banques et la caisse d'épargne ; leur taux a été en moyenne supérieur à l'inflation.

8-Taux d'intérêt périodique, taux d'intérêt équivalent

a-Taux d'intérêt périodique

Les taux d'intérêt affichés par les banques sont généralement des taux avec une capitalisation annuelle des intérêts. Cependant, celle-ci n'est pas toujours annuelle. La capitalisation des intérêts peut se faire sur une période autre qu'annuelle. Dans cette situation on est en présence d'un taux périodique noté t/k où t est le taux d'intérêt annuelle et k la fréquence de capitalisation durant l'année. Ainsi, un taux périodique trimestriel est t/4, taux d'intérêt périodique mensuel t/12, taux d'intérêt périodique hebdomadaire t/52…La fréquence des capitalisations d'intérêt durant l'année est très importante. Elle détermine le montant des intérêts de l'opération bancaire. Par exemple, un créancier préfère une capitalisation des intérêts sur une base semestrielle ou trimestrielle plutôt que sur une base annuelle.A l'inverse, pour l'emprunteur, une capitalisation annuelle des intérêts est préférable à une capitalisation semestrielle car elle réduit le coût global de l'emprunt.

Exemple : un capital de 100 UM a été emprunté pour une durée d'une année avec un taux d'intérêt de 10 %. Avec une capitalisation annuelle des intérêts le créancier aura à payer pour le remboursement de sa dette en fin d'année la somme de 110 UM. Si la capitalisation des intérêts devient semestrielle le remboursement de l'emprunt revient à 110.25 UM. Autrement dit, le fait de capitaliser les intérêts tous les six mois, contribue à augmenter le taux effectif de l'emprunt.

b-Taux d'intérêt équivalent

Le taux d'intérêt équivalent est noté $t_k$avec k qui représente la fraction de l'année : semestre : k=2, trimestre k=4,..

Définition : on dit qu'un taux d'intérêt t_k (semestriel t_2, trimestriel t_4,…) est équivalent à un taux annuel t si et seulement si on applique les deux taux d'intérêt à la même somme, pour la même durée de placement et on obtient la même valeur acquise.

Appliquons la définition à un capital initial d'une unité monétaire pour une durée de placement d'une année. On obtient :

$$1(1+t_k)^k = 1(1+t) \qquad (7)$$

Pour un taux d'intérêt équivalent semestriel la définition nous permet d'écrire :

$$1(1+t_2)^2 = 1(1+t)$$

De la première équation, on déduit :

$$t_k = \sqrt{(1+t)} \quad 1 \qquad (7')$$

La formule (7) nous permet de déterminer t_k avec t donné ou l'inverse.
L'équivalence des taux d'intérêt nous permet de passer d'une base de capitalisation des intérêts à une autre de même qu'elle nous permet de comparer les conditions de prêt et d'emprunt que les banques proposent. Dans l'amortissement des emprunts quand la fréquence de capitalisation des intérêts est différente de celle des remboursements ; il est nécessaire de déterminer un taux d'intérêt équivalent pour calculer les intérêts contenus dans l'annuité périodique nécessaire au remboursement de l'emprunt.

Exemple calculer le taux d'intérêt semestriel équivalent au taux d'intérêt annuel de 10 %.

$(1+t_2)^2 = (1+10\ \%) \qquad t_2 = \sqrt{1.1} - 1 = 4.88\ \%$

<u>c-Comparaison taux d'intérêt équivalent, taux d'intérêt périodique</u>

Pour une période de fréquence k, le taux d'intérêt équivalent est toujours inférieur au taux périodique : $t_k < t/k$. En effet à partir de l'équation (7), on peut écrire :

$$(1+t_k)^k = (1+t)$$

Le développement limité du terme de gauche de (7) donne :

$(1+t_k)^k = 1+k.t_k + [(k-1)kt_k^2)]/2! + \ldots$
$= 1+k.t_k + R$ avec R un reste positif.
En remplaçant $(1+t_k)^k$ par son développement dans (7) on obtient :

$$1+t = 1+ kt_k+R \Rightarrow \qquad t = kt_k+R \Rightarrow t/k > t_k$$

Dans l'exemple précédent on vérifie bien que le taux semestriel équivalent 4.88 % est bien inférieur au taux semestriel périodique 5 %.

,

a

9-Capiatalisation continue, actualisation continue

a- Capitalisation continue

Le calcul de la valeur acquise d'un capital, nécessite la capitalisation des intérêts à chaque fin de période. Nous avons vu que la période de capitalisationpouvait être l'année, le semestre, le semestre, le mois,… En poussant le raisonnement, on peut supposer que cette période temps peut se réduire à un laps de temps dt. Dans cette situation, on est présence d'une capitalisation des intérêts de manière continue.

Le principe de la capitalisationcontinu peut s'appliquer dans le domaine économique ou les flux financiers ne se réalisent à des échéances données tels que les remboursements d'emprunt, l'encaissement des coupons d'intérêt des obligations ; les flux financiers se réalisent à des échéances très rapprochées. L'intervalle de temps qui sépare deux flux est infinitésimal. Ainsi, on peut supposer que les flux financiers se réalisent de manière continue.Le flux financier qui se réalise en un point compris entre t et t+dt devient une densité de flux.

On peut relever de nombreux exemple de capitalisation continue. Au poste de péage d'une autoroute les véhicules arrivent de manière presque continue. Le vieillissement des vins permet d'augmenter continuellement leur valeur marchande. Dans les pépinières, la taille plants d'arbustes se développe en permanence et leur prix augmentent de manière continue.

La démonstration suivante montre le passage d'une capitalisation en temps discret à une capitalisation en temps continu :

$C_n = C_0(1+t)^n$

La capitalisation de C_0suivant une période égale à 1/k année pendant n années est :

$C_n = C_0(1+ t/k)^{kn}$

$(1+t) = (1+t/k)^k$

a

La capitalisation continue suppose que k tend vers l'infini autrement dit la période de capitalisation devient de plus en plus courte ; on peut la traduire par :

$$\lim_{k\to\infty} C_n = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{t}{k})^k \qquad (8)$$

En posant : t/k = x => k = t/x ; la limite donnée par(8) devient :

$$\lim_{k\to\infty} C_n = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{t}{k}\right)^k = \lim_{x\to 0}(1+x)^{t/x}$$

En notant le taux d'intérêt continu par j ; on obtient :

$$\text{Ln }[\lim_{x\to 0}(1+x)^{t/x}] = \lim_{x\to 0} t/x ln(1+x) = j$$

$$\text{Ln }[\lim_{x\to 0}(1+x)^{t/x} = j \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{t/x} = e^j \qquad (9)$$

Le résultat donné (9) permet de déterminer le taux d'intérêt continu équivalent au taux d'intérêt discret t comme suit :

$(1+t) = e^j \Rightarrow j = \ln(1+t)$

Exemples : pour t = 0.05, j = ln(1.05) = 0.0487

Pour t = 0.10, j = ln(1.10) = 0.0953

Un capital C_0 placé un taux d'intérêt t avec une capitalisation continue au taux j produit une valeur acquise au bout de n années égale à :

$$C_n = C_0 e^{jn} \qquad (10)$$

Comme dans le cas de la capitalisation discontinue, la valeur acquise au bout de n années ; est égale au capital initial C_0 multiplié par le facteur de capitalisation e^{jn}

b- <u>Actualisation continue</u>

Dans le cas des séquences de versements financiers discontinu, on a déduit l'actualisation de la capitalisation. Il va de même pour la situation où on est en présence de densité de flux financier. La valeur actuelle C_0 d'un capital $C_n$disponible dans n années est égale au produit de C_n par le facteur d'actualisation e^{-jn} .

, $(1+t) = e^j \Rightarrow (1+t)^{-1} = e^{-j}$

$$C_0 = C_n e^{-jn} \qquad (11)$$

a

Exemple : soit un investissement initial de 50 UM qui génère 20 UM par unité de temps. Si le taux d'intérêt prévalant sur le marché est de 10 %. La durée de l'investissement est de 5 ans. Calculer la richesse monétaire actuelle créée par cet investissement en supposant dans un premier cas une actualisation discrète et dans un deuxième cas une actualisation continue.

Dans le cas discret, la richesse $C_0 = -50 + \sum_{k=1}^{k=5} \frac{20}{(1+0.1)^k}$ = 25.81 UM.

Dans le cas continu, on doit calculer le taux continu j équivalent au taux annuel 10 %. Ce taux est donné par l'exemple ci-dessus. Il est égal à 9.53 %.

$C_0 = -50 + \int_0^5 20e^{-0.00953}dk = -50 + 20 \times [-(1/0.00953)e^{-0.0953k}]_0^5 = 29.54$ UM

Quand l'actualisation est continue, la valeur actuelle nette créée par l'investissement est supérieure à celle où les flux sont actualisés d'une manière discrète.

10-Notion de taux actuariel et de rentabilité interne

a- définition du taux actuariel

Nous avons présenté dans le paragraphe-3 les propriétés mathématiques de la fonction qui représente la valeur actuelle nette. Cette fonction est une courbe monotone et décroissante sur l'intervalle [-t, + ∞[. Elle tend vers une valeur négative $-F_0$ quand t tend vers +∞ et vers +∞ quand t tend -1. Ces propriétés de la fonction représentative de la valeur actuelle nette montrent qu'il existe une valeur du taux d'actualisation pour laquelle la valeur actuelle nette est nulle. Cette valeur particulière est appelé taux actuariel ou taux de rentabilité interne. La fonction est monotone sur l'intervalle [-t, + ∞[; le taux actuariel est unique.

Dans la prise de décision dans le choix des investissements, le calcul du taux actuariel permet d'éviter de réaliser des investissements dont la valeur actuelle nette est positive alors qu'ils sont non rentables financièrement. En effet,pour un investissement, une valeur actuelle nette positive n'est rentable que si le taux utilisé pour actualiser les flux monétaires générés par l'investissement est inférieur ou égal au taux du marché. Dans le cas contraire, un placement au taux du marché des fonds destinés à cet investissement s'avèrerai plus profitable financièrement.Ainsi le taux actuariel permet d'éviter les lacunes d'une décision d'investissement basée uniquement sur la positivité de la valeur actuelle nette de l'investissement.

b--Calcul du taux actuariel

a

Le taux actuariel s'obtient par la résolution de l'équation qui suit dont l'inconnu est t^*:

$$-C_0 + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{c_k}{(1+t^*)^k} = 0 \qquad (11)$$

La résolution algébrique de cette équation peut s'avérer complexe. L'équation à résoudre est forme polynomiale de degrés n. La solution peut être obtenue après plusieurs itérations qui encadrent le taux recherché. La solution finale s'obtient par une interpolation linéaire appliquée à l'encadrement le plus étroit. Le logiciel EXCEL fournit la fonction TRI dans la catégorie finance qui permet de calculer d'une manière instantanée le taux actuariel de toute séquence de flux financier dont au moins un des premiers doit être négatif.

Exemple : calculer le taux actuariel de la chronique de flux financier liée à un investissement donné :

{ -1500 ; 250 ; 250 ; 250 ; 250 ; 250 ; 250 ; 250 ; 250 ; 250 ; 250 }

La procédure est la suivante :

- on écrit les données dans l'ordre suivant une forme vectorielle.
- On choisit la fonction TRI dans la catégorie finance
- On sélectionne les données.
- Le résultat recherché est 10.56 %.

Remarque : cas des séquences dont le nombre des flux est infini et leur valeur constante

$$\lim_{k\to\infty}\left\{-C_0 + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{c}{(1+t^*)^k}\right\} = -C_0 + \frac{c}{t^*} \Rightarrow t^* = -c/C_0$$

Exemple si on suppose que l'investissent précédant est une rente infini ; son taux de rendement est égal à t^* = 250/1500 = 16.66 %.

Exercices et problèmes

1-Une personne dispose d'un capital de 20500 UM qu'elle peut investir à un taux de 6 %. Si la capitalisation est semestrielle et la durée est de 10 ans.

1- Calculer la somme qu'elle encaissera à la fin de la 10ème année.
2- Calculer la durée nécessaire pour accumuler la somme de 80000 UM.

2-Une banque déclare dans un spot publicitaire le message suivant à l'intention de sa clientèle : tout capital placé pendant 10 ans double sa valeur initiale ; placé durant 12 ans sa valeur initiale est multipliée par 3.

A quelles conditions cette publicité ne serait-elle pas mensongère ?

3-Calculer le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 12 %.

Calculer le taux annuel équivalent au taux mensuel de 1 %.

Calculer le taux d'intérêt continu équivalent à un taux annuel de 12 %.

Calculer le taux d'intérêt annuel équivalent à un taux d'intérêt continu de 13.97 %.

4-Un capital de 1 000 UM a été placé à intérêts composéspendant une année. Il a produit à la fin de durée du placement un intérêtégal à 120 UM.

1- Calculer le taux d'intérêt nominal trimestriel.
2- Si la capitalisation des intérêts avait été trimestrielle quels aurait été le montant des intérêts.

5-Une personne a placé dans une banque un capital de 100000 UM pendant 10 ans et a obtenu à l'échéance une somme de 265 000 UM. Compte tenu que les intérêts ont été capitalisés semestriellement.

1- Déterminer le taux d'intérêt nominal qui fut crédité à cette personne.
2- Si les intérêts avaient été capitalisés trimestriellement avec un taux nominal de 10% ; qu'elle aurait été la somme perçue à l'échéance des 10 ans ?

6-Un capital C est placé à intérêt composé au taux t pendant n années avec une capitalisation annuelle. Sachant que :

a

- Si ce capital est placé pendant deux ans il produit 36.86 UM d'intérêt.
- Si ce capital est placé pendant quatre ans il produit 57.81 UM d'intérêt
- Si ce capital est placé pendant n années, il produit 168.84 UM d'intérêt

Calculer le taux d'intérêt, la durée n et le capital C

7-Vous désirez vendre votre voiture. Une personne vous propose trois option pour le paiement du prix de la voiture :

- Paiement comptant de la somme de 120 000 UM
- Paiement comptant d'une somme de 80 000 UM et 50 000 UM au bout de deux à partir de la date de vente.
- Paiement comptant de 50 000 UM, suivi du paiement de 30 000 UM, de 25 000 UM et de 30 000 UM. Ces trois seront payées respectivement au premier, deuxième et quatrième mois qui suit la date de vente.

Déterminer la meilleure offre d'achat en supposant un taux d'intérêt du marché de 9 % et une capitalisation semestrielle.

8-Une personne décide de répartir une somme de 200 000 UM entre ses quatre enfants âgés respectivement de cinq, dix, quinze et vingt ans. La répartition est faite de façon à ce qu'à l'âge de 20 ans, chacun des enfants dispose de la même somme d'argent. A cet effet, nous supposerons que le père place l'argent revenant aux enfants n'ayant pas encore atteint 20 ans à un taux d'intérêt composé de 14 % avec une capitalisation semestrielle.

Calculer la part qui revient à chaque enfant. Ce mode de partage est-il juste ? justifier votre réponse.

9-Un capital de 200 000 UM est placé à intérêt composé pendant 3 ans et 5 mois au taux nominal de 8 %.

1- La capitalisation des intérêts est annuelle. Calculer la valeur acquise.
2- La capitalisation des intérêts est mensuelle. Calculer la valeur acquise.

10-Un capital de 100 000 UM a été placé pendant 15 ans à un taux d'intérêt variable. Les trois premières années le taux est 5.5 % , les quatre années suivantes il est de 8 %. Le taux passe à 9% pendant 5 ans. Enfin pour les trois dernières années il est de 12 %. La capitalisation des intérêts est annuelle.

1- Calculer la valeur acquise par ce placement.
2- Calculer le taux d'intérêt moyen.
3- En supposant que ce placement est assujetti à un impôt de 30 % sur le gain généré par l'opération ; calculer les taux d'intérêt moyen net d'impôt

11-Un représentant d'un fonds commun de placement (FCP) vous sollicite pour que vous investissiez un montant de 100 000 UM dans sa société de placement. Le représentant vous propose un plan de placement où vous devrez payer à l'avance des frais d'entrée dont le montant est de 4.5 % du notionnel (100 000UM). Ces frais représentent les coûts de lagestion administrative du fonds. Le souscripteur à ce placement peut payer ces frais par une déduction d'un montant de 430UM sur la somme des 100 000 UM placée. Les intérêts sont calculés sur le capital effectivement placé : 100 000 UM en cas de paiement des frais d'entrée ou 99 570 UM en cas de déduction des frais du placement.

Le représentant vous informe que le FCP a versé depuis sa création des intérêts à un taux annuel moyen de 8 %. Pour prendre votre décision de placement, vous comparer l'offre du FCP avec d'autres produits de placement comparables. Les offres alternatives du marché bancaire et financier proposent :

- Placement pour 1 an taux annuel : 7.25 %
- Placement pour 2 ans taux annuel : 8.00%
- Placement pour 3 ans taux annuel : 8.75%
- Placement pour 8 ans taux annuel : 10 %.

Pour ces placements aucun d'administration n'est exigé sur le placement choisi.

1- Calculer le taux de revient réel pour un placement fait au niveau du FCP
2- Calculer le taux de revient pour chacune des période de placement au niveau du marché bancaire et financier.
3- Quelle est la meilleure offre ?

12-Une entreprise planifie de réaliser un important investissement en 2026 ; à cet effet elle effectue trois placements successifs :

- Le premier en 2016 d'un montant de 50 000 UM.
- Le deuxième en 2018 d'un montant de 30 000 UM.
- Le troisième en 2020 d'un montant de 40 000 UM.

Le taux d'intérêt moyen pour ces trois placements est 9 % et la capitalisation est semestrielle. Calculer la somme disponible le 1/1/2026.

13-Un capital de 100 000 UM a été placé pendant 10 ans au taux d'intérêt nominal de 12 %.

1- Calculer la valeur acquise en supposant une capitalisation discrète.
2- Reprendre la question 1 en adoptant un mode d'actualisation continue.
3- Comparer les deux résultats.

14-En Algérie, en 1970 un kilogramme de poisson ordinaire valait en moyenne 5 dinars et le monnaie salaire mensuel minimum légal était de 500 dinars. En 2021, le même kilo de poisson coute 700 dinars et le salaire mensuel minimum légal est égal à 20 000 dinars. Exprimé en termes de pouvoir d'achat de la monnaie, le prix du poisson en Algérie a-t-il augmenté ou diminué entre 1970 et 2021. Justifier votre réponse.

a

15-On admet que l'inflation cause la dépréciation interne de la valeur de la monnaie nationale. En effet, le prix de la monnaie est par définition déterminé par l'inverse du niveau des prix. Quand ces derniers augmentent le rapport décroit et le prix de la monnaie baisse. Dans cette situation, on se propose de trouver une relation entre le salaire annuel S la valeur de la monnaie.On désigne par S_0 le salaire initial et on suppose qu'il augmente annuellement à un taux r. La variation annuelle du niveau général des prix est mesurée par le taux d'inflation annuel notéπ . De ce qui précède, on déduit que le pouvoir d'achat évolue à un taux annuel p_a.

1- Etablir la relation entre p_a, r et π.
2- Calculer la durée au bout de laquelle le pouvoir d'achat augmentera de 12 %
3- Application numérique : π= 6 %, r = 8%. Calculer p_a par la formule trouvée dans la première question.
4- Si on approxime la valeur de p_a par la différence (π-r) ; qu'elle est la marge de l'erreur commise.

16-Une entreprise d'investir dans l'achat d'un équipement dont la durée de vie est de quatre ans. Ce nouvel équipement permet à l'entreprise de réaliser des recettes additionnelles qui ont été estimés par les managers de l'entreprise comme suit :

- Première année : 30 000 UM
- Deuxième année : 25 000 UM
- Troisième année : 15 000 UM
- Quatrième année 10 000 UM

A la fin de la quatrième année, l'équipement est revendu pour une valeur de 5 000 UM. En supposant que l'investissement est réalisé en début de première année et que les recettes sont réalisées à la fin de chaque année ; calculer la somme maximum que l'entreprise doit investir dans cet équipement ; sachant qu'elle désire réalise un taux de rendement composé de 10 %.

