



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد  
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed  
-----  
معهد الصيانة والأمن الصناعي  
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

## Thèse

Pour l'obtention du diplôme de Doctorat LMD

**Filière :** Génie mécanique.

**Spécialité :** Thermique et mécanique des machines industrielles.

## Thème

*Étude de l'écoulement du fluide en cavité doublement entraînée*

Présenté et soutenu publiquement par :

Nom : Azzouz, Prénom : El Amin.

Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
GUENDOUZ Djillalia	MCA	Université d'Oran 2 IMSI	Présidente
HOUAT Samir	Professeur	Université de Mostaganem	Rapporteur
BOUZIT Mohammed	Professeur	USTO-MB	Examineur
ACHACHE Habib	MCA	Université d'Oran 2 IMSI	Examineur
HASSINI Abdelatif	Professeur	Université d'Oran 2 IMSI	Examineur

Année 2020/2021

## Remerciements

Avant tout, je voudrais exprimer mes remerciements envers mon créateur 'ALLAH' pour m'avoir donné la force et la foi pour compléter ce modeste travail.

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse Monsieur Samir Houat, Professeur à l'université d'Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, où j'ai eu l'honneur de me soutenir et me diriger tout au long de ce mémoire. Je le remercie vivement pour ses conseils de qualité technique et scientifique, sa disponibilité, sa patience, ses qualités humaines et pour la confiance qu'il m'a accordée. J'espère que ce n'est qu'un point de départ d'une coopération future fructueuse.

Je tiens à remercier énormément Monsieur Ahmed Zineddine Dellil, Professeur à l'université Mohamed Ben Ahmed d'Oran 2-IMSI, c'est lui qui nous a donné l'occasion pour arriver à ce jour-là. Il nous a fait bénéficier également de ses conseils et remarques scientifiques, ses encouragements, sa sagesse ainsi que son sens de bonne humeur.

J'exprime mes vifs remerciements à Madame Guendouz Djillalia, Maitre de Conférence à l'université Mohamed Ben Ahmed d'Oran 2-IMSI, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je voudrais remercier également les membres du jury de soutenance, le Professeur Bouzit Mohammed de l'Université des Sciences et de Technologie Mohamed Boudiaf d'Oran (USTO-MB), le Professeur Achache Habib et le Professeur Hassini Abdelatif de l'Université Mohamed Ben Ahmed d'Oran 2-IMSI, pour avoir agréé d'examiner ce travail et pour l'effort et le temps consacré.

Les mots seuls ne peuvent exprimer mes remerciements je dois à mes chers parents et frères et sœurs pour leurs conseils avisés et leur écoute attentive. Enfin, j'ai une pensée à ma grande mère maternelle ainsi à Chergui Djoud, que dieu les protège.

## Résumé :

Le présent travail porte sur l'étude numérique de l'écoulement de fluide stationnaire et bidimensionnel dans des cavités carrées entraînées. Le but est d'explorer le comportement de ce type d'écoulement associé à la variation du nombre de Reynolds et d'autres paramètres influençant la structure de l'écoulement. L'analyse de phénomène a été réalisée à travers deux configurations, à savoir la cavité simplement entraînée et la cavité doublement entraînée.

La configuration classique de la cavité entraînée a été choisie et utilisée pour la validation des résultats obtenus par la méthode des volumes finis (FVM) intégrés dans le commercial code Ansys Fluent. Un bon accord a été indiqué avec l'ensemble de la littérature.

Tout d'abord, l'écoulement de fluide a été étudié dans une cavité simplement entraînée jusqu'au nombre de Reynolds 50000 en utilisant la méthode des volumes finis avec une résolution de maillage très fin. Dans une deuxième étape, l'étude est poursuivie pour l'exploration d'un écoulement de fluide dans une cavité doublement entraînée pour les mouvements parallèle et antiparallèle des deux parois opposées. La méthode des volumes finis et la méthode de Boltzmann sur réseau basé sur un temps de relaxation multiple (MRT-LBM) sont utilisées et comparées pour un entraînement de différents rapports de Reynolds ( $|\lambda| = 1, 2, 4, 8$  et  $10$ ) et  $Re_2=100$ .

Enfin, l'étude a été étendue en considérant l'écoulement turbulent de fluide dans une cavité doublement entraînée par un mouvement antiparallèle des deux parois opposées avec  $Re_{1,2}=10000, 15000$  et  $20000$ . La méthode des volumes finis avec quatre modèles de turbulence RANS fréquemment utilisés ont été inclus (S-A, RNG  $k-\varepsilon$ , SST  $k-\omega$  et Omega-RSM) pour l'évaluation de l'écoulement. Le régime est considéré comme étant laminaire dans la même gamme de nombres de Reynolds et les résultats sont obtenus et confrontés avec celles de l'hypothèse de l'écoulement turbulent.

L'ensemble des résultats présentés dans ce travail sont discutés en termes des contours de lignes de courant, de vorticité et des profils de vitesse. Ceci a permis d'explorer l'ensemble des caractéristiques de ce type d'écoulement dans les cavités entraînées sous l'effet de différents paramètres, tels que le nombre de Reynolds, le rapport de Reynolds, le mode d'entraînement, la méthode de résolution ainsi que la prise en considération de certaines hypothèses de calcul.

**Mots clés :** Cavité doublement entraînée, méthode des volumes finis, méthode de Boltzmann sur réseau LBM-MRT, écoulement laminaire et turbulent, modèles RANS de turbulence.

## Abstract:

The present work is concerned with a numerical study of steady two-dimensional flow in lid-driven square cavities. The main purpose is to explore the comportment of this type of flow related to the Reynolds number variations and other parameters affecting the flow structure. The phenomenon analysis has been done through two configurations, namely the lid-driven cavity and the two-sided lid-driven cavity.

The well-known problem of the lid-driven cavity has been chosen and used for the validation of the results obtained with a finite volume method (FVM), which is integrated in the commercial code Ansys Fluent. A good agreement was indicated with the set of literature.

Firstly, the steady fluid flow has been investigated in a lid-driven cavity up to Reynolds number 50000 using the finite volume method with a very fine mesh resolution. In a second step, the study continued to explore the fluid flow in a two-sided lid-driven cavity for parallel and antiparallel movements of the two opposing walls. The finite volume method and the lattice Boltzmann method of multiple relaxation times (MRT-LBM) are used and the results are compared for an asymmetrical driving with different Reynolds ratios ( $|\lambda| = 1, 2, 4, 8$  and  $10$ ) with  $Re_2=100$ .

Finally, the study was extended by considering a turbulent steady fluid flow in a two-sided lid-driven cavity with antiparallel wall motion and  $Re_{1,2}=10000, 15000$  and  $20000$ . The finite volume method with four frequently used turbulent models (S-A, RNG  $k-\varepsilon$ , SST  $k-\omega$  and Omega-RSM) were included for the flow assessment. The regime is considered to be laminar for the same range of Reynolds numbers and the results are obtained and compared with those from the turbulent hypothesis.

The results presented in this study are discussed in terms of streamlines contours, vorticity contours, and velocity profiles. This allows the exploration of the characteristics of this type of driven cavities flow under the effect of different parameters, such as the Reynolds number, the Reynolds ratio, the driving mode, the method of resolution as well as the consideration of some computing assumptions.

**Keywords:** Two-sided lid-driven cavity, finite volume method, lattice Boltzmann method MRT-LBM, laminar and turbulent flow, RANS turbulent models.

## ملخص:

يركز العمل الحالي على دراسة عددية للتدفق الثابت ثنائي الأبعاد في التجاويف المربعة المدفوعة. الغرض الرئيسي هو استكشاف سلوك هذا النوع من التدفق المرتبط بتغيرات رقم رينولدز والعوامل الأخرى التي تؤثر على هيكل التدفق. تم تحليل الظواهر من خلال تكوينين، وهما التجويف المحرض من جانب واحد والتجويف المحرض من جانبيين. تم اختيار المشكلة المعروفة المتمثلة في التجويف المحرض من جانب واحد في التحقق من صحة النتائج التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة الحجم المحدود (FVM)، المدمجة في المدونة التجارية (Ansys Fluent). تمت الإشارة إلى اتفاق جيد مع مجموعة المؤلفات.

أولاً، تم فحص التدفق الثابت للسائل في تجويف يحركه الغطاء حتى رقم رينولدز 50000 باستخدام طريقة الحجم المحدود مع استعمال شبكة دقيقة جداً. في الخطوة الثانية، واصلت الدراسة استكشاف التدفق في تجويف محرض من الجانبين مع حركات متوازية ومضادة للتوازي للجدارين المتعارضين. يتم استخدام طريقة الحجم المحدود وطريقة بولتزمان للشبكات (LBM) مع أوقات الاسترخاء المتعددة وتتم مقارنة النتائج لقيادة غير متكافئة باستعمال نسب مختلفة لعدد رينولدز مع  $Re_2=100$  و  $(|\lambda|=1, 2, 4, 6, 8)$ .

أخيراً، تم تمديد الدراسة من خلال النظر في تدفق مضطرب للسائل الموجود في تجويف محرض من الجانبين مع حركة مضادة للتوازي للجدارين المتقابلين من أجل اعداد رينولدز ( $Re_{1,2}=10000, 15000$  et  $20000$ ). تم تضمين طريقة الحجم المحدود مع أربعة نماذج اضطراب شائعة الاستخدام (S-A, RNG  $k-\epsilon$ , SST  $k-\omega$  et Omega-RSM) و هذا لتقييم التدفق. يتم اعتبار التدفق رقائقيًا لنفس النطاق من أرقام رينولدز ويتم حساب النتائج ومقارنتها مع نظيرتها في فرضية التدفق المضطرب.

تمت مناقشة النتائج المقدمة في هذه الدراسة من حيث خطوط الجريان، خطوط الدوران وملامح السرعة. يسمح ذلك باستكشاف مجموعة خصائص التدفق في هذا النوع من التجاويف المدفوعة وذلك تحت تأثير معالم مختلفة، مثل عدد رينولدز، نسب رينولدز، نمط القيادة، طريقة الحساب وكذلك مراعاة فرضية الحساب.

**الكلمات المفتاحية:** تجويف محرض من جانبيين، طريقة الحجم المحدود، طريقة بولتزمان للشبكات (LBM-MRT)، تدفق صفحي و مضطرب، نماذج الاضطراب (RANS).

# Table des matières

<b>Résumé :</b> .....	<b>3</b>
<b>Table des matières</b> .....	<b>6</b>
<b>Liste des figures :</b> .....	<b>9</b>
<b>Liste des tableaux :</b> .....	<b>12</b>
<b>Nomenclature</b> .....	<b>13</b>
<b>Chapitre 1 : Introduction</b> .....	<b>15</b>
1.1 Introduction : .....	15
1.2 But du travail : .....	16
1.3 Contenu de la thèse : .....	16
<b>Chapitre 2 : Etat de l’art</b> .....	<b>18</b>
2.1 Revue bibliographique sur l’écoulement de la cavité entraînée : .....	18
: Introduction 2.1.1 .....	18
: Études numériques 2.1.2 .....	18
: Études expérimentales 2.1.3 .....	24
2.2 Revue bibliographique sur l’écoulement de la cavité doublement entraînée : .....	26
: Introduction 2.2.1 .....	26
: Études numériques 2.2.2 .....	26
: Études expérimentales 2.2.3 .....	39
2.3 Les applications pertinentes d’ingénierie : .....	42
: Cavité entraînée 2.3.1 .....	42
: Cavité doublement entraînée 2.3.2 .....	45
2.4 Conclusion : .....	48
<b>Chapitre 3 : Méthodes numériques</b> .....	<b>50</b>
3.1 Introduction : .....	50
3.2 La méthode des volumes finis : .....	50
: Le maillage 3.2.1 .....	51
: Processus de discrétisation 3.2.2 .....	52
: Schémas numériques 3.2.3 .....	53
: vitesse-Couplage pression 3.2.4 .....	54
: Schéma de relaxation 3.2.5 .....	56
: La résolution des équations 3.2.6 .....	56
3.3 La modélisation de la turbulence : .....	58
: Introduction 3.3.1 .....	58
: de la turbulence Approches de modélisation 3.3.2 .....	58

: Stokes moyennées de Reynolds (RANS)-Les équations de Navier 3.3.3 .....	61
: approche de Boussinesq contre les modèles de transport des tensions de Reynolds (RSM)'L 2.3.4 .....	61
: Les modèles de turbulence 3.3.5 .....	62
3.4 La méthode de Boltzmann sur réseau : .....	67
: Introduction 3.4.1 .....	67
: Equation de transport de Boltzmann 3.4.2 .....	69
: Approximation BGK 3.4.3 .....	70
: Arrangement du réseau 3.4.4 .....	71
: Fonction de distribution d'équilibre 3.4.5 .....	73
: Modèle SRT à simple temps de relaxation 3.4.6 .....	73
: Modèle MRT à plusieurs temps de relaxation 3.4.7 .....	75
: Conditions aux limites 3.4.8 .....	77
: Processus de collision et de propagation 3.4.9 .....	80
: La conservation de masse et de quantité de mouvement 3.4.10 .....	80
: Conclusion 3.4.11 .....	80
<b>Chapitre 4 : Résultats et discussions.....</b>	<b>81</b>
4.1 Introduction : .....	81
4.2 Description du problème étudié : .....	81
: Cavité simplement entraînée 4.2.1 .....	82
: Cavité doublement entraînée 4.2.2 .....	82
4.3 Les hypothèses de calcul : .....	82
4.4 Conditions aux limites : .....	83
4.5 Étude du maillage : .....	84
: Cavité simplement entraînée 4.5.1 .....	84
: Cavité doublement entraînée 4.5.2 .....	84
4.6 Validation du code de calcul : .....	86
4.7 Simulation de l'écoulement de fluide stationnaire dans une cavité entraînée carré pour un nombre de Reynolds jusqu'à 50000 : .....	88
: Motivation et introduction 4.7.1 .....	88
: écoulement'Structures d 4.7.2 .....	89
: Profils de vitesse 4.7.3 .....	91
: Propriétés des vortex primaires et secondaires 4.7.4 .....	94
: Conclusion 4.7.5 .....	95
4.8 Simulation numérique de l'écoulement asymétrique de fluide dans une cavité doublement entraînée : .....	96
: Introduction et motivation 4.8.1 .....	96

: Mouvement parallèle des parois 4.8.2.....	97
: écoulement'a) Structures d.....	97
: b) Analyse des profils de vitesse .....	98
: vortex primaires et secondaires c) Propriétés des.....	101
: Mouvement antiparallèle des parois 4.8.3.....	102
: écoulement'a) Structures d.....	102
: b) Analyse des profils de vitesse .....	103
: vortex primaires et secondaires c) Propriétés des.....	106
: Conclusion 4.8.4.....	106
4.9 Évaluation numérique de l'écoulement turbulent dans une cavité doublement entraînée avec un mouvement antiparallèle des deux parois opposées : .....	108
: Introduction et motivation 4.9.1.....	108
: écoulement'Discuter les structures d 4.9.2.....	109
: Évaluation des propriétés des vortex primaires et secondaires 4.9.3 .....	113
: Analyse des profils de vitesse 4.9.4 .....	116
: Conclusion 4.9.5.....	118
<b>Conclusion générale : .....</b>	<b>119</b>
<b>Références : .....</b>	<b>121</b>
<b>Liste des publications : .....</b>	<b>131</b>
<b>Liste des publications.....</b>	<b>131</b>



Liste des figures :

**Figure 2.1** Description du dispositif expérimental : (a) Schéma de l'installation de la cavité entraînée, (b) vue schématique du domaine physique et des vortex secondaires dans le plan de symétrie..... 24

**Figure 2.2** Projection des lignes de courant expérimentales avec la présence des vortex de coin et les vortex TGL pour  $Re=6000$ ..... 25

**Figure 2.3** Contours des lignes de courant pour les mouvements de paroi parallèles avec  $Re_{1,2}=600$  et  $\Gamma=0.875$ ..... 27

**Figure 2.4** Contours des lignes de courant pour les mouvements de paroi antiparallèles pour  $Re_{1,2}=700$  et  $\Gamma=2$ ..... 28

**Figure 2.5** Régions d'existence de différentes solutions dans le plan  $(Re_{1,2}, \Gamma)$  : (a) mouvement parallèle des parois, (b) mouvement antiparallèle des parois..... 28

**Figure 2.6** Bifurcation de l'écoulement, valeur de la fonction de courant au centre de la cavité en fonction du nombre de Reynolds pour  $\Gamma=1.96$ ..... 29

**Figure 2.7** Contours des lignes de courant de différent type d'écoulements : (a) écoulement stable de deux vortex, (b) écoulement oculaire de chat instable, (c) écoulement oculaire de chat stable, (d) écoulement oculaire de chat stable et plus développé, (e) écoulement stable fortement asymétrique, (f) écoulement instable faiblement asymétrique..... 29

**Figure 2.8** Bifurcation d'écoulement, valeur de la fonction de courant au centre de la cavité en fonction du nombre de Reynolds pour  $\Gamma=1.96$ ..... 30

**Figure 2.9** Bifurcation d'écoulement, valeur de la fonction de courant au centre de la cavité en fonction du nombre de Reynolds, (a)  $\Gamma=0.57$ , (b)  $\Gamma=0.877$ . (La ligne complète désigne une solution stable tandis que la ligne pointillée désigne une solution instable)..... 31

**Figure 2.10** Contours des lignes de courant pour le mouvement de paroi antiparallèle et  $Re_{1,2}=4000$  : (a) solution conventionnelle, (b, c) une paire de solutions supplémentaires..... 32

**Figure 2.11** Multiples Solutions d'écoulement pour le problème de la cavité doublement entraînée des parois non opposées ( $Re_{1,2}=2000$ )..... 33

**Figure 2.12** Multiples Solutions d'écoulement pour le problème de la cavité quadruplement entraînée des parois non opposées ( $Re_{1,2,3,4}=300$ )..... 33

**Figure 2.13** Processus d'instabilité pour le mouvement des parois antiparallèle dans  $(Re_c, k_c, \Gamma)$ ..... 34

**Figure 2.14** Les lignes de courant (lignes complètes), mode critique (flèches) et le taux de production d'énergie locale (couleur) pour antiparallèle mouvement des parois et  $\Gamma=0.2$  ( $Re_c=577.8, k_c=7.578$ )..... 35

**Figure 2.15** Processus d'instabilité pour le mouvement des parois parallèle dans  $(Re_c, k_c, \Gamma)$ ..... 35

**Figure 2.16** Les lignes de courant (lignes complètes), mode critique (flèches) et le taux de production d'énergie locale (couleur) pour parallèle mouvement des parois et  $\Gamma=0.3$  ( $Re_c=547.6\pm 3.7, k_c=9.018\pm 0.005$ )..... 35

**Figure 2.17** Esquisse de la cavité et du système de coordonnées..... 40

**Figure 2.18** Écoulement de deux vortex pour  $\Gamma=1.96$  : (a) Projection des lignes de courant expérimental à  $z=0$  pour  $Re_{1,2}=230$ , (b) les lignes de courant numérique pour  $Re_{1,2}=240$ ..... 41

**Figure 2.19** Écoulement d'œil de chat pour  $\Gamma=1.96$  : (a) Projection des lignes de courant expérimentales à  $z = 0$  pour  $Re_{1,2}=233$ , (b) Solution numérique pour  $Re_{1,2}=257$ ..... 41