17-Une entreprise a acquis un équipement industriel au prix P_0 = 100 000 UM. La durée de vie de cette machine est limitée à 8 ans. Afin de renouveler cet équipement à une date k, l'entreprise doit débourser son prixnoté P_k. Ce prix augmente annuellement de 10 %. Afin réunir la somme nécessaire qui est égale à P_k. L'entreprise constitue un fonds d'amortissement à partir des recettes générées par l'exploitation de la machine. Ce fonds est alimenté annuellement par une mise en réserve d'une somme a_k et placé dans une banque au taux t. Ainsi, à la date k le prix de la machine P_k. Il est couvert par la valeur acquise du fonds d'amortissement auquel il faut ajouter le prix de revente de l'ancienne machine. Si la somme d'argent ne couvre pas le prix P_k ; l'entreprise se voit contrainte d'ajouter un solde complémentaire S_k. Le prix de revente V_k de la machine après son utilisation durant k années est donné par le tableau qui suit :

k	1	2	3	4	5	6	7	8

a

V_K	9000	8000	6000	4000	3000	2000	1000	0

1- Etablir la relation : $a_k = S_k - S_{k-1}(1+t)$. avec : $a_1 = S_1$
et $2 \leq k \leq 8$.
2- Etablir un tableau qui donne les valeur de P_k, S_k, $S_k(1+t)$ et V_k. et en supposant t= 0.08.
3- L'entreprise désire remplacer la machine à la date 6. Calculer la somme nécessaire pour payer la machine.
4- A qu'elle date l'entreprise pourra-t-elle renouveler la machine en recourant uniquement aux fonds placés et à la valeur de revente de l'ancienne machine.

18-Reprendre l'exercice précédent en supposant que le prix de la machine reste constant et égal à 100 000 UM.

19- En supposant que le prix de revente $V_k$da machine forme une suite géométrique de raison q. $(0< q < 1)$ pour $(0 \leq k \leq n)$. Répondre aux mêmes questions que précédemment.
Application numérique : n = 20 et q = 0.9

20-Un industriel achète une machine à 500 UM Sa valeur résiduelle en fonction de sa durée d'utilisation est $V(n) = 500 - 4n$. L'utilisation de la machine permet à l'industriel de percevoir des flux de cash flow : $R(n) = 85 - 4n$.

En utilisant le principe de la capitalisation continue des cash flow avec un taux j = 0.06 ; on vous demande de déterminer la durée d'utilisation de la machine. L'objectif de l'industriel est la maximisation du bénéfice (différence entre somme des cash flow actualisés et investissement initial).

Chapitre cinquième : les annuités et les rentes

En finance, le terme annuité désigne une série de versements effectué à des intervalles de temps égaux. Autrement dit, une suite temporelle ou une chronique de flux financier ou une rente. Quand le nombre de versement est fini, l'annuité peut être représentée par un vecteur $\{F_1, F_2, \ldots F_n\}$. Les composantes du vecteur représentent les n versements. Par exemple un placement à intérêt simple constitue une annuité élémentaire composée de deux flux : la valeur initiale du capital et la valeur acquise soit :$\{-F_0, +F_n\}$.

Dans les différents domaines de la finance moderne (finance de marché, gestion de portefeuille, gestion du patrimoine, actuariat,..) les annuités restent un outil fondamental.En effet, tous les problèmes qui font l'objet des mathématiques financière et de la finance sont en fait des suites de versements.

Ainsi, l'achat d'une obligation est une suite de n flux dont le premier est le prix d'acquisition du titre, les (n-1) suivants représentent les coupons d'intérêt annuel et le $n^{ème}$ est la somme du dernier coupon et du prix de rachat de l'obligation. Le remboursement des crédits se fait par le paiement d'une suite finie de versements. La décision d'investissement se ramène à l'étude d'une chronique de flux dont le premier est le montant investi est le reste des termes de la suite est constitué des cash flow générés par l'investissement. L'achat d'une action est représenté par une séquence de versements variables dont le nombre peut être considéré comme infini. Le montant des dividendes à verser est fixé par l'assemblée générale des actionnaires. En effet, le flux de la séquence est positif quand une distribution de dividende est décidée En l'absence de répartition de dividendes le terme de l'annuité est nul. La location d'un bien (logement, équipement,..) donne le droit au propriétaire d'encaisser régulièrement un loyer qu'on peut considérer comme une rente ou une annuité infinie.

1-Définition

Une annuité financière, une chronique ou une séquence de flux désigne est une suite de versements effectués à des intervalles de temps constants. L'annuitéest définie par :

- Le montant du versement noté a_k: il peut être constant ou variable d'une manière aléatoire[5] ou suivant une loi donnée. L'annuité peut se présenter sous la forme d'une suite de série de termes dont la première de k éléments égaux à a_k, suivie d'une

[5] Le montant des dividendes à distribuer annuellement par les entreprises varie d'une manière aléatoire. Il dépend des résultats de l'entreprise et de la décision des actionnaires. Dans cette situation le taux de rendement lié à l'achat d'une action n'est plus certain ; il devient un taux de rendement espéré.

deuxième suite de p éléments notés a_p…jusqu'à la dernière séquence de de r éléments notés a_r.

- La fréquence des versements peut être annuelle, semestrielle, trimestrielle,… ou de manière continu. Ainsi, les annuités peuvent être discrètes ou continues. Dans ce dernier on est en présence de densité de flux ou d'annuité.

- Quand l'annuité est discontinue le nombre de flux n peut être fini ou infini[6]. Dans le cas d'une annuité discrète, n est toujours un nombre entier[7] positif. Si les versements se font d'une manière continue, leurnombren appartientà l'intervalle $[0, +\infty[$.

- La fréquence de capitalisation (notée *c*) des intérêts durant l'année peut égale à celle des versements (notée*v*). Capitalisation annuelle des intérêt avec un versement annuel(*c*=*v*). Dans ce cas l'annuité est dite simple. Quand la fréquence de capitalisation des intérêts diffère de celle des versements ($c \neq v$) ; l'annuité est générale.

- L'annuité est de fin de période quand les versements ont lieu en fin de période. A l'opposé, elle est de début de période (à terme échoir) quand les versements sont fait au début des périodes successives.

  Toute annuité possède une origine qui se confond avec l'origine de la première période. Une annuité est dite différée si le premier versement à lieu d périodes après l'origine de la première période. Elle est dite « anticipée » si la date d'origine précède de moins d'une période la date du premier versement.

2-Annuité de fin de période ou annuité immédiate.

C'est la valeur future ou définitive de la séquence de flux. Elle est égale à la somme des valeurs de tous les versements évaluée immédiatement après le versement de la dernière période. On la note V_n.

$$V_n = a_1(1+t)^{n-1} + a_2(1+t)^{n-2}+\ldots+ a_k(1+t)^{n-k}+\ldots+ a_n.$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} a_k \, (1+t)^{n-k} \qquad (1)$$

[6] Une annuité infini est une annuité dont les versements commencent à une date donnée et se poursuivent d'une manière infinie. Ce type d'annuité est appelé rente infinie ou perpétuité.

[7] Si pour une valeur définitive ou un valeur actuelle donnée, le nombre d'annuités n ne permet pas d'arriver à une valeur qui soit égale à l'une de ces deux valeurs ; la règle consiste à prendre n-1 annuités égales à a et une annuité irrégulière différente de a de telle façon que la capitalisation ou l'actualisation des n-1 annuités et de l'annuité irrégulière donne V_n ou V_0. Le versement irrégulier se fera à la fin (début) de la première ou à la fin (début) de la dernière période selon que l'annuité soit à terme échu ou terme échoir.

a

Si a_k est constant et égal à a ; V_n est :

$V_n = a[(1+t)^{n-1} + (1+t)^{n-2}+\ldots+ (1+t)^{n-k}+\ldots+ 1]$ (2)

L'expression entre [...] du terme de droite de (2) est la somme des éléments d'une suite géométrique dont le premier terme est 1 , la raison est égale à (1+t)et le nombre de terme est n.

En appliquant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient :

$$V_n = a\frac{(1+t)^n-1}{t} \quad (2')$$

La valeur acquise d'une annuité est égal au produit du versement par le facteur de capitalisation $\frac{(1+t)^n-1}{t}$ .Tapez une équation ici.

a-Etude du facteur $\frac{(1+t)^n-1}{t}$

Le facteur $\frac{(1+t)^n-1}{t}$ est not S_{nt}.Il est représenté parune fonction croissante de n le taux d'intérêt étant supposé constant. Sa valeur est supérieure ou égal à 1 pour toute valeur de n $\geq$ 1,Quand n tend vers l'infini, le facteur de capitalisation tend vers l'infini. La valeur numérique de ce facteur d'actualisation est fournie par les tables financières.

b-annuité de début de période.

Pour calculer la valeur définitive d'une annuité de début de période ; nous décalerons l'origine de l'annuité à la date -1. La position des versements reste inchangée. Ce décalage de l'origine nous permet de convertir l'annuité de début de période en une annuité de fin de période. Cependant le calcul de la valeur définitive par la formule (2') donne le résultat à la date n-1 soit V_{n-1}. L'échéance de l'annuité se situe une à un période de plus. Autrement dit, pour trouver la valeur acquise à la date n ; il suffit de capitaliser pour une période V_{n-1} La formule est :

$$V_n= a \frac{(1+t)^n-1}{t}(1+t) \quad (3)$$

c-annuité dont les termes varient suivant une progressionarithmétique

a

Soit une séquence de versements dont les termes varient suivant une progression arithmétique de raison r. Le nombre de terme est n. La valeur définitive de l'annuité est égale à :

$V_n = a_1(1+t)^{n-1} + a_2(1+t)^{n-2}+\ldots+a_k(1+t)^{n-k}+\ldots.+a_n$

$= a_1(1+t)^{n-1} + (a_1+r)(1+t)^{n-2}+\ldots+ [a_1+(k-1)r](1+t)^{n-k} +\ldots+ [a_1 + (n-1)r].$

$= [a_1(1+t)^{n-1} + a_1(1+t)^{n-2}+\ldots+ a_1(1+t)^{n-k}+\ldots+a_1]+[r(1+t)^{n-2} + 2r(1+t)^{n-3} +\ldots+$

$(k-1)r(1+t)^{n-k}+\ldots+(n-2)r(1+t)+ (n-1)r.].$ (4)

Le premier terme de l'expression de droite est la valeur acquise d'une annuité de n termes tous égaux à a_1. Elle est donnée par la formule (2'). Le second membre de l'expression est une somme S qui se calcul comme suit :

$S = r(1+t)^{n-2} + 2r(1+t)^{n-3} +\ldots+(k-1)r(1+t)^{n-k}+\ldots+(n-2)r(1+t)+ (n-1)r$

En multipliant S par (1+t) ; on obtient :

$S(1+t) = r(1+t)^{n-1} + 2r(1+t)^{n-2} +\ldots+(k-1)r(1+t)^{n-k+1}+\ldots+(n-2)r(1+t)^2+ (n-1)r(1+t).$

En faisant la différence S(1+t) – S ; on obtient :

$S(1+t)-S = r(1+t)^{n-1}+ r(1+t)^{n-2}+\ldots+ r(1+t)^{n-k}+\ldots+r(1+t) + r - nr.$

$$St = r\ \frac{(1+t)^n-1}{t} - nr$$

$$S = \frac{r}{t}\frac{(1+t)^n-1}{t} - \frac{nr}{t}$$

$$V = a\frac{(1+t)^n-1}{t}+\frac{r}{t}\frac{(1+t)^n-1}{t} - \frac{nr}{t}$$

$$= \frac{(1+t)^n-1}{t}[a +\frac{r}{t}] - \frac{nr}{t} \quad (4')$$

Remarque si l'annuité varie d'une manière arithmétique et est de début de période ; on multiplie la formule (4') par le facteur (1+t).

d-<u>annuité dont les termes varie suivant une progression géométrique</u>

Une chronique dont les termes varient suivant une progression géométrique de raison q et dont le nombre de ses éléments est n ; sa valeur définitive est égale à :

$V_n=a_1(1+t)^{n-1} + a_2(1+t)^{n-2}+\ldots+a_k(1+t)^{n-k}+\ldots.+a_n.$

a

$=a_1(1+t)^{n-1}+a_1q(1+t)^{n-2}+....+a_1q^{k-1}(1+t)^{n-k}+...+ a_1q^{n-2}(1+t) + a_1q^{n-1}$.

Le membre de droite de l'expression représente la somme des terme d'un progression géométrique de n termesdont le premier est $a_1(1+t)^{n-1}$. La raison est égale à $q(1+t)^{-1}$.En appliquant la formule donnée en annexe du chapitre-1 on trouve :

$V_n= a\frac{q^n -(1+t)^n}{q-(1+t)}$ pour $q\neq (1+t)$(5)

Si q = (1+t) ;on remplace q par (1+t)dans l'expression de V_n donnée ci-dessus et la valeur définitive de l'annuité s'écrit comme suit :

$V_n = a_1(1+t)^{n-1}+a_1(1+t)(1+t)^{n-2}+....+a_1(1+t)^{k-1}(1+t)^{n-k}+...+ a_1(1+t)^{n-2}(1+t) + a1(1+t)^{n-1}$

$= na(1+t)^{n-1}$(6)

Si l'annuité est de début de sa valeur définitive sera égale à :

$V_n= na (1+t)^{n-1}(1+t) = na(1+t)^{n-1}$ (6')

<u>e-annuités variant par série</u>

Une annuité de versements varie en série si elle est formée de n_p suite partielle dont la première est un séquence de n_1 versements tous égaux à a_1, la deuxième suite comprend n_2 éléments de valeur nominale a_2 ; la dernière est une suite de n_p annuités toutes égales à a_p. La valeur acquise d'une chronique de versements variant en série est égales à la valeur capitalisée des tous les versements composant les n_p annuités. Cette valeur définitive est calculée à l'échéance de la dernière séquence de flux n_p. Elle est donnée par l'expression qui suit :

$V_{np} = a_1\frac{(1+t)^{n_1}-1}{t}(1+t)^{n2+...np} +a_2\frac{(1+t)^{n_2}-1}{t} (1+t)^{n3+n4+..np}+...+ a_p\frac{(1+t)^{n_p}-1}{t}$

$= a_1S_{\overline{n1+n2+...+np}|} -a_1S_{\overline{n2+n3+....np}|}+a_2S_{\overline{n2+n3+...+np}|}- a_2S_{\overline{n3+n4+..+np}|}+...+a_pS_{\overline{np}|}$

$= a_1S_{\overline{n1+n2+...np}|}+ (a_2-a_1)S_{\overline{n2+n3+...np}|}+(a_3-a_2)S_{\overline{n3+n2+...+np}|}+...+ (a_p-a_{p-1})S_{\overline{np}|}$.

$= \sum_{k=1}^{k=p}(a_k- a_{k-1}) S_{\overline{nk+...+ np}|}$ (7)

a

Pour une série de deux suites elle est de la forme : { (a_1 ; a_1 ; …. ;a_1) ; (a_2 ; a_2 ;…a_2)}. La première annuité comprend n_1 élément égaux à a_1 ; la deuxième comprend n_2 éléments égaux à a_2.

$$V_{n2} = a_1 \frac{(1+t)^{n_1}-1}{t}(1+t)^{n2} + a_2\frac{(1+t)^{n_2}-1}{t} =$$

$$= a_1 \frac{(1+t)^{n1+n2} - (1+t)^{n2}}{t} + a_2\frac{(1+t)^{n_2}-1}{t}$$

$$= a_1\, S_{\overline{n1+n2}|} + (a_2 - a_1)\, S_{\overline{n2}|} \qquad (7')$$

Exemple : Une personne réalise un plan d'épargne bancaire sur une durée de 10ans. Durant les quatre premièresannées elle verse à la banque à la fin de chaque année une somme de 10 000 UM. Pour la duréerestante ; les dépôts d'épargne ont été portés annuellement à 15 000 UM. Sachant que le taux d'intérêt nominal est 6 % et la capitalisation des intérêts est annuelle. Calculer la valeur définitive de ce plan d'épargne.

$$V_{10} = 10\,000\, S_{\overline{4+6}|} + (15\,000 - 10\,000)\, S_{\overline{6}|}$$

$$= 10\,000\, \frac{(1+10\%)^{10} - 1}{10\%} + 5\,000\frac{(1+10\%)^{6}-1}{10\%} =$$

$$= 10\,000 \times 15.937425 + 5000 \times 7.715610 = 197\,952,25 \text{ UM}.$$

On arrive au même résultat en capitalisant séparément les deux annuités :

$$V_{10} = 10\,000 \times\frac{(1+10\%)^{4}-1}{10\%} \times (1+10\%)^{6} + 15000 \times\frac{(1+10\%)^{6}-1}{10\,\%} =$$

$$= 10\,000 \times 4.641 \times 1.771561 + 15\,000 \times 7.71561 = 197\,952.29 \text{ UM}.$$

<u>f-Les annuités continues</u>

Dans les annuités continues, le versement est une densité de flux. Il représente l'annuité qui est versée pendant un temps infinitésimal *dt*. Autrement dit, le versement en un point de l'axe du temps. En suivant la même démarche que celle suivi dans le cas des annuités discontinues. La valeur acquise d'une annuité a est :

$a\,dt(1+t)^n = ae^{jn}dt$ si l'annuité a été versée pendant un intervalle de temps qui s'étend de o à n. Le taux d'intérêt continu est j. La valeur acquise de l'annuité sera :

$$V_n = \int_{t=0}^{t=n} ae^{jt}dt = a\frac{e^{jn}-1}{j} \qquad (8)$$

a

Dans l'expression (8), le terme $\frac{e^{jn}-1}{j}$ représente le facteur de capitalisation de l'annuité. Il est valable quand l'intervalle de temps représentant la durée de l'annuité, est défini à partir de la valeur 0. Pour tout autre intervalle ; la valeur acquise de l'annuité passe par le calcul de l'intégrale figurant dans (8).

Exemple : Soit un placement qui génère un flux monétaire de 20 UM par unité de temps pendant 5 ans. Le taux d'intérêt nominal t est de 8 %. Calculer sa valeur définitive au bout de cinq ans.

Le taux d'intérêt continu est j= ln(1+ 8%) = 7.69 %.

$V_5 = \int_{t=0}^{t=5} 20.e^{0.0769.t}dt = 20\frac{e^{0.0769x5}-1}{0.0769} = 121.94$ UM

Remarque : une capitalisation discontinue des intérêts donne une valeur acquise inferieure. Elle est égale à 117.33 UM.

3-Valeur actuelle ou valeur à l'origine d'une annuité

a-annuité constante

C'est la valeur présente ou valeur à la date 0 de la séquence de flux. Elle est égale à la somme des valeurs de tous les versements évaluée à l'origine de l'annuité. On la note V_0.

$$V_0 = a_0 + a_1 (1+t)^{-1} + a_2(1+t)^{-2}+\ldots+a_k(1+t)^{-k}+\ldots+ a_n(1+t)^{-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} a_k(1+t)^{-k} \qquad (9)$$

Si les versements sont constants a_k= a pour tout k. La valeur actuelle V_0 est :

$$V_0 = a \sum_{k=0}^{k=n} (1+t)^{-k}$$

$$= a[1+ (1+t)^{-1} + (1+t)^{-2}+\ldots+ (1+t)^{-k}+\ldots+ (1+t)^{-n}] \qquad (9')$$

Dans l'expression (9'), le terme entre crochet écrit à droite, représente la somme de n éléments d'une suite géométrique dont le premier est $(1-t)^{-n}$ et la raison est (1+t). En appliquant la formule de l'annexe du chapitre-1 ; on trouve :

a

$V_0 = a\,[(1+t)^{-n}\,\frac{(1+t)^n\ -1}{t}\,] = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$(9'')

Le terme $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ est appelé facteur d'actualisation. Il est noté a_n. Il est représenté par une fonction à deux variables t et n. Cette dernière est croissante par rapport à n ; t étant supposé constant. En effet, quand n augmente le nombre de termes de l'annuité croît et la valeur actuelle de celle-ci augmente. A l'opposé toute croissance du taux t[8] en présence d'une constance de n ; se traduit par une baisse de la valeur actuelle de l'annuité. Ces résultats sont confirmés par les tables financière qui donnent la valeur numérique du facteur d'actualisation.

Remarque -1 : la valeur actuelle de l'annuité peut être déduite de sa valeur acquise :

$$V_0 = V_n(1+t)^{-n} = a\ \frac{(1+t)^n-1}{t}(1+t)^{-n} \quad = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Remarque-2 : la valeur actuelle d'une annuité de début de période est :

$$V_0 = a\ \frac{(1+t)^n-1}{t}(1+t)(1+t)^{-n} = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}(1+t)$$

Remarque-3 : la valeur actuelle d'une annuité constante est infinie est :

$\lim_{n\to\infty} V_0 = \frac{a}{t}$ si elle est de début de période, sa valeur actuelle est : $\lim_{n\to\infty} V_0 = \frac{a}{t}(1+t)$

Ainsi le facteur d'actualisation d'une rente infinie de début de période est $\frac{1}{t}+1$

<u>b-échéance moyenne</u>

L'échéance moyenne ou échéance unique a été définie dans le paragraphe 5 du chapitre 2. Il s'agit de l'échéance de l'effet remplaçant. En effet, on peut considérer les n annuités constantes à verser aux différentes échéances comme des dettes qu'on se propose de remplacer par une dette unique de valeur nominale n.a dont il faut déterminer l'échéance. En appliquant la notion d'équivalence des effets qui implique l'égalité de leur valeur actuelle et en notant l'échéance moyenne : x ; on peut écrire :

$$na\,(1+t)^{-x} = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$n\,(1+t)^{-x} = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$(1+t)^{-x} = \frac{1-(1+t)^{-n}}{nt} \Rightarrow x = \frac{\log[\,nt/(1-(1+t)^{-n}]}{\log(1+t)} \quad (10)$$

[8] Le taux t peut être considéré comme taux d'escompte toute croissance de ce dernier contribue à baisser la valeur actuelle de l'effet de commerce (voir chapitre 2).

a

L'échéance moyenne x dépend du taux d'actualisation et du nombre d'annuité et non de la valeur de cette dernière.

<u>c-fractionnement des annuités constantes</u>

On sait pour les versements payables à terme échu que l'annuité est égale au rapport de la valeur actuelle sur le coefficient d'actualisation ($a = V_0/a_{\overline{n}|}$). Quand l'annuité est de début de période, le versement périodique a est réduit dans le rapport (1+t). En effet :

$$a = V_0\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} \times \frac{1}{(1+t)} \quad (11)$$

Souvent le titulaire d'une rente annuelle demande à ce que les annuités lui soient versées mensuellement ou trimestriellement. Dans ce cas on dit que la rente est fractionnée. L'annuité annuelle est divisée en k (k entier naturel supérieur à 1) versements tous égaux à a/k . Ces fractions d'annuité sont payables à la fin de chacune des k sous périodes qui forment l'année. La durée du placement est n. Le nombre de sous période est nk. La valeur actuelle de cette annuité fractionnée est :

$$V_0(k) = \frac{a}{k}[\,(1+t)^{-1/k} + (1+t)^{-2/k}+\ldots+(1+t)^{-k/k}+\ldots+ (1+t)^{-(nk-1)/k}+(1+t)^{-nk/k}] \quad (12)$$

Le terme de droite de l'expression (11) forme une somme de suite géométrique de nk termes et dont le premier est $(1+t)^{-n}$. La raison est égale à $(1+t)^{1/k}$. Ainsi la valeur actuelle de cette annuité est :

$$V_0(k) = \frac{a}{k}[\,(1+t)^{-n}\frac{((1+t)^{1/k})^{nk})-1}{(1+t)^{1/k}-1}\,]$$

$$= \frac{a}{k}[\,((1+t)^{-n}(\,1-(1+t)^{-n}))/1-(1+t)^{1/k}]$$

$$= \frac{a}{k}\,[\frac{1-(1+t)^{-n}}{(1+t)^{1/k}-1}](12')$$

Dans le dénominateur de (11'), on peut remplacer l'expression $(1+t)^{1/k}- 1$ par le taux équivalent t_k. En multipliant et divisant (11') par t, on obtient :

$$V_0(k) = = a[\quad \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \times \frac{t}{kt_k}\,](12'')$$

Le facteur $\frac{t}{kt_k}$ est appelé coefficient de fractionnement. Il est supérieur à 1 car le taux équivalent t_k est inférieur au taux proportionnel t/k[9]

[9] Voir démonstration dans le paragraphe c taux équivalent du chapitre quatre.

Remarque : la valeur actuelle $V_0(k)$ est supérieure à la valeur actuelle d'une annuité ordinaire V_0. La démonstration de ce résultat est triviale. En effet, le rapport $V_0(k)/V_0$ est égal au coefficient de fractionnement. Ce dernier est supérieur à 1.

4-annuité variant suivant une progression arithmétique

Soit une annuité de n versements a_k variant suivant une progression arithmétique de raison r . En reprenant la démonstration donnée en (4') ; sa valeur actuelle V_0 est :

$$V_0 = a_1(1+t)^{-1} + a_2(1+t)^{-2}+\ldots+a_k(1+t)^{-k}+\ldots.+a_n(1+t)^{-n}$$

$$V_0 = a_1(1+t)^{-1} + a_1 (1+r) (1+t)^{-2}+\ldots+a_1[(1+(k-1)r] (1+t)^{-k}+\ldots.+a_1 [1+(n-1)r](1+t)^{-n}$$

$$= a_1\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} + r (1+t)^{-2} +2r(1+t)^{-3}+ (k-1)r(1+t)^{-k}+\ldots+ (n-1)r(1+t)^{-n}$$

$$= a_1\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} + S$$

$$S(1+t) - S = St = r(1+t)^{-1} + r(1+t)^{-2}+\ldots.+r(1+t)^{-n+1}+r(1+t)^{-n}-nr(1+t)^{-n}$$

$$S = (a+ \frac{r}{t}) [\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}] + \frac{nr}{t}(1+t)^{-n}(13)$$

Remarque : quand une annuité est infinie, c'est le cas par exemple des rentes perpétuelles ; sa valeur actuelle est donnée par :

$$\lim_{n\to\infty} V_0 = (a+ \frac{r}{t})\frac{1}{t}(13')$$

5--annuité variant en progression géométrique

La valeur actuelle d'une chronique de versement en progression géométrique peut être déduite de la valeur acquise :

$$V_0 = V_n(1+t)^{-n} = a\frac{q^n -(1+t)^n}{q-(1+t)}(1+t)^{-n} =$$

$$= a\frac{q^n (1+t)^{-n}-1}{q-(1+t)}\text{pour } q\neq (1+t)(14)$$

Remarque-1 si q= (1+t) $V_0 =na(1+t)^{n-1} (1+t)^{-n} =na(1+t)^{-1}(14')$

Remarque-2 cas des annuités infinies :

$$\lim_{n\to\infty} V_0=\frac{a}{(1+t)-q}(14'')$$

a

6-annuité variant en série

Soit une chronique de versement variant en série selon les conditions données dans le paragraphe f. Sa valeur actuelle est donnée par la formule qui suit :

$$V_0 = a_1\frac{1-(1+t)^{-n_1}}{t} + a_2\frac{1-(1+t)^{-n_2}}{t}(1+t)^{-n1} + \ldots + a_p\frac{1-(1+t)^{-n_p}}{t}(1+t)^{-[(n1+n2+\ldots+n(p-1)]}$$

$$= a_1 a_{\overline{n1}|} + a_2\,(a_{\overline{n1+n2}|} - a_{\overline{n1}|}) + \ldots + a_p(a_{\overline{n1+n2+\ldots+np}|} - a_{\overline{n1+n2+\ldots+np-1}|}) \quad (15)$$

$$= a_{\overline{n1}|}(a_1 - a_2) + a_{\overline{n1+n2}|}(a_2 - a_3) + \ldots + a_{\overline{n1+n2+\ldots+np-1}|}(a_{p-1} - a_p) + a_{\overline{n1+\ldots+np}|}\,a_p$$

Exemple cas d'une annuité composée de deux séries a_1 et a_2, la première est formée de n_1 versements tous égaux à a_1, pour la deuxième le nombre de versements est n_2 et leur valeur est a_2.

$$V_0 = a_1\frac{1-(1+t)^{-n_1}}{t} + a_2\frac{1-(1+t)^{-n_2}}{t}(1+t)^{-n1}$$

$$= a_2\, a_{\overline{n1+n2}|} + (a_1 - a_2)\, a_{\overline{n1}|}$$

$$= a_2\, a_{\overline{n1+n2}|}\ (a_2 - a_1)\, a_{\overline{n1}|} \quad (15')$$

Exemple : soit une annuité composée de 15 versements annuels. Les 10 premiers sont tous égaux à 1 000 UM. Les cinq derniers ont pour valeur chacun 1500 UM. Le taux d'actualisation est de 9 %. pour la première période(10 ans) et de 8 % pour les cinq dernières années. Calculer la valeur actuelle de cette séquence de versements.

$$V_0 = 1000\,\frac{1-(1+0.09)^{-10}}{0.09} + 1500\,\frac{1-(1+0.08)^{-5}}{0.08}(1+0.09)^{-10} =$$

7-annuité continue

En suivant la même démarche que celle suivi dans le paragraphe-g. La valeur actuelle d'une annuité continue est : $a\,dt(1+t)^{-n} = ae^{-jn}dt$. Le facteur d'actualisation est e^{-jn}. si l'annuité a été versée pendant un intervalle de temps qui s'étend de o à n. Le taux d'intérêt continu est j. La valeur actuelle de l'annuité sera :

$$V_0 = \int_{t=0}^{t=n} ae^{-jt}dt = a\frac{1-e^{-jn}}{j} \quad (16)$$

Exemple : reprendre le données de l'exemple donné dans le paragraphe-g et calculer la valeur actuelle du placement.

$$V_0\int_{t=0}^{t=5} 20.e^{-0.0769.t} = 20\frac{1-e^{-0.0769x5}}{0.0769} = 83.02 \text{ UM}.$$

a

On retrouve le même résultat en actualisant la valeur définitive trouvée dans l'exemple du paragraphe-g.

$V_0 = 121.94\ (1+0.08)^{-5} = 121.94 \times 0.680583\ 82.99 \approx 83$ UM.

8-Valeur définitive, valeur actuelle d'une annuité générale

Dans les paragraphes qui précèdent nous avons étudié les annuités simples autrement dit les annuités où les périodes de capitalisation des intérêts et de versement des annuités coïncident. Il n'y a aucun décalage. Cependant dans la réalité la fréquence de capitalisation des intérêts peut être différente de celle des versements. Ces derniers peuvent être mensuels en présence d'une capitalisation annuelle des intérêts.Dans les problèmes d'amortissement des emprunts indivis, les versements sont souvent mensuels ou trimestriels alors que la capitalisation des intérêts est annuelle.

En notant c la fréquence de capitalisation des intérêts et v celle des versements ; quand l'annuité est simple on a c=v. Une annuité est générale si $c \neq v$.

a-conversion d'une annuité générale en une annuité simple.

Afin de pouvoir utiliser les formules et le règles qui ont été présentées dans les paragraphes précédents et qui ne sont valables que pour les annuités simples ; le principe consiste non pas à développer de nouvelles méthodes de calcul mais à convertir l'annuité générale en une annuité simple. A cette fin, deux approches sont possibles. La première se base sur le versement périodique elle est appelée méthode du facteur de correction. la deuxième approche repose sur l'équivalence des taux d'intérêt.

b-méthode du facteur de correction

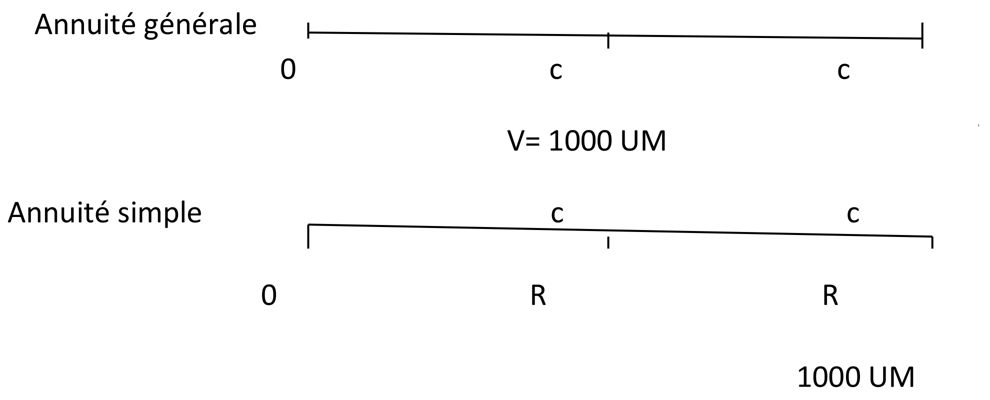
Le principe de cette méthode consiste à ramener les périodes de versements aux périodes de capitalisation à l'aide d'un facteur de correction. Ce dernier diffère selon la nature de l'annuité (annuité de fin de période ou annuité de début de période).A partir d'un exemple simple, on présente la méthode.

Soit une rente de 1000 UM payable à la fin de chaque année pendant 4 ans. Si le taux d'intérêt est de 9 % et la capitalisation semestrielle ; calculer la valeur définitive et la valeur actuelle de cette annuité sachant qu'elle est à terme échu.

La fréquence annuelle de versement est v = 1.
La fréquence de capitalisation est semestrielle : c = 2.

Les deux fréquences sont différentes, l'annuité est générale. Pour la transformer en annuité simple il faut trouver une annuité fictive qui soit équivalente à l'annuité générale donnée.

a



Dans le deuxième schéma ci-dessus ; l'annuité fictive R coïncide avec la capitalisation et l'annuité d'origine a = 1000 UM apparait comme la valeur future de deux versements fictifs réalisée durant une année. Les schémas précédents peuvent être étendue à toute la durée de l'annuité qui est de 4 ans. Ainsi R sera égal à :

$$1000 = R\,\frac{(1+0.045)^2-1}{0.045} \Rightarrow R = \frac{1000 \text{ x } 0.045}{(1+0.045)^2-1} = 1000 \text{ x } 0.48899 = 488.99 \text{ UM}$$

L'annuité fictive 488.99 UM semestrielle remplace l'annuité annuelle 1000 UM. Les deux annuités sont équivalentes. La première est générale, la deuxième est simple et permet l'application des formules des paragraphes précédents.

$$V_n = 488.99\,\frac{(1+0.045)^8-1}{0.045} = 488.99 \text{ x } 9.380014 = 4586.73 \text{ UM.}$$

Pour calculer la valeur définitive de l'annuité générale ; on est passé par deux étapes qui peuvent être regroupées dans la formule suivante :

$$V_n = a\frac{t}{(1+t)^{c/v}-1}\frac{(1+t)^n-1}{t} \quad (17)$$

Dans l'expression (17), le terme $a\frac{t}{(1+t)^{c/v}-1}$ est le facteur de correction et le terme $\frac{(1+t)^n-1}{t}$ est le facteur de capitalisation. Le taux t utilisé est celui relatif à la période de capitalisation. Dans notre exemple, le taux annuel est 9 %, la capitalisation est semestrielle le taux proportionnel est égale à 4.5 %. La durée du placement est exprimée en nombre de période de capitalisation. Dans l'exemple n= 8. On peut récrire (17) comme suit :

$$V_n = a(1/S_{\overline{C/V}|t} \,.\; S_{\overline{n}|t}) \quad (17')$$

a

La valeur actuelle de l'annuité est déduite de sa valeur définitive et est égale à :

$$V_0 = a\frac{t}{(1+t)^{c/v}-1}\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \qquad (18)$$

$$V_0 = a\,(1/\,S_{\overline{c/v}|}\cdot a_{\overline{n}|}) \qquad (18')$$

$$V_0 = 488.99 \text{ x } \frac{1-(1+0.045)^{-8}}{0.045} = 488.99 \text{ x}6.59586 = 3225.32 \text{ UM}$$

Cas des annuités de début de période ou annuité payée d'avance.

Quand l'annuité est payée d'avance ou à terme échoir, le calcul de la valeur définitive et de la valeur actuelle nécessite une adaptation du facteur de correction. Les formules précédentes deviennent :

$$V_n = a\frac{t}{1-(1+t)^{-c/v}} \text{ x } \frac{(1+t)^n-1}{t} (19)$$

$$V_n = a(\,1/a_{\overline{c/v}|t}\cdot S_{\overline{n}|t}) \qquad (19')$$

Remarque pour les annuités infinies, la valeur présente est égale à :

Annuité à terme échu : $V_0 = a\frac{t}{(1+t)^{c/v}-1}\frac{1}{t}$

Annuité à terme échoir : $V_0 = a\frac{t}{1-(1+t)^{-c/v}} \text{ x } \frac{1}{t}$

c-méthode de l'équivalence des taux d'intérêt

Cette méthode est plus simple que la précédente. Elle se base sur la règle d'équivalence des taux d'intérêts et permet de calculer un taux périodique d'intérêt qui coïncide avec les fréquences de capitalisation des intérêts. Dans l'exemple précédent, le versement est annuel et la capitalisation est semestrielle ; un taux d'intérêts annuel équivalent à 4.5 % permet d'égaliser les fréquences de versement et de capitalisation sur une base annuelle.L'inconvénient de cette méthode est qu'en général ; elle ne permet pas l'utilisation des tables financières. Les taux équivalents obtenus sont souvent non tabulés. L'usage des calculatrices et du logiciel Excel comblent cette lacune.

A partir de l'exemple précédent, on calcule le taux d'intérêt annuel équivalent au taux semestriel de 4.5 %

$(1+0.045)^2 = 1 + t \Rightarrow t = (1+0.045)^2 - 1 = 9.2025$ %.

$$V_4 = 1000 \; \frac{(1+0.092025t)^4-1}{0.092025} = 1000 \text{ x } 4.586803 = 4586.80 \text{ UM.}$$

a

$$V_0 = 1000\,\frac{1-(1+0.092025)^{-4}}{0.092025} = 1000 \times 3.22537 = 3225.37 \text{ UM.}$$

a

Exercices et problèmes

1-Soient les annuités simples suivantes, le nombre de versement est n et leur est a et le taux est t. On vous demande de compléter le tableau suivant :

	V_n	a	n	t	V_0
Placement 1	?	2000	15	8 %	?
Placement 2	20 000	?	12	9 %	?
Placement 3	20 000	1500	10	?	?
Placement 4	20 000	1000	?	10 %	?
Placement 5	?	?	12	8 %	15 000

2-Suite à un sinistre, une compagnie d'assurance propose à une personne de l'indemniser suivant deux options au choix.

1- Un paiement comptant de 5000 UM
2- Un versement comptant de 700 UM et des semestrialités de 600 UM à terme échu pendant 4 ans et demi, sachant que cette personne a la possibilité de placer son argent avec un taux de 9 % et une capitalisation semestrielle.

Quelle est l'option la plus rentable financièrement ?

3-Vous avez besoin d'une voiture pour une durée de 36 mois. Vous pouvez acheter ou la voiture ou louer.

- La location nécessite le versement de 210 UM au début de chaque mois. Aucun frais n'est à prévoir à l'exception des frais de carburant.
- Le prix d'achat de la voiture est de 6900 UM à payer au comptant. Sachant que vous n'avez pas la somme nécessaire ; vous optez pour un financement par crédit bancaire. La banque prêteuse vous propose un crédit avec un taux de 9 % et une capitalisation mensuelle des intérêts. Le remboursement de l'emprunt se fera par 36 mensualités de début de période. La valeur vénale de la voiture après 36 mois d'utilisation est estimée à 2000 UM.
  a- Calculer la mensualité à payer
  b- Quelle est la meilleure option : achat ou location de la voiture.
  c- Déterminer la valeur de revente de la voiture qui rend les deux options équivalentes.

4-Un emprunt de 3000 UM est remboursé par des versements de 300 UM effectués au début de chaque semestre. Le taux d'intérêt est de 6.5 % et la capitalisation des intérêts est semestrielle. Déterminer :

a- Le nombre de semestrialité
b- Le montant du versement irrégulier s'il est effectué à la fin du premier semestre.

c- Le solde à payer immédiatement avant le $10^{ème}$ versement, sachant que le premier est irrégulier.
d- Le solde à payer immédiatement avant le $12^{ème}$ versement, sachant que le dernier est irrégulier.