<b>Figure 2.20</b> Solution œil de chat numérique pour $Re_{1,2}=800$ .....	41
<b>Figure 2.21</b> Région de non-unicité des deux écoulements bidimensionnels de base (lignes complètes) délimitée par $Re_{1,2}^{(0+)}$ (nombre de Reynolds d'existence supérieure pour l'état à deux vortex) et $Re_{1,2}^{(0-)}$ (nombre de Reynolds d'existence inférieure pour l'état d'œil du chat). Le rapport d'aspect expérimental $\Gamma=1.96$ est représenté par une ligne discontinuée.....	41
<b>Figure 2.22</b> État à quatre cellules entièrement développées à $Re_{1,2}=750$ . Motif cellulaire typique éclairé dans un plan horizontal à $y = 0$ .....	42
<b>Figure 2.23</b> Processus de revêtement de courte durée.....	43
<b>Figure 2.24</b> Écoulement au-dessus d'un capteur solaire avec des barrières de vent.....	44
<b>Figure 2.25</b> Écoulement dans un bassin ouvert : (a) processus du traitement, (b) domaine physique d'écoulement.....	45
<b>Figure 2.26</b> Structure d'écoulement typique (expérimentale), le cylindre rotatif est en bas.....	45
<b>Figure 2.27</b> Cavité doublement entraînée d'un processus de séchage.....	46
<b>Figure 2.28</b> Revêtement en roulant de ménisque : (a) situation physique, (b) domaine idéalisé.....	47
<b>Figure 2.29</b> Type de revêtement : (a) parallèle, (b) antiparallèle.....	47
<b>Figure 2.30</b> Vue d'une solution expérimentale d'un écoulement parallèle pour un rapport de vitesse unitaire ( $\lambda=1$ ).....	47
<b>Figure 2.31</b> Vue d'une solution expérimentale d'un écoulement antiparallèle pour un rapport de vitesse unitaire ( $\lambda=1$ ).....	47
<b>Figure 2.32</b> Schéma de l'appareil de mélange, vue de dessus.....	48
<b>Figure 3.1.</b> Volume de contrôle typique dans un maillage 2D avec la notation utilisée.....	51
<b>Figure 3.2.</b> (a) Domaine discrétisé avec un système de grille structuré (uniforme), (b) domaine discrétisé avec système de grille non structuré avec des éléments triangulaires.....	51
<b>Figure 3.3.</b> Composantes des variables fluctuantes et moyennes.....	60
<b>Figure 3.4.</b> Différentes échelles de fluide.....	68
<b>Figure 3.5.</b> Réseau $D2Q5$ .....	72
<b>Figure 3.6.</b> Réseau $D2Q9$ .....	72
<b>Figure 3.7.</b> Directions de propagation (réseau $D2Q9$ ).....	75
<b>Figure 3.8.</b> Le rebond des particules aux frontières.....	77
<b>Figure 3.9.</b> Fonctions de distribution aux parois de la géométrie.....	78
<b>Figure 4.1.</b> Vue schématique de la cavité entraînée.....	81
<b>Figure 4.2.</b> Vue schématique de la cavité doublement entraînée : (a) entraînement parallèle, (b) entraînement antiparallèle.....	82
<b>Figure 4.3.</b> Vue rapprochée de la grille utilisée ( $1024 \times 1024$ ).....	84
<b>Figure 4.4.</b> Effet du maillage sur les composantes de vitesses $U$ et $V$ passant respectivement par la ligne médiane verticale (a) et la ligne médiane horizontale (b) pour $Re = 1000$ .....	85
<b>Figure 4.5.</b> Vue rapprochée de la grille utilisée ( $257 \times 257$ ).....	85
<b>Figure 4.6.</b> Comparaison des composantes de vitesses $U$ et $V$ passant respectivement par les axes médians $X=0.5$ et $Y=0.5$ .....	86
<b>Figure 4.7.</b> Vue schématique de l'écoulement de la cavité entraînée : (a) $Re \leq 41710$ , (b) $Re \geq 41710$ .....	89
<b>Figure 4.8.</b> Contours de fonction de courant pour différents nombres de Reynolds.....	90
<b>Figure 4.9.</b> Contours de vorticité pour différents nombres de Reynolds.....	90

<b>Figure 4.10.</b> Profils de vitesse $U$ le long de la ligne médiane verticale $X=0,5$ pour différents nombres de Reynolds.....	91
<b>Figure 4.11.</b> Profils de vitesse $V$ le long de la ligne médiane verticale $Y=0,5$ pour différents nombres de Reynolds.....	92
<b>Figure 4.12.</b> Vue schématique de l'écoulement de la cavité antiparallèlement doublement entraînée.....	97
<b>Figure 4.13.</b> Contours de fonction de courant pour différents rapports de vitesse.....	98
<b>Figure 4.14.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=1$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	99
<b>Figure 4.15.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=2$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	99
<b>Figure 4.16.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=4$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	100
<b>Figure 4.17.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=8$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	100
<b>Figure 4.18.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=10$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	100
<b>Figure 4.19.</b> Contours de fonction de courant pour différents rapports de vitesse.....	103
<b>Figure 4.20.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=-1$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	104
<b>Figure 4.21.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=-2$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	104
<b>Figure 4.22.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=-4$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	105
<b>Figure 4.23.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=-8$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	105
<b>Figure 4.24.</b> Profils de vitesse pour $\lambda=-10$ : (a) vitesse $U$ le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse $V$ le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ )....	105
<b>Figure 4.25.</b> Vue schématique de l'écoulement de la cavité antiparallèlement doublement entraînée.....	109
<b>Figure 4.26.</b> Contours de fonction de courant obtenus avec l'hypothèse laminaire et différents modèles de turbulence RANS pour différents nombres de Reynolds.....	111
<b>Figure 4.27.</b> Vue rapprochée des vortex secondaires dans le côté inférieur droit pour différents nombres de Reynolds.....	112
<b>Figure 4.28.</b> Comparaison des Profils de vitesse obtenus avec l'hypothèse laminaire et différents modèles de turbulence RANS pour $Re_{1,2}=10000$ : (a) vitesse $U$ le long de la ligne médiane verticale $X=0,5$ , (b) vitesse $V$ le long de la ligne médiane horizontale $Y=0.5$ .....	117
<b>Figure 4.29.</b> Comparaison des Profils de vitesse obtenus avec l'hypothèse laminaire et différents modèles de turbulence RANS pour $Re_{1,2}=15000$ : (a) vitesse $U$ le long de la ligne médiane verticale $X=0,5$ , (b) vitesse $V$ le long de la ligne médiane horizontale $Y=0.5$ .....	117
<b>Figure 4.30.</b> Comparaison des Profils de vitesse obtenus avec l'hypothèse laminaire et différents modèles de turbulence RANS pour $Re_{1,2}=20000$ : (a) vitesse $U$ le long de la ligne médiane verticale $X=0,5$ , (b) vitesse $V$ le long de la ligne médiane horizontale $Y=0.5$ .....	117

Liste des tableaux :

<b>Tableau 3.1.</b> La fonction $A( P )$ pour différents schémas numériques.....	54
<b>Tableau 4.1.</b> Validation des emplacements des vortex primaires et secondaires.....	87
<b>Tableau 4.2.</b> Validation des valeurs de fonction de courant et de vorticité pour $Re=1000$ .....	87
<b>Tableau 4.3.</b> Validation des valeurs de la fonction du courant et d'emplacement des vortex pour $Re=1000$ .....	88
<b>Tableau 4.4.</b> Valeurs de la vitesse $U$ le long de la ligne médiane verticale de la cavité..	93
<b>Tableau 4.5.</b> Valeurs de la vitesse $V$ le long de la ligne médiane horizontale de la cavité.....	93
<b>Tableau 4.6.</b> Propriétés des vortex primaires et secondaires du côté inférieur droit de la cavité.....	94
<b>Tableau 4.7.</b> Propriétés des vortex secondaires dans les coins inférieur gauche et supérieur gauche de la cavité.....	94
<b>Tableau 4.8.</b> Propriétés des vortex primaires et secondaires du côté inférieur droit de la cavité.....	95
<b>Tableau 4.9.</b> Propriétés des vortex secondaires dans les coins inférieur gauche et supérieur gauche de la cavité.....	95
<b>Tableau 4.10.</b> Emplacements des centres des vortex primaire et secondaire pour différents rapports de vitesse.....	101
<b>Tableau 4.11.</b> Valeurs de fonction du courant aux centres des vortex primaire et secondaire.....	101
<b>Tableau 4.12.</b> Emplacements des centres des vortex primaire et secondaire pour différents rapports de vitesse.....	106
<b>Tableau 4.13.</b> Valeurs de fonction du courant aux centres des vortex primaire et secondaire.....	106
<b>Tableau 4.14.</b> Propriétés des vortex primaires et secondaires obtenus avec l'hypothèse laminaire et les modèles turbulents RANS avec $Re_{1,2}=10000$ .....	113
<b>Tableau 4.15.</b> Écarts en Pourcentage des modèles RANS par rapport à l'hypothèse laminaire pour $Re_{1,2}=10000$ .....	113
<b>Tableau 4.16.</b> Propriétés des vortex primaires et secondaires obtenus avec l'hypothèse laminaire et les modèles turbulents RANS avec $Re_{1,2}=15000$ .....	114
<b>Tableau 4.17.</b> Écarts en Pourcentage des modèles RANS par rapport à l'hypothèse laminaire pour $Re_{1,2}=15000$ .....	114
<b>Tableau 4.18.</b> Propriétés des vortex primaires et secondaires obtenus avec l'hypothèse laminaire et les modèles turbulents RANS avec $Re_{1,2}=20000$ .....	115
<b>Tableau 4.19.</b> Écarts en Pourcentage des modèles RANS par rapport à l'hypothèse laminaire pour $Re_{1,2}=20000$ .....	115
<b>Tableau 4.20.</b> Profondeur des vortex secondaires inférieure droite ( $D/H$ ) en fonction des nombres de Reynolds.....	115

## Nomenclature

### Symbole latin

$D$	Profondeur des vortex secondaires [m]
$f(\mathbf{r}, c, t)$	Fonction de distribution
$f_i$	Fonction de distribution de la densité
$f_i^{eq}$	Fonction de distribution à l'état d'équilibre
$H$	Hauteur physique de la cavité [m]
$k$	L'énergie cinétique turbulente
$p$	Pression [ $\text{N m}^{-2}$ ]
$Re$	Nombre de Reynolds
$t$	Temps dimensionnel [s]
$u_i, \mathbf{u}$	Vecteur de vitesse du fluide
$u, v$	Composantes de la vitesse sur les coordonnées $x$ et $y$ [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U, V$	Composantes adimensionnelles de la vitesse sur les coordonnées $X$ et $Y$
$U_T$	Vitesse adimensionnel au paroi supérieur
$U_B$	Vitesse adimensionnel au paroi inférieur
$x, y$	Coordonnées cartésiennes [m]
$X, Y$	Coordonnées adimensionnelles cartésiennes

### Symbole Grec

$\alpha$	Facteur de sous-relaxation
$\phi$	Variable dépendante générale
$\Gamma$	Rapport d'aspect de la cavité
$\Lambda$	Rapport longueur/largeur
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide [ $\text{Pa s}$ ]
$\mu_t$	Viscosité dynamique turbulente [ $\text{Pa s}$ ]
$\rho$	Masse volumique [ $\text{kg m}^{-3}$ ]
$\nu$	Viscosité cinématique [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
$\nu_t$	Viscosité cinématique turbulente [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
$\tau_{ij}$	Tenseur des contraintes de cisaillement
$\psi$	Fonction du courant [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
$\Psi$	Fonction du courant adimensionnelle
$\omega$	Taux de dissipation spécifique
$\Delta x, \Delta y$	Dimension du volume de controle [m]
$\Delta X, \Delta Y$	Dimension du volume de controle
$\omega$	Vorticité [ $\text{s}^{-1}$ ]
$\Omega(f)$	Opérateur de collision
$\omega_i$	Fréquence de collision [Hz]
$\tau$	Facteur de relaxation
$w_i$	Facteur de poids
$c_s$	Vitesse de son [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$c_i$	Vitesse de propagation [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\varepsilon$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente [ $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$ ]

**Indice**

B	Inférieur
CFL	Nombre de courant d'écoulement (flow courant number)
L	Gauche
PV	Vortex primaire
R	Droite
T	Supérieur

## Chapitre 1 : Introduction

### 1.1 Introduction :

Pendant des décennies, les recherches sur l'écoulement des cavités entraînées émergent pour avoir une longue tradition incluant les caractéristiques de base de la dynamique des fluides. Les cavités fermées carrées et rectangulaires entraînées mécaniquement par des parois en mouvement tangentiel sont parmi les géométries les plus élémentaires dans lesquelles l'écoulement de fluide peut être étudié. Ce mécanisme simple est non seulement d'un intérêt particulier pour les problèmes hydrodynamiques fondamentales mais fournit également un problème de référence simple pour tester les codes numériques impliquant des conditions limites de Dirichlet. Pratiquement, ce type d'écoulement a une contribution significative dans certaines applications d'ingénierie comme le processus de revêtement et de mélange, les technologies de séchage, l'écoulement sur des capteurs solaires avec des barrières anti-vent et le traitement des polymères.

La force d'entraînement mécanique agissant sur un fluide visqueux à densité constante se produit dans un problème appelé cavité simplement entraînée. Une cavité dont l'une des parois solides se déplace tangentiellement à elle-même. Au cours des dernières décennies, les chercheurs se sont penchés sur un certain nombre de contextes concernant cet écoulement.

En fait, les écoulements de la cavité simplement entraînée offrent un cadre idéal dans lequel des comparaisons significatives et détaillées peuvent être faites entre les résultats obtenus par l'expérience, la théorie et le calcul. À ce jour, cela est attesté par des centaines d'articles publiés avec de nouveaux schémas de calcul. En outre, les écoulements de la cavité entraînée présentent presque tous les phénomènes qui peuvent éventuellement se produire dans des écoulements incompressibles, notamment l'évolution des structures de vortex, les écoulements secondaires, les mouvements chaotiques, les instabilités, la transition et la turbulence.

Au fil du temps, le problème de la cavité simplement entraînée a été développé au problème de la cavité doublement entraînée. Cela se produit lorsque les deux parois opposées d'une cavité coulissent indépendamment et simultanément dans la même direction (mouvement parallèle) ou dans des directions opposées (mouvement antiparallèle). Des écoulements bidimensionnels et tridimensionnels ont été étudiés expérimentalement et numériquement pour différents rapports d'aspect ( $\Gamma$ ) et nombres de Reynolds ( $Re$ ) associés aux vitesses de paroi. En plus des phénomènes d'écoulement inspectés dans la cavité simplement entraînée, l'écoulement bidimensionnel doublement entraîné n'a pas été toujours unique et des structures d'écoulement supplémentaires peuvent exister pour le même ensemble de paramètres ( $Re$ ,  $\Gamma$ ). Les topologies de bifurcation de différents écoulements rampants lorsque les paramètres d'entraînement ou de géométrie sont modifiés ont été étudiées.

Le problème de la multiplicité, outre les problèmes d'instabilité, la bifurcation de l'écoulement et la turbulence, rend l'écoulement d'un degré élevé de complexité par rapport à celle de la cavité entraînée. Cela ne nous a pas empêchés ainsi que de nombreux chercheurs d'étudier le problème en termes de simplicité pour examiner des solutions d'écoulement stationnaire et uniques.

## 1.2 But du travail :

Bien que l'écoulement de fluide dans les enceintes ait été largement étudié au cours des dernières années, il représente un large éventail de différents cas dans les différents types de cavités. Au cours des dernières années, l'étude sur le comportement de fluide dans les cavités entraînées a suscité un intérêt croissant en termes des aspects fondamentaux des écoulements incompressibles. Plusieurs aspects abordés dans la littérature pourraient expliquer à quel point ce problème a été considérablement étendu. Néanmoins, certains points n'ont pas encore été abordés. Par conséquent, la flexibilité de développer d'autres aspects a contribué à motiver la recherche actuelle à mener.

En conséquence, deux configurations ont été conçues dans ce projet pour étudier l'écoulement de fluide, qui représentent une cavité carrée simplement entraînée et une cavité carrée doublement entraînée. Les écoulements laminaires et turbulents sont impliqués dans cette recherche ainsi que les deux méthodes de volumes finis (FVM) et celle de Boltzmann sur réseau (LBM) sont utilisées.

Le premier objectif de ce présent travail est de stabiliser et reproduire l'écoulement stationnaire bidimensionnel dans une cavité carrée entraînée jusqu'à des nombres de Reynolds très élevé. La méthode des volumes finis est utilisée ainsi que l'algorithme couplé. Le but de l'analyse se manifeste également à confronter et valider les résultats avec ceux trouvés dans la littérature.

Le deuxième objectif est d'étudier l'écoulement stationnaire et bidimensionnel de fluide en cavité doublement entraînée avec des mouvements parallèle et antiparallèle des deux parois opposées. Différents rapports de Reynolds imposés aux parois mobiles ont été suggérés pour explorer ce type d'écoulement à l'intérieur de la cavité. L'étude vise également à comparer la capacité et l'exactitude des deux méthodes à savoir, la méthode des volumes finis FVM et la méthode de Boltzmann sur réseau à temps de relaxation multiple MRT-LBM.

Le troisième objectif sera réalisé à travers une évaluation globale de l'écoulement turbulent stationnaire et bidimensionnel dans une cavité doublement entraînée avec un mouvement antiparallèle des deux parois opposées. Cette étude visera à comparer la capacité et la précision de la méthode des volumes finis avec un algorithme couplé utilisé avec l'inclusion de quatre modèles de turbulence RANS les fréquemment utilisés (S-A, RNG  $k-\epsilon$ , SST  $k-\omega$  et Omega-RSM). Les résultats obtenus sont évalués avec ceux résultant de l'hypothèse d'écoulement laminaire classique.

## 1.3 Contenu de la thèse :

Le manuscrit présenté est réparti sur quatre chapitres suivis d'une conclusion générale. Le premier chapitre présente une introduction générale, les objectifs de travail ainsi qu'une présentation du contenu de manuscrit.

Le deuxième chapitre fournira une revue bibliographique sur les différents phénomènes de l'écoulement de la cavité entraînée et la cavité doublement entraînée avec une description détaillée à travers des études numériques et expérimentales. Les applications pertinentes d'ingénierie sont définies.

Dans le troisième chapitre, on présente une description des deux méthodes numérique utilisée pour la simulation de l'écoulement de fluide. La méthode des volumes finis (FVM) avec leur différent approches et processus sont d'abord détaillée. La description des différents aspects de la modélisation de la turbulence effectuée sont par la suite exposée. La méthode



célèbre de Boltzmann sur réseau (LBM) avec un rappel de son historique, ses étapes de construction, ces différentes approches et les modèles sur lesquels la méthode se repose (SRT et MRT) sont enfin exposés.

Le chapitre quatre sera consacré pour les résultats et leurs interprétations. Premièrement, une validation de code de calcul utilisé pour le cas de l'écoulement de fluide dans une cavité entraînée avec des valeurs tirées de la littérature est discutée. Puis, les résultats des simulations numériques pour le cas de la cavité entraînée seront traités en incluant l'influence du nombre de Reynolds.

Les résultats des simulations numériques pour le cas de l'écoulement de fluide dans une cavité doublement entraînée seront traités par la suite en incluant l'influence des rapports de Reynolds, le mode d'entraînement (parallèle ou antiparallèle), la méthode résolution (FVM ou LBM), l'hypothèse de calcul (turbulente ou laminaire) ainsi que les différents nombres de Reynolds. Nous terminons le travail par une conclusion et quelques perspectives pour les futures études dans le domaine.

---

## Chapitre 2 : Etat de l'art

### 2.1 Revue bibliographique sur l'écoulement de la cavité entraînée :

#### 2.1.1 Introduction :

Depuis des décennies, la recherche sur l'écoulement des cavités entraînées émerge pour avoir une longue tradition, y compris les caractéristiques de base de la dynamique des fluides. En raison de la simplicité de sa configuration, cet écoulement a été fréquemment utilisé comme un problème de référence pour les stratégies numériques évaluant l'efficacité et la précision. Le système fournit ainsi un banc d'essai efficace pour l'étude de la physique des écoulements bidimensionnelle et tridimensionnelle.

La recherche scientifique sur le Web pour le sujet axé de la cavité entraînée donne plus de 1800 visites, nous mentionnons ci-dessous certaines des recherches numériques et expérimentales les plus intéressantes.

#### 2.1.2 Études numériques :

Les méthodes de calcul numériques ont émergé comme des techniques puissantes pour étudier et explorer les phénomènes physiques de fluide, ce qui est bien prouvé dans cet écoulement de la cavité entraînée.

Fondamentalement, l'écoulement dans une cavité entraînée est dû à un mouvement tangentiel d'une paroi supérieure tandis que les parois restantes sont prises au repos. Cet écoulement révèle un vortex primaire principal occupant la majeure partie de la cavité et des vortex secondaires qui apparaissent dans les coins inférieur et supérieur gauche de la cavité. Ces derniers nombre et taille ont tendance à augmenter avec l'augmentation des nombres de Reynolds.

Les configurations géométriques carrées et rectangulaires des cavités entraînées ont été étudiées de manière assez approfondie. Un grand résumé des travaux d'un tel écoulement des cavités entraînées semble justifié, étant donné que près de 20 ans se sont écoulés depuis l'aperçu fourni par Shankar et Deshpande [1]. Ils ont donné une vue sur l'ensemble des travaux numériques et expérimentaux traitant du comportement d'écoulement dans des cavités entraînées bidimensionnel et tridimensionnel. Leur discussion détaillée inclut les études de l'écoulement de Stokes, l'écoulement laminaire stationnaire et instationnaire (les structures des vortex primaires et secondaires et la non-unicité) et les écoulements turbulents déduits de l'expérience et de la simulation numérique directe. Ils ont affirmé que la turbulence qui se produit au voisinage de  $Re \leq 10000$  dans les cavités entraînées est une turbulence douce et que l'écoulement doit être étudié à des nombres plus élevés de Reynolds pour imiter la turbulence classique.

Dans le même contexte, récemment, Kuhlmann et Romano [2] ont fourni une revue complète et une compréhension des principes fondamentaux de la mécanique des fluides dans les cavités entraînées porté sur l'évolution de l'écoulement par rapport des nombres de Reynolds. La topologie des lignes de courant des écoulements bidimensionnel stationnaires et instationnaires, les écoulements tridimensionnels stationnaires ainsi que l'écoulement turbulent dans un carré

et dans un cube entièrement confiné ont été inclus. Un aperçu des différentes extensions de la cavité entraînée a été aussi donné.