5-Une banque consent à vous accorder un crédit de 3000 UM pour une durée de 5 ans. Le remboursement du crédit se fait par un versement trimestriel de fin de période de 220.75 UM. Quel est le taux trimestriel de l'emprunt ? Quel est le taux effectif de l'emprunt ?

6- Une personne doit honorer 24 traites mensuelles dont la valeur de chacune est de 2000 UM. Le paiement se fait au début de chaque mois. Le taux d'intérêt est de 1 % et la capitalisation est mensuelle. Le débiteur demande à son créancier de remplacer les 24 traites par un paiement unique de valeur nominale égale à 48 000 UM. Déterminer l'échéance de ce versement unique.

7-Une personne emprunte une somme portant intérêts composés à 12 %. Le créancier lui demande que le remboursement soit fait par 12 annuités annuelles constantes de 2 000 UM chacune. Le premier versement a lieu une année après. Après entente entre le débiteur et le créancier ; il a été convenu que le remboursement du prêt se fera plutôt au moyen de 10 versements semestriels constants payables d'avance.

a- Déterminer le montant du crédit.
b- Calculer la valeur de la semestrialité.

8-Une personne âgée de 30 ans décide de se constituer un régime de rente. Il prévoit de verser à une compagnie d'assurance spécialisée dans les rentes, un montant semestriel de 1200 UM. Le premier versement aura lieu dans 6 mois et le dernier à l'âge de 60 ans. L'objectif de cette personne est de pouvoir recevoir une rente temporaire trimestrielle commençant trois mois après avoir atteint l'âge de 60 ans et se terminant à l'âge de 75 ans. Sachant les hypothèses suivantes :

a- On anticipe un rendement moyen de 7 % pour la période d'accumulation des versements (30-60 ans)
b- Un rendement de 8 % capitalisé semestriellement est prévu pour la période d'encaissement de la rente (60-75 ans).
Déterminer le montant trimestriel de cette rente.

9-Une personne achète en 2010 un appartement et le finance par un crédit par un crédit bancaire avec un taux d'intérêt de 7 %, une capitalisation semestrielle et une durée de prêt de 25 ans. Douze ans plus tard, soit en 2022 ; cette personne a besoin de 17 000 UM pour financer l'achat d'un véhicule. Le solde de l'hypothèque de sa maison à cette date est de 12 500 UM et la valeur marchande de l'appartement est de 44 000 UM. Face à cette situation, une banque lui offre deux propositions :

a

a- Un refinancement au complet du solde de l'hypothèque et de l'achat du véhicule par un crédit au taux de 10 % capitalisé semestriellement.
b- Prendre une deuxième hypothèque sur l'appartement pour un montant de 17 000 UM à un taux de 14 % capitalisé semestriellement.
Quelle est la meilleure option ? Justifier votre réponse.

10-Une personne a acheté en 2008 un appartement au prix de 22 000 UM. Une valeur de 2000 UM a été versée au comptant et le solde fut financé par un crédit octroyé par la CNEP (Caisse Nationale d'Epargne et de Logement). La durée du crédit est fixée à 25 ans avec un taux d'intérêt de 6.5 % et une capitalisation semestrielle.En 2018, soit 10 ans plus tard, le propriétaire de l'appartement désire emprunter une somme de 18 000 UM pour acheter un logement de vacance. La CNEP n'accorde pas des crédits de refinancement. Il se dirige vers une banque privée. Cette dernière évalue le premier appartement acheté pour une valeur de 41 500 UM. Sachant qu'une hypothèque résiduelle demeure sur cette propriété achetée en 2008, la banque lui propose :

a- refinancement global de l'hypothèque résiduelle et du prêt de 18 000 UM à un taux de 9 % capitalisé semestriellement
b- accorder un crédit de 18 000 UM au taux d'intérêt de 12 % avec une capiatalisation semestrielle.
Dans les deux cas, le refinancement se fera la base de la période restante de la première hypothèque soit 15 ans. Quelle est la proposition à recommander pour cette personne?

11- Une entreprise industrielle désire réaliser un investissement autoroutier. Elle a le choix entre trois projets de même durée d'exploitation et mutuellement exclusifs. Le tableau suivant donne le coût de l'investissement initial est les cashflows annuels dégagés par chaque projet.

	Projet A	Projet B	Projet C
Investissement	170 000	150 000	200 000
Année 1	30 000	65 000	60 000
2	30 000	60 000	50 000
3	30 000	50 000	25 000
4	30 000	20 000	20 000
5	30 000	10 000	20 000
6	30 000	2000	15 000
7	30 000	2000	15 000
8	30 000	2000	10 000
9	30 000	2000	3 000
10	30 000	2000	2 000

a

Le coût annuel du capital est fixé à 10 % et les cashflows sont supposés se réaliser à la fin des chacune des années. La valeur résiduelle du projet est nulle.

a- Calculer la valeur actuelle nette pour chaque projet et classer les suivant ce critère.
b- Calculer le taux de rendement interne de chacun des projets
Remarque : l'exercice peut être résolu par Excel fenêtre : finance,fonctions : VAN et TRI.

12-Calculer la valeur actuelle d'une rente annuelle infinie dont le versement est de 2000 UM Le taux d'intérêt est de 6% avec une capitalisation annuelle.

a- la rente est immédiate.
b- La rente est différée de 3 mois.
c- Répondre aux questions a et b en supposant une capitalisation semestrielle.

13-Evaluer une rente temporaire annuelle immédiate dont les termes sont en progression arithmétique de raison r= 100. Le nombre de termes est 8 et le taux d'évaluation est de 6%. Le premier terme vaut 800 UM. Même problème en supposant que les termes sont en progression géométrique de raison q = 1.5.

14- Un agriculteur désire acheter une parcelle de terre. Les revenus qu'il prévoit de gagner de l'exploitation de cette terre sont estimés à 90 000 UM par année. Quelle est le prix à payer pour l'achat de la parcelle de terre sachant que le taux de rendement annuel exigé est de 14 % avec une capitalisation trimestrielle. Les revenus sont supposés infinis et réalisé à la fin de chaque année.

15-Une fondation désire créer un fonds afin de pouvoir financer annuellement des dons alimentaire au profit des nécessiteux. Le don est estimé à 1000 UM. Le directeur financier estime que le taux de rendement moyen du fonds est de 7 % par an. On vous demande de calculer la somme à verser au fonds suivant les situations suivantes :

a- Le don est fait à la fin de chaque année.
b- Le don est fait en début de chaque année.
c- Répondre aux questions précédentes en supposant une capitalisation semestrielle.

16-Afin de pouvoir faire un voyage dont le coût est estimé à 7000 UM une fois tous les trois ans, une personne dépose dans un compte d'épargne un somme qui lui rapporte un intérêt de 14 % avec une capitalisation semestrielle. On vous demande de calculer la somme nécessaire à déposer afin de pouvoir disposer de la somme nécessaire pour financer le voyage.

17-Une entreprise désire investir. Elle a le choix entre l'équipement A et l'équipement B. L'équipement A a un coûtd'acquisition de 30 000 UM, une durée de vie de 4 ans et une valeur résiduelle de 5000 UM.

L'équipement B coute 60 000 UM, a une durée de vie de 10 ans et une valeur résiduelle nulle. Les frais d'entretien de l'équipement A sont supérieurs de 80 UM par mois de ceux de l'équipement B.

Quel est le choix le plus rentable si le taux d'intérêt est de 9 % et que les frais d'entretien supplémentaires peuvent être capitalisés mensuellement ?

18-Une banque a accordé un crédit V_0 à la date t_0 à une entreprise. Cette dernière s'est engagée à rembourser cet emprunt par le paiement d'une suite de versements a_1 ; a_2 ;… ; a_n. Ces annuités forment une progression géométrique de raison q. Chaque versement (a_1 ; a_2 ;… ; a_n.) encaissée par la banque et immédiatement replacer par cette dernière auprès d'un autre investisseur. Ce dernier s'est engagé à rembourser par un versement unique à la date n, toutes les annuités que la banque lui a prêté. Sachant que n est égal à 8, le taux d'intérêt du crédit accordé à l'entreprise est de 8 % , le taux du replacement des annuité encaissées est de 5 % et la raison de la progression géométrique est q = 1.10. On vous demande de :

a- Calculer a_1 en fonction de V_0
b- Calculer V_n la valeur du versement unique que l'investisseur effectue pour rembourses le prêt qu'il a obtenu de la banque.
c- Calculer le taux de rendement moyen que la banque a réalisé grâce à ces deux opérations combinées. (accord d'un premier crédit et placement des remboursements).
d- Sachant que la banque est assujettie à un impôt sur les opérations de prêt avec un taux de 20 %, on vous demande de calculer la valeur définitive nette de l'opération de prêt et de replacement des fonds.
e- On vous demande de reprendre les questions précédentes en supposant que les annuités forment une progression arithmétique de raison $r = \lambda V_0$. Avec λ =0.01.
f- Reprendre les questions a,b,c et d en supposant que les annuités varient en séries. La première est composée de 4 termes tous égaux à a est la deuxième est formée des 4 derniers versements tous égaux à a/2.

19-Soit une rente semestrielle de 1000 UM dont le premier terme sera versé le 15 juin 2024. Nombre de terme de cette rente est de 60. On vous demande d'évaluer cette rente au taux de 6 %, à la date du 15 décembre 2021.

Cette rente est remplacée par une rente annuelle immédiate (à terme échu) de 12 termes égaux. Calculer le terme de cette nouvelle rente.

20-Le péage versé à l'entrée d'une autoroute peut être considéré comme une suite de versement continue. Supposons que ces recettes de péage soient placées quotidiennement dans une banque avec un taux d'intérêt de 6 %. Ce placement est effectué avec des versements encontinu. Le trafic prévu pour la première année est estimé à 10^6 de tonnes-kilomètre(T.K). Il se développe à un taux continu de 4 % l'an pendant 6 ans.

a- Calculer le taux d'intérêt continu.
b- Estimer le trafic à la date initiale t_0.
c- Le tarif du péage est de 10 UM par T.K. Calculer la valeur définitive des recettes de péage placées pour une durée de 6 ans.En déduire leur valeur actuelle.
d- Sachant que cette autoroute a nécessité un investissement initial de 20.10^6 UM ; on vous demande de calculer la valeur actuelle nette du projet par rapport à une durée de 6 ans d'exploitation de l'autoroute.

.

a

Chapitre sixième remboursement des prêts à moyen ou long terme

1-Notion de prêt à moyen et long terme

Par prêt ou crédit, on désigne un emprunt indivis, autrement dit un crédit qui est contractéauprès d'un créancier unique à un seul emprunteur. Le prêteur peut être une banque, un établissement financier ou un groupe de banques. A l'opposé, un emprunt obligataire est divisé en coupure ou obligation dont tout porteur est en position de créancier du montant des obligations qu'il détient vis-à-vis de l'émetteur de ces titres.

Ce chapitre aborde les emprunts indivis. Il s'agit de prêts à moyen et long terme qui peuvent être accordés :

Par les banques aux entreprises (industrielles, commerciales, agricole et de services) pour l'acquisition d'équipement ou lancement de nouveaux projets industriels. Parmi les principales banques on peut citer : la Banque de Développement Local (BDL), la Banque Extérieure d'Algérie (BEA), la Banque de l'Agriculture et du Développement Rural (BADR), le Crédit Populaire d'Algérie).

Par la Caisse Nationale d'Epargne et de Prévoyance (CNEP) aux particuliers par l'achat ou la construction de logement ou pour l'acquisition de véhicule neuf. On trouve également dans cette catégorie de prêt les crédits à la consommation

La CNEP et les banques accordent également des crédits aux promoteurs immobiliers pour le financement des projets de construction de logement.

Dans ce type de crédit, le préteur verse à l'emprunteur le capital convenu dans le contrat de crédit en une ou plusieurs tranches. Le prêt est accordé sur la base de garanties personnelles ou étatiques et/ou d'hypothèques. Le remboursement du crédit peut se faire suivant différentes modalités.

2-Remboursement (amortissement)*in fine*

Dans ce mode d'amortissement du crédit, il peut être envisagé :

- le remboursement du capital et des intérêts en une seule fois à l'échéance. Cette forme de remboursement dépend du montant à rembourser et de la capacité financière de l'emprunteur. La somme à payer par le débiteur est égale à la valeur acquise du capital prêté. Dans ce cas, l'annuité ou la chronique des flux pour l'emprunteur est $\{ + C ; - C(1+t)^n\}$
- Le remboursement du capital prêté à l'échéance et paiement des intérêts à la fin de chaque période. Dans ce mode de remboursement le montant total payé pour amortir

l'emprunt est inférieur à la valeur acquise payée dans le cas précédent. La chronique des flux générés par le crédit pour l'emprunteur est : { +C ; -tC ; -tC ; …. ; -C(1+t) }.

Si le montant à rembourser à l'échéance est important et risque de d'entraver l'équilibre financier de l'emprunteur ; ce dernier pourra mettre en provision les versements nécessaire au remboursement du capital emprunté. Autrement il constituera un fonds d'amortissement. Les versements placés couvriront la somme à payer. En notant a' le versement périodique et t' le taux d'intérêt, et en supposant que la constitution du fonds d'amortissement est entamé dès la première année ; à l'échéance on aura :

$$C = a'\frac{(1+t')^{n}-1}{t'} \quad \Rightarrow a' = C\,\frac{t'}{(1+t')^{n}-1} = C\,(1/S_{\overline{n|}}) = C\,(1/a_{\overline{n|}} - t'). \qquad (1)$$

Ainsi, les frais annuels liés à l'emprunt sont constitués de l'intérêt périodique C.t et de l'annuité a' versée dans le fonds d'amortissement soit un total de :

$$a = C\,(1/a_{\overline{n|}} - t' + t) \qquad (2)$$

Remarque si le taux d'emprunt est égal au taux d'intérêt du fonds d'amortissement, l'annuité annuelle $a = C(1/a_{\overline{n|}})$

Exemple : Un capital de 1000 UM a été prêté pour une durée de 3 ans. Le taux d'intérêt et de 6 %. La capitalisation est semestrielle.
Pour un remboursement à l'échéance du capital et des intérêts, la somme à payer par le débiteur est gale à $1000(1+3\%)^{6} = 1000 \times 1.194052 = 1194.05$ UM.
Pour un remboursement suivant le deuxième mode, le tableau d'amortissement est :

période	Solde dû en début de période	Intérêt	amortissements	versement
1	1000	30	0	30
2	1000	30	0	30
3	1000	30	0	30
4	1000	30	0	30
5	1000	30	0	30
6	1000	30	1000	1030
total		180	1000	1180

3-Remboursement par amortissement constant

a

a-Cas où les annuités sont simples

Dans ce paragraphe, nous supposerons que la période de versement et de capitalisation des intérêts coïncident.

Suivant ce mode d'amortissement de l'emprunt, les amortissements périodiques sont constants. Ils sont égaux à C/n. Les intérêts à payer à chaque fin de période sont calculés sur le solde restant dû en début de période. Les versements périodiques et les intérêts sont en progression arithmétique de raison – tC/n. Le tableau d'amortissement est de la forme :

période	Capital dû en début de période	Intérêts	amortissements	annuités
1	C	Ct	C/n	C(t+1/n)
2	C(1-1/n)	Ct(1-1/n)	C/n	C[t(1-1/n)+1/n)]
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
n	C/n	Ct/n	C/n	C/n (t+1)
		C[t(n+1)/2 -1]	C	tC [(n+1)/2]

Exemple : Un emprunt de 10 000 UM est amorti en 5 ans par amortissement constant. Le taux d'intérêt est de 6 % et la capitalisation est annuelle. Donner son tableau d'amortissement.

Période	Capital dû en début de période	Intérêts	amortissements	annuités
1	10 000	600	2 000	2 600
2	8 000	480	2 000	2 480
3	6 000	360	2 000	2 360
4	4 000	240	2 000	2 240
5	2 000	120	2 000	2 120
total		1 800	10 000	11 800

4-amortissement par annuité constante

a

Dans ce mode d'amortissement l'annuité périodique sert à rembourser une partie du capital et une partie des intérêts courus. En finance internationale, dans le domaine de l'endettement extérieur des pays l'annuité est appelée service de la dette[10].

Le remboursement par une annuité constante est le mode le plus utilisé dans l'amortissement des emprunts indivis.En effet, la constance des annuités facilite leur gestion.

L'étalement du paiement de la dette dans le temps réduit les besoins en fonds de roulement de l'entreprise et améliore son équilibre financier ainsi que sa trésorerie. En reprenant les notations précédentes. L'annuité périodique a_k comprend une part des intérêts I_k, l'autre part est l'amortissement Af_k.

L'annuité $a_k = a = I_k + Af_k$ (3)

$$C = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow a = C\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} \quad (4)$$

Chaque annuité comprend une part d'amortissement du capital emprunté. Ainsi, le premier versementest égale à :

$$a = I_1 + Af_1 = C.t + Af_1$$

$$Af_1 = C\left(\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t\right) = C\frac{t}{(1+t)^{n}-1} \quad (5)$$

Quand les annuités de remboursement sont constantes ; les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+t). Ainsi, en écrivant les expressions de deux annuités successives comme suit :

$a_k = C_{k-1}.t + Af_k$ et

$a_{k+1} = C_k.t + Af_{k+1}$. Les annuités sont constantes on aura :

$$C_{k-1}.t + Af_k = C_k t + Af_{k+1} \Rightarrow (C_{k-1} - C_k)t + Af_k = Af_{k+1} \quad (6)$$

Dans l'expression (6) le terme $C_{k-1} - C_k$ n'est autre que l'amortissement Af_k. On déduit :

$$Af_{k+1} = Af_k(1+t) \Rightarrow Af_k = Af_1(1+t)^{k-1} \quad (7)$$

Remarque : quand les versements sont de début de période, le premier terme de la progression est Af_2. L'amortissement de la première période est égal à l'annuité.

Réciproquement si les amortissements sont en progression géométriques, les annuités sont constantes.

[10] L'annuité ou service de la dette figure dans la balance des paiements. L'amortissement est enregistré dans le compte de capital, les intérêts sont enregistrés dans le compte revenu des facteurs.

$$a_{k+1} = C_k.t + Af_{k+1} = (C_{k-1}- Af_k)t + Af_k(1+t) = C_{k-1}.t + Af_k = a_k \quad (8)$$

Amortissement contenu dans la dernière annuité :

La dernière période l'annuité restant à payer comprend le solde C_{n-1}, il est égal au dernier amortissement Af_n et les intérêts sur ce même solde soit $t\ Af_n$. L'annuité est :

$$a = Af_n + t.Af_n = Af_n(1+t) \Rightarrow Af_n = a(1+t)^{-1} \quad (9)$$

Les amortissements étant en progression géométrique, on déduit :

$Af_k = a(1+t)^{-(n-k+1)}$ (9')

Capital remboursé immédiatement après le versement de la $k^{ème}$ annuité :

$C_k = Af_1 + Af_2+....+Af_k = Af_1\frac{(1+t)^k-1}{t}$ et en remplaçant Af_1 par son expression(5), on obtient : $C_k = C\,\frac{(1+t)^k-1}{(1+t)^n-1}$ (10)

Solde restant à rembourser après versement de la $k^{ème}$ annuité.

Le capital restant à amortir après versement de la $k^{ème}$ annuité est égal à la différenceentre le capital emprunté et les k annuités payées soit :

$$C - C_k = C\left(1 - \frac{(1+t)^k-1}{(1+t)^n-1}\right) = C\,\frac{(1+t)^n-(1+t)^k}{(1+t)^n-1} = C(a_{\overline{n-k}|}/a_{\overline{n}|}) = a \times a_{\overline{n-p}|} \quad (11)$$

Le total des intérêts payés dans l'opération d'amortissement de l'emprunt est égal à la somme des n annuités payées moins le capital C.

Exemple : Un emprunt de 3 000 UM est amorti en 5 ans par des versements annuels. Sachant que le taux d'intérêt est de 6%, on vous demande d'établir le tableau d'amortissement dans le cas de versement de fin de période et dans le cas d'annuité de début de période.

<u>a-cas ou l'annuité est versée chaque fin d'année :</u>

Calcul de l'annuité : $a = 3\,000 \times (1/a_{\overline{5}|0.06}) = 3000 \times 0.237396 = 712.18$

Intérêt de la période 1 : $I_1 = 3000 \times 0.06 = 180$ UM

$Af_1 = a - I_1 = 712.18 - 180 =$

période	versement	intérêt	amortissement	solde
0	…….	…..	……	3 000.00
1	712.18	180.00	532.18	2467.82

a

2	712.18	148.08	564.11	1903.71
3	712.18	114.22	597.96	1305.75
4	712.18	78.27	633.83	671.92
5	712.18	40.33	671.92	0
	3560.90	560.90	3000.00	

b-cas ou l'annuité est versée chaque début d'année :

calcul de l'annuité : a = 3000 (1/ $a_{\overline{5}|0.06}$) x 1.06^{-1} = 3000 x 0.237396 x 0.9434 = 671.87 UM

période	versement	Intérêt	amortissement	solde
				3000.00
0	671.87	…..	671.87	2328.19
1	671.87	139.69	532.17	1796.01
2	671.87	107.76	564.11	1231.90
3	671.87	73.90	597.95	633.90
4	671.87	38.00	633.90	0
	3359.35	359.35	3000.00	

Remarque : quand les annuités sont payées d'avance, la somme totale à payer pour amortir l'emprunt est inférieure à celle où les versements sont de fin de période. En effet, le capital réellement emprunté est C- Ct dans le cas des versements à échoiret il est égal à C dans le cas des annuités à terme échu.

5-Amortissement des emprunts dans le cas d'une capitalisation/actualisation continue.

Sur le plan pratique Il est difficile d'appliquer l'amortissement d'un emprunt par annuité continue. Cependant, sur le plan théorique il est possible de développer des règles et des lois sur la base des concepts de capitalisation et d'actualisation continue des annuités de remboursement.

En adoptant les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, on note le capital emprunté C et l'annuité a(t) dt et le versement effectué à l'instant t pour couvrir les amortissements et les intérêts de la durée infinitésimale dt.

L'emprunt C_0 est égale à la somme des amortissements Af(t) soit :

$$C_0 = \int_0^n \mathrm{Af(t)dt} \qquad (12)$$

L'emprunt est égal à la valeur actuelle des annuités nécessaires à son remboursement. Si le taux d'intérêt continu est j on aura :

$$C_0 = \int_0^n a(t)e^{-jt}\mathrm{dt} \qquad (13)$$

a

L'annuité est égale à : $a = C_0\,(j/1-e^{-jn})$ (13')

Solde restant dû après versement de x annuités, il est égale à la somme des amortissements restant soit :

$$C(x) = \int_t^n Af(x)dx \quad (14)$$

Le solde restant dû après versement de x annuités est la valeur actuelle des annuités restantes à verser soit :

$$C(x) = \int_t^n a(x)\, e^{-jx}dx \quad (15)$$

L'annuité à l'instant t est la somme des intérêts sur le solde restant dû et l'amortissement. Soit :

$$A(t) = j\,C(x) + Af(t) \quad (16)$$

<u>6 Amortissement des emprunts où les fréquences de versement et de capitalisation sontdifférentes</u>

Les crédits accordés par les banques, les établissements financiers et les caisses d'épargne sont rarement avec des fréquences de versement et de capitalisation égales. Généralement, les intérêts sont capitalisés annuellement et les versements sont mensuels ou trimestriels. Dans cette situation l'amortissement de l'emprunt se fait suivant les règles précédentes avec des adaptations pour le calcul de l'annuité et des amortissements périodiques.

<u>a-calcul de l'annuité</u>

L'annuité nécessaire à l'amortissement de l'emprunt se calcul suivant l'une des deux méthodes qui ont été présentées dans le chapitre précédent (partie-4).

Versement de fint de période : $a = C\,.\,S_{\overline{c/v}|}\,(1/\,a_{\overline{n}|})$

Versement de début de période : $a = C.\,a_{\overline{c/v}|}\,(1/\,a_{\overline{n}|})$

<u>b-calcul des amortissements périodiques</u>

Dans ce deuxième cas de remboursement des emprunts, les amortissements sont toujours en progression géométrique, cependant une correction doit être apportée à la

a

formule pour tenir compte de la non coïncidence du versement et de la capitalisation des intérêts. La formule est :

$Af_k = a\ (1+t)^{-(n+1-k).c/v}$ (17)

Af_k amortissement de la période k

a : versement périodique.

n : nombre de versements

c/v : facteur de correction où c et la fréquence annuelle de capitalisation, v est la fréquence annuelle de versement.

t taux d'intérêt par période de capitalisation.

Exemple : reprendre l'exemple précédent en supposant une capitalisation semestrielle et versement annuel.

Calcul de l'annuité 3000 = a x 0.492611 x 8.530203

a = 713.93 UM

Calcul du taux d'intérêt annuel équivalent au taux semestriel de 3 % :

$(1+3\%)^2 = 1+t \Rightarrow t = 6.09\ \%$.

Période	annuité	Intérêt	amortissement	solde
0	….	…..	…..	3000.00
1	713.93	182.70	531.23	2468.77
2	713.93	150.34	563.58	1905.18
3	713.93	116.02	597.91	1307.28
4	713.93	79.61	634.32	672.96
5	713.93	40.98	672.96	0
	3569.65	569.65	3000.00	

Remarque : on peut retrouver les amortissements périodiques en appliquant la formule (17)

Exemple : $Af_3 = 713.93\ (1+3\%)^{-(5+1-3)x2} = 713.93(1.03)^{-6} = 713.93x0.837484=597.91$ UM.

7-Rééchelonnement des dettes

Le remboursement de l'emprunt par le débiteur ne se fait pas toujours dans le strict respect de l'échéancier contenu dans le tableau d'amortissement. En effet, l'emprunteur peut se retrouver dans une situation qui entraine la baisse de ses revenus et ne lui permet pas de payer l'annuité à l'échéance.

Les entreprise peuvent voir leur chiffre d'affaire baisser suite à des difficultés internes (grève, absentéisme, management, perte de marché…) ou externes (crise mondiale, hausse des prix des matières premières, pandémie,..). Les ménages ayant contracté des crédits, sont aussi confrontés à des situations de réduction de leur revenu. En effet, la perte de l'emploi, l'état de santé, le divorce et actuellement la pandémie ont mis certains ménages dans des situations de surendettement qui ne leur permet pas d'honorer leurs engagements vis-à-vis de leurs créanciers.

Quand une personne se retrouve dans une situation financière conjoncturelle qui ne lui permet pas de rembourser à l'échéance les annuités d'un emprunt qu'elle a contracté ; elle a la possibilité de demander à son créancier un rééchelonnement[11] de sa dette.

Le rééchelonnement est également demandé par les pays quand le service de leur dette extérieure devient difficilement soutenable par leur économie. Les bailleurs de fonds sous l'égide du Fonds Monétaire International accordent à ces pays un rééchelonnement de leur dette extérieure dans le cadre d'un programme d'ajustement structurel. L'Algérie a traversé cette situation durant la première moitié des années 1990.

Ainsi, le rééchelonnement d'une dette, se définit comme une pratique par laquelle un débiteur prévoyant de n'être plus en mesure de payer les annuités de remboursement de sa dette selon les conditions du tableau d'amortissement initialement établi ; obtient de son créancier qu'il consente de réduire ou de reporter le montant de chacun des versements à payer périodiquement, en contrepartie d'un allongement de la durée de remboursement.

Suite à l'acceptation du rééchelonnement[12] un nouveau tableau d'amortissement est établi suivant les nouvelles conditions.

A partir de l'exemple précédent, on peut supposer que le débiteur, après avoir payé le deuxième versement, prévoit de ne pas pouvoir payer les annuités à venir pendant une durée de deux ans. Il demande à son créancier le rééchelonnement du solde restant à payer.

Un rééchelonnement de la dette est accordé suivant les conditions suivantes :

- Afin de stabiliser le niveau de la dette, le débiteur est tenu de payer les intérêts durant les deux années. Le taux reste inchangé.

[11] Le rééchelonnement des dettes est une procédure légale. Une instruction émanant de la Banque d'Algrie datée du 6 avril, fixe les conditions de son application. En France, c'est le juge qui ordonne l'application de la procédure de rééchelonnement de la dette en référence au code de consommation.

[12] Le rééchelonnement de la dette n'est accepté par le créancier que si le débiteur prouve qu'il est dans une situation financière conjoncturelle qui ne lui permet pas de rembourser sa dette pendant une certaine durée. Si les difficultés de paiement de l'emprunt sont permanentes, la cessation de paiement est prononcée avec pour conséquence un traitement judiciaire.

- A partir de la troisième année un nouveau tableau d'amortissement est établi pour une durée de 4 ans. Le taux d'intérêt est réduit à 5 % et la capitalisation reste semestrielle.

  On vous demande d'établir le tableau d'amortissement de l'emprunt.

Calcul de l'annuité à payer durant la période post rééchelonnement. Le crédit à payer est le solde restant dû suite au paiement de la deuxième annuité soit : 1905.18. Le taux d'intérêt est de 5 % et la capitalisation est semestrielle.

1905.18 = a x 0.493827 x 7.170137 => a = 538.06 UM.

Calcul du taux d'intérêt annuel équivalent au taux semestriel de 2.5 % :

$$(1+2.5\%)^2 = 1+t \Rightarrow t = (1+2.5\%)^2 - 1 = 5.06\%$$

Les intérêts de la première année qui suit la période de rééchelonnement sont :

1905.18 x 5.06 % = 96.40 UM

Tableau d'amortissement suite au rééchelonnement de la dette.

période	annuité	intérêt	amortissement	solde
0	….	….	….	3 000
1	713.93	182.70	531.23	2468.77
2	713.93	150.34	563.58	1905.18
3	116.02	116.02	….	1905.18
4	116.02	116.02	….	1905.18
5	538.06	96.45	441.62	1463.50
6	538.06	74.09	463.96	999.60
7	538.06	50.60	487.45	512.15
8	538.06	25.92	512.15	…….
	2152.24	247.06	1905.18	

Remarque : l'allongement de la durée de remboursement du crédit et la réduction du taux d'intérêt ont permis d'abaisser le versement annuel. Il est passé de 713.93 UM à 538.06 UM soit une baisse de 24.63 %.

<u>Exercices et problèmes</u>

a

1-Etablir le tableau d'amortissement d'un emprunt de 10 000 UM remboursable en 5 ans par versement à la fin de chaque année. Le taux d'intérêt est de 6 % et la capitalisation est annuelle.

2-Reprendre l'exercice précédent en supposant que les versements se font au début de chaque année.

3-Soit un emprunt de 50 000 UM, le taux d'intérêt est de 9 %, la capitalisation est trimestrielle et la durée de remboursement est fixée à 2 ans. Les versements sont effectués à la fin de chaque semestre.

Etablir le tableau d'amortissement.

Reprendre l'exercice en supposant que les versements sont fait au début de chaque semestre.

4-Etablir le tableau d'amortissement d'un emprunt de 10 000 UM remboursable en 10 versements à termes échus, sachant que pendant les 3 premières années, le taux est de 7 % et l'annuité est égale à 1400 UM et que pendant les 7 autres années, le taux est de 10 % et l'annuité a une valeur constante à déterminer.

5-Un emprunt est remboursable par 20 annuités constantes trimestrielles à terme échus. Sachant que l'amortissement du neuvième versement est de 344.69 UM et que celui du quinzième versement est de 436.14 UM, on vous demande de :

Calculer le taux nominal trimestriel d'intérêt.

a- Calculer la valeur du versement trimestriel.
b- Calculer le montant de l'emprunt.
c- Calculer le solde dû après le $12^{èm}$ versement.

6-Un emprunt est remboursable par des annuités trimestrielles de début de période. La capitalisation des intérêts est semestrielle. La durée de remboursement est fixée à 3 ans. Sachant que l'amortissement du cinquième versement est de 6167.12 UM et celui dernier versement est de 7562.28 UM, on vous demande de :

a- Calculer le taux nominal trimestriel d'intérêt.
b- Calculer la valeur du versement trimestriel.
c- Calculer le montant de l'emprunt.
d- Calculer le solde dû après le $8^{èm}$ versement.

7-Un emprunt dont la valeur nominale est C est remboursé par 8 versements annuels constants. La capitalisation des intérêts est annuelle. Sachant que Af_3 = 9081.92 et Af_7 = 11 465.71. On vous demande de :

a- Calculer le taux d'intérêt de ce crédit
b- Calculer le capital emprunté
c- Calculer l'annuité

d- Le capital restant dû après le versement de la 6ème annuité, en déduire le capital restant dû après 7^{èm} versement.

8-Un capital C est remboursé en n annéespar une suite d'annuités variables. Les amortissements contenus dans les différentes annuités sont constants et égaux à C/n. On vous demande de démontrer que les annuités forment une suite arithmétique.

Application numérique : C= 4000 UM, n = 4 et t = 6%. Etablir le tableau d'amortissement.

9-Un emprunt de 6 000 UM remboursable sur 10 ans avec un taux d'intérêt de 12 % capitalisé trimestriellement. Sachant que les annuités sont mensuelles et de fin de période, on vous demande de calculer l'amortissement compris dans le 100^{èm} versement.

10-Une personne emprunte 9 000 UM. Le taux d'intérêt est de 12 %. La durée de remboursement est de 6 ans. Les versements sont annuels et à termes échus. L'annuité nécessaire pour amortir l'emprunt s'élève à 2189.03 UM. Afin de faciliter les calculs, le prêteur a proposé au créancier d'arrondir le versement à 3 000 UM. La séquence des annuités sera ainsi composée de 5 versements de 3000 UM et un sixième versement irrégulier. On vous demande

a- Calculer le versement irrégulier s'il est effectué le premier.
b- De calculer le 5^{èm} amortissement
c- De calculer le solde dû immédiatement après le 3^{èm} versement
d- D'établir le tableau d'amortissement.
e- Calculer le versement irrégulier s'il est effectué le dernier.
f- D'établir le nouveau tableau d'amortissement. Comparer le avec le précédent tableau.

11- A partir du tableau d'amortissement d'un emprunt, on a tiré les informations suivantes : l'intérêt de la deuxième période est égal à 722.57 UM et l'amortissement vaut 1794.98 UM. Pour la quatrième période l'amortissement est de 2055.07 UM.

On vous demande de compléter ce tableau d'amortissement.

12- Une personne désire acheter un voiture de marque Renault Symbol. Le prix fixé par le concessionnaire est de 1600 000 DA UM. Sachant qu'elle ne dispose que de 10 000 DA, elle décide de financer le complément soit 1500 000 DA par un crédit bancaire. La CNEP finance l'achat de véhicule par les particuliers.

Les conditions de l'octroi du crédit sont : taux d'intérêt 7 %, durée de remboursement 5 ans, capitalisation annuelle des intérêts et versement mensuel ou trimestriel et de début de période. On vous demande de :

a- Calculer l'annuité à verser mensuellement.
b- Calculer les éléments de la première et la deuxième ligne du tableau d'amortissement.
c- Calculer l'amortissement contenu dans la 50^{èm} annuité.
d- Calculer le solde dû immédiatement après versement de la 50 ^{èm}annuité.

a

e- Sachant que l'emprunteur est tenu de payer une assurance vie[13] dont le tarif est fixé à 30 000 DA pour une durée de 5 ans, payable le jour de l'achat de la voiture. On vous demande de calculer le taux effectif de l'emprunt.

13-Pour financer la construction de sa maison, une personne emprunte le 2/1/2015 auprès de la CNEP la 5 000 000 de dinars. Le taux d'intérêt est de 6.5 % et la capitalisation est annuelle. La durée de remboursement de l'emprunt est de 20 ans. L'amortissement du crédit est fait par des versements mensuels de débit de période. Le premier versement a lieu le 1/3/2015. On vous demande de :

a- Calculer la mensualité à payer
b- Ecrire les données de la première ligne du tableau d'amortissement.
c- Ecrire les données de la dernière ligne du tableau d'amortissement
d- Calculer l'amortissement contenu dans la $10^{èm}$ annuité.
e- Calculer la somme totale à payer à la CNEP pour amortir le crédit.
f- Supposant qu'après avoir effectué 50 versements, cette personne décide de rembourser le solde restant dû. calculer le montant à payer.

14-Un emprunt doit être remboursé par 12 annuités de début de période. La capitalisation des intérêts est semestrielle. Les versements sont trimestriels. Sachant que Af_1+Af_2 = 11469.01 et Af_2+Af_3= 11808.06 ; on vous demande de :

a- Calculer le taux d'intérêt de cet emprunt
b- Calculer Af_1
c- Calculer le versement trimestriel a
d- Calculer le montant de l'emprunt.

15- Une dette a été contractée au taux d'intérêt annuel t. Elle est remboursable par 5 versements annuels. Les amortissements contenus dans les annuités forment une progression géométrique de raison (1+q) avec q différent de t.

Sachant que les intérêts de la $2^{ème}$année s'élèvent à 3036.06 UM et ceux de la $4^{ème}$ année sont égaux à 1677.06. On vous demande de calculer q.

Calculer le taux d'intérêt t et la valeur nominale de la dette sachant que l'amortissement Af_3 est égal à 14520 UM.

16-Une entreprise emprunte 400 000 UM suivant les conditions suivantes : taux d'intérêt annuel 11 %. Le capital est remboursé in fine dans 10 ans et les intérêts sont payables à la fin de chaque année. Afin de garantir le remboursement du crédit, le créancier exige de l'entreprise la constitution d'un fonds d'amortissement. Cette dernière obtient après négociation avec le gérant d'un organisme de placement un taux d'intérêt de 9 % sur les

---

[13] Les particuliers qui contractent des crédits bancaires à moyen et long terme sont tenus de souscrire une assurance vie d'une durée égale à celle de l'emprunt. En cas de décès de l'emprunteur avant l'achèvement du paiement du prêt, l'assurance finance le solde restant dû sur la période qui va de la date de décès à la fin de la durée de remboursement du crédit.

montants qui seront mis annuellement dans le fonds d'amortissement et placé auprès de l'organisme.

a- Calculer le montant à placer périodiquement dans le fonds d'amortissement pendant une durée de 10 ans afin de pouvoir rembourser le montant total du crédit.
b- Calculer le coût réel de l'emprunt.

17-Afin de pouvoir financer un projet d'investissement, une entreprise doit emprunter la somme de 1 000 000 UM. La durée du prêt est fixée à 10 ans. Le marché financier offre deux possibilités de financements à cette entreprise.

La première consiste en un emprunt du montant nécessaire au financement du projet avec un taux d'intérêt de 10.25 % et une capitalisation annuelle. Le remboursement du crédit se fera par annuité annuelle constante à termes échus. L'annuité est égale à 164 497.30 UM et la durée est de 10 ans.

La deuxième option de financement est un emprunt de 1 000 000 UM au taux de 10 % capitalisé annuellement. L'amortissement de l'emprunt se fera suivant le mode remboursement in fine. Autrement dit, seuls les intérêts seront payés à la fin de chaque année et le capital emprunté est remboursé en une seule fois à la fin de la dixième année. Pour cette deuxième option un fonds d'amortissement doit être constitué. Le taux de placement des fonds d'amortissement est de 8 %.

On vous demande de comparer les deux options de financement est de déterminer laquelle est la plus rentable.

18- Un capital C est remboursé par n amortissements annuels qui forment une progression géométrique croissante de raison (1+0.01q) L'amortissement contenu dans la premières annuité est égal à Af_1.

a- Etablir la relation qui existe entre C, Af_1, q et n.
b- Sachant que C est égal à 100 000 UM et n = 10 ; on vous demande de calculer Af_1 pour q = 8.
c- Calculer q lorsque Af_1 = 8 000 UM.

19-On reprend les données de l'exercice 12 et on suppose que l'emprunteur, après avoir payé 50 annuités ; il prévoit de ne pas pouvoir payer les annuités pendant une durée d'une année. Il demande à la Caisse Nationale d'Epargne et de Prévoyance de lui accorder un rééchelonnement de sa dette. Cette dernière accepte et fixe les conditions de remboursement du solde restant.

La durée de rééchelonnement est limitée à une année non renouvelable.

Pendant une année l'emprunteur paye uniquement les intérêts mensuels.

A l'expiration de la durée de rééchelonnement, un nouveau tableau d'amortissement est établi.