Afin de simplifier la compréhension des études réalisées, nous pouvons essentiellement regrouper les études numériques sur le sujet de l'écoulement de la cavité entraînée en deux types de configuration géométriques. Ceux-ci sont des cavités carrées et rectangulaires et sont plus intéressants dans cette étude, les autres incluent les cavités semi-ellipse et triangulaires.

### 2.1.2.1 Cavités carrées et rectangulaires :

Les études sur l'écoulement de fluide dans les cavités carrées et rectangulaires peuvent être classés en trois catégories :

- (a)- Dans la première catégorie d'études, une solution stationnaire de la cavité entraînée est recherchée. Dans ce type d'études, la solution numérique d'équations de Navier–Stokes (N–S) incompressible stationnaire est présentée à différents nombres de Reynolds.
- (b)- La deuxième catégorie d'études se concentre sur l'instabilité des solutions stationnaires, une méthode d'analyse de stabilité linéaire est utilisé.
- (c)- Dans la troisième catégorie d'études, la transition d'un écoulement stationnaire à un écoulement non-stationnaire est étudiée, en suivant les nombres de Reynolds où une bifurcation de Hopf se produit.

#### (a) L'écoulement bidimensionnel stationnaire de la cavité entraînée :

Nous commençons par les études de première catégorie qui présentent des solutions stationnaires sur un large éventail de nombres de Reynolds. Ils ont réussi à calculer des solutions stationnaires même à des nombres de Reynolds élevés ainsi qu'illustrer l'évolution des structures d'écoulement. Ils ont également déclaré qu'une haute résolution de maillage permettant de conserver la stabilité au-delà des nombres critique de Reynolds.

Parmi ces travaux publiés, nous commençons par le travail de Burggraf [3] qui a effectué les premières investigations analytiques et numériques de la cavité entraînée. Il a trouvé que l'écoulement bidimensionnel dans une cavité carrée passe d'un vortex visqueux à un noyau rotatif non visqueux qui se développe dans la majeure partie de la cavité. Pour  $Re \leq 400$ , les vortex secondaires trouvés présents dans les coins inférieurs de la cavité à tous les nombres de Reynolds. Botella et Peyret [4] ont utilisé la méthode spectrale basée sur la collocation de Chebyshev pour étudier l'écoulement de fluide dans une cavité carrée entraînée. Leur méthode donne des résultats numériques très précis pour des nombres de Reynolds jusqu'à  $Re=1000$ . Une comparaison critique avec d'anciens résultats numériques confirme la haute précision de la méthode. Marchi et al. [5] ont basé sur la méthode des volumes finis (FVM) pour obtenir des résultats stables et précis à l'intérieur d'une cavité carrée entraînée pour  $0.01 \leq Re \leq 1000$ . Un maillage très fin de  $1024 \times 1024$  points a été utilisé pour réduire les erreurs de discrétisation.

Vanka [6] a présenté des solutions stationnaires de l'écoulement avec la méthode des différences finies (FDM). Le maillage de  $321 \times 321$  points a été utilisé dans une cavité carrée entraînée pour  $100 \leq Re \leq 5000$ . AbdelMigid et al. [7] ont résolu les équations stationnaires de Navier-Stokes en utilisant la méthode de volumes finis en formulation de variable primitive. Ils ont présenté une revue complète de la littérature sur le problème de l'écoulement dans une cavité entraînée carrée. Les résultats de référence ont été comparés sous forme des propriétés

des vortex primaires et secondaires pour fournir une source de données de validation pour l'intervalle des nombres de Reynolds dans  $100 \leq Re \leq 5000$ .

Bruneau et Jourou [8] ont utilisé l'efficacité du schéma multigrille (FMG/FAS) inclus dans une méthode des différences finies (FDM) pour calculer l'écoulement dans une cavité entraînée carrée et d'autre rectangulaire d'un rapport d'aspect  $\Gamma=2$ . Les résultats obtenus montrent un bon accord avec les autres publiés. Ils ont trouvé que les solutions apparaissent pour  $Re \leq 5000$  sont laminaire et deviennent instable au seuil de  $Re=7500$  lorsque de petits vortex se développent le long des coins des murs. Zhang [9] a appuyé sur un schéma compact de quatrième ordre en conjonction avec des techniques multi grille pour simuler l'écoulement stationnaire pour des solutions stationnaires allant jusqu'à  $Re=7500$ .

Les bien connu Ghia et al. [10] ont calculé l'écoulement stationnaire dans une cavité carrée entraînée par la méthode des différences finies (FDM) basées sur l'efficacité de fortement implicites et la méthode multi grilles (CSI-MG). Les résultats numériques ont été obtenus pour les valeurs des nombres de Reynolds jusqu'à  $Re=10000$ . La robustesse de la technique de solution a été démontrée et les résultats obtenus concordent bien avec les autres publiés. Scheiber et Keller [11] ont utilisé des techniques efficaces et fiables représentés par une combinaison d'un solveur d'un système linéaire, une méthode adaptative de type newton pour un système non linéaire, et une procédure de continuation pour suivre une branche de solutions sur un intervalle de nombre de Reynolds. Les résultats numériques ont été montrés pour un écoulement incompressible stationnaire dans une cavité entraînée carré pour des nombres de Reynolds jusqu'à 10000. Sur le même contexte, Hou et al. [12] ont démontré la capacité et l'efficacité de la méthode de Boltzmann sur réseau en étudiant l'écoulement de fluide dans une cavité carrée entraînée. La comparaison avec d'autres solutions numériques montre une grande précision dans une large gamme de nombres de Reynolds. Ceci donne confiance à appliquer la méthode à d'autres systèmes complexes. Les contours des lignes de courant, vorticités, pression et les profils de vitesses ont été affichés pour des valeurs de Reynolds jusqu'à 10000. Gupta et Kalita [13] ont testé la méthode du gradient biconjugué pour simuler l'écoulement de fluide dans une cavité entraînée carrée et rectangulaire d'un rapport d'aspect  $\Gamma=2$ . Les résultats numériques ont été comparés qualitativement et quantitativement avec les autres disponibles dans la littérature pour des valeurs des nombres de Reynolds jusqu'à 10000. Les résultats de haute précision ont été obtenus avec un peu de surcoûts. Barragy et Carey [14] ont examiné numériquement l'écoulement de fluide dans une cavité carrée entraînée par la méthode des éléments finis (un schéma d'élément fini de type p). Des solutions stationnaires ont été fournies en terme des structures et de propriétés des vortex primaires et secondaires pour les nombres des Reynolds jusqu'à  $Re=12500$ . La méthode améliore considérablement la précision de la solution et aide à minimiser l'impact des singularités des coins.

Dans des nombres de Reynolds plus élevés, Erturk [15] a discuté en détail l'écoulement bidimensionnel de fluide dans une cavité carrée entraînée en termes d'aspects physiques, mathématiques et aussi numériques. Il a rapporté que, physiquement, l'écoulement n'est bidimensionnel ni stationnaire très probablement dans les limites de  $Re=1000$ . En outre, il a conclu qu'il est toujours possible d'obtenir des résultats numériques a des grands nombres de Reynolds lorsqu'une haute résolution de maillage est utilisée ( $1024 \times 1024$ ). Les propriétés de fluides et les structures des vortex primaires et secondaires ont été prédites pour un nombre maximum de Reynolds de 20000. De même, Erturk et al. [16] ont simulé l'écoulement de fluide dans une cavité entraînée carré en utilisant une méthode de différence finie très efficace (formulation compacte d'ordre 4) avec un maillage très fin. Dans les limites des Reynolds étudiés  $Re \leq 21000$ , ils ont déclaré qu'un maillage fin est nécessaire afin d'obtenir des résultats

stationnaires et permettant de résoudre les vortex secondaires près des coins. Hachem et al. [17] ont étudié numériquement l'écoulement incompressible stationnaire dans une cavité carrée entraînée avec une méthode des éléments finis stabilisée (FEM). Les résultats ont été montrés pour des valeurs de Reynolds jusqu'à  $Re=20000$ . Cependant, les solutions pour  $Re=33000$  et  $Re=50000$  étaient instables.

Wahba [18] a simulé l'écoulement de fluide dans une cavité carrée entraînée en utilisant la méthode des différences finies (FDM) basée sur un schéma compact d'ordre 4 avec un maillage fin. Il a réussi à obtenir des résultats stationnaires jusqu'à un maximum nombre de Reynolds  $Re=35000$ . Les propriétés des vortex principales et les profils de vitesse ont été fournis aux fins de comparaison. L'analyse montre que le calcul numérique des résultats stationnaire pour les équations de Navier-Stokes n'implique pas nécessairement la stabilité physique. Azzouz et al. [19] ont fait une simulation de l'écoulement stationnaire dans une cavité carrée entraînée pour  $100 \leq Re \leq 50000$ . Ils ont utilisé une combinaison efficace de la méthode des volumes finis (FVM) et l'algorithme couplé avec une haute résolution de maillage pour conserver la stabilité des résultats. Récemment, An et al. [20] ont réussi à étudier le comportement d'écoulement dans une cavité carrée sur la base d'une méthode MRT-LBM stabilisée sous des nombres de Reynolds turbulents  $20000 \leq Re \leq 10^6$ . Cependant, leurs résultats étaient instables et chaotiques.

### (b) L'étude de l'instabilité de la solution stationnaire :

Une fois l'état stationnaire de base est calculé, sa stabilité par rapport aux perturbations infinitésimales (tridimensionnelles) peut être étudiée au moyen d'une analyse de stabilité linéaire. Ceci est fait par des méthodes matricielles utilisées (comme la méthode du matrice Jacobienne) pour révéler la stabilité de l'état de l'écoulement. Ici, le système d'équations non linéaire est traité pour donner un problème de valeurs propres algébriques généralisé. La solution obtenue est infiniment stable si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative. Cependant, la solution est instable s'il existe au moins une valeur propre avec une partie réelle positive. Les études sur ce contexte sont incluses dans la deuxième catégorie.

Nous citons comme exemple, Ramanan et Homsy [21], dans leur étude, l'écoulement bidimensionnel de base dans une cavité entraînée est calculé numériquement sur une plage de nombres de Reynolds est perturbé par des perturbations tridimensionnelles via l'analyse de stabilité linéaire. Ils ont constaté que l'écoulement bidimensionnel perd sa stabilité à  $Re=594$  lorsqu'il est perturbé par des perturbations tridimensionnelles.

Albensoeder et Kuhlmann [22] ont étudié numériquement l'écoulement de fluide dans des cavités tridimensionnelles de différent longueur en appliquant la même méthode de Bottela et Peyret [4]. Ils ont fourni des résultats très précis pour des champs d'écoulement tridimensionnel et pour des conditions aux limites rigides et périodiques des murs d'extrémité. Pour des nombres de Reynolds ne dépassent pas 1000, l'instabilité a été prédite pour  $Re \approx 786$ .

Dans le même contexte, Albensoeder et al. [23] ont résolu les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles en utilisant une méthode collocation de Chebyshev. Ils ont utilisé une méthode de stabilité linéaire pour prédire les nombres critiques de Reynolds, les nombres d'ondes critique et la fréquence critique en fonction des rapports d'aspects des cavités. Ils ont constaté que l'écoulement bidimensionnel stationnaire dans une cavité de longueur infinie dans la troisième direction avec une section transversale carrée devient instable à un écoulement stationnaire de vortex de Taylor Gortler à  $Re \approx 786$ , avec une très courte longueur d'onde.

Theofilis et al. [24] ont également pris en compte la stabilité linéaire de l'écoulement d'une cavité périodique. Les nombres critiques de Reynolds calculé correspondent à ceux

d'Albensoeder et al. [23] pour un rapport d'aspect unitaire  $\Gamma=1$ , mais ils s'écartent qualitativement les uns des autres pour  $\Gamma \neq 1$ .

Ding et Kawahara [25] ont basé sur l'analyse de stabilité linéaire et prédire l'instabilité dans une cavité carrée bidimensionnelle à  $Re=1025$  avec une fréquence de 0.8. L'écart par rapport aux autres résultats est expliqué par une légère compressibilité utilisée dans leurs simulations, de sorte que leurs résultats ne sont pas purement incompressibles.

### (c) La transition vers un écoulement instationnaire (bifurcation de Hopf) :

À un nombre de Reynolds critique  $Re_c$ , l'état de l'écoulement stationnaire de basse passe à une solution périodique conduisant à une bifurcation de Hopf (Hopf 1942). Cette bifurcation peut être soit inspectée au moyen de l'analyse de stabilité linéaire du cas où une paire conjuguée complexe de valeurs propres traverse l'axe imaginaire, ou une solution numérique directe (DNS) des équations de Naviers-Stokes est utilisée. Ceci est couvert dans la troisième catégorie.

Fortin et al. [26], Sahin et Owens [27], Abouhamza et Pierre [28], Nureiv et al. [29] et Gervais et al. [30] sont des exemples des études de stabilité hydrodynamique pour détecter la bifurcation du Hopf de l'écoulement dans une cavité entraînée carrée. Ces études prédisent qu'une bifurcation de Hopf a lieu dans un écoulement incompressible bidimensionnel quelque part autour de nombre de Reynolds de 8000, et un écoulement chaotique pour les nombres de Reynolds dépasse 11000.

En ce qui concerne la simulation numérique directe (DNS), Peng et al. [31] ont utilisé une simulation numérique directe en résolvant les équations instationnaires bidimensionnelles de Navier-Stokes dans des variables primitives. L'étude a été faite dans le but d'investiguer la transition de l'écoulement laminaire à un écoulement chaotique dans une cavité entraînée carrée. Les expériences numériques révèlent que la première bifurcation de Hopf a lieu à un nombre de Reynolds approximativement de  $Re=7402$ .

Poliashenko et Aidun [32] ont utilisé une méthode directe basée sur l'intégration du temps pour identifier les nombres de Reynolds critique pour une transition de l'écoulement stationnaire à un écoulement chaotique dans une cavité bidimensionnelle entraînée de différents rapports d'aspect ( $AR=0.8, 1, 1.5$ ). Ils ont obtenu un premier point de bifurcation dans une cavité carré approximativement à  $Re=7763$ .

Bruneau et Saad [33] ont effectué des simulations numériques pour étudier l'écoulement bidimensionnel de fluide et détecter les nombres critiques de Reynolds dans lesquels le fluide devient instationnaire dans une cavité entraînée carrée. En utilisant la méthode des différences finies (FDM) basées sur un schéma multi grille. Ils ont fourni des résultats stationnaires jusqu'à un nombre de Reynolds de 8000 ou ils ont obtenu un premier point de bifurcation de Hopf. Cependant, une solution principalement périodique a été prédite à  $Re=10000$ . L'instabilité des solutions a été détectée en calculant le premier exposant de Lyapunov du système linéarisé. Ils ont déclaré que cette bifurcation est supercritique. Le débit de l'instabilité a été attribué à une instabilité centrifuge du vortex primaire au voisinage des nombres de Reynolds élevé. Cependant, un scénario pour le débit de l'écoulement chaotique est obtenu pour  $Re>11000$ .

Auteri et al. [34] ont fait une simulation numérique directe basée sur une méthode de projection spectrale de deuxième ordre. Avec cela, ils ont résolu les équations instationnaires bidimensionnelles de Navier-Stokes dans les variables primitives pour investiguer la stabilité de l'écoulement de fluide dans une cavité entraînée carré. La méthode permet de localiser un nombre critique de Reynolds pour une première bifurcation de Hopf dans l'intervalle de

Reynolds [8017.6-8018.8] pour une solution est périodique. L'écoulement de fluide traverse une deuxième Bifurcation de Hopf dans l'intervalle [9687-9765].

Murdock et al. [35] ont utilisé l'équation de Boltzmann sur réseau de multiple temps de relaxation pour investiguer la transition de l'écoulement laminaire régulier à un écoulement chaotique. Les simulations révèlent un comportement périodique d'écoulement compatible avec une bifurcation initiale de Hopf à  $Re=7,988$ .

Récemment, An et al. [36] ont fourni une meilleure compréhension de l'écoulement de la cavité entraînée et réussi à étudier le comportement de l'écoulement sur la base d'une méthode de Boltzmann sur réseau stabilisé jusqu'à  $Re=20000$ . Les résultats montrent qu'une première Bifurcation de Hopf se produit à un nombre de Reynolds entre 8000 et 8050. L'apparition du chaos est produite à un Reynolds critique entre 16500 et 17000.

Lee et al. [37] ont identifié le comportement dynamique de l'écoulement à travers multiples bifurcations qui aboutissent finalement à un écoulement chaotique eulérien. Des simulations numériques pseudo-spectrales semi-implicites ont été effectuées dans les valeurs de Reynolds de 1000 jusqu'à 25000. Les poincarémaps ont été utilisés pour identifier les transitions. Le premier nombre critique de Reynolds (bifurcation de Hopf), près de  $Re=10250$ , est trouvé en accord avec certaines des recherches trouvées dans la littérature.

### 2.1.2.2 Cavités semi-ellipses et triangulaires :

Outre les cavités carrées et rectangulaires, d'autres configurations géométriques telles que les cavités semi-ellipse et triangulaires ont également été étudiées. Idris et al. [38] ont étudié l'écoulement de fluide à l'intérieur d'une cavité entraînée peu profonde d'une forme semi-ellipse pour  $Re=1000$ . La méthode des différences finies (FDM) a été employée. Les résultats montrent que l'écoulement se compose généralement d'un vortex principal occupant la majeure partie de la cavité et d'un vortex secondaire dans le côté inférieur gauche de la cavité. Ren et Guo [39] ont utilisé la méthode de Boltzmann sur réseaux pour simuler l'écoulement de fluide dans une cavité semi-ellipse entraînée pour une large gamme des nombres de Reynolds et de rapport d'aspect,  $500 \leq Re \leq 5000$  et  $0.1 \leq AR \leq 4$ . Les effets des nombres de Reynolds et des rapports d'aspect sur l'évolution de la structure du vortex et des champs de pression ont été illustrés. Ils ont constaté que à mesure que  $Re$  et  $\Gamma$  augmente, la forme de la structure du vortex devient plus complexe.

Récemment, Ali et al. [40] ont étudié numériquement la convection mixte de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide micropolaire à l'intérieur d'une cavité triangulaire entraînée par une paroi inférieure. Les résultats obtenus montrent l'effet des paramètres ( $Re$ ,  $Gr$ ,  $Pr$ , et le paramètre de viscosité des vortex  $K$ ) sur les lignes de courant, les profils de vitesse le long des lignes médianes, les contours de température, et le nombre de Nusselt local et moyen sur les limites froides et chauffées des parois. L'étude a montré qu'il existe différents paramètres pour lesquels il existe une symétrie simultanée dans les lignes de courant et les isothermes, ces paramètres peuvent être utiles pour atténuer le taux de transfert de chaleur dans la cavité.

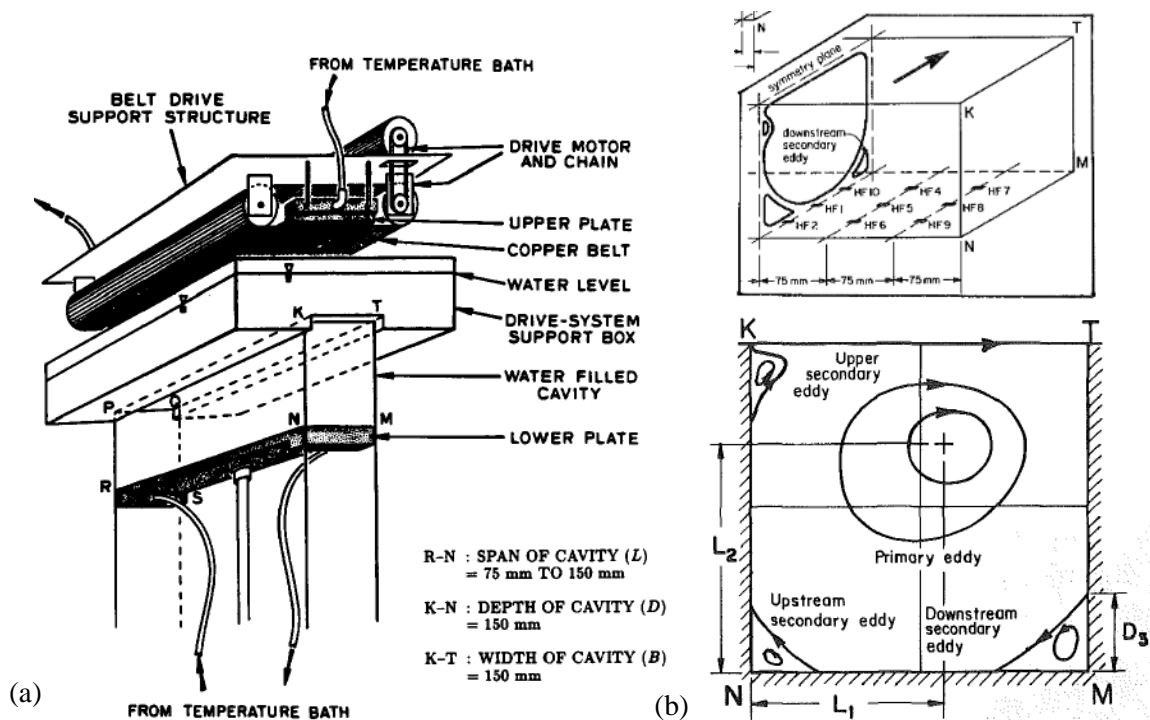
Nazeer et al. [41] ont étudié numériquement les effets de la paroi mobile sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans une cavité triangulaire bidimensionnelle à angle droit remplie d'un fluide micropolaire. Les résultats ont été présentés sous la forme de lignes de courant, d'isothermes, et variations du nombre de Nusselt moyen en fonction de différents paramètres ( $Ri$ ,  $Pr$ , paramètre micropolaire du fluide, et la direction de la paroi mobile). Les résultats montrent que les structures de l'écoulement et la distribution de température dans la cavité sont

affectées par ces paramètres. En plus, le mouvement de la paroi vers le haut montre un effet dominant sur les lignes du courant.