On vous demande de construire ce nouveau tableau d'amortissement.

a

20-Soit un emprunt C_0, remboursable par annuité constante. Sachant que pour chaque période, l'intérêt est payable en début de période et l'amortissement en fin de période. La durée de l'emprunt est de n années et le taux d'intérêt est t démontrer les résultats suivants :

a- L'annuité est : $a = C_0 [t/1-(1-t)^n]$.
b- $Af_{k+1} = Af_k(1-t)^{-1}$
c- $C_k = C_0 [((1-(1-t)^{n-k}))/(1-(1-t)^n)]$
d- Application numérique : $C_0 = 3000$, $t = 0.06$, $n = 4$ ans.

21- Un emprunt C_0 est amorti par annuités continues et variant d'une manière exponentielle avec un taux de 0.05. Le taux d'intérêt annuel est égal à 5 %. Sachant que l'annuité initiale a pour valeur nominale 1000 UM et la durée de remboursement n est de 10 ans.On vous demande de :

a- Calculer le taux d'intérêt continu j.
b- Calculer la valeur nominale de l'emprunt C_0
c- Calculer le solde restant à payer pour les 5 dernières années.

Chapitre septième : les emprunts obligataires

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'emprunt était contracté auprès d'un créancier unique (une banque, un établissement financier, une caisse d'épargne,…). Le remboursement de cet emprunt par le débiteur, se fait par versement d'annuités périodiques. Cependant quand le nominal de la somme à prêter est très élevé, l'emprunteur s'adresse à un nombre important de créanciers.

Ainsi, le nominal du capital à emprunter est divisé en n coupures appelée obligation, titre. Ce type d'emprunt est appelé emprunt obligataire ou valeur mobilière. A leur émission, ces titres sont cédés sur un marché primaire et ils sont négociables sur un marché secondaire.

Ce mode d'emprunt est largement utilisé par l'Etat comme moyen de financement de son déficit budgétaire et de ses dépenses publiques. Le Trésor public algérien a lancé en avril 2016 un emprunt obligataire avec des coupures de valeur nominale égale à 50 000 DA. Les taux de coupon ont été fixés à 5% pour les obligations dont la durée et de 3 ans, pou'r celles dont l'échéance est de 5 ans, le taux est de 5.75 %.Cette émission d'obligations du Trésor a été faite à la fois dans le but de bancariser la masse monétaire qui circule dans le secteur de l'économie informelle et de permettre le financement du déficit public.

Des entreprises publiques (Sonatrach, Air Algérie, Sonelgaz,..) et des entreprises privées (Cevital, MLA,…) ont lancé des emprunts obligataires pour financer leur projet d'investissement.

La cession des obligations par l'organisme émetteur peut se faire par vente directe au publique à travers les guichets des banques, du Trésor, des postes…Quand la souscription à l'emprunt obligataire est réservée aux investisseurs institutionnels, la vente des titres se fait généralement par un adjudication à la hollandaise.

Ainsi, une obligation est un titre qui matérialise une créance du porteur de l'obligation vis-à-vis de l'émetteur de cette dernière. L'obligation peut être représentée par une séquence de n flux dont le premier est négatif et le n-1 autres flux sont tous positifs.

1-Obligation : définitions

Une obligation se définit à travers les termes suivants :

*La valeur nominale, la valeur faciale ou le pair de l'obligation est la valeur inscrite sur le certificat de l'obligation. Cette valeur sert au calcul des intérêts périodiques. Elle est notée C.*Le taux de coupon, taux facialou taux nominal de l'obligation : c'est le taux inscrit sur le certificat de l'obligation. Il est constant. A la date du coupon, ce taux est utilisé pour calculer les intérêts à payer au porteur de l'obligation.

* Le coupon d'intérêt représente les intérêts à payer à chacune des dates d'intérêt. En général, le coupon est annuel. Cependant pour le Canada et les USA, il peut être semestriel. Il est égal à c_k= C.t.
*Date de jouissance est la date à partir de laquelle les intérêts sont calculés.
*E est la valeur d'émission de l'obligation. C'est le prix de cession du titre lors de son émission. E peut être inférieur à C.
R_k est la valeur de l'obligation ou son prix de rachat par l'émetteur à l'échéance k.

2-Emission d'un emprunt obligataire

C'est la COSOB qui autorise l'émission d'un emprunt obligataire. Les banques, les établissements financiers, les guichets du Trésor public et les bureaux de poste assurent le placement des obligations auprès des souscripteurs (entreprises, caisse d'épargne, compagnies d'assurance et particuliers).

Afin de faciliter le calcul du coupon d'intérêts, la valeur nominale de l'obligation est toujours égale à un multiple de 100. Pour permettre la souscription aux titres à un large publique, la valeur de cession de l'obligation est souvent fixée à un faible niveau. Cependant quand le nominal de l'obligation est faible le nombre de titre est élevé et les coûts d'émission et de gestion de l'emprunt obligataire augmentent.

L'opération de lancement d'un emprunt obligataire peut durer plusieurs jours, parfois plus d'un mois. Dans ce cas la date de jouissance ou date à partir de laquelle vont courir les intérêts diffère de celle du début de l'opération d'émission. Elle peut précéder ou suivre la date de l'opération d'émission. Le premier coupon d'intérêt qui est calculé sur une durée différente de celle de l'année est dit coupon intérimaire.

3-Détermination du prix d'une obligation.

Le porteur d'une obligation a toujours la possibilité de vendre le titre qu'il détient. Le prix de l'obligation fluctue suivant les taux de rendement des marchés de la dette. En effet, le taux de coupon de l'obligation est fixe, le montant d'intérêt versé périodiquement au détenteur de l'obligation jusqu'à son échéance est invariable. Les taux de rendement du marché fluctuentet impact le prix de vente de l'obligation à une date antérieure à son échéance.

Ainsi, quand les taux de rendement du marché augmentent (baissent), le prix de l'obligation diminue (augmente). La valeur de l'obligation sur le marché boursier varie en sens inverse des taux de rendement offert par le marché. Cette règle suppose des titres comparables.

a- Prix d'une obligation à une date d'intérêt

Le prix d'une obligation ou valeur boursière dépend essentiellement des taux d'intérêt en vigueur sur le marché obligataire ainsi que de l'appréciation par les investisseurs du risque de signature de l'émetteur. Ainsi, comme tout investissement le prix d'une obligation sur le marché est égal à la valeur actuelle de la séquence de flux futurs générés par l'obligation. Si on note V_b la valeur boursière du titre, le flux F_k (de k = 1 à n-1) est égal au coupon périodique à l'échéance le flux comprend le coupon et la valeur de remboursement de l'obligation. On peut écrire :

$$V_b = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{F_k}{(1+t)^k} (1)$$

En supposant que F_k est égal au coupon d'intérêt *c* et la valeur de rachat à l'échéance R_n. La formule (1) s'écrit :

$$V_b = c\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} + R_n(1+t)^{-n} = c\, a_{\overline{n}|t} + R_n\,(1+t)^{-n}$$

$$= R_n + (c - R\,t)\, a_{\overline{n}|t} \qquad (2)$$

Remarque V_b peut différer de la valeur nominale de l'obligation.

Exemple : une obligation émise et remboursée au pair a pour valeur nominale 100 UM. Le taux du coupon est égal à 6%. Cette obligation a été cédée sur le marché 8 ans avant son échéance. Calculer sa valeur boursière.Pour des valeur du taux sur du marché égales à 5%, 6 % et 7 %.

Le coupon vaut 6. On suppose que la date d'achat coïncide avec la date d'intérêt le nombre de coupon restant est de 8.

$$V_b = \frac{6}{1.05} + \frac{6}{1.05^2} + \ldots + \frac{6}{1.05^8} + \frac{100}{1.05^8} = 6x6.463213 + 100x0.676839 = 106.46UM.$$

$$V_b = \frac{6}{1.06} + \frac{6}{1.06^2} + \ldots + \frac{6}{1.06^8} + \frac{100}{1.06^8} = 6x6.209794 + 100x0.627412 = 100\ UM.$$

$$V_b = \frac{6}{1.07} + \frac{6}{1.07^2} + \ldots + \frac{6}{1.07^8} + \frac{100}{1.07^8} = 6\ x\ 5.971299 + 100x0.582009 = 94.03UM.$$

Quand le taux de rendement du marché est inférieur (supérieur) au taux du coupon, le prix de l'obligation est supérieur (inférieur) à la valeur nominale. L'obligation est à prime (escompte).

b-Prix d'une obligation entre deux dates d'intérêt

La vente d'une obligation peut se faire à n'importe quelle date. Ce prix s'obtient par le calcul de la valeur actuelle suivant la formule (1). Le résultat est ensuite multiplié par le facteur de capitalisation $(1+t)^{\tau}$ où τ représente la fraction d'année qui va de la date de coupon à la date de la vente. La formule (1) devient :

a

$$V_b = (1+t)^{\tau}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{F_k}{(1+t)^k} \tag{3}$$

Exemple : Une obligation dont la valeur nominale est 100 UM, taux du coupon 6 % , et la date d'intérêt est le 1/6/n ; a été acheté le 1/3/2021. La date d'échéance de cette obligation est fixée au 1/6/2026. Calculer son prix au 1/3/2021 si le taux du marché à cette date était de 5 %.

On calcule la valeur boursière par rapport au 1/6/2020, le résultat obtenu est capitalisé par rapport à la durée qui va du 1/6/2020 au 1/3/2021. Soit une fraction d'année égale à (365-88)/365 = 07589.

$$V_b = 1.05^{0.7589} \left[\frac{6}{1.05} + \frac{6}{1.05^2} + \ldots + \frac{6}{1.05^6} + \frac{100}{1.05^6} \right] = s$$

$$= 1.05^{0.7589}[6\, a_{\overline{6|}0.05} + 100 \times 1.05^{-6}] = 109.04 \text{ UM.}$$

Remarque : la valeur 109.04 UM constitue le prix de vente de l'obligation au pied de coupon. Le prix du coupon couru s'obtient en ajoutant les intérêts de l'obligation pour la période du 1/6/n au 1/3/n+1.

4-Cotation des obligations

La cotation des titres sur le marché obligataire se fait selon des conventions précises. Ainsi, les cours des obligations sont exprimés en pourcentage de la valeur nominale. Le cours peut être plein coupon. Autrement dit, le cours de l'obligation prend en compte le coupon couru à la date de négociation. Quand le coupon n'est pas compris dans le prix de l'obligation, le cours est dit pied de coupon.

Exemple : Une obligation de nominal 200 UM, cote au pied de coupon 112.10 le 1/6/n. Son taux du coupon est de 6 %. La date d'intérêt est 1/3/n.La maturité de l'obligation est de 10 ans. Calculer la cotation et le taux actuariel de cette obligation.

Le coupon couru sur la période du 1/3/ n au 1/6/n est de : (6 x 91)/365 = 1.49.

Le cours plein coupon au 1/6/n est 112.10+1.49 = 113.59

Valeur boursière de l'obligation : 200 x113.59 = 227.18 UM.

Le taux actuariel de l'obligation est :

$$113.59 = (1+t_a)^{0.25}\left[\frac{6}{(1+t_a)} + \frac{6}{(1+t_a)^2} + \ldots + \frac{106}{(1+t_a)^{10}} \right]$$

t_a = 4.30 %.

5-Valeur boursière d'une obligation et risque

L'acquéreur d'une obligation s'expose à deux risques :

a

<u>a-risque lié à l'émetteur</u>

La situation financière de l'émetteur de l'emprunt obligataire peut le contraindre à ne pas pouvoir honorer ses engagements de versements périodiques des intérêts et de remboursement de la valeur de l'obligation à l'échéance. Ce risque dit de défaut peut être total ou partiel. Il entraine l'effondrement de la valeur de marché du titre.

Par ailleurs, le prix d'une obligation peut tendre vers une dévalorisation quand la situation financière de l'émetteur se détériore d'une manière progressive et maintenue. Le risque de défaut total ou partiel devient imminent.

Lors de la prise de décision d'achat de l'obligation,l'investisseur peut apprécier le risque de l'émetteur à travers le rating (notation) de ce dernier.

<u>b-risque lié au taux de rendement de l'obligation</u>

Le niveau du taux actuariel de l'obligation est un indicateur de son risque. En effet, le risque lié à toute obligation est fonction de la marge positive qui sépare le taux de rendement actuariel de l'obligation du taux de référence des obligations d'Etat qui sont des titres non risqués.

Les fluctuations des taux d'intérêt produisent des effets opposés sur les prix des obligations et sur le réinvestissement des coupons d'intérêt. En effet quand le taux d'intérêt du marché augmentent (baissent) la valeur boursière du titre baisse (augmente). Les coupons d'intérêt sont réinvestis à un taux élevé (bas).Par ailleurs, les effets des fluctuations des taux d'intérêt sur le prix des titres varient suivant l'échéance de ces derniers. L'impact est plus prononcé pour les obligations dont l'échéance est à long termes.

Exemple : Soient 3 obligations d'échéance respective 5 ans, 10 ans et 20 ans. Pour simplifier nous supposerons que les valeurs faciales des 3 titres sont fixées à 100. Le taux du coupon est le même pour les 3 obligations soit 5 %. Calculer l'impact des variations du taux d'intérêt du marché sur le prix des 3 obligations

Tableau-1 Prix de l'obligation suite à une variation du taux d'intérêt.

	Obligation 1	Obligation 2	Obligation 3
Taux d'intérêt	Echéance 5 ans	Echéance 10 ans	Echéance 15 ans
2 %	114.14	126.95	136.21
3%	109.16	117.06	123.87
5%	100.00	100.00	100.00
6%	96.08	92.64	90.29
10 %	81.04	69.28	61.97

.

a

Le tableau ci-dessus montre qu'une baisse du taux d'intérêt de 300 points de base, provoque une hausse de 14.14 % pour une obligation d'échéance 5 ans, 26.95 % pour une obligation de maturité de 10 ans et 36.21 % pour une obligation de 15 ans.

A l'opposé, une augmentation de 500 point de base du taux d'intérêt cause une baisse du prix de 18.96 % pour l'obligation dont l'échéance est de 5 ans, une baisse de 20.72% pour celle dont la maturité est de 10 ans et 38.03 % pour celle de 15 ans.

Le tableau ci-dessus montre une relation asymétrique entre le taux d'intérêt et le cours de l'obligation. Ainsi, les concepts de duration, de sensibilité et de convexité de l'obligation permettent de rendre compte de la réaction de la valeur boursière du titre aux chocs qui affectent l'évolution des taux d'intérêt.

6-Duration, sensibilité et convexité d'une obligation

Le tableau-1 du paragraphe précédent montre d'une manière numérique l'impact d'une variation du taux d'intérêt sur les prix des obligations. Ainsi, pour un titre de maturité égale à 5 ans, on remarque qu'une hausse du taux d'intérêt de 1% provoque une baisse du prix de l'obligation de 3.92 %.Cet effet des variations des taux d'intérêt sur les prix des titres peut être exprimé par le concept d'élasticité, de duration ou de durée moyenne de l'obligation.

a-Duration de Macauley

Le terme duration a été donné par Macauley (1938) pour nommer la durée moyenne des flux générés aux différentes échéances par un titre durant sa maturité. Ce concept a été repris par différents économistes Hick, Samuelson, Kaufman,…Pour présenter la duration d'un titre, on suppose :

Le prix du titre : V_b

Le taux du coupon c

Valeur nominal : 100

Nombre de coupon : n

Taux de rendement actuariel t_a

W_k est le facteur de pondération du k^{em}coupon.

Ainsi : $W_k = \frac{c(1+t_a)^{-k}}{V_b}$ pour k < n et $W_n = \frac{(100+c)(1+t_a)^{-n}}{V_b}$ pour le dernier flux.

$$V_b = \sum_{k=1}^{k=n} c(1+t_a)^{-k} + 100(1+t_a) \quad \text{ainsi : } W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1 \tag{4}$$

La duration est $D = W_1 x1 + W_2 x\, 2 + \ldots + W_k x k$.

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{k c}\,(1+t_a)^{-k} + n\,100(1+t_a)^{-n}}{\sum_{k=1}^{k=n} c(1+t_a) + 100(1+t_a)^{-n}} \tag{5}$$

a

La formule (5) peut se généraliser à une chronique de flux quelconque.

$W_k = f_k\,(1+t_a)^{-k} / \sum_{k=1}^{k=n} f_k\,(1+t_a)^{-k}$ (6)

$D = \sum_{k=1}^{k=n} W_k\,.\,k$ (7)

Remarque-1 : Le taux d'actualisation utilisé pour le calcul de la duration est le taux de rendement actuariel. Le taux de référence du marché des titres émis par le Trésor (TMO ou TME)[14] constitue une autre alternatives.

Remarque-2 : Quand le taux d'actualisation est continu $W_k = f\, e^{-jk} / \sum_{k=1}^{k=n} f_k\, e^{-jk}$ et la duration est donnée par (7). Le taux continu $j = \log(1+t_a)$.

Remarque-3 : Soient deux titres A et B dont les durations sont respectivement D_A et D_B. Si on a $D_A > D_B$; ceci implique qu'une même modification du taux de rendement actuariel des titres A et B, cause une variation relative plus importante dans le cours de A que dans celui du titre B. Le titre A est plus sensible au variation des taux du marché que le titre B. Il est plus risqué.

Exemple : Soit une obligation de nominal 100, de maturité 5 ans et dont le taux du coupon est de 10 %. Calculer la duration de ce titre quand le taux de rendement passe de 10 % à 9.5 % soit une baisse de 500 points de base.

Pour un taux de 10 %, le prix du titre s'établit à 100.

Pour un taux de 9.5 %, le prix du titre est égal à :

$$V_b = 10\,\frac{1-(1+9.5\,\%)^{-5}}{9.5\,\%} + 100(1+9.5\%)^{-5} = 101.92.$$

Quand le taux passe de 10 % à 9.5 %, le prix du titre varie de100 à 101.9198. Soit une augmentation de 1.9198 %. Le calcul de la duration est explicité dans le tableau-2 qui suit.

Tableau -2 calculs de la duration

Année k	Flux annuel f_k	$(1+ 10\,\%)^{-k}$	$f_k(1+10\,\%)^{-k}$	$kf_k(1+10\,\%)^{-k}$
1	10	0.909091	9.099091	9.099091
2	10	0.826446	8.266446	16.532892
3	10	0.751315	7.51315	22.53945
4	10	0.683013	6.83013	27.32052
5	110	0.620921	68.30131	341.50655
			100.00	416.9903

[14] Taux Moyen du Marché obligataire et le Taux Moyen des Emprunt d'Etat sont les moyennes arithmétiques des titres émis par le Trésor. Ces taux constituent des taux de référence qui sont utilisés par les banques pour déterminer les taux des crédits qu'elles accordent.

La duration est : D = 416.99/100 = 4.17 ans.

b-Duration de Hicks

En considérant l'expression (1) qui donne le prix de l'obligation, on remarque qu'elle constitue une fonction décroissante du taux t, quelle est continue et dérivable et convexe et on peut écrire :

$$\frac{dV_b}{dt} = -\frac{1}{(1+t)}\left[\frac{1x\,F_1}{(1+t)} + \frac{2xF_2}{(1+t)^2} + \ldots + \frac{nxF_n}{(1+t)^n}\right] \quad (8)$$

$$dV_b = -\frac{1}{(1+t)}\left[\frac{1x\,F_1}{(1+t)} + \frac{2xF_2}{(1+t)^2} + \ldots + \frac{nxF_n}{(1+t)^n}\right] dt \quad (9)$$

En multipliant et divisant le terme de droite de l'expression (9), on obtient :

$$dV_b = \frac{D\,x\,V_b}{(1+t)}\,dt \qquad (9')$$

A partir de (9'), on déduit la duration D qui apparait sous forme d'une élasticité. Elle a été définie par Hicks.

$$D = -\frac{dV_b}{V_b} / \frac{d(t+1)}{1+t} \qquad (10)$$

A partir de (10), on déduit la duration modifiée ou sensibilité par :

$$S = D/1+t. = -\frac{d\log V_b}{dt} = \frac{dV_b}{dt} = \frac{1}{1+t}\left[\frac{1}{V_b}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{kF_k}{(1+t)^k}\right] \qquad (11)$$

L'expression (11) montre que la duration est proche de la sensibilité. En effet, on déduit la duration de la formule de la sensibilité : D = S (1+t).

La sensibilité mesure l'impact de la variation du taux sur le prix du titre. Cet impact est d'autant plus fort que la durée moyenne du titre est élevée. Ce résultat confirme la remarque-3, ci-dessus.

c- Duration et sensibilité des titres dans le cas d'une actualisation continue.

Les expressions de la duration et de la sensibilité qui ont été établies à partir du prix du titre donné par (1), ont été obtenues par l'utilisation d'un taux de rendement interne discret. Si on fait intervenir un taux continu j = log(1+t), les formules précédentes deviennent :

$$V_b = \int_0^n F(k)e^{-jk}\,dk \qquad (13)$$

Comme précédemment, on déduit la duration D :

$$D = \int_0^n \frac{kF(k)^{-jk}}{V_b}dk \quad (14)$$

$$S = \frac{1}{V_b}\int_0^n kF(k)e^{-jk}dk \qquad (15)$$

Remarque : quand on utilise un taux actuariel continu, la sensibilité et la duration deviennent égales.

a

d-propriétés de la duration et de la sensibilité

Propriété 1 : La duration et la sensibilité diminuent quand les taux augmentent. D et S sont des fonctions décroissantes de t.

Propriété 2 : La duration varie en sens inverse du taux de coupon, quand le titre est un zéro-coupon avec remboursement *in fine*.

Propriété 3 : La duration ne varie pas quand les flux sont divisés ou multipliés par une même constante.

Propriété 4 : La duration et la sensibilité d'un portefeuille sont égales à la moyenne de la duration et de la sensibilité des titres qui le composent pondérée par les valeurs des titres (richesse investie dans chacun des titres).

Propriété 5 : La duration décroit avec l'écoulement du temps.Autrement dit, plus on se rapproche de l'échéance du titre plus la duration décroit.

e-Convexité et variation non infinitésimale des taux

La sensibilité d'un titre est définie pour des variations infinitésimales du taux. En effet, $S = - dV_b/V_b dt$. Une variation non infinitésimale des taux Δt implique une variation $\Delta V_b/V_b$ qui ne peut être qu'approximativement égale à $- S\Delta t$. L'erreur commise s'accroit quand Δt augmente. On peut affiner l'impact d'une variation du taux sur le prix du titre en procédant par un développement de Taylor à l'ordre 2 comme suit :

$$\frac{\Delta V_b}{V_b} = \frac{1}{V_b}\frac{dV_b}{dt}\Delta t + \frac{1 d^2 V_b}{2 V_b dt^2}\Delta t^2 + \varepsilon(\Delta t^2)^{15} \qquad (16)$$

A partir de (16) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, on déduit :

$$\frac{\Delta V_b}{V_b} = - S .\Delta t + \frac{1}{2} C (\Delta t)^2 \qquad (17)$$

Dans (17), la convexité est $C = \frac{1}{V_b}\frac{d^2 V_b}{dt^2}$ (18)

La convexité exprimée dans (16) permet de mesurer d'une façon plus précise que la sensibilité simple, des effets d'une variation de taux sur le prix du titre.

à l'ordre 1 : $\Delta V_b = V'(t) x \Delta t + \varepsilon \Rightarrow \Delta V/V \approx -(D/1+t). \Delta t.$ (16)

à l'ordre 2 : $\Delta V_b = V'(t) x \Delta t + V''(t) x (\Delta t)^2 + \beta$ (17)

Exemple : A partir des données de l'exemple donné dans le paragraphe –a qui précède, on vous demande de calculer la convexité, l'effet d'une variation du taux de 0.05 % par la sensibilité simple et par l'approximation du second ordre donnée par l'expression (17).

[15] Dans le développement de Taylor, le reste $\varepsilon(\Delta t^2)$ tend vers 0 quant $\Delta t \rightarrow 0$

a

Suivant les résultats précédents (paragraphe –a), la duration D est égale à 4.17 ans. La sensibilité simple S = $D(1+t)^{-1}$ = $4,169903(1.1)^{-1}$ = 3.7908209

Calcul de la convexité C = $\left[D + \frac{\sum k^2 f_k (1+t)^{-k}}{V_b} \right] \frac{1}{(1+t)^2}$ = [4.169903+19.2659805] x 1.1^{-2} = 19.3684987.

L'estimation de l'impact d'une variation du taux de 0.5 % par approximation du premier ordre donne :

S $\frac{\Delta V_b}{V_b} = -\frac{D}{1+t} x\Delta t \cong - Sx\Delta t$ = -3.7908209 x 0.05 = -0,1895 %

L'approximation au second ordre donne : -0.1895 + ½ x 19.3684987 x 0.05^2 = -0,1653 %

7-Recherche du taux de rendement

Le taux de rendement est une variable importante pour la prise de décision d'investissement. En effet, la connaissance du niveau de ce taux permet d'orienter le choix é

Ainsi la prime ou l'escompte sur le prix d'achat de l'obligation impactent son taux de rendement. Quand l'obligation est à escompte (prime), le taux de rendement du placement est supérieur (inferieur) au taux du coupon.

a-calcul du taux de rendement à une date d'intérêt

D'une manière simplifiée, le taux de rendement moyen peut etre défini par le rapport de l'intérêt périodique moyen à l'investissement moyen.

Quand l'obligation est à escompte, le gain en capital réalisé lors de l'achat du titre, contribue à augmenter l'intérêt périodique. A l'inverse, pour une obligation à prime la perte en capital lors de l'achat de l'obligation réduit l'intérêt périodique. Ainsi, le taux de rendement moyen(TRM) est donné par les formules :

Pour une obligation à prime TRM = $\frac{c-(V_b - V_r)/n}{\left\{V_b + V_r + \frac{V_b - V_r}{n}\right]/2}$(18)

Pour une obligation à escompte TRM = $\frac{c+(V_r - V_b)/n}{\left\{V_b + V_r - \frac{V_r - V_b}{n}\right]/2}$ (19)

Exemple : Une obligation de valeur nominale 1000 UM est rachetable au pair. Le taux du coupon est de 9% et l'échéance du titre est de 5 ans. Calculer le taux de rendement si l'obligation est achetée au prix de ;

a -1020 UM, b- 980.50 UM. c- 1000 UM.

a-TRM = 8.50 % b- TRM = 9.49 % , c - TRM = 9 %.

b-calcul du taux de rendement entre deux dates d'intérêt.

L'obligation peut être achetée entre deux dates d'intérêt. Le calcul du taux de rendement moyen se fait par interpolation et suivant les formules (18) ou (19).

a

Exemple : Une obligation dont l'échéance est dans 5 ans et 6 mois est achetée à 96.50 UM. Le taux du coupon est de 10 % . Calculer le TRM de cette obligation sachant qu'elle est rachetable au pair.

On calcule le taux de rendement pour une échéance de 6 ans et pour une échéance de 5 ans. Le TRM pour une durée de 5 ans et 6 mois s'obtient par simple interpolation. Par application de la formule (19), on obtient un TRM = 11.44 %.

8-Remboursement des emprunts obligataires

Les modes de remboursement des emprunts obligataires ne diffèrent pas de ceux des emprunts indivis. En effet l'amortissement d'un emprunt obligataire peut se faire *in fine* par un rachat massif de tous les titres émis par l'emprunteur. Afin d'éviter les problèmes de trésorerie liés à la mobilisation des fonds nécessaires au remboursement en une seule fois de toutes les obligations émises ; l'emprunteur peut préalablement constituer un fonds d'amortissement.

L'amortissement de l'emprunt obligataire peut se faire progressivement en plusieurs opérations de remboursement qui peuvent être par annuité constante ou par séries d'obligations égales.

Quand l'émetteur de l'emprunt obligataire choisit le remboursement progressif comme mode d'amortissement. Lors de l'émission des obligations, il fixe :

* les échéances des opérations de remboursement. En générale, elle coincident avec les dates d'intérêt.

* le nombre de titres à rembourser à chaque échéance

* le procédé de tirage au sort des obligations à rembourser.

a-remboursement par annuité constante

L'annuité à rembourser est sensiblement constante car le nombre de titre à racheter est un entier naturel et l'obligation est remboursée par coupure entière. Autrement dit, les montants du capital à rembourser à chaque échéance doit être un multiple de la valeur de remboursement de l'obligation. L'emprunteur ne peut pas rembourser une fraction de titre.

Les formules qui ont été données pour l'amortissement des emprunts indivis peuvent être adaptées au cas du remboursement de l'emprunt obligataire.

Le nombre total des titres émis est N_0

$N_k$nombre de titre en « vie » non encore amortis immédiatement après la k^{eme} échéance.

NA_k nombre de titre remboursé la $k^{ème}$ échéance.

a

V_n valeur nominale de l'obligation.

V_r valeur de remboursement de l'obligation.

t taux nominal ou taux du coupon.

K capital emprunté.

Ainsi, on peut écrire :

$K = V_n N_0$

$N_k = N_{k-1} - NA_k$

L'annuité périodique est égale à : $a = V_0 N_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} = V_0 N_0 \,(1/ a_{\overline{n}|})$ (20)

Nombre de titres remboursés lors de la première échéance

$NA_1 = N_0 \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \frac{K}{V_n} \frac{t}{(1+t)^n - 1}$ (21)

Nombre de titre amortis lors de la $k^{ème}$ échéance :

$NA_k = NA_1 (1+t)^{k-1} = N_0 \frac{t\,(1+t)^{k-1}}{(1+t)^n - 1}$ (22)

Nombre de titres remboursés de la première à la $k^{ème}$ échéance :

$N_0 - NA_k = N_0 \frac{(1+t)^k - 1}{(1+t)^n - 1} = N_0 (S_{\overline{k}|} / S_{\overline{n}|})$ (23)

Nombre de titres en « vie » après la $k^{ème}$ échéance :

$Nv_k = N_0 - N_0 \frac{(1+t)^k - 1}{(1+t)^n - 1} = N_0 \left(1 - \frac{(1+t)^k - 1}{(1+t)^n - 1}\right) = \frac{(1+t)^n - (1+t)^k}{(1+t)^n - 1}$ (24)

Exemple :

Un emprunt obligataire de 100 000 UM la valeur nominale du titre est égale à 1 000 UM est remboursable au pair par annuité sensiblement constante. Le taux du coupon est de 10 % et la durée d'amortissement est de 10 ans. Construire le tableau d'amortissement.

L'annuité théorique est égale à $100\,000 \frac{0.1}{1-(1+0.1)^{-10}} = 16274.50$ UM

Les intérêts compris dans la première annuité sont : 100 000 x 0.1 = 10 000 UM.

Le capital à amortir lors du premier versement est de 16274.5-10000 = 6274.5 UM .

Le capital à rembourser annuellement doit être arrondi au plus près multiple de 1000 car la valeur de l'obligation est 1000 UM. Ainsi $6274.5 \cong 6000$ soit 6 obligations à racheter.

L'amortissement compris dans la deuxième annuité est :

$6274.5\,(1+10\%) = 6901.95 \cong 7000$.

L'intérêt à payer lors de la deuxième échéance est 94000 x 0.1 = 9400 UM.

Tableau -3 Amortissement d'un emprunt obligataire

k	Nombre de titres restant à rembourser à la $k^{ème}$ échéance	Nombre de titres remboursés la $k^{ème}$échéance	Intérêt	amortissement	solde
0	100	….	….	….	100 000
1	94	6	10 000	6000	94 000
2	87	7	9400	7000	87 000
3	79	8	8700	8000	79000
4	71	8	7900	8 000	71 000
5	62	9	7100	9 000	62000
6	52	10	6200	10 000	52000
7	41	11	5200	11 000	41000
8	29	12	4100	12 000	29000
9	15	14	2900	14 000	15000
10	0	15	1500	15 000	0
		100		100 000	

Remarque : quand l'obligation est remboursée avec une valeur supérieure à la valeur nominale du fait de l'existence d'une prime, cette dernière s'ajoute à chaque échéance à l'annuité. Autrement dit, l'amortissement est calculé par rapport à la valeur de remboursement, cependant les intérêts sont calculés sur la base de la valeur nominale. L'annuité périodique est :

$$a = \frac{\frac{N_0 \cdot V_r \cdot V_n}{V_r} t}{1-\left(1+\frac{V_n \cdot t}{V_r}\right)^{-n}} = \frac{N_0 . V_n \cdot \ t}{1-\left(1+\frac{V_n \cdot t}{V_r}\right)^{-n}} (25)$$

La formule précédente peut être généralisée au cas où les valeurs de remboursement sont propres à chaque échéance, soit V_{r1} pour la première échéance, V_{r2} pour la deuxième échéance est ainsi de suite. La formule (23) devient :

$$a = \frac{N_0 V_n \ t}{\left[1-\left(1+\frac{V_n\ t}{V_{r1}}\right)^{-n1}\right]\left[1-\left(1+\frac{V_n t}{V_{r2}}\right)^{-n2}\right] \ldots \left[1-\left(1+\frac{V_n\ t}{V_{rk}}\right)^{-nk}\right]} (26)$$

L'annuité est constante par hypothèse, ainsi on peut écrire :

$A_1 = NV_n\ t + NA_1\ V_r$ (27)

Dans l'expression (27) , le problème revient à calculer NA_1 , les autres variables sont connues. On sait que $NA_1 + NA_2 + \ldots + NA_n = N_0$

a

Les termes de la première échéance NA_1 sont en progression géométrique de raison 1+t (V_n/V_r.). En effet en écrivant :

$a_k = Nv_{k-1}\, t\, V_n + NA_k V_r$ et $a_{k+1} = Nv_k\, t\, V_n + NA_{K+1} V_n$.

les annuité sont constante :

$Nv_{k-1}\, t\, V_n + NA_k V_r = Nv_k\, t\, V_n + NA_{K+1} V_n$

Or : $Nv_k = Nv_{k-1} - NA_k$ ou $Nv_{k-1} = Nv_k + NA_k$, ainsi :

$Nv_k\, t\, V_n + NA_{K+1} V_n = = (Nv_k + NA_k)\, t\, V_n + NA_k V_r$

$NA_{k+1} V_r = NA_k(V_r + V_n t) \Rightarrow NA_{k+1} = NA_k(V_r + V_n t)/V_r = NA_k(1+ V_n t/V_r)$ (27)

A partir de (27), on déduit :

$$NA_{n1} = NA_1\left(1 + \frac{V_n\ t}{V_r}\right)^{n_1 - 1} \qquad (28)$$

$$NA_{n1+n2} = NA_{n1+1}\left(1 + \frac{V_n\ t}{V_r}\right)^{n_2 - 1} \qquad (29)$$

Exemple : Un emprunt obligataire de 25 000 titres de nominal 400 UM est amortissable en 15 ans. Taux du coupon 0.05. Le remboursement se fait à la valeur de 400 UM pour les 5 premières échéances, à 450 UM pour les 5 échéances suivante et 500 UM pour les 5 dernières échéances. Présenter les lignes 1, 2 et 6 du tableau d'amortissement de cet emprunt.

Nombre de titres à amortir la première année :

$NA_1 = (25000 \times 0.05)/ [\{(1+0.05\text{x}400/400)^5(1+0.05\text{x}400/450)^5(1+0.05\text{x}400/500)^5\}-1] =$

$= 25000\text{x}0.05/[(1.276283\ \text{x}1.242873\text{x}\ 1.216653)-1] = 1344.19$ UM.

$NA_2 = 1344.19\ (1.05) = 1411.40$ UM.

$NA_6 = NA_1\text{x}\ 1.05^4 \text{ x } (400+20)450 = 1344.19\text{x}1.05^4+420/450 = 1524.94$ UM.

Nombre de titres en vie après la 5ème échéance :

$25000 - 1344.19 \times (1.05^5-1)/0.05 = 17572.5$

Tableau -4 Extrait du tableau d'amortissement.

k	Nbrde titre en vie	dette	Intérêt	Nbre de titres amortis	Amortissement	annuité
1	25 000	1 000 000	500 000	1344	537 600	1 037 600
2	23 656	9 462 400	473 120	1411	564 400	1 037 520
6	17572	7 028 800	351 440	1525	686250	1 037 690

a

b-remboursement d'un emprunt obligataire par série égale

Dans ce mode d'amortissement, l'emprunteur divise le nombre de titre à amortir à chaque échéance par séries égales. Autrement dit, si le nombre d'échéance est n alors chaque série sera composé de N_0/n titres.Ainsi la $k^{ème}$ annuité comprend :

Les charges d'intérêt : $N_0(1- \frac{k-1}{n}) V_0$ t.

Les amortissements : $(N_0/n) V_0$ ou $(N_0/n) V_r$

Remarque : dans ce mode de remboursement l'annuité est décroissante car les amortissements sont constants cependant les intérêts diminuent chaque échéance.

c-remboursement « *in fine* » par un versement massif

Comme dans les emprunts indivis, dans ce mode d'amortissement, l'emprunteur se limite à payer à chaque échéance le coupon d'intérêt. A la dernière échéance il supporte les charges d'intérêts et le remboursement de l'ensemble des titres émis. Afin d'éviter les problèmes de trésorerie, l'emprunteur peut constituer préalablement un fonds d'amortissement.

La charge périodique liée à l'emprunt obligataire comprend les intérêts à payer sur les obligations émises auquel on ajoute l'annuité nécessaire à la constitution du fonds d'amortissement. Soit :

$V_0\ t + V_0 \frac{t'}{(1+t')^n-1}$ où a' est l'annuité nécessaire à la constitution du fonds d'amortissement et t' est le taux d'intérêt appliqué.

Exercices et problèmes

1-Une obligation de 5 000 est rachetable au pair dans 5 ans. Le taux du coupon est 10 % et les intérêts sont annuels. Calculer le prix de l'obligation si le taux de rendement exigé est de :

a- 11 %
b- 8 %.
c- Reprendre l'exercice en supposant que l'obligation est rachetable à 4 ans et 2 mois de son échéance.

2-On reprend les données de l'exercice précédent et on suppose que le taux de rendement exigé est de 12 %. On vous demande de calculer le prix de l'obligation si elle est :

a- Rachetable au pair
b- Rachetable à l'indice 95.
c- Rachetable à l'indice 103.

3-Une obligation de 10 000 UM portant intérêt à 10 % et dont l'échéance est fixée au 1/3/2024 ; le coupon d'intérêt est versé le 1er mars de chaque année. Vous achetez cette obligation le 1er mai 2021 et vous exigez un taux de rendement de 9 % sur votre placement. Sachant que l'obligation est rachetable au pair, déterminez le prix à payer.

4-Une obligation dont le nominal est 5 000 UM, a été achetée au prix de 4688.44 UM. Cette obligation porte intérêt à 9% et est rachetable au pair. Le prix de la transaction a été basé sur un taux de rendement de 10 %. Calculer l'échéance de cette obligation.

5-Soit une obligation remboursable *in fine* de durée de vie égale à 5 ans et dont le taux du coupon est de 5 %. En supposant une hausse du taux du marché de 100 points de base soit 0.01 %. Déterminer la duration de ce titre.

6-Vous désirez acheter une obligation et vous avez la possibilité de choisir deux offres. Les deux obligations offerte ont même valeur nominale 5 000 UM et elles sont toutes les deux rachetables au pair dans 5 ans. La première obligation porte intérêt à 10 % et son prix est de 5097.50 UM. La deuxième porte intérêt à 9 % et son prix est son prix est de 4864. Dans quelle obligation investirez-vous ?

7-Soit une obligation zéro coupon de durée 1 an qui donne un flux de 105.

a- Quel est le prix de cette obligation si le taux du marché est de 5 % , 6%
b- Calculer la sensibilité et la duration de cette obligation.

8-Déterminer la duration d'un zéro-coupon d'échéance n, de valeur nominale V_0 et dans le taux d'intérêt est t.
Application numérique : V= 100, t= 6 % et n = 5 ans

9-Déterminer la duration d'une rente perpétuelle qui verse un flux constant *f* avec un taux de rendement actuariel t.

a

10-Une rente perpétuelle donne un revenu de 5 UM par an.

a- Calculer le prix de cette rente si le taux de rendement exigé est de 5 %

b- En supposant que le taux du marché pour ce type de rente augmente de 1 % , calculer la sensibilité et la duration de cette rente.