### 2.1.3 Études expérimentales :

Après les premières investigations numériques sur l'écoulement bidimensionnel de la cavité entraînée, la quête de l'applicabilité et des aspects physiques a commencé par une série d'expériences sur l'écoulement dans des cavités tridimensionnelles de différentes longueurs. Ces expériences ont montré que l'écoulement dans une cavité présente des caractéristiques tridimensionnelles locales et globales.

Les premières grandes expériences ont été réalisées par Koseff et Street [42-44] pour des cavités de rapport longueur/largeur ( $\Lambda$ ) de 1/1 jusqu'à 3/1 et dans les nombres de Reynolds dans la gamme  $1000 \leq Re \leq 10000$ . La figure 2.1a illustre une vue schématique du dispositif expérimental utilisé. Le mouvement est communiqué au fluide par une paroi en cuivre. Ces études présentent des informations précieuses sur la physique de l'écoulement à l'intérieur de la cavité entraînée.



**Figure 2.1.** Description du dispositif expérimental : (a) Schéma de l'installation de la cavité entraînée, (b) vue schématique du domaine physique et des vortex secondaires dans le plan de symétrie. [42]

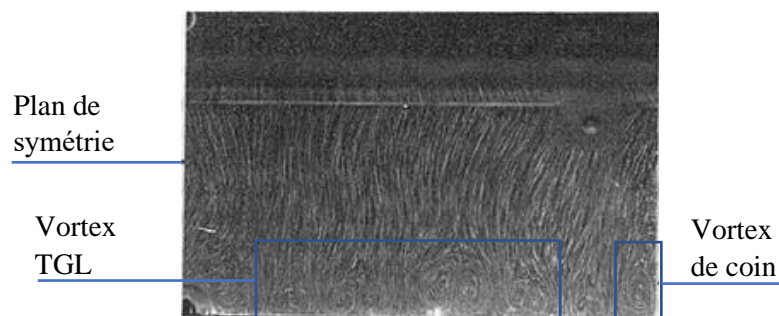
Ils ont illustré la structure des cellules de circulation dans la cavité et les effets des parois d'extrémité par des synthèses d'observations qualitatives et quantitatives. Fondamentalement, les résultats leur permirent d'extraire les remarques suivantes :

- Il y avait apparemment des vortex secondaires présents dans les coins inférieurs et le coin supérieur gauche de la cavité, pour l'ensemble des nombres de Reynolds (Fig 2.1b).



- Il existe des vortex de coin aux parois d'extrémité, dans la région du vortex secondaire inférieur droite, qui ont une influence majeure sur l'écoulement et la taille de cette dernière (Fig 2.2).
- L'écoulement est tridimensionnel et présente des régions où des instabilités de type Tylor et des vortex de type Tylor-Goertler (TGL) sont présents à partir de  $Re=3000$  (Fig 2.2).
- L'écoulement devient turbulent au nombre de Reynolds entre 6000 et 8000.
- Au plan de symétrie, le rapport hauteur/largeur ( $\Lambda$ ) de la cavité a un effet significatif sur le vortex secondaire inférieur droite.
- Certains résultats clés de simulations numériques en deux dimensions [10, 11] concordent bien avec les résultats de ces expériences.
- Les mouvements des fluides transversaux (dans la direction perpendiculaire au mouvement de la paroi) sont importants.

[95]



**Figure 2.2.** Projection des lignes de courant expérimentales avec la présence des vortex de coin et les vortex TGL pour  $Re=6000$ . [44]

Prasad et Koseff [45] ont mené une série d'expériences dans des cavités entraînées de section carrée pour les nombres de Reynolds entre 3200 et 10000 et les rapports longueur/largeur ( $\Lambda$ ) entre 0.25/1 et 1/1. Ils ont mis l'accent sur l'influence de  $Re$  et du rapport longueur/largeur ( $\Lambda$ ) sur la distribution des vortex TGL et de vitesse à l'intérieur de la cavité. Ils ont trouvé que l'effet le plus évident d'un rapport ( $\Lambda$ ) réduit est l'augmentation de la traînée visqueuse des parois d'extrémité, ce qui réduit la vitesse d'écoulement sur la plus grande partie de la cavité. Cependant, pour une valeur élevée de  $Re$ , la vitesse maximale  $U$  près de la limite inférieure de la cavité augmente à mesure que le rapport ( $\Lambda$ ) diminue. Cela suggère que la plupart des fluctuations de vitesse à faible  $Re$  sont causées par les vortex TGL. À haut  $Re$ , les vortex TGL ne jouent plus un rôle dominant, et au lieu de cela, des fluctuations importantes, rapides et de plus en plus aléatoires ont été observées.

Freitas et al. [46] ont effectué un examen expérimental et numérique de l'écoulement dans une cavité entraînée de section carrée pour un nombre de Reynolds égale à 3200, et un rapport longueur/largeur ( $\Lambda$ ) de 3/1. Les résultats pour un écoulement de cavité à un nombre de Reynolds de 3200 ont reproduit des tourbillons de type Taylor-Gortler observés expérimentalement et d'autres effets tridimensionnels jusqu'ici non simulés. Les résultats préliminaires indiquent que les vortex TGL modifient fortement la structure de l'écoulement. De plus, la taille et l'emplacement des vortex TGL dépendent du temps.

En conséquence, à partir de l'évaluation numérique et expérimentale dans les limites de  $Re \leq 10000$ , un signe direct a été fourni que les solutions numériques révélées d'un écoulement

bidimensionnel dans une cavité entraînée carrée peuvent éventuellement émuler la physique, en tenant compte des écarts résultant des effets physiques tridimensionnels susmentionnés.

## **2.2 Revue bibliographique sur l'écoulement de la cavité doublement entraînée :**

### **2.2.1 Introduction :**

Inspiré par l'évolution de l'écoulement de couches de cisaillement, l'écoulement se produit dans des conteneurs rectangulaires et le processus d'instabilité, l'écoulement traditionnel de la cavité entraînée a été généralisé au problème de la cavité doublement entraînée depuis près de trois décennies. Les aspects physiques et scientifiques de la dynamique des fluides dans la cavité doublement entraînée sont mentionnés ci-dessous au moyen de recherches numériques et expérimentales.

### **2.2.2 Études numériques :**

Le mouvement du fluide dans une cavité doublement entraînée est dû aux deux parois opposées qui se déplacent indépendamment avec des vitesses constantes dans la même direction (parallèle mouvement) ou dans des direction opposée (antiparallèle mouvement). Les études numériques suivantes traitent différents aspects de l'écoulement stationnaire bidimensionnel tels que les régions de non-unicité, l'évolution de la structure des vortex, la stabilité des solutions et les bifurcations d'écoulement. Certains effets tridimensionnels ont également été abordés.

Leong et Ottino [47] et Jana et al. [48] ont présenté l'une des premières recherches majeures sur l'écoulement de la cavité doublement entraînée pour des petits nombres de Reynolds qui dépendent du temps, leur but était d'étudier le processus de mélange chaotique bidimensionnel. En plus, Kelmanson et Lonsdale [49] ont également introduit les premières études de la cavité doublement entraînée afin d'étudier l'évolution de la structure des vortex dans ce système en fonction du rapport d'aspect et du mouvement des deux parois opposées qui se déplacent avec différents rapports de vitesse. En utilisant une technique d'équation intégrale avec une méthode d'annihilation de singularité, la complexité du mécanisme ainsi que différents schémas d'écoulement topologiques ont été illustrés pour différents rapports d'aspect avec des mouvements parallèles et antiparallèles des deux parois opposées. Récemment, Kuhlmann et Romano [2] ont fourni un aperçu de la dynamique des fluides dans les cavités entraînées en passant revue de certaines des recherches fondamentales sur l'écoulement incompressible à l'intérieur des cavités doublement entraînées.

Le système de classification a été fondamentalement composé avec des études sur l'écoulement de fluide à l'intérieur des cavités doublement entraînées de section carrée et rectangulaire. Cependant, avec un degré moindre d'intérêt, certaines des recherches récentes basées à la fois sur la masse et le transfert de chaleur ont également été abordées.

#### **2.2.2.1 Écoulement de fluide dans une cavité doublement entraînée :**

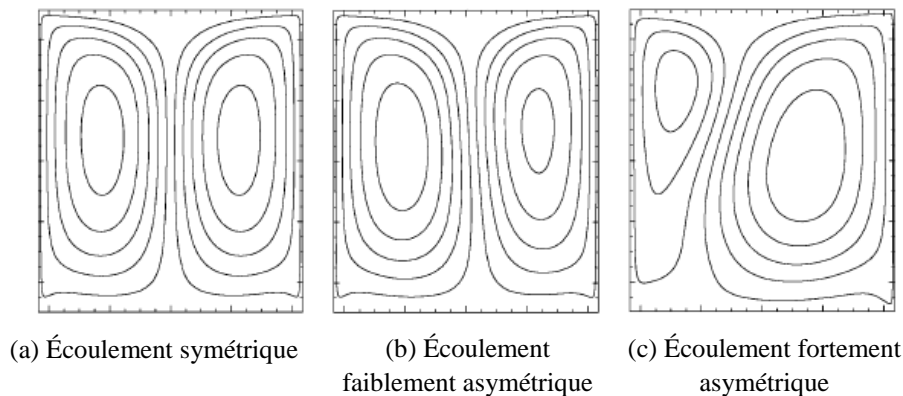
Les recherches numériques sur cet écoulement de fluide peuvent être mieux traitées sous trois rubriques :

- (a)- Dans la première catégorie, les études montrent la possibilité d'obtenir multiples solutions stationnaires stable et instable pour le même ensemble des paramètres ( $Re, \Gamma$ ).
- (b)- Dans la deuxième catégorie d'études, l'accent est mis sur les instabilités de l'écoulement.
- (c)- Dans la troisième catégorie, le problème a été étudié en termes de simplicité et une solution unique de l'écoulement stationnaire est étudié dans les paramètres ( $Re, \Gamma$ ). La transition vers un écoulement chaotique a également été abordée.

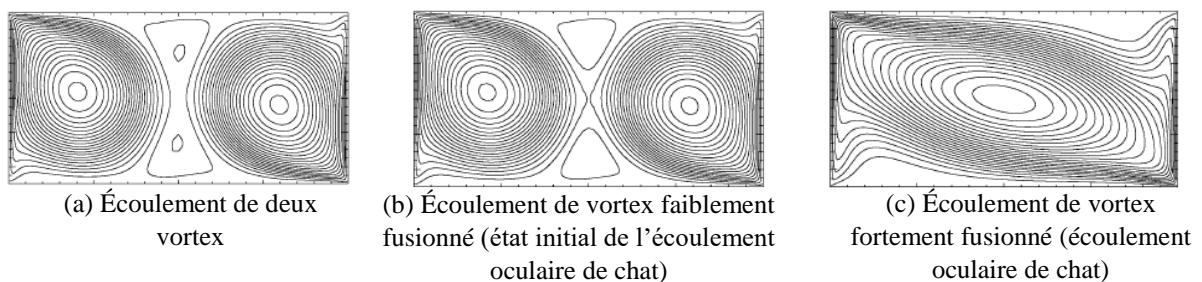
**(a) La multiplicité des solutions stationnaires :**

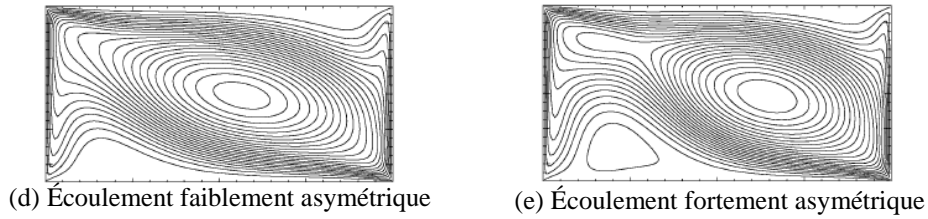
Concernant le premier groupe d'études, Altensoeder et al. [50] ont étudié numériquement l'écoulement bidimensionnel de fluide dans des cavités doublement entraînée avec des mouvements parallèle et antiparallèle des deux parois opposées. Ils ont utilisé la méthode des volumes finis (FVM) combinée avec une technique de continuation simple. Ils ont pu identifier les structures d'écoulements, les digrammes de bifurcation et les régions de non-unicité (l'existence de plusieurs solutions pour les mêmes conditions au limites) de l'écoulement stationnaire pour une gamme définie des rapports d'aspect et des nombres de Reynolds ( $Re_{1,2}, \Gamma$ ). Pour un mouvement parallèle des deux parois et dans les paramètres ( $Re_{1,2} \leq 2000, \Gamma \in [\approx 0.55, \approx 1.1]$ ), jusqu'à cinq solutions ont été prédits (Fig 2.3), une entre eux présente une symétrie dans un miroir par rapport à l'axe médiane verticale (Fig 2.3a).

Pour un mouvement antiparallèle des parois et dans les paramètres ( $Re_{1,2} \leq 700, \Gamma \in [\approx 2, \approx 3.5]$ ), jusqu'à sept solutions ont été prédits, trois sont symétrique par rapport au centre de la cavité et quatre sont asymétrique (Fig 2.4). Il convient de noter que les solutions asymétriques (2.3b, 2.3c, 2.4d et 2.4e) ont leur contrepartie qui ne sont pas montrées dans les figures. Les régions d'existence de multiples solutions ont été également montrées pour un entrainement parallèle (Fig 2.5a) et un entrainement antiparallèle (Fig 2.5b).

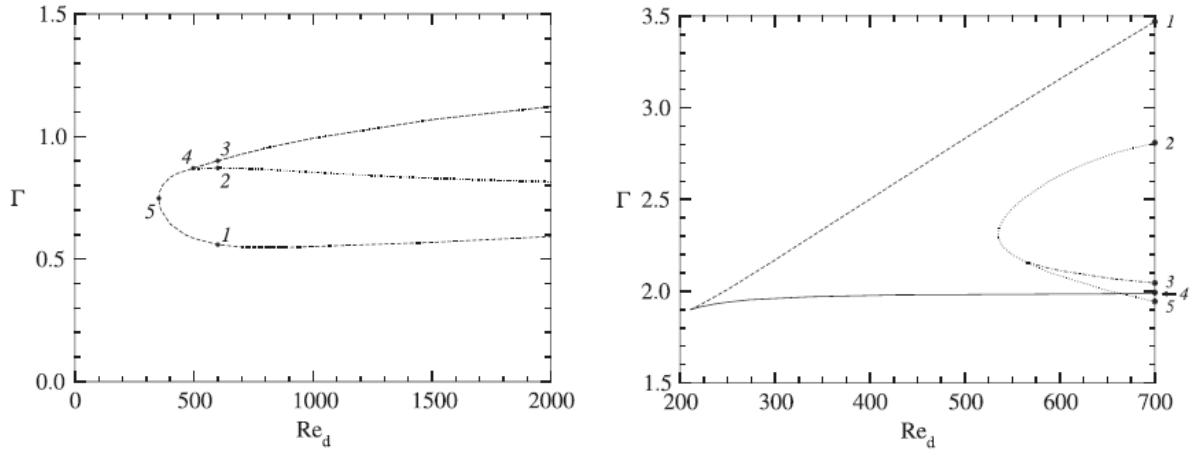


**Figure 2.3.** Contours des lignes de courant pour les mouvements de paroi parallèles avec  $Re_{1,2}=600$  et  $\Gamma=0.875$ . [50]





**Figure 2.4.** Contours des lignes de courant pour les mouvements de paroi antiparallèles pour  $Re_{1,2}=700$  et  $\Gamma=2$ . [50]



(a) L'écoulement symétrique existe dans toute la gamme ( $Re_{1,2}, \Gamma$ ). L'écoulement fortement asymétrique existe dans la zone délimitée par la courbe en pointillés. L'écoulement faiblement asymétrique existe entre la ligne pointillée et la ligne discontinuée supérieure. [50]

(b) L'écoulement de deux vortex existe entre la ligne discontinuée et la ligne complète. L'écoulement fortement asymétrique existe à l'intérieur de la ligne pointillée. L'écoulement faiblement asymétrique existe entre la ligne discontinuée pointillée et la ligne pointillée inférieure. La ligne complète exprime l'existence maximal de l'écoulement de deux vortex. La ligne discontinuée exprime l'existence minimal de l'écoulement oculaire de chat. [50]

**Figure 2.5.** Régions d'existence de différentes solutions dans le plan ( $Re_{1,2}, \Gamma$ ) : (a) mouvement parallèle des parois, (b) mouvement antiparallèle des parois. [50]

Dans cette même perspective, Luo et Yang [51] ont investigué numériquement la bifurcation de l'écoulement et le transfert de chaleur dans une cavité antiparallèlement doublement entraînée d'un rapport d'aspect  $\Gamma=1.96$ . La méthode des différences finies (FDM) a été utilisée pour la simulation tandis que l'analyse de stabilité linéaire a été adoptée pour décrire stabilité des différentes solutions. Pour un écoulement de fluide inspecté à des nombres de Reynolds à proximité de 2000, indépendamment de la contrepartie des deux solutions asymétriques, les résultats indiquent qu'il existe cinq types d'écoulement distincts trois d'entre eux sont stables. L'écoulement se change d'un type à l'autre lorsque le calcul atteint un nombre critique de Reynolds.

Comme le montre la figure 2.6, le processus de transition passe par les étapes suivantes :

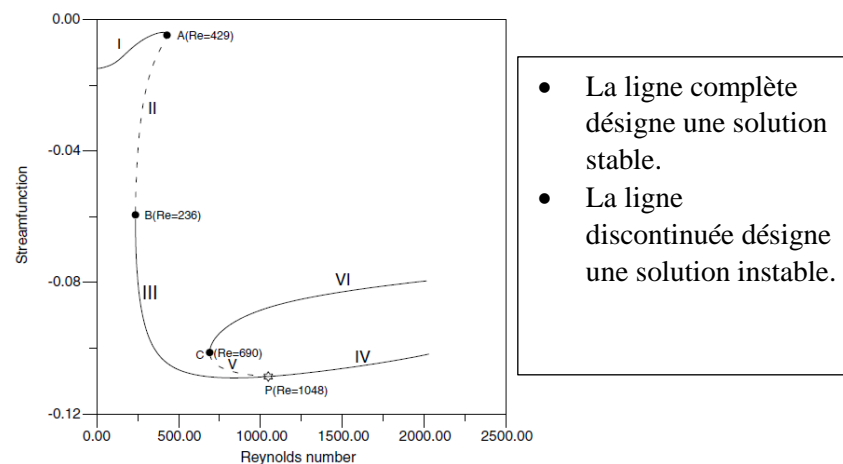
- Un écoulement de deux vortex symétrique et stable obtenu dans la gamme de  $Re_{1,2} \in [0, 429]$  (Fig 2.7a).
- Un écoulement oculaire de chat symétrique et instable obtenu on diminue le nombre de Reynolds dans la gamme  $Re_{1,2} \in [429, 236]$  (Fig 2.7b).

- Un écoulement oculaire de chat stable et symétrique est obtenu dans la gamme  $Re_{1,2} \in [236, 1048]$  (Fig 2.7c).

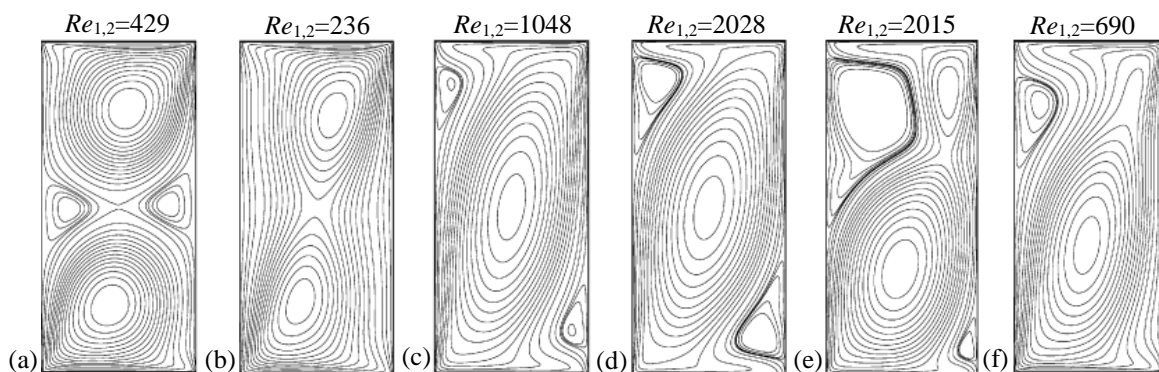
À partir du nombre critique de Reynolds (bifurcation de fourche pour  $Re_{1,2}=1048$ ), trois possibilités d'écoulement peuvent être atteinte :

- Un écoulement oculaire de chat plus développé, stable et symétrique obtenu dans la gamme  $Re_{1,2} \in [1048, 2000]$  (Fig 2.7d).
- Un écoulement fortement asymétrique stable obtenu dans la gamme  $Re_{1,2} \in [690, 2000]$  (Fig 2.7e).
- Un écoulement faiblement asymétrique instable a été également obtenu dans la gamme  $Re_{1,2} \in [1048, 690]$  (Fig 2.7f).

Les écoulements instables peuvent être considérés comme des phases transitoires aux écoulements stables.



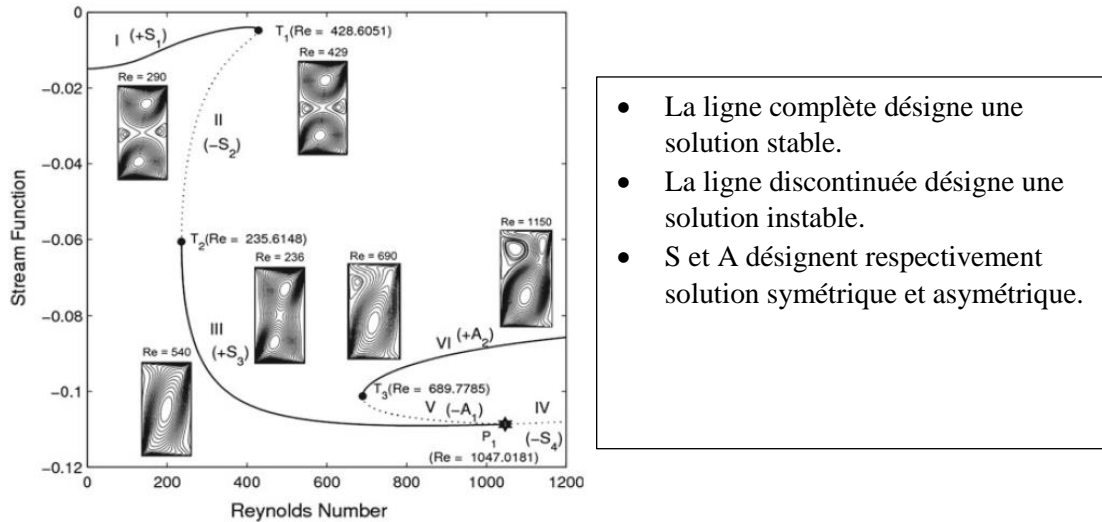
**Figure 2.6.** Bifurcation de l'écoulement, valeur de la fonction de courant au centre de la cavité en fonction du nombre de Reynolds pour  $\Gamma=1.96$ . [51]



**Figure 2.7.** Contours des lignes de courant de différent type d'écoulements : (a) écoulement stable de deux vortex, (b) écoulement oculaire de chat instable, (c) écoulement oculaire de chat stable, (d) écoulement oculaire de chat stable et plus développé, (e) écoulement stable fortement asymétrique, (f) écoulement instable faiblement asymétrique. [51]

Chen et al. [52] ont étudié numériquement la stabilité de multiples solutions stationnaires dans des cavités antiparallèlement doublement entraînées avec les intervalles des nombres de

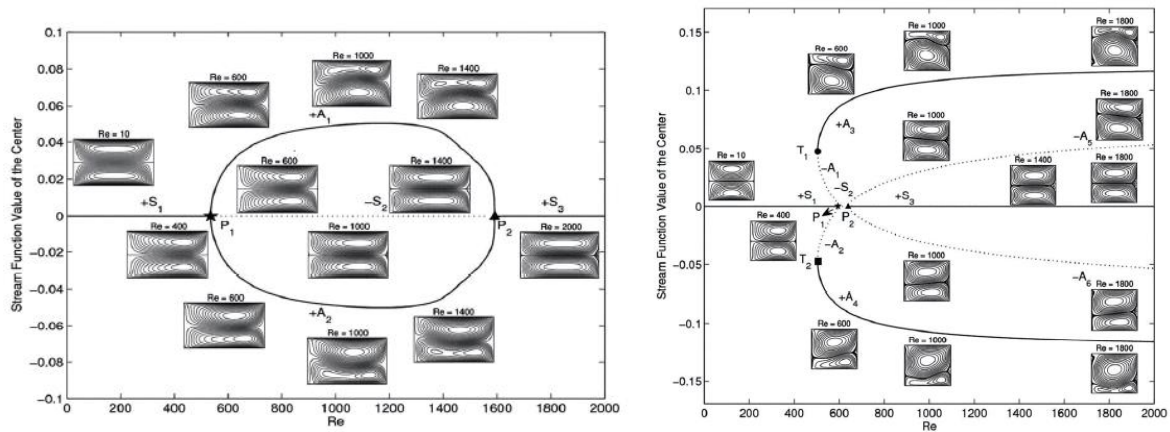
Reynolds et de rapport d'aspect dans la gamme ( $1 \leq Re_{1,2} \leq 1200$  ;  $1 \leq \Gamma \leq 2.5$ ). La méthode de continuation de Keller accompagné d'une analyse de stabilité linéaire ont été adopté pour décrire les diagrammes de bifurcation de différentes valeurs des rapports d'aspect. Deux écoulements symétriques stables (écoulement de deux vortex et l'écoulement oculaire de chat) et un écoulement asymétrique stable (l'écoulement fortement asymétrique) ont été identifiés (Fig 2.8). Contrairement aux résultats obtenus par Luo et Yang [51], après le point de bifurcation de fourche à  $Re_{1,2}=1047$  pour  $\Gamma=1.96$ , l'écoulement oculaire de chat symétrique était instable. Leurs résultats permettent de montrer un nouvel écoulement stable et asymétrique obtenu avec un rapport d'aspect élevé a des faibles nombres de Reynolds.



**Figure 2.8.** Bifurcation d'écoulement, valeur de la fonction de courant au centre de la cavité en fonction du nombre de Reynolds pour  $\Gamma=1.96$ . [52]

Chen et al. [53] ont étudié numériquement la stabilité de multiples solutions stationnaires dans des cavités parallèlement doublement entraînées avec les intervalles des nombres de Reynolds et de rapport d'aspect dans la gamme ( $1 \leq Re_{1,2} \leq 2000$  ;  $0.5 \leq \Gamma \leq 1$ ). La méthode de continuation de Keller accompagné d'une analyse de stabilité linéaire ont été adopté. Un écoulement de deux vortex stable et symétrique et un écoulement fortement asymétrique et stable ont été identifiés par des diagrammes de bifurcations.

Les résultats montrent que l'écoulement fortement asymétrique et stable pourrait être obtenu à un rapport d'aspect allant de 0.54 à 1 même à des faibles nombres de Reynolds (ex : Fig 2.9a). Pour  $\Gamma < 0.54$ , il existe que l'écoulement de deux vortex stable et symétrique. Ils ont également montré que pour  $Re_{1,2}$  égaux ou supérieur à 497 et  $\Gamma \geq 0.871$ , les solutions instables faiblement asymétriques commencent à apparaître (ex : Fig 2.9b). Les solutions asymétriques ont leur contrepartie. Les auteurs ont conclu que les nombres critiques de Reynolds pour le débit de l'écoulement asymétrique augmentent progressivement avec l'augmentation des rapports d'aspect. Trois types de bifurcation d'écoulement ont été illustrés et des structures des écoulements instables symétriques et asymétriques ont également été abordées.

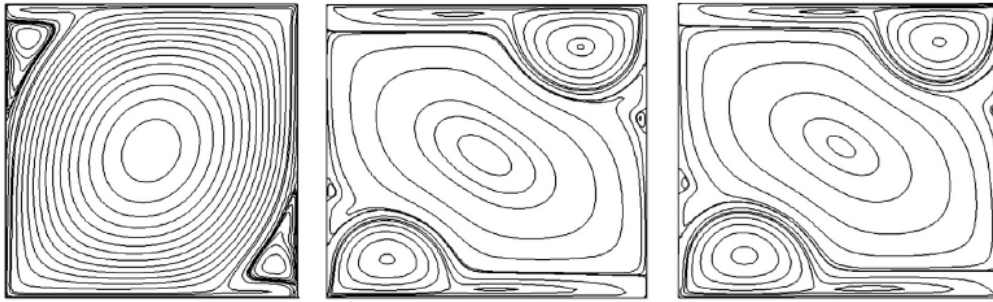


**Figure 2.9.** Bifurcation d'écoulement, valeur de la fonction de courant au centre de la cavité en fonction du nombre de Reynolds, (a)  $\Gamma=0.57$ , (b)  $\Gamma=0.877$ . (La ligne complète désigne une solution stable tandis que la ligne pointillée désigne une solution instable). [53]

Lemée et al. [54] ont étudié numériquement l'écoulement bidimensionnel de fluide dans une cavité carrée parallèlement doublement entraînée. La méthode des différences finies (FDM) basée sur la précision spectrale ont été adopté pour déterminer plusieurs solutions stables dans une large gamme des nombres de Reynolds. L'écoulement symétrique de deux vortex a été calculé pour des valeurs de nombre de Reynolds allant jusqu'à 4000 et était stationnaire. Ils ont montré que les solutions non symétriques stationnaires apparaît à un seuil de  $Re_{1,2}=980$ , il s'agit d'une paire de solutions asymétriques d'image en miroir l'une à l'autre. L'apparition de la non-stationnarité des écoulements asymétriques a été estimée de se produit dans la gamme  $Re_{1,2} \in [10500, 11000]$ . L'asymétrie des solutions augmente significativement quand  $Re_{1,2}$  augmente jusqu'à 14000.

Prasad et al. [55] ont fait une simulation numérique pour investiguer l'écoulement bidimensionnel dans une cavité carrée antiparallèlement et parallèlement doublement entraînée. Un schéma compact d'ordre supérieur a été adopté pour résoudre les équations de mouvement. Pour un mouvement parallèle des deux parois opposées, multiples solutions conventionnelles ont été présentées pour les conditions de rapport d'aspect dans  $\Gamma \in [0.5, 1]$  et des valeurs de Reynolds jusqu'à  $Re_{1,2}=7000$ . Pour un mouvement antiparallèle des deux parois opposées, les solutions conventionnelles uniques parfois appelées écoulement oculaire de chat ont été calculées pour des nombres de Reynolds jusqu'à 8500. Pour la première fois, ils ont établi qu'il est possible d'avoir une autre solution stationnaire pour un mouvement antiparallèle dans une cavité carrée si le nombre de Reynolds dépasser le seuil 3203 (Fig 2.10). Une telle solution s'effondre à l'état conventionnel (écoulement oculaire de chat) lorsque  $Re_{1,2}$  démunie à une valeur inférieure de 3203.





**Figure 2.10.** Contours des lignes de courant pour le mouvement de paroi antiparallèle et  $Re_{1,2}=4000$  : (a) solution conventionnelle, (b, c) une paire de solutions supplémentaires. [55]

Perumal [56] a utilisé la méthode de Boltzmann sur réseau basé sur un seul temps de relaxation pour obtenir plusieurs solutions d'écoulement de fluide bidimensionnel dans des cavités carré et rectangulaire. Les résultats indiquent un bon accord avec les recherches précédentes. Pour un mouvement parallèle des deux parois opposées et  $\Gamma=1$ , jusqu'à trois solutions d'écoulement ont été obtenues pour  $Re_{1,2}=3000$ , une solution symétrique et deux solutions asymétriques d'image en miroir l'un de l'autre. Pour un mouvement parallèle des deux parois et  $\Gamma=0.875$ , jusqu'à cinq solutions d'écoulement ont été identifiées pour  $Re_{1,2}=600$ , une solution symétrique, deux solutions faiblement asymétriques d'image en miroir, et également deux solutions fortement asymétriques d'image en miroir. D'autre part, pour un mouvement antiparallèle des deux parois et  $\Gamma=2$ , jusqu'à sept solutions d'écoulement ont été identifiées pour  $Re_{1,2}=700$ , une solution de deux vortex, une solution de vortex faiblement fusionné, une solution de vortex fortement fusionné, un pair de solutions faiblement asymétrique d'image en miroir, et également un pair de solutions fortement asymétrique d'image en miroir.

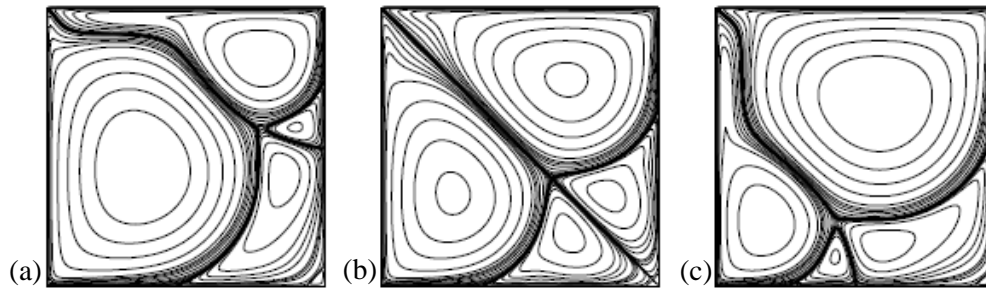
Wahba [57] a étudié numériquement l'écoulement bidimensionnel de fluide dans des cavités carrées doublement entraînée et quadruplement entraînée avec la méthode de différence finie (FDM) de deuxième ordre. Les nombres critiques de Reynolds avec lesquels la multiplicité de solutions commence à exister sont montrés. Une méthode de continuation simple a été employée pour identifier les stabilités des différentes solutions.

Pour une cavité doublement entraînée, avec une paroi supérieure déplace dans la direction droite et une paroi gauche vers le bas, l'écoulement est symétrique et stable jusqu'à un point critique de Reynolds  $Re_{1,2}=1073$ , ou l'écoulement symétrique (Fig 2.11b) devient instable et deux écoulements stables et asymétriques (Fig 2.11a et c) peut être obtenu jusqu'à  $Re_{1,2}=4000$ .

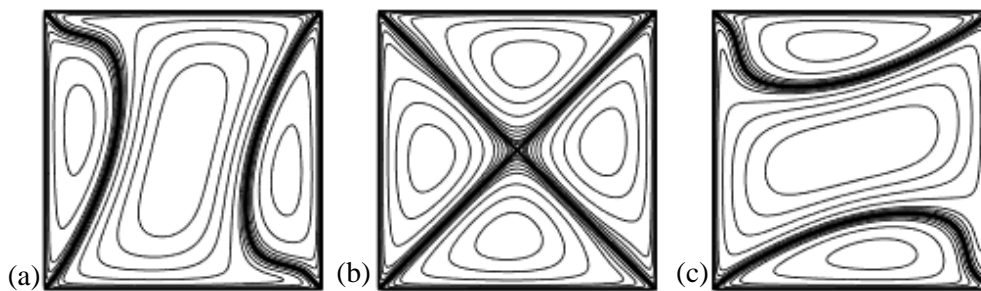
En ce qui concerne la cavité quadruplement entraînée, les deux parois horizontales et verticales opposées déplacent dans un mouvement antiparallèle. Ici, l'écoulement de fluide est symétrique et stable jusqu'à un point critique de Reynolds  $Re_{1,2,3,4}=129$ , ou l'écoulement symétrique (Fig 2.12b) devient instable et deux écoulements supplémentaires stables et asymétriques (Fig 2.12a et c) peuvent être obtenu jusqu'à  $Re_{1,2}=300$ .

À partir des nombres critiques de Reynolds, trois solutions d'écoulement sont possibles dans les deux cas d'entraînement. Deux sont asymétriques et stables et un est symétrique et instable.





**Figure 2.11.** Multiples Solutions d'écoulement pour le problème de la cavité doublement entraînée des parois non opposées ( $Re_{1,2}=2000$ ). [57]



**Figure 2.12.** Multiples Solutions d'écoulement pour le problème de la cavité quadruplement entraînée des parois non opposées ( $Re_{1,2,3,4}=300$ ). [57]

Guo et al. [58] ont étudié numériquement l'écoulement bidimensionnel de fluide dans une cavité carrée doublement entraînée par deux parois adjacentes similaire au configuration adressé par Wahba [57]. La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) basé sur un schéma de multiple temps de relaxation (MRT) a été adoptée pour décrire le comportement de l'écoulement symétrique et asymétrique.

L'écoulement symétrique a été obtenu pour un maximum nombre de Reynolds de 1000. Multiples solutions asymétriques ont été montrés à  $Re_{1,2}=2000$  après qu'il atteint un premier nombre de Reynolds critique ( $Re_{1,2}=1071$ ). Des solutions périodiques avec des structures d'écoulement asymétrique oscillant ont été observées après avoir atteint le deuxième nombre critique de Reynolds prévu à  $Re_{1,2}=3105$ .

### (b) L'étude de l'instabilité de la solution stationnaire :

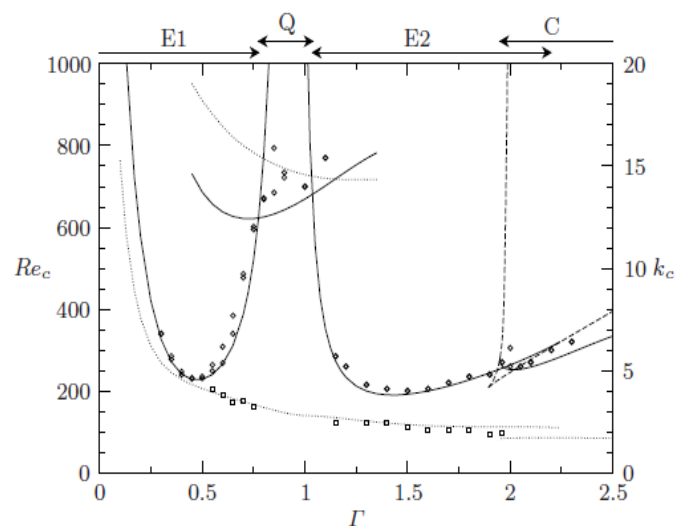
L'intérêt des cavités doublement entraînées ne vient pas seulement de la non-unicité de l'écoulement bidimensionnel. Le système fournit également un aperçu des instabilités d'écoulement dues à l'interaction de deux vortex confinés dans un domaine rectangulaire, cela a été recherché dans la deuxième catégorie d'études. Le cas le plus intéressant est l'instabilité elliptique.

L'instabilité elliptique peut survenir dans la cavité doublement entraînée lorsque les parois se déplacent dans des directions opposées, générant deux vortex co-rotatifs. Dans une certaine plage de rapports d'aspect, les vortex co-rotatifs fusionnent complètement en un seul vortex avec des lignes elliptiques au centre de la cavité (Fig 2.4c). Cependant, ils peuvent fusionner partiellement, créant un point de stagnation hyperbolique libre au centre de la cavité, entouré

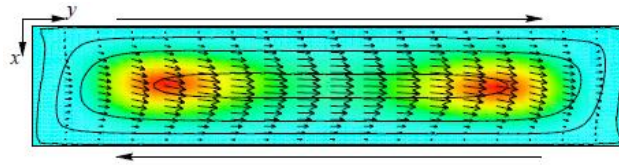
de lignes de courant fermées à l'extérieur de la séparatrice (Fig 2.4a). Les deux types d'écoulement sont caractérisés par un champ de déformation bipolaire avec un taux de déformation plus petite (point elliptique) ou plus grande (point hyperbolique) que le taux de rotation de l'écoulement au centre de la cavité. L'instabilité elliptique dans les cavités doublement entraînées a été rapportée pour la première fois par Kuhlmann et al. [59], pour  $\Gamma=1,96$ , la déformation au centre de la cavité est si forte qu'un point de stagnation hyperbolique libre apparaît. Pour les conditions aux limites périodiques en direction  $z$  et le mouvement de paroi antiparallèle, l'instabilité survient à un nombre de Reynolds relativement faible  $Re_c=257$ , [59, 60], ce qui est cohérent avec la valeur expérimentale  $Re_c=275$  qui a été obtenue pour un écoulement à 4 cellules dans une cavité  $(\Gamma, \Lambda)=(1,96 ; 6,55)$  [61].

Albensoeder et Kuhlmann [60] ont étudié la stabilité linéaire de l'écoulement bidimensionnel dans des cavités antiparallèlement doublement entraînées en fonction des rapports d'aspect  $\Gamma$ . Toutes les types d'instabilité étudiées étaient stationnaires. Les résultats montrent les plages de rapports d'aspect pour lesquelles le mécanisme d'instabilité elliptique (E1, E2), le mécanisme d'instabilité centrifuge (C) et le mécanisme d'instabilité quadripolaire (Q) ont lieu dans la cavité (Fig 2.13). Dans la figure, les lignes continues désignent les nombres de Reynolds critiques ( $Re_c$ ), les nombres d'ondes critiques  $k_c$  sont représentés en lignes pointillées, la plage d'existence de plusieurs solutions est indiquée par des lignes discontinues et les résultats expérimentaux de Blohm et al. [62] sont représentés sous forme de symboles ( $Re_c$  ( $\diamond$ ),  $k_c$  ( $\square$ )). Dans le cas extrême des cavités peu profondes avec  $\Gamma \ll 1$ , l'écoulement loin des parois mobiles se rapproche du plan d'écoulement de Couette avec un flux massique nul à travers tout le plan  $y=cst$  (Fig 2.14).

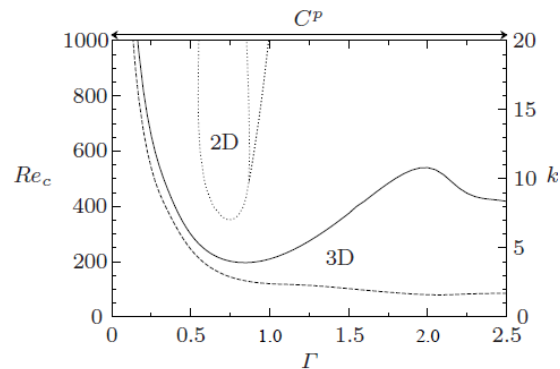
Pour un mouvement de paroi parallèle, la courbe de Reynolds critique (ligne complète) et le nombre d'onde critique (ligne discontinue) ont été illustrés dans la figure 2.15. La courbe critique est continue pour tous les rapports d'aspect et le mode critique a été noté Cp (instabilité centrifuge d'un mouvement de paroi parallèle) [63]. Dans le cas des cavités peu profondes ( $\Gamma \rightarrow 0$ ), l'écoulement plan de Poiseuille d'un flux massique nul est abordé dans le volume (Fig 2.16).



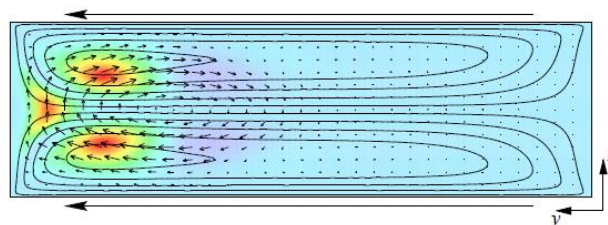
**Figure 2.13.** Processus d'instabilité pour le mouvement des parois antiparallèle dans  $(Re_c, k_c, \Gamma)$ . [60]



**Figure 2.14.** Les lignes de courant (lignes complètes), mode critique (flèches) et le taux de production d'énergie locale (couleur) pour antiparallèle mouvement des parois et  $\Gamma=0.2$  ( $Re_c=577.8$ ,  $k_c=7.578$ ). [60]



**Figure 2.15.** Processus d'instabilité pour le mouvement des parois parallèle dans ( $Re_c$ ,  $k_c$ ,  $\Gamma$ ). [63]



**Figure 2.16.** Les lignes de courant (lignes complètes), mode critique (flèches) et le taux de production d'énergie locale (couleur) pour parallèle mouvement des parois et  $\Gamma=0.3$  ( $Re_c=547.6\pm 3.7$ ,  $k_c=9.018\pm 0.005$ ). [63]

Certains résultats expérimentaux sur la stabilité de l'écoulement pour des rapports d'aspect de grande envergure  $\Lambda$  sont disponibles. Ceux-ci sont dus à Kuhlmann et al. [59], Blohm et Kuhlmann [61], Siegmann Hegerfeld et al. [64, 65]. La plupart des données expérimentales concordent avec l'analyse de stabilité numérique qui est basée sur un code de volume fini avec une résolution de  $141\times 141$  points de grille dans le plan ( $x$ ,  $y$ ) [66, 67].

### (c) L'écoulement bidimensionnel stationnaire et la transition vers un écoulement instationnaire :

Le troisième groupe d'études considère des solutions uniques de l'écoulement stationnaire dans une cavité doublement entraînée.

L'écoulement de fluide dans des cavités entraînée carré fait l'objet de plusieurs études. Karmakar et Pandit. [68] ont étudié numériquement l'écoulement de fluide dans une cavité carrée doublement entraînée en utilisant la méthode des différences finies (FDM) basée sur un schéma compact dépend du temps. Différentes structures de vortex ont été révélées à différentes stations temporelles jusqu'à l'état stationnaire pour  $Re_{1,2}=1000$ .

Pour un mouvement parallèle des deux parois opposées, deux vortex primaires symétriques dominent les moitiés supérieur et inférieur de la cavité. Leurs centres se trouvent près des coins supérieur droit et inférieur droit. Au fil du temps, les emplacements des vortex primaires changent vers le centre des moitiés supérieur et inférieur de la cavité. Une paire de vortex secondaires contrarotatifs également apparue près du centre de la paroi droite placée symétriquement par rapport à la ligne médiane horizontale.

Pour un mouvement antiparallèle des deux parois opposées, deux vortex primaires sont formés à côté des deux parois mobiles ressemblent l'écoulement de deux vortex. Au fil de temps, les deux vortex se fusionnent et forment un seul vortex primaire placé au centre de la cavité (écoulement oculaire de chat). Deux vortex secondaires co-rotatifs ont également formé dans les coins supérieur gauche et inférieur droite de la cavité.

Sidik et Razali [69] ont employé la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) pour explorer l'écoulement de fluide dans une cavité carré parallèlement doublement entraînée avec des rapports de vitesse ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) et des nombres de Reynolds  $100 \leq Re_{1,2} \leq 1000$ . Les résultats montrent que les structures de l'écoulement à l'intérieur de la cavité se développent asymétriquement de manière continue suite au changement successif des rapports de vitesse et des nombres de Reynolds. Pour un rapport de vitesse nulle, l'écoulement se compose d'un vortex primaire occupe la majeure partie de la cavité avec un vortex secondaire dans le coin inférieur droite. Avec une augmentation du rapport de vitesse, deux vortex secondaires apparaissent dans le côté inférieur de la cavité. Ces dernières se combinent et forment un vortex primaire qui devient symétrique au vortex primaire supérieur pour un rapport de vitesse  $\lambda=1$ . Les centres des vortex primaires se déplacent vers le centre des moitiés supérieure et inférieure de la cavité. Un pair de vortex secondaires supplémentaires est également formé au milieu du paroi droite de la cavité pour un rapport de vitesse unitaire  $\lambda=1$  et  $Re_{1,2}=1000$ .

Perumal et Dass [70] ont simulé l'écoulement de fluide dans une cavité carrée doublement entraînée par un mouvement parallèle et antiparallèle des deux parois opposées. La méthode de Boltzmann sur un réseau (LBM) avec un schéma  $D_2Q_9$  ont été adopté pour le calcul. Leurs résultats déterminent les lignes de courant, l'emplacement des vortex et les profils de vitesse jusqu'à un nombre de Reynolds  $Re_{1,2}=2000$ .

En général, pour un mouvement antiparallèle, l'écoulement consiste d'un vortex primaire occupant la majeure partie de la cavité. Lorsque  $Re_{1,2} \geq 1000$ , il s'agit de deux vortex secondaires apparaissent près des coins supérieur gauche et inférieur droite de la cavité.

Pour un entraînement parallèle et  $Re_{1,2} \geq 400$ , en plus des deux vortex primaires occupant les moitiés supérieure et inférieure de la cavité, une paire de vortex secondaires contrarotatifs de taille égale apparaissent près du milieu de la paroi verticale droite. Les tailles des vortex secondaires semblent augmenter avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Les résultats de LBM jugés en excellent accord en comparaison avec la méthode des différences finies (FDM).

Dans le même contexte avec Perumal et Dass [70], Perumal et Dass [71, 72] ont investigué numériquement l'écoulement de fluide dans une cavité carrée doublement entraînée avec des mouvements parallèle et antiparallèle des deux parois opposées. La méthode des différences finies et la méthode de Boltzmann sur réseau ont été respectivement adoptées pour les calculs. Leurs résultats ont été présentés en termes des lignes du courant et de vorticité, d'emplacement des vortex primaires et secondaires ainsi que les profils de vitesse pour un nombre de Reynolds  $Re_{1,2} \leq 2000$ . Une bonne cohérence entre les deux codes numériques a été obtenue.

Munir et al. [73] ont appliqué un schéma compact de troisième ordre pour étudier l'écoulement de fluide stationnaire dans une cavité carrée doublement entraînée pour des nombres de Reynolds  $Re_{1,2} \leq 2000$ . Leurs résultats étaient en bonne cohérence avec ceux de [68, 70-72].

Marković et al. [74] ont effectué une simulation numérique de l'écoulement de fluide dans une cavité décalée doublement entraînée en utilisant le code Ansys Fluent pour des nombres de Reynolds jusqu'à 1000. Fondamentalement, dans un mouvement antiparallèle des parois opposées, leurs résultats montrent des structures d'écoulement stationnaire symétriques et asymétriques le long de variété des nombres de Reynolds. Par contre, pour un mouvement des parois parallèle, les solutions stationnaires obtenues ne montrent que des structures asymétriques d'écoulement dans toute la gamme  $Re_{1,2} \leq 1000$ .

L'écoulement de fluide dans des cavités entraînées rectangulaires a également fait l'objet de plusieurs travaux. Par exemple, Kesana et al. [75] ont étudié numériquement l'écoulement de fluide dans des cavités profondes doublement entraînées. Ils ont utilisé la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) basé sur un modèle  $D_2Q_9$ . Leur étude se concentre sur le développement des vortex à l'intérieur de la cavité pour une gamme des rapports d'aspect ( $1.2 \leq \Gamma \leq 10$ ) à un faible nombre de Reynolds  $Re_{1,2} = 10$ . Les résultats montrent que le nombre des vortex primaires augmente continuellement du 2 pour  $\Gamma = 1.2$  jusqu'à 8 pour  $\Gamma = 10$ . Cela est dû à un processus qui se passe au milieu de la cavité, évidemment, une paire de vortex secondaires latéraux grandir et fusionnent pour former un vortex primaire qui se divise en deux vortex primaires avec l'augmentation du rapport d'aspect. Ce processus est répété est cela conduit une augmentation des nombres des vortex primaires.

Perumal [76] a examiné l'écoulement bidimensionnel de fluide dans des cavités doublement entraînées profondes de différents rapports d'aspect ( $\Gamma = 2, 5$ ) et de nombres de Reynolds ( $100 \leq Re_{1,2} \leq 2000$ ). La méthode des Différences finies (FDM) a été adoptée pour montrer les différentes structures d'écoulement.

Pour un entrainement parallèle avec ( $\Gamma = 2, Re_{1,2} = 100$ ), l'écoulement se compose de deux vortex primaires symétriques par rapport la ligne horizontale médiane. Deux vortex secondaires apparaissent près du milieu de la paroi verticale droite pour  $Re = 700$ . Deux vortex tertiaires ont également été observés près des coins supérieur gauche et inférieur gauche de la cavité pour  $Re_{1,2} = 2000$ . De plus, pour ( $\Gamma = 5, Re_{1,2} = 100$ ), quatre vortex primaires sont générés. Dans une augmentation du nombre de Reynolds à  $Re_{1,2} = 700$ , un pair de vortex secondaire significativement différent des vortex primaires apparus dans la région médiane horizontale de la cavité.

Pour un entrainement antiparallèle avec ( $\Gamma = 2, Re_{1,2} \geq 100$ ), l'écoulement de deux vortex distingue le volume de la cavité. Cet écoulement se compose de deux vortex primaires, au milieu desquels se trouvent deux vortex secondaires apparaissent dus à l'augmentation des nombres de Reynolds jusqu'à 2000. De plus, pour ( $\Gamma = 5$  avec  $Re_{1,2} = 100$ ), quatre vortex primaires se composent dans le volume de la cavité. Dans une augmentation du nombre de

Reynolds, un vortex secondaire se forme au milieu des vortex primaires. Avec une nouvelle augmentation du nombre de Reynolds à  $Re_{1,2}=2000$ , la taille du vortex secondaire augmente pour se diviser en deux vortex séparés.

Arun et al. [77] ont étudié l'écoulement de fluide dans des cavités parallèlement et antiparallèlement doublement entraînées avec la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) basé sur un seul temps de relaxation (SRT). Les résultats numériques ont été présentés pour des nombres de Reynolds ( $100 \leq Re_{1,2} \leq 5000$ ) et de rapports d'aspect ( $\Gamma=1, 2, 4$ ). Les résultats montrent que la forme et la taille des vortex changent avec l'augmentation des rapports d'aspect et des nombres de Reynolds.

Pour un mouvement parallèle des deux parois opposées et ( $\Gamma=1, 2$ ), deux vortex primaires apparaissent dans la majeure partie de la cavité. Deux vortex secondaires et même tertiaires se forment près du centre de la paroi droite et dans les coins supérieurs gauche et inférieur droite à des nombres de Reynolds élevés. Pour  $\Gamma=4$ , quatre vortex primaires se forment tandis qu'aucun vortex secondaire n'a été détecté.

Pour un mouvement antiparallèle des deux parois opposées et  $\Gamma=1$ , un seul vortex principal apparaît dans la majeure partie de la cavité avec deux vortex secondaires dans les coins supérieur gauche et inférieur droit pour. En plus, pour  $\Gamma=2$  et  $Re_{1,2}=100$ , l'écoulement a deux vortex prévaut. Avec l'augmentation des nombres de Reynolds, l'écoulement de deux vortex est converti en écoulement oculaire de chat. Deux vortex secondaires apparaissent dans les coins supérieur gauche et inférieur droite de la cavité avec une augmentation de la taille. Pour  $\Gamma=4$ , seuls les vortex primaires ont été formés. Cependant, des petits vortex secondaires peuvent être vus à proximité de  $Re_{1,2}=5000$ .

Concernant l'écoulement instationnaire et l'écoulement chaotique, An et al. [36] ont étudié les caractéristiques d'écoulement, les nombres de Reynolds transitoires et les symétries des solutions dans une cavité carrée jusqu'à un nombre maximal de Reynolds  $Re_{1,2}=18000$ . Pour un mouvement antiparallèle des deux parois, les résultats révèlent que l'écoulement présente la non-stationnarité (bifurcation de Hopf) dans les nombres de Reynolds allant de 10100 à 10200. Ils ont affirmé que l'écoulement devient chaotique pour  $Re_{1,2} \in [16500-17000]$ . Pour un mouvement parallèle, la bifurcation de Hopf se produit dans les nombres de Reynolds allant de 9500 à 9550. L'écoulement devient chaotique entre les nombres de Reynolds 16500 et 17000.

An et al. [20] ont étudié les écoulements de cavités carrées entraînées dans un régime turbulent  $20000 \leq Re_{1,2} \leq 10^6$  en utilisant la méthode MRT-LBM. Les solutions présentées étaient instables chaotiques et de vortex de petites échelles localisés aléatoirement commencent à apparaître pour les nombres de Reynolds dans les  $2 \cdot 10^5$  et  $3 \cdot 10^5$  pour le mouvement antiparallèle, et autour de  $Re_{1,2}=10^5$  pour le mouvement parallèle.

### 1.2.2.2 L'étude de transfert de masse et de chaleur dans la cavité doublement entraînée :

Une grande partie de la littérature actuelle accorde une attention particulière à l'étude de la convection mixte avec l'inclusion de gradients de température. Nous mentionnons, par exemple, deux analyses numériques probablement les plus célèbres. Oztop et Dagtekin [78] ont étudié l'écoulement et le transfert de chaleur dans une cavité carrée doublement entraînée par deux parois verticales différentiellement chauffées. Deux configurations de mouvement antiparallèle des parois et une configuration de mouvement parallèle ont été considérées dans ce travail. Leurs résultats montrent que l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur sont affectés par

le nombre de Richardson et la direction du mouvement des parois. Pour le cas de la convection forcée dominée ( $Ri < 1$ ), ils ont constaté que l'écoulement de fluide est symétrique et le transfert de chaleur est amélioré pour les deux configurations du mouvement antiparallèle des deux parois. Cependant, l'écoulement de fluide devient asymétrique et le transfert de chaleur est réduit pour le mouvement parallèle des deux parois.

Ismail et al. [79] ont étudié la convection mixte dans une cavité carrée doublement entraînée avec un glissement partiel pour des mouvements parallèle et antiparallèle des deux parois opposées. Leurs résultats dans les conditions du nombre de Richardson  $Ri \in (0.01-100)$  et du paramètre de glissement  $S \in (0-\infty)$  ont montré que l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur sont sensibles à la direction des parois mobiles, au nombre du Richardson et au paramètre de glissement. Ils ont également constaté qu'il existe des valeurs critiques de paramètre de glissement partiel auxquelles la convection est diminuée.

### 2.2.3 Études expérimentales :

Les résultats expérimentaux de l'écoulement de fluide dans les cavités doublement entraînées sont très limités. Cela revient au coût et à la difficulté de faire des mesures. De ce fait, les expériences menées sont limitées par des faibles nombres de Reynolds.

Kuhlmann et al. [59] ont effectué les premières recherches expérimentales pour étudier le comportement de l'écoulement de fluide stationnaire dans une cavité rectangulaire doublement entraînée d'un rapport d'aspect transversal ( $\Gamma = 1.96$ ), avec un mouvement antiparallèle des deux parois opposées (Fig 2.17). Le rapport d'aspect dans la troisième direction ( $\Lambda$ ) égal à 6.55. Divers rapports d'aspect ont été pris en compte pour l'étude numérique ( $1 \leq \Gamma \leq 3.5$ ). Le processus d'instabilité et la multiplicité des solutions ont également été investigués numériquement pour  $Re_{1,2} \leq 800$ .

Expérimentalement, pour  $\Gamma = 1.96$  et des faibles nombres de Reynolds, l'écoulement se compose de deux vortex co-tournants dans le sens des aiguilles d'une montre (Fig 2.18a). Les lignes de courant bidimensionnelles calculées numériquement pour  $Re_{1,2} = 240$  sont montrés sur la figure 2.18b.

Au fur et à mesure que  $Re_{1,2}$  augmentait, une transition de saut se produit dans l'expérience à  $Re_{1,2}^{(0+)} = 232$  vers un état d'écoulement dans lequel les deux vortex distincts s'impliquent l'un avec l'autre et fusionnent en partie (Fig 2.19a). La région intérieure d'écoulement séparé est caractérisée par deux points de stagnation elliptiques et un point hyperbolique et prend la forme des yeux d'un chat. L'écoulement repasse de l'œil de chat à l'état à deux vortex à  $Re_{1,2}^{(0-)} = 224$ . Les lignes de courant calculées numériquement correspondant à l'état de l'œil du chat sont montrées sur la figure 2.19b pour  $Re_{1,2} = 257$ . Les lignes de courant numérique sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

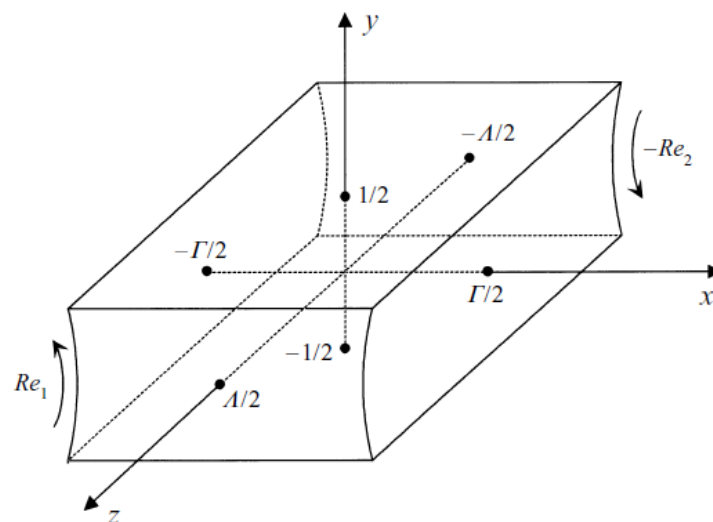
Le comportement expérimental observé est cohérent avec la structure de la variété de solutions de l'écoulement bidimensionnel calculé numériquement. À  $Re_{1,2}^{(0+)} = 427 \pm 5$  (pour une grille de  $100 \times 45$ ) l'itération newton a cessé de converger (le début de l'écoulement oculaire du chat). La courbe de solution recule brusquement à  $Re_{1,2}^{(0+)} = 427$  (nombre de Reynolds d'existence supérieure pour l'état à deux vortex) et tourne à nouveau en avant à  $Re_{1,2}^{(0-)} = 234,3$  (nombre de Reynolds d'existence inférieure pour l'état de l'œil du chat). Le nombre de Reynolds de transition inférieure déterminée numériquement  $Re_{1,2}^{(0-)}$  n'est que de 5% plus grand que le nombre de Reynolds expérimental pour lequel l'écoulement passe de l'œil de chat à un écoulement à deux vortex, tandis que la valeur numérique  $Re_{1,2}^{(0+)}$  est 184% plus grande que le nombre de Reynolds de transition observée expérimentalement. Ces différences sont expliquées

en considérant la forme de la région de non-unicité dans le plan  $(Re, \Gamma)$  obtenu numériquement (Fig 2.21). De légères incertitudes sur la valeur  $\Gamma$  expérimentale entraînent une grosse erreur pour  $Re_{1,2}^{(0+)}$ . En fait, un bien meilleur accord entre les valeurs expérimentales et numériques pour  $Re_{1,2}^{(0+)}$  et  $Re_{1,2}^{(0-)}$  aurait été obtenu si le rapport d'aspect avait été défini comme  $\Gamma=1.91$ . Même si la structure interne de l'œil de chat disparaît continuellement lors d'une nouvelle augmentation de  $Re$ , laissant la place à un seul vortex (Fig 2.20), la notion de l'écoulement d'œil de chat et de l'écoulement à deux vortex est conservée pour discerner les deux types d'écoulement de base.

L'accord entre les structures numériques bidimensionnelles et les structures d'écoulement expérimentales quasi bidimensionnelles indique que les effets combinés de la courbure des parois latérales mobiles, des effets des parois d'extrémité et d'autres imperfections ont une petite influence sur la structure d'écoulement lui-même.

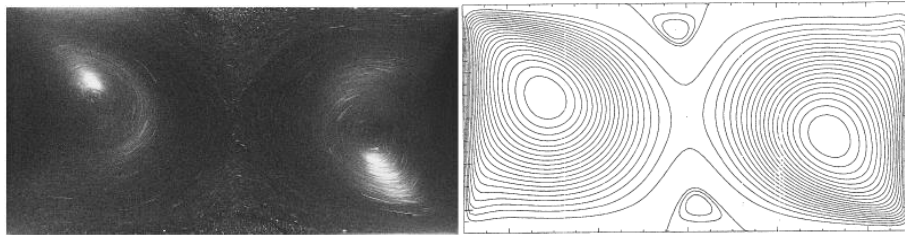
En plus, avec une augmentation du nombre de Reynolds expérimentale  $Re_{1,2} \geq 280$ , l'écoulement oculaire du chat devient instable à un mode tridimensionnel qui subdivise d'un vortex étiré de base a un certain nombre de cellules convectives rectangulaires, un tel exemple est donné à la figure 2.22 en termes de quatre cellules convectives.

Basé sur les mêmes paramètres de Kuhlmann et al. [59], Kuhlmann et al. [80] ont étudié expérimentalement et numériquement le type de l'instabilité de l'écoulement pour  $Re_{1,2} \leq 800$ . Leur étude se concentre sur l'instabilité de l'écoulement oculaire de chat et la cause de transition. Ils ont constaté que la transition d'un écoulement de deux vortex vers un écoulement oculaire de chat se produit lorsque le taux de déformation est dominé dans la cavité par rapport au taux de rotation et que le type d'instabilité est similaire à ceux de l'instabilité du point de stagnation elliptique. Un mécanisme d'instabilité elliptique a été bien confirmé par une méthode d'analyse d'instabilité linéaire, cela est clairement illustré par la ligne pointillée dans la figure 2.21 qui décrit la limite de stabilité linéaire  $Re^{(1)}$  de l'écoulement d'œil de chat.

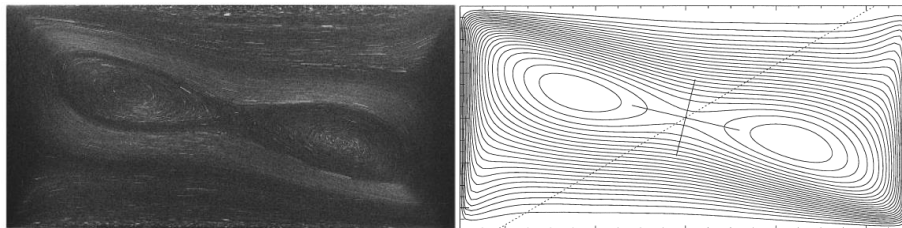


**Figure 2.17.** Esquisse de la cavité et du système de coordonnées. [59]

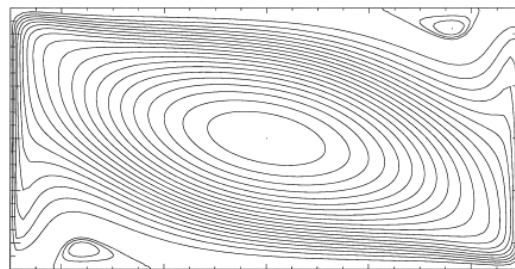




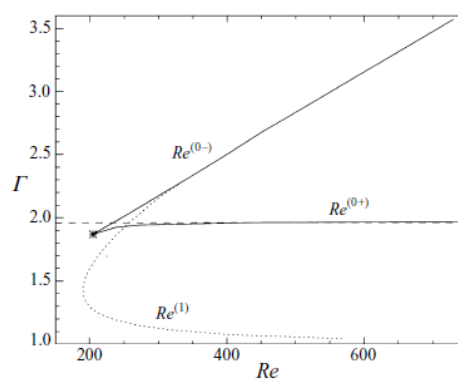
**Figure 2.18.** Écoulement de deux vortex pour  $\Gamma=1.96$  : (a) Projection des lignes de courant expérimental à  $z=0$  pour  $Re_{1,2}=230$ , (b) les lignes de courant numérique pour  $Re_{1,2}=240$ . [59]



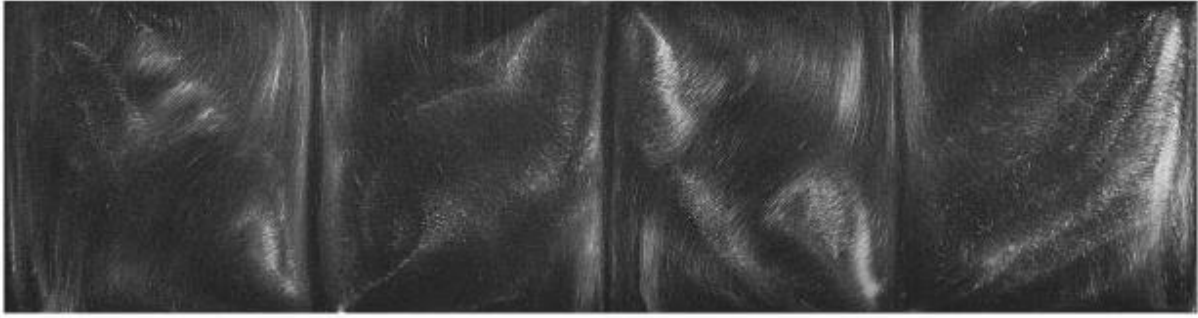
**Figure 2.19.** Écoulement d'œil de chat pour  $\Gamma=1.96$  : (a) Projection des lignes de courant expérimentales à  $z = 0$  pour  $Re_{1,2}=233$ , (b) Solution numérique pour  $Re_{1,2}=257$ . [59]



**Figure 2.20.** Solution œil de chat numérique pour  $Re_{1,2}=800$ . [59]



**Figure 2.21.** Région de non-unicité des deux écoulements bidimensionnels de base (lignes complètes) délimitée par  $Re_{1,2}^{(0+)}$  (nombre de Reynolds d'existence supérieure pour l'état à deux vortex) et  $Re_{1,2}^{(0-)}$  (nombre de Reynolds d'existence inférieure pour l'état d'œil du chat). Le rapport d'aspect expérimental  $\Gamma=1.96$  est représenté par une ligne discontinuée. [59]



**Figure 2.22.** État à quatre cellules entièrement développées à  $Re_{1,2}=750$ . Motif cellulaire typique éclairé dans un plan horizontal à  $y = 0$ . [59]

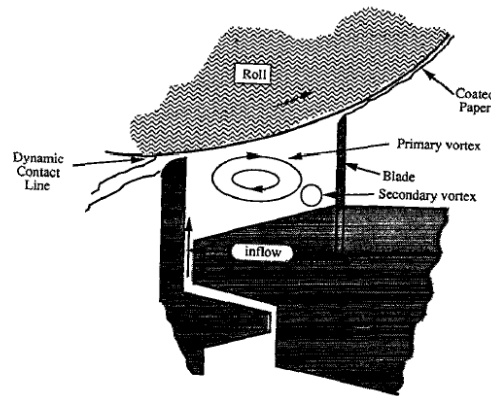
### 2.3 Les applications pertinentes d'ingénierie :

L'écoulement de fluide dans les cavités entraînées se produit fréquemment dans diverses applications industrielles. Ils peuvent être trouvés dans les processus de revêtement au rouleau tels que le revêtement de courte durée, l'écoulement de fluide sur les capteurs solaires et le traitement des polymères fondus. Cependant, les applications pertinentes pour un écoulement dans les cavités doublement entraînées se trouvent généralement dans les chambres de séchage, le revêtement au rouleau de ménisque et les processus de mélange.

#### 2.3.1 Cavité entraînée :

##### (a) Le revêtement de courte durée :

Les coucheuses à courte durée sont utilisées dans l'industrie du papier depuis la fin des années 80. Ils ont été principalement destinés au traitement du papier afin de le fournir avec certaines propriétés souhaitables qui sont requises pour des utilisations particulières. Ce processus de couchage est appliqué au papier non couché pour améliorer ses caractéristiques d'impression et d'aspect. Il fournit une surface de produit qui est plus uniforme et plus réceptive à l'encre d'impression que la surface du papier non couché. Il améliore également la reproduction des graphiques et des images, et améliore la qualité d'impression couleur, ce qui est particulièrement important pour les impressions en plusieurs couleurs. Ils peuvent également être conçus pour produire du papier d'enregistrement thermosensible pour les télécopieurs et autres dispositifs d'enregistrement thermique. De l'autre côté, ce mécanisme peut être trouvé dans les processus de filage à l'état fondu dans la formation de rubans métalliques continus en matériau microcristallin.



**Figure 2.23.** Processus de revêtement de courte durée. [82]

La machine du revêtement de courte durée se compose en principe d'un système d'alimentation de la couleur de revêtement et d'un système de docteur qui sont compactés ensemble pour former la tête dite de revêtement. La tête de revêtement est située sous un rouleau d'appuis recouvert de caoutchouc. Il y'a une entrée au fond du bassin de revêtement, un déflecteur du trop-plein du côté amont du bassin de revêtement et une lame de docteur du côté aval (Fig 2.23).

Les structures de vortex présentes dans les écoulements de la cavité entraînée donnent un aperçu du comportement de ces structures dans des applications aussi diverses que les processus de revêtement. Par exemple, Triantafillopoulos et Aidun [81] ont investigué expérimentalement la relation entre l'instabilité de l'écoulement dans les bassins de revêtement et les non-uniformités de poids de la couche. Pour  $Re \leq 1400$ , leurs résultats qualitatifs montrent qu'en général, il existe des instabilités centrifuges (sous forme des vortex de type Tylor-Görtler) apparaissent dans le bassin et influencent significativement le profil de poids de la couche et étant responsable de l'apparition de stries sur les papiers couchés.

Aidun et al. [82] ont visualisé expérimentalement la stabilité globale du fluide dans une cavité rectangulaire entraînée par un rouleau. Ils ont constaté qu'il existe plusieurs états d'écoulement stationnaire à des faibles nombres de Reynolds. L'écoulement de fluide ensuite devient globalement instable et rivalise avec au moins trois autres états stationnaires avant d'être remplacés par un écoulement périodique a des nombres de Reynolds plus élevé,  $Re \approx 825$ .

Cao et Ismail [83] ont effectué une simulation numérique de revêtements de courte durée en utilisant la méthode des différences finies (FDM). Ils ont prédit les lignes de courant et les distributions de pression dans le bassin de revêtement et sous la lame de la coucheuse pour des nombres de Reynolds ne dépassent pas 1000. La petite ouverture située sous la lame influence très peu les structures des lignes de courant dans le bassin. Cependant, elle exerce un effet significatif sur la distribution de pression.

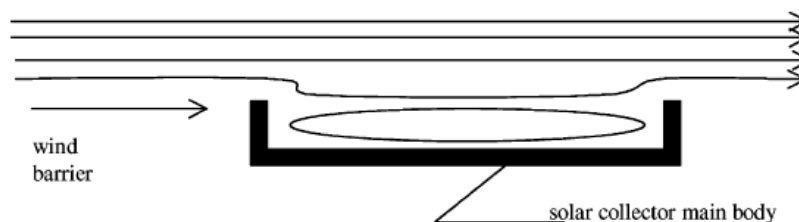
Aidun et Triantafillopoulos [84] ont fourni une étude technique concernant les procédés de revêtement de pales à grande vitesse, y compris le revêtement de courte durée. L'instabilité hydrodynamique de l'écoulement, l'entraînement de l'aire et les défauts du processus de revêtement de l'aube ont également été abordés.

Cao et Ismail [85] ont réalisé une étude numérique basée sur la méthode des différences finies (FDM) pour investiguer l'hydrodynamique de l'écoulement sous les paramètres de fonctionnement des revêtements a courte durée dans une cavité de forme carrée ( $\Gamma=1$ ) pour  $Re \leq 1200$ . Les résultats numériques à l'intérieur du bassin de revêtement sont compliqués par un vortex principal et jusqu'à quatre vortex secondaires. Le vortex principal et le vortex

secondaire par le point de contact dynamique induisent une orientation aléatoire des particules de pigment pendant le fonctionnement, ce qui produit une couche de revêtement sur le substrat avec une résistance de surface et un brillant inférieur. Il existe également une pression maximale sous la lame, et sa valeur augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds du substrat et avec la diminution des écarts de revêtement et des angles des lames. Les distributions des forces centrifuges montrent qu'il existe deux zones de force centrifuge élevée à l'intérieur du bassin de revêtement. En conséquence, ils peuvent être une source d'instabilité et de défauts de l'écoulement de revêtement.

### (b) Les capteurs solaires :

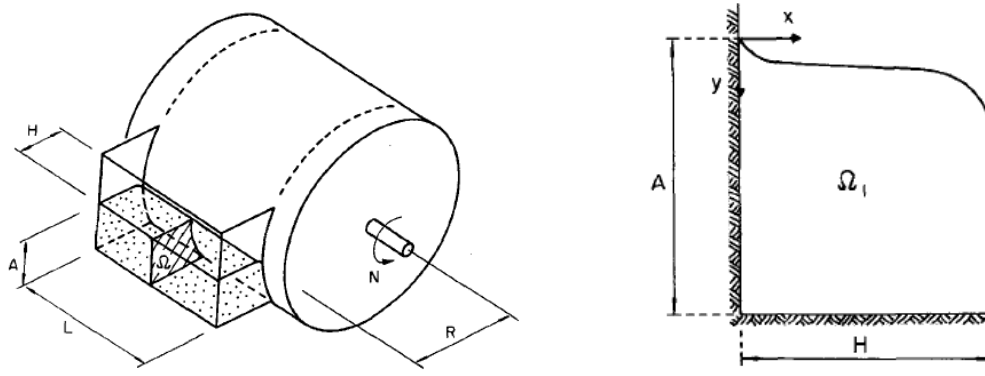
La surface supérieure des capteurs solaires, normalement utilisée pour le chauffage de l'eau, est constituée de morceaux de verre plats. Dans le cas où nous introduisons des pare-vent verticaux le long du périmètre du collecteur, l'efficacité de l'absorption de chaleur s'améliore en conséquence. Les détails des dynamiques de fluides dans une telle configuration ont été explorés par Zdanski et al. [86]. Ils ont effectué une série de simulations numériques d'écoulements laminaires et turbulents sur des cavités peu profondes (Fig 2.24). Ils ont constaté que pour le cas turbulent,  $18823 \leq Re \leq 28325$  et  $\Gamma=8$ , l'écoulement externe touche le fond de la cavité, ceci a un impact important sur les effets convectifs à l'intérieur de la cavité. Cependant, pour un écoulement laminaire avec des nombres de Reynolds approximativement élevé,  $Re \geq 294$  et  $\Gamma=12$ , l'écoulement externe ne touche pas le fond. De sorte que, les effets convectifs le long du fond de la cavité deviendront efficaces.



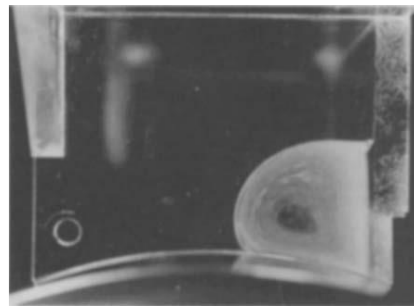
**Figure 2.24.** Écoulement au-dessus d'un capteur solaire avec des barrières de vent. [86]

### (c) Le traitement des polymères fondus :

Le traitement des polymères fondus est une situation couramment rencontrée dans l'industrie qui comprend nombreux écoulements d'intérêt pratique. Dans un tel cas, l'écoulement lent du fluide dans un bassin ouvert est généré par la rotation régulière d'un rouleau cylindrique (Fig 2.25). Une étude pratique et numérique de l'écoulement de liquide visqueux contenu dans une cavité ouverte entraînée par une paroi mobile a été entreprise par Canedo et Denson [87] comme une première étape pour comprendre le transfert de masse dans le traitement des équipements de polymères. Ils ont constaté que, pour des faibles nombres de Reynolds et de rapport d'aspect,  $Re < 50$  et  $\Gamma < 1$ , la structure de l'écoulement dans cette géométrie est similaire à celle des cavités entraînées fermées de même forme. La position et la force du vortex principal se sont révélées presque indépendantes de l'existence d'une surface libre, et l'interface gaz-liquide s'est avérée significativement aide à stabiliser le mouvement de rotation dans les cavités peu profondes (Fig 2.26).



**Figure 2.25.** Écoulement dans un bassin ouvert : (a) processus du traitement, (b) domaine physique d'écoulement. [87]



**Figure 2.26.** Structure d'écoulement typique (expérimentale), le cylindre rotatif est en bas. [87]

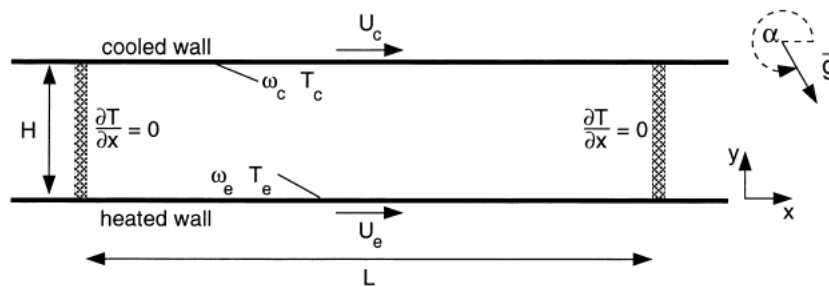
Dans le même contexte, Gaskell et al. [88] ont examiné le même problème numériquement et analytiquement pour des rapports d'aspect inférieur à 10. Il est révélé que les vortex de coin croissent séquentiellement à mesure que le rapport d'aspect augmente pour devenir pleinement développé et invariant. En outre, le vortex primaire omniprésent et entièrement développé a un rapport d'aspect critique  $\Gamma \in [2.66, 2.67]$  tandis que chaque vortex secondaire suivant a une longueur d'environ  $2.27 \times$  la profondeur du bassin. Les longueurs des vortex entièrement développées sont si différentes de celles obtenues à partir de cavités entraînées fermées lorsque  $\Gamma > 1$ .

### 2.3.2 Cavité doublement entraînée :

#### (a) Les chambres de séchage :

Les technologies de séchage nécessitent une connaissance approfondie de l'écoulement et du transfert de chaleur dans les chambres de séchage pour un fonctionnement optimal de l'équipement. Dans un contexte d'ingénierie de ces processus, les écoulements bidimensionnels de fluide stationnaire accompagné d'un transport de chaleur et de masse dans des cavités doublement entraînées moins profondes sont souvent adressés. Par exemple, une cavité rectangulaire d'une paroi mobile chaude et une paroi opposée mobile froide entraînent un

mélange de gaz non-condensable et de vapeur de solvant (Fig 2.27). La paroi chaude stimule l'évaporation du solvant liquide tandis que la paroi froide condense la vapeur résultante. Le solvant condensé peut être éliminé de la cavité avec le mouvement de la paroi froide. Une telle étude semble réalisée par Alleborn et al. [89] pour  $\Gamma=5$  et  $Re_{1,2} \leq 1000$ . Leurs résultats montrent que les vitesses de séchage peuvent être améliorées avec l'augmentation de la vitesse des parois mobiles et deviennent de plus en plus indépendantes de l'orientation de la cavité en raison de la dominance de la convection forcée. Une diminution de la vitesse de la paroi de condensation conduit une réduction drastique de la vitesse de séchage à cause d'une séparation de l'écoulement qui se produit dans ce mur. De même que, l'augmentation de la longueur de la cavité provoque une diminution du taux moyen de séchage.



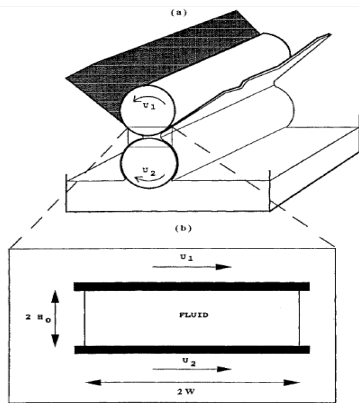
**Figure 2.27.** Cavité doublement entraînée d'un processus de séchage. [89]

### (b) Le revêtement au rouleau de ménisque :

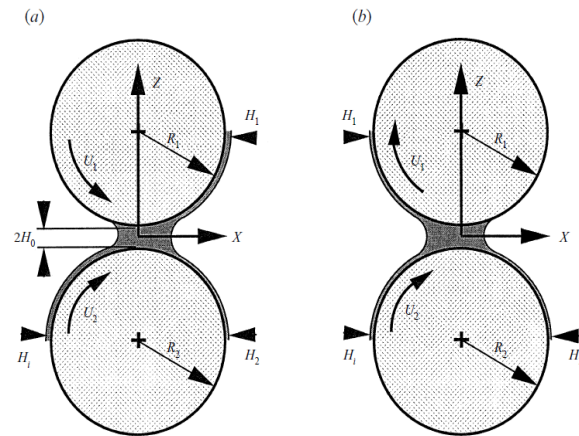
Le revêtement est le processus par lequel de minces couches liquides sont formées et appliquées à une surface solide. La configuration à double rouleau, revêtement au rouleau de ménisque (Fig 2.28), est utilisée par les industries manufacturières depuis plusieurs années pour produire des revêtements minces et uniformes. Bref, le liquide est prélevé d'un bac de revêtement par l'action d'un soulèvement visqueux et pénètre dans une étroite région de « perles » située entre les surfaces mobiles du rouleau, avant de finir par se fendre en couche l'âme adjacente au roulis supérieur et la surface inférieure du roulis du côté aval du pincement. Comme le montre la figure 2.29, ce système peut fonctionner soit parallèlement (les deux surfaces de roulement se déplacent dans la même direction) ou antiparallèlement (opposé) et peut être entraîné avec différents rapports de vitesse ( $\lambda=U_1/U_2$ ).

La première investigation pratique sur le revêtement des rouleaux de ménisque a été réalisée par Malone [90] qui a clairement exploré l'écoulement parallèle dans la zone de pincement et réussi à démêler la structure d'écoulement macroscopique sous-jacente pour les vitesses appliquées dans la gamme  $U \in [5 \times 10^{-3}, 0.5] \text{ m.s}^{-1}$ . Un autre examen expérimental approfondi de la mécanique des fluides détaillée a été effectué par Gaskell et al. [91] pour les deux modes de fonctionnement, parallèle et antiparallèle avec une vitesse dans la gamme  $U \in [9.3 \times 10^{-3}, 2.8 \times 10^{-1}] \text{ m.s}^{-1}$ . Les principales caractéristiques des structures d'écoulement identifiées dans le mode parallèle comprennent deux grands vortex primaires chacun avec un point de selle, une séparatrice et des vortex secondaires (Fig 2.30). En mode antiparallèle, les principales caractéristiques représentent un seul grand vortex composé de deux vortex secondaires, un point de selle et une séparatrice (Fig 2.31).

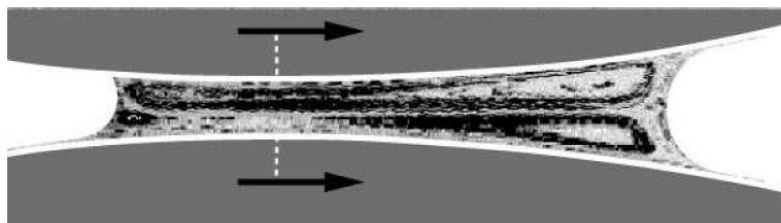
Gaskell et Savage [92] et Gaskell et al. [88] ont mené un ensemble d'études numériques et analytiques pour décrire les caractéristiques de l'écoulement dans l'écart entre les deux rouleaux a des faibles nombres de vitesses. Ils ont constaté que les structures d'écoulement exposées concordent bien avec celles de l'observation expérimentale. Ils ont également illustré que les vortex sont influencés par la valeur du rapport de vitesse  $\lambda$ , de sorte que la taille des vortex se répartit en conséquence.



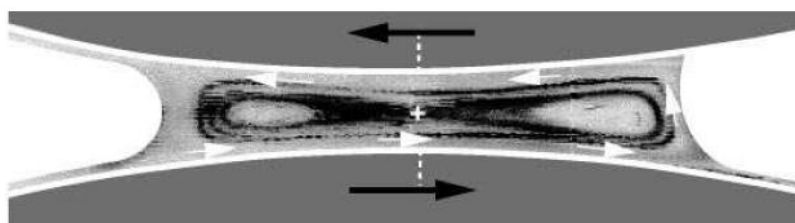
**Figure 2.28.** Revêtement en roulant de ménisque : (a) situation physique, (b) domaine idéalisé. [88]



**Figure 2.29.** Type de revêtement : (a) parallèle, (b) antiparallèle. [91]



**Figure 2.30.** Vue d'une solution expérimentale d'un écoulement parallèle pour un rapport de vitesse unitaire ( $\lambda=1$ ). [91]



**Figure 2.31.** Vue d'une solution expérimentale d'un écoulement antiparallèle pour un rapport de vitesse unitaire ( $\lambda=1$ ). [91]

## (c) Les processus de mélange :

Le mélange des fluides visqueux sans diffusion moléculaire est omniprésent dans la nature et l'industrie. Elle est pertinente pour des problèmes allant de la géophysique au traitement des polymères. D'un point de vue expérimental, une analyse des structures de mélange produites dans des cavités entraînées bidimensionnelles soumis à une advection chaotique a été effectuée par Leong et Ottino [93]. Un schéma de l'appareil utilisé pour l'écoulement de la cavité est illustré dans la figure 2.32. Ils ont étudié les principes fondamentaux de mélange à travers deux écoulements périodiques induits par des mouvements antiparallèles des deux parois opposées ( $Re_{1,2} \in [0.5, 1.7]$ ), l'un est continu et l'autre discontinu. La complexité de ces deux écoulements chaotiques a été présentée en termes de différentes structures de bifurcations et la formation des divers mouvements périodiques de structures cohérentes.

Jana et al. [94] ont fourni un aperçu approfondi à la fois expérimentalement et numériquement du mélange chaotique en insérant des chicane dans une cavité entraînée en changeant leur place en fonction du temps. Le mouvement de la paroi de la cavité et l'emplacement des chicane de différentes tailles et formes jouent un rôle clé dans le degré de mélange et la structure d'écoulement. Les résultats expérimentaux et numériques montrent un bon accord pour  $Re_{1,2} \leq 0.25$ . Ils ont été utiles pour être pris en compte dans la conception des nouveaux écoulements de mélange.

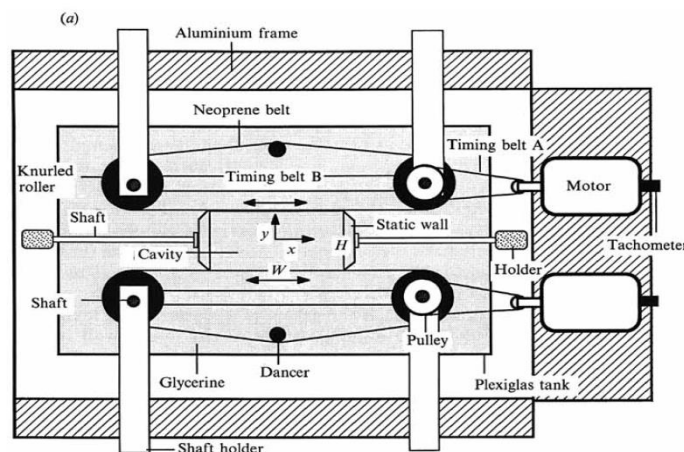


Figure 2.32. Schéma de l'appareil de mélange, vue de dessus. [93]

## 2.4 Conclusion :

Ce chapitre s'intéresse au contexte de la littérature réalisé sur l'étude de l'écoulement de fluide dans les cavités entraînées. Comprendre le problème physique de l'écoulement nous oblige à envisager des recherches numériques et expérimentales sur les écoulements de la cavité entraînée, les écoulements de la cavité doublement entraînés ainsi que les applications industrielles pertinentes.

Les phénomènes traités pour divers nombres de Reynolds et rapports d'aspect ( $Re, \Gamma$ ) comprennent des caractéristiques fondamentales des écoulements incompressibles en surfaces confinées, notamment, l'évolution de la structure de l'écoulement stationnaire unique ou



multiple, l'instabilité de l'écoulement, les bifurcations et la transition au chaos. Il est à noter que peu d'études d'intérêt scientifique susmentionnées ont étudié l'écoulement et le transfert de chaleur à l'intérieur de la cavité entraînée, cependant, ils n'entrent pas dans le champ de la présente analyse.

Le chapitre suivant est concerné par les méthodes numériques de résolution notamment la méthode des volumes finis (FVM) et la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM).

## Chapitre 3 : Méthodes numériques

### 3.1 Introduction :

La dynamique computationnelle des fluides (CFD) est l'analyse de systèmes impliquant des problèmes de l'écoulement de fluides et de transfert de chaleur avec des phénomènes associés tels que des réactions chimiques au moyen de simulations informatisées. La technique est devenue très puissante et couvre un large éventail de domaines d'application industriels et non industriels. Quelques exemples incluent l'aérodynamique des avions et des véhicules, l'hydrodynamique des navires, la combustion dans les moteurs et les turbines à gaz, les turbomachines, l'ingénierie électronique, la météorologie, etc.

L'avantage de la CFD par rapport aux approches expérimentales est la capacité de résoudre plusieurs configurations de système en même temps et à un coût réduit ainsi que d'étudier des systèmes où les expériences contrôlées sont difficiles ou impossibles à réaliser.

À la fin des années 1960, la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des différences finies (FDM) deviennent des techniques puissantes pour résoudre les équations aux dérivées partielles, le transfert de chaleur et les problèmes de dynamique des fluides. En 1980, la méthode des volumes finis (FVM) a été développée au collège impérial principalement pour résoudre les problèmes de dynamique des fluides. Après, elle a été largement utilisée pour résoudre les problèmes de phénomènes de transport. La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) a été introduite en 1988 par Mc Namara et Zanetti pour surmonter les inconvénients des automates cellulaires à gaz sur réseau. Depuis lors, la méthode LBM est apparue comme une méthode alternative puissante pour résoudre les problèmes de dynamique des fluides.

Les principes qui sous-tendent les simulations CFD réalisées dans ce projet dépendent à la fois de la méthode des volumes finis (FVM) utilisée par le solveur Ansys Fluent et de la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) laquelle utilisé par le solveur Matlab. Dans ce chapitre, pour les deux cas, une brève présentation des principales bases des deux méthodes et de certains de leurs modèles ont été inclus.

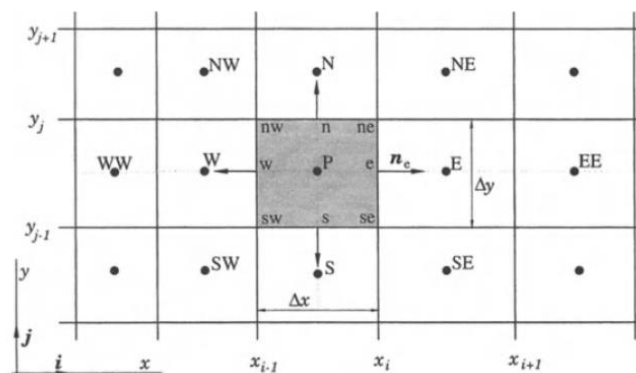
### 3.2 La méthode des volumes finis :

La popularité de la méthode des volumes finis (FVM) [95-97] dans la dynamique des fluides computationnelle (CFD) provient de la grande flexibilité qu'elle offre en tant que méthode de discrétisation. La technique FVM a joué un rôle particulièrement important dans la simulation des problèmes d'écoulement des fluides à la suite du travail effectué par le groupe CFD de l'Imperial Collège sous la direction du professeur Spalding [98], avec des contributeurs tels que Patankar [99]. Cette méthode doit une grande partie de sa flexibilité et de sa popularité au fait que la discrétisation est effectuée directement dans l'espace physique sans nécessiter de transformation entre le système de coordonnées physique et numérique. Un autre aspect important du FVM est que ses valeurs numériques reflètent la physique et les principes de conservation qu'elle modélise, comme la propriété intégrale des équations gouvernantes et les caractéristiques des termes qu'elle discrétise.

La méthode des volumes finis utilise la forme intégrale des équations de conservation comme point de départ. Le domaine de la solution est subdivisé en un nombre fini de volumes de

contrôle contigus (CV), et les équations de conservation sont appliquées à chaque CV, (Fig 3.1). Au centre de chaque CV se trouve un nœud de calcul auquel les valeurs de variable doivent être calculées. Un théorème de divergence de Gauss est appliqué pour convertir les intégrales de volume en intégrales de surface. L'interpolation est utilisée pour exprimer des valeurs de variables à la surface du volume de contrôle en termes de valeurs nodales (CV-centre). Des schémas d'approximations sont utilisés dans ce processus de discrétisation pour traiter différents termes en utilisant des formules de quadrature appropriées. En conséquence, on obtient une équation algébrique pour chaque CV, dans laquelle un certain nombre de valeurs nodales voisines apparaissent.

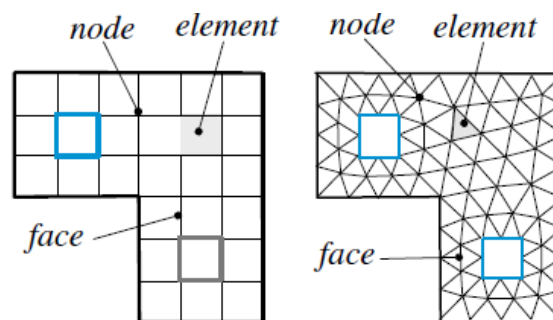
L'approche FV est peut-être la plus simple à comprendre et à programmer. Tous les termes qui doivent être approximés ont une signification physique, c'est pourquoi ils sont populaires auprès des ingénieurs.



**Figure 3.1.** Volume de contrôle typique dans un maillage 2D avec la notation utilisée.

### 3.2.1 Le maillage :

Un ingrédient clé dans la mise en œuvre de la méthode des volumes finis est la génération de maillage pour le problème physique considéré. Cela consiste à produire un maillage de calcul sur lequel les équations gouvernantes sont ensuite résolues. En général, un domaine géométrique peut être discrétisé à l'aide d'un système de grille structuré ou non structuré. Un système de grille structurée présente de nombreux avantages de codage et de performances, mais souffre d'une flexibilité géométrique limitée. Selon la complexité de la géométrie, l'adoption d'un maillage non structuré reste un choix de computation utile.



**Figure 3.2.** (a) Domaine discrétisé avec un système de grille structuré (uniforme), (b) domaine discrétisé avec système de grille non structuré avec des éléments triangulaires.

Un exemple d'un maillage structuré hexaèdre et un maillage non structuré tétraédrale sont bien montrés dans les figures 3.2 (a et b), respectivement.

Un système de notation distinctif dans le volume de contrôle considère le point **P** le centre de volume du contrôle. **E**, **W**, **N**, et **S** représentent les centres des volumes de contrôle adjacentes qui désignent respectivement les directions East, West, North, et South. Les faces des volumes de contrôle sont placées dans les points **e**, **w**, **n**, et **s**.  $\Delta x$  et  $\Delta y$  indiquent la dimension du volume de contrôle (Fig 3.1).

### 3.2.2 Processus de discrétisation :

L'étape suivante de la méthode des volumes finis est l'intégration de l'équation gouvernante sur un volume de contrôle pour produire une équation discrétisée en son point nodal **P**. Pour un écoulement bidimensionnel et incompressible, l'équation générale de transport d'une variable  $\phi$  s'écrit dans le système cartésien comme suit :

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{Terme transitoire}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j}(U_j \phi)}_{\text{Terme convective}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right)}_{\text{Terme diffusif}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{Terme source}} \quad (3.1)$$

Avec  $j$  désigne un indice de sommation ;  $j=1, 2$  dans le cas bidimensionnel.

L'intégration de l'équation générale de transport sur un volume de contrôle typique cède à l'équation de discrétisation de la variable  $\phi$  dans un domaine cartésien bidimensionnel :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial \tau} dXdYdt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial J_x}{\partial X} dXdYdt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial J_y}{\partial Y} dXdYdt = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e S_\phi dXdYdt \quad (3.2)$$

Avec :

$$J_x = U\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X}$$

$$J_y = V\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y}$$

En divisant le résultat d'intégration par  $\Delta t$ , on obtient :

$$\frac{\phi_p - \phi_p^0}{\Delta t} \Delta X \Delta Y + J_e - J_w + J_n - J_s = \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y \quad (3.3)$$

$\phi_p^0$  exprime l'incrément au temps  $t$  tandis que  $\phi_p$  est la valeur inconnue au moment  $t+\Delta t$ . Le terme  $S_\phi$  est supposé être constant dans le volume de contrôle.  $\overline{S_\phi}$  est évalué dans le centre du volume de contrôle.

Les quantités  $J_e, J_w, J_n, J_s$  représentent les flux totaux aux interfaces (e, w, n, s).

$$\begin{pmatrix} J_e = U_e \phi_e \Delta Y - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_e \Delta Y \\ J_w = U_w \phi_w \Delta Y - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_w \Delta Y \\ J_n = V_n \phi_n \Delta X - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_n \Delta X \\ J_s = V_s \phi_s \Delta X - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_s \Delta X \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.2.3 Schémas numériques :

Les approximations des intégrales nécessitent les valeurs des variables à des emplacements autres que les nœuds de calcul (centres de CV). Nous supposons que le champ de vitesse et les propriétés des fluides  $\rho$  et  $\Gamma$  sont connus à tous les endroits. Pour calculer les flux convectif et diffusif, la valeur de  $\phi$  et son gradient normal à la face de la cellule à un ou plusieurs emplacements sur la surface CV sont nécessaires. Ils doivent être exprimés en termes de valeurs nodales par interpolation. De nombreuses interpolations sont disponibles, nous en mentionnerons quelques-uns qui sont couramment utilisés où certains d'entre eux sont disponibles sur ANSYS©FLUENT.

Le flux total de convection et de diffusion est représenté par la fonction  $A(|P|)$ , Patankar [100], dans lequel la forme générale de l'équation algébrique discrétisée peut être écrite comme suit :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (3.5)$$

Avec :

$$\begin{pmatrix} A_E = D_e A(|P_e|) + \max[-F_e, 0] \\ A_W = D_w A(|P_w|) + \max[F_w, 0] \\ A_N = D_n A(|P_n|) + \max[-F_n, 0] \\ A_S = D_s A(|P_s|) + \max[F_s, 0] \\ A_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} \\ b = \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y + A_P^0 \phi_P^0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 + (F_e - F_w + F_n - F_s) - S_P \Delta X \Delta Y \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} F_e = U_e \Delta Y \\ F_w = U_w \Delta Y \\ F_n = V_n \Delta X \\ F_s = V_s \Delta X \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\left( \begin{array}{l} D_e = \frac{\Gamma_e}{dX_e} \Delta Y \\ D_w = \frac{\Gamma_w}{dX_w} \Delta Y \\ D_n = \frac{\Gamma_n}{dX_n} \Delta X \\ D_s = \frac{\Gamma_s}{dX_s} \Delta X \end{array} \right) \quad (3.9)$$

Où :  $(F_e, F_w, F_n, F_s)$  et  $(D_e, D_w, D_n, D_s)$  sont respectivement les flux convectifs et diffusifs aux interfaces e, w, n, et s.

Les divers schémas dérivés peuvent être essentiellement considérés comme des simples choix différents de la fonction  $A(|P|)$ . Les expressions pour  $A(|P|)$  pour les schémas considérés ici sont énumérées dans le tableau 3.1.

**Tableau 3.1.** La fonction  $A(|P|)$  pour différents schémas numériques. [100]

Schéma	La formule du fonction $A( P )$
Différences centrées	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybrid	$Max[0, 1 - 0.5 P ]$
Power Law	$Max[0, (1 - 0.1 P )^5]$
Exponentiel	$ P  / [\exp( P ) - 1]$

Les résultats du schéma Power Law et du schéma exponentiel montrent un accord étroit. De plus, tous les schémas à l'exception du schéma des Différences centrées donnent ce que l'on peut appeler une solution réaliste, le schéma des Différences centrées, par contre, a besoin d'un maillage raffiné pour trouver des solutions raisonnables bien que cela ne soit généralement pas faisable pour des raisons économiques. Le schéma Upwind s'est avéré le plus stable et il est souvent sélectionné pour les problèmes de divergence.

Dans le présent travail, en utilisant le code Ansys Fluent, le schéma Upwind du deuxième ordre a été employé pour les termes advectifs (convectifs), tandis que le schéma des différences centrées gère la pression et les termes diffusifs.

### 3.2.4 Couplage pression-vitesse :

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible sont faiblement couplées. Ce problème de couplage se manifeste par l'apparition des variables de vitesse et pression dans les équations du mouvement. Le gradient de pression qui apparait comme terme source dans ces équations ne dispose d'aucune équation de transport aussi bien qu'il n'est pas inclus dans

l'équation de continuité. Malheureusement, la