11-Soit une rente perpétuelle dont le taux de rendement est t_a et le taux nominal est t. On vous demande de calculer l'effet d'une variation du taux sur la valeur de la rente par la sensibilité simple et par la relation d'approximation qui fait intervenir la convexité.
Application numérique t_a = 10%, variation du taux 2 %.

12-Soit une obligation remboursable *in fine* de durée de vie égale à 5 ans. Cotant au pair le taux du coupon est de 4 %. En supposant une augmentation du taux du marché de 100 points de base (Δt = 0.01%). Etudier les effets de cette variation du taux sur le prix du titre par le calcul de :

a- La duration

b- La sensibilité simple

c- La convexité

d- Calculer la sensibilité par une approximation du second ordre.

13-Etablir le tableau d'amortissement d'un emprunt obligataire dont le taux d'intérêt est de 5%. Nombre de titres émis est de 100 000. La valeur nominale de l'obligation est fixée à 100 UM. Les titres sont remboursés au pair par annuités sensiblement égales. La durée d'amortissement est de 8 ans.

14-Un emprunt obligataire de 200 000 titres et dont l'échéance est dans 15 ans porte intérêt à un taux de 5.5 %. La valeur nominale du titre est de 200 UM et son prix d'émission est de 196 UM.
L'amortissement de cet emprunt se fait par annuité sensiblement constante.

a- Donner le 3 premières lignes du tableau d'amortissement.

b- Calculer à l'émission le taux de rendement moyen de l'emprunt.

c- Calculer le taux de rendement de l'obligation amortie au premier tirage, au 3^{èm} tirage et au 10^{èm} tirage.

15-Une émission d'obligations a été faite suivant les conditions suivantes :
Nombre de titres émis : 1 000 000. Valeur nominale : 400. Valeur d'émission : 388. Valeur de remboursement : 420. Taux du coupon 6 %. Frais d'émission : 2 % du nominal du titre. Le nominal de l'emprunt est de 100 millions d'UM. Durée de l'emprunt 20 ans. Calculer à l'émission de l'emprunt :

a- Le taux de rendement

b- Le taux de revient de l'emprunt.

16-Un emprunt obligataire comprend 10 000 titres de valeur nominale 200 UM. La valeur de remboursement est de 220 UM. Le taux d'intérêt de cet emprunt est de 6 %. La durée d'amortissement est fixée à 20 ans et les annuités de remboursement sont sensiblement égales.

a- Présenter les 2 premières lignes du tableau d'amortissement.
b- A la fin de la 15ème année, l'emprunteur décide de rembourser le reste de l'emprunt en même temps que le versement de la 15ème annuité. Calculer le montant de ce versement global.
c- Calculer le taux de rendement moyen des obligations amorties lors du 2^{èm} tirage.

Chapitre huitième : Le marché des actions

1-Définition

Une action est un titre qui représente un droit de propriété sur une part des fonds propres d'une société. De ce fait, le détenteur de ce titre a le droit de participer en tant qu'associé à la gestion de l'entreprise. L'actionnaire possède un droit sur les actifs de l'entreprise, une fois les dettes remboursée. Ce droit est limité au nombre d'action détenues. Quand l'entreprise réalise des bénéfices et décide de distribuer une partie aux associés, alors la part encaissée par l'actionnaire constitue le dividende.

Les actions sont des titres négociables sur le marché boursier. Elles sont émises lors de la création de l'entreprise et parfois durant la vie de cette dernière. Dans le second cas l'émission d'actions nouvelles a pour but d'augmenter le capital de la société. La souscription aux actions est ouverte à tous les agents économiques (les entreprises, les banques, les compagnie d'assurance, les administrations publiques, les particulier , les non-résidents,...).

Ainsi l'action au même titre que l'obligation donne à son détenteur le droit de recevoir des revenus à des échéances fixes. Cependant pour les actions, les dividendes sont aléatoires car ils dépendent du résultat de l'entreprise et de la décision d'approbation l'assemblée des actionnaires pour la distribution de dividendes. La durée de vie de l'action est supposée infinie.

2-Evaluation des actions.

Une action peut être considérée comme une chronique de flux dont le premier est négatif, il représente le montant investi dans l'achat de l'action. La détermination de la valeur de marché de l'action en suivant la même démarche que celle utilisé pour déterminer la valeur d'une obligation. Ainsi la valeur d'une action sera égale à la valeur actuelle des dividendes de la détention de l'action. Si on note P_0 le prix du titre au temps présent et les dividendes espérés $E(D_k)$. Le taux d'actualisation est k_e

$$P_0 = \sum_{t=1}^{t=\infty} \frac{E\,(D_k)}{(1+k_e)^t} \quad (1)$$

Si on suppose que les dividendes par action son constant est égaux à D, la formule précédente devient :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{t=\infty} \frac{D}{(1+k_e)^t} = \frac{D}{k_e} (1')$$

La formule (1') assimile l'action à une rente perpétuelle. Le prix de l'action est égale au rapport du dividende sur le taux d'actualisation ou taux de marché.

Remarques :

La formule (1') suppose que l'évaluation de l'action est faite immédiatement après l'encaissement du dividende de l'année.

Le taux d'actualisation est supposé constant à l'infini.C e qui est peu réaliste car le taux varie avec le risque.

La formule ne prend en compte que les dividendes, les autres revenus (droit de souscription, droit d'attribution,..) liés à la détention d'action ne sont pas pris en compte.

Suite à ces insuffisances de nombreux modèles ont été développés.

3-Les modèles de base d'évaluation des actions.

Les principaux modèles sont :

a-Le modèle de Gordon Shapiro.

Ce premier modèle reprend la formule générale d'évaluation des actions donnée par l'expression (1) et suppose que les dividendes croissent à un taux constant g. Ainsi, en appliquant la règle : le prix d'un actif est égale à la valeur actuelle des revenus futurs qu'il procure à son détenteur ; on peut écrire :

$$P_0 = \frac{D_1}{1+k_e} + \frac{(1+g)D_1}{(1+k_e)^2} + \ldots + \frac{(1+g)^{n-1}D_1}{(1+k_e)^n} =$$

$$= \frac{D_1}{1+k_e}\left[1+ \frac{1+g}{1+k_e} + \ldots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+k_e)^{n-1}} \right] \qquad (2)$$

Dans l'expression (2) les termes entre crochet représentent la somme de n termes d'une suite géométrique dont le premier est 1 et la raison est $1+g/1+k_e$. Pour calculer P_0 on suppose : $k_e > g$[16]. En effet dans le cas contraire la somme des n termes de la suite géométrique diverge quand n tend vers l'infini.

$$P_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{D_1}{1+k_e}\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+k_e}\right)^n}{1-\left(\frac{1+g}{1+k_e}\right)} \right] = D_1/(k_e-g) \qquad (2')$$

b-le modèle de Bates

Ce modèle reprend les hypothèses de la formulation de Gordon Shapiro. L'évaluation de l'action est faite à partir de son PER (priceearning ratio) qui est égal au rapport du prix de l'action sur le bénéfice par action. L'hypothèse d'un taux de croissance constant des dividendes repose sur les conditions suivantes : autofinancement de la croissance de l'entreprise, constance de la part des bénéfices distribués et stabilité de la rentabilité des investissements.

[16] Si cette hypothèse n'est pas respectée, la somme des termes est divergente et le prix de l'action devient infini ce qui est invraisemblable.

Ainsi, en adoptant les notations suivantes B_k bénéfice de l'année k, la part des bénéfices distribués est *p*et *r* est le taux de rendement des capitaux investis par l'entreprise. On écrit :

$$B_{k+1} = B_k + r(1- p)B_k = B_k[\ 1+\ r(1-p)\ ] \quad (3)$$

Les dividendes constituent une part des bénéfices : pB_k

$$D_{k+1} = pB_{k+1} = pB_k[\ 1+\ r(1-p)\ ] = [\ 1+\ r(1-p)\ ]\ D_k \quad (4)$$

Les bénéfices et les dividendes croissent d'une manière géométrique avec un taux égal à : g = r(1-p). La croissance de l'entreprise provient exclusivement de l'autofinancement, on déduit que la valeur comptable croît selon le même taux g. En notant E_k la valeur comptable de l'entreprise à l'échéance k, on déduit :

$$E_{k+1} = E_k[\ 1+ (1-p)r\ ] \quad (5)$$

En remplaçant g par $r(1-p)$ dans la formule (2'), on obtient :

$$P_0 = \frac{E_0 r\, p}{k_e - r(1-p)} \quad (6)$$

Dans (6) E_0 est le montant des capitaux investis par action. Le PER se déduit de (6).

$$PER = \frac{p}{k_e - r(1-p)} \quad (7)$$

La formule (7) apparait conne une autre expression du modèle Gordon Shapiro à partir du PER. Cette formule appelle certaines remarques :

Elle ne permet pas la comparaison entre différentes entreprises quand les méthodes comptables qu'elle utilise pour évaluer les résultats sont différentes. Une approche fondée seulement sur le PER ne permet pas de différencier entre les firmes en croissance et les autres.

A partir de (6), on peut isoler le taux d'actualisation k_e

$$k_e = \frac{pr\, E_0 + P_0 r(1-p)}{P_0} = \frac{1}{PER} + \frac{[P_0 - E_0\ ]r(1-p)}{P_0} \quad (8)$$

Le PER est une bonne approximation du rendement future que si le deuxième terme de l'expression (8) est nul. Autrement dit quand la valeur comptable de l'entreprise est égale à sa valeur boursière. Cette condition n'est pas toujours vérifiée.

La méthode issue du PER malgré sa simplicité ne renseigne pas d'une manière précise sur la relation entre la sous-évaluation du titre et la faiblesse du PER. Les études empiriques ne confirment pas ce lien.

c-dynamique du PER

Dans ce paragraphe on analyse l'évolution du PER en supposant un taux de croissance constant des dividendes et des distributions des dividendes. Le bénéfice par action est B , ainsi le PER de l'année n est :

$PER_n = B_n/P_n$ =>$P_n = PER_n$ x B_n =>$P_n = PER_n$ x$B_0(1+g)^n$

$$P_0 = pB_0\left[\frac{(1+g)}{(1+k_e)} + \frac{(1+g)^2}{(1+k_e)^2} + \ldots + \frac{(1+g_n)^n}{(1+k_e)^n}\right] + \frac{P_n}{(1+k_e)^n} =$$

$$= pB_0\left[\frac{\frac{(1+g)^{n+1}}{(1+k_e)^{n+1}}-1}{\frac{1+g}{1+k_e}-1} - 1\right] + \frac{P_n}{(1+k_e)^n} \times \frac{B_0(1+g)^n}{B_n} =>$$

$$PER_0 = p\left[\frac{\frac{(1+g)^{n+1}}{(1+k_e)^{n+1}}-1}{\frac{1+g}{1+k_e}-1} - 1\right] + PER_n\frac{(1+g)^n}{(1+k_e)^n} \tag{9}$$

A partir de l'équation (9) , on déduit :

$$PER_n = PER_0\frac{(1+k_e)^n}{(1+g)^n} - p\left[\frac{1+g}{g-k_e}\left[1- \frac{(1+k)^n}{(1+g_e)^n}\right]\right] \tag{10}$$

Exemple :

PER_0 =14 g = 5 % k_e = 10 % n = 5 ans p = 0.5

Calculer PER_5

PER_5 = 14 x $(1.1/1.05)^5$ - 0.5/0.1 x 0.55 = 14.89.

e- le modèle de Molodovski

Le modèle de Molodovski est une extension du modèle de Gordon Shapiro où Le taux de croissance des dividendes n'est plus constant. Il connait trois phases la première avec une forte croissance de l'entreprise, la deuxième phase, la croissance se stabilise et la troisième phase l'entreprise atteint sa maturité. Le taux de croissance des dividendes évolue suivant ces trois phases passant d'un niveau élevé G_1 pour se stabiliser à son niveau de long terme $G_2 < G_1$. Le taux de croissance de l'année j est noté G(j) . Il est égale à :

$$G(j) = 1 + G_1 - \frac{(G_1-G_2)J}{N} \tag{11}$$

Dans la formule (11), N est le nombre d'année de la deuxième phase. Le facteur $(G_1 - G_2)/N$ mesure la baisse annuelle du taux de croissance des dividendes. Le prix de l'action suivant le modèle de Molodovski est égale à :

$$P_0 = D_0\{\frac{(1+G_1)}{(k_e - G_1)}(1- \alpha^{T}) + \alpha^{T} \sum_{t=1}^{t=N} \frac{1}{(1+k_e)} \prod_1^t G(j)\} + D_0 \frac{(1+G_1)^{T}(1+G_2)\prod_{j=1}^{N} G(j)}{(k_e - G_2)(1+k_e)^{T+N}} \qquad (12)$$

Avec $\alpha = \frac{(1+G_1)}{(1+k_e)}$ T : durée de la première phase.

Dans la formule (12) le premier terme représente la valeur actuelle des dividendes de la première phase. Le taux de croissance est G_1. Le terme du milieu représente la valeur actuelle des de la période de stabilisation de la firme et le dernier terme est le prix du titre calculé à la date T+N suivant le formule de Gordon Shapiro.

Exemple : voir exercice d'application n° 8.

a

Exercices et problèmes

1-Soit une action dont le dernier dividende distribué est de 120 UM, le taux d'actualisation est de 12 %. Le taux de croissance des dividendes est estimé à 10 %. Calculer le prix de cette action. Une analyse de la situation financière de l'entreprise a montré que les dividendes des 3 prochaines années seront : 100 UM, 90 UM et 110 UM, au-delà de 3 ans, ils croitront d'une manière constante avec un taux de 8 %. Sachant que le taux d'actualisation reste inchangé ; on vous demande de calculer le prix de cette action.

2-Une société par action distribue des dividendes de 20 UM/an et par action. Vous détenez une action de cette société que vous prévoyez de la revendre dans 3 ans à un prix de 4500 UM. Sachant que le taux d'actualisation pour ce type de titre est de 10 %. On vous demande de calculer la valeur actuelle de l'action.

3-On est le 30 aout 2014, l'action Alpha distribue le prochain dividende de 240 UM le 7 juin 2015 autrement dit dans 280 jours. Le taux de croissance des dividendes devrait atteindre dans le long terme 5 %. Le taux de rendement exigé est de pour ce titre est de 11.2 %. On vous demande de calculer le prix de l'action Alpha au 4 aout 2014.

4-La société BULL distribue des dividendes qui croissent indéfiniment de 2 % par an. Le prochain dividende est de 100 UM. Il doit être distribué demain. Le taux de rendement exigé est de 8%. On vous demande de calculer :

a- Le prix de l'action si elle est vendue aujourd'hui
b- Le prix de l'action si elle sera vendue après distribution des dividendes.
c- Quelle est la meilleure option pour le vendeur ?

5-Une entreprise prévoit de distribuer un dividende de 100 UM dans un an. Sachant que les dividendes devraient croître de 15 % /an pendant 5 ans. Au-delà de 5 ans, le taux de croissance des dividendes se stabilise à 2 % . La rentabilité de cette entreprise est éstimée à 10 %.

a- Calculer le prix de l'action
b- Quelle est la part des dividendes dans le prix de l'action pour les 5 premières années ?

6-Une entreprise dont les capitaux propres sont évalués à 80 millions d'UM divisés en 100 000 actions, la rentabilité des investissement est de 20 %,le taux de distribution des bénéfice est de 50 % et le taux d'actualisation est de 15 %.

a- Calculer le dividende par action.
b- Calculer le prix de l'action, en déduire la valeur boursière de cette entreprise.
c- Calculer le PER, en déduire le rendement $k_e = 1/PER$.
d- Calculer k_e en utilisant la formule complète. Commenter le résultat.

7-Donner la formule de Gordon-Shapiro pour une firme dont la croissance des dividendes est $g_1>k_e$ pour n_1 années puis $g_2<k_e$ de n_{1+1} jusqu'à l'infini.

Application numérique : D_1 = 60 UM. g_1 = 0.15 g_2 = 0.10 k_e = 0.12 n_1 = 5 ans.

8-Les phases de croissance d'une firme sont : phase de forte croissance 5 ans G_1=20%. Sur le long terme le taux de croissance se stabilise à 8 % ; la firme mettra 6 ans pour l'atteindre. Sachant que le taux d'actualisation est de 10 % et le dividende actuel est de 50 UM.

a- Calculer le facteur de croissance G(1) et G(2).
b- Calculer la valeur actuelle des flux de la première période.
c- Calculer la valeur actuelle des flux de la période de transition.
d- Calculer la valeur actuelle des flux de la dernière période.
e- En déduire une estimation du prix du titre.

9-A quel PER devrai-je vendre dans cinq ans une action qui vaut aujourd'hui 29 fois ses bénéfices, sachant que le taux de distribution des bénéfices est de 10 %, le taux de croissance des dividendes est de 30 % et que je souhaite un taux de rendement de 15 % ?

10-Dans quatre ans une action devrait valoir 15 fois son bénéfice par action. Quel devrait etre son PER actuel, sachant qu'il n'y a pas de distribution de dividendes et que g = 0.2. Le taux de rendement exigé par les actionnaire est de 13 %.

11-L'action Alpha cote 24.375 UM. Son PER est de 28. Les analystes prévoient une croissance de 15 % durant les 5 prochaines années.

a- Sachant que l'entreprise Alpha ne distribue pas de dividendes, calculer par la formule de Bates le prix du titre, en déduire valeur du PER au bout de 5 ans
b- Le taux de distribution est de 0.5, calculer PER_5
c- Le taux d'imposition est de 0.6, calculer le prix du titreen supposant que seuls les dividendes sont imposables.
d- Calculer le PER_5 si l'investisseur souhaite un rendement après impôt de 6 %.

12-La bourse Alpha a les caractéristiques suivantes :
Capitalisation boursière : 10 000 000 000 UM
Montant prévu de l'ensemble des dividendes : 700 000 000 UM
Taux de distribution moyen des firmes 0.5
L'espérance de rendement moyen du marché est de 15 %
Le taux de croissance moyen des dividendes des firmes est de 8 %
L'action Omicron vaut 650 UM. Elle doit distribuer un dividende de 50 UM qui croît de 6 %.
Le taux d'actualisation est de 15 % et le taux de distribution des dividendes est de 0.5.
L'action Gama vaut 1500 UM, elle distribue un dividende de 50 UM avec un taux de croissance de 15 %. Le taux d'actualisation est de 15 % et le taux de distribution des dividendes est de 0.2.

a

a- Sachant que vous sélectionnez les actions de PER plus faible que celui du marché, quelle(s) action(s) choisissez vous ?

b- Même question si votre ratio est PER/g.

c- Le délai de recouvrement est défini par le nombre d'années nécessaires pour récupérer le prix d'achat du titre par ces bénéfices anticipés. Donnez une relation entre le délai de recouvrement et le PER. Calculez ce délai pour chacune des actions.

a

BIBLIOGRAPHIE

Bonneau Pierre « Mathématiques financières et leurs applications » EdtDunod, 4ème édition, Poitier 1986.

Broquet Claude et al « gestion de portefeuille » EdtDeBoeck , Paris 1997.

Goutte Stéphane « Mathématiques financières : théories, exercices et simulation numériques » Edt. De Boeck, 2015.

Ginglinger E. et Hasquenoph J.M. « Mathématiques financières » Edt. Economica, 1995.

Legros Benjamin « Mini-manuel Mathématiques financière » EdtDunod, 2016.

MassiériWalder « Notion essentielles de mathématiques financières » Edt Sirey 1997.

MassiériWalder « Aide-mémoire Mathématiques financières » Edt. Dunod, 2008.

O'Shaughnessy Wilson « Mathématiques financières appliqués à la gestion »Edt SMG Trois rivières

Parienté Simon « Finance actuarielle » EdtPearson , 2016.

Piermay M. Hereil M. et Lazimi O. « Mathématiques financières » Edt. Economica, 6ème édition, 1998.

Rolando T. et Fink J.C. « Mathématiques financières » Edt. Vuibert, 2000.

Saada Maurice « Pour continufer les mathématiques financière »Edt Vuibert 1990.

Sheldon M. Ross « An elementary introduction to Mathematical Finance » Edt. Cambridge UniversityPress, 3eme edition 2011.

Saada Maurice « Mathématiques financières » Edt que sais- je. 1985

Viviani Jean-Laurent « Gestion de portefeuille » Edt. Dunod Liège 1997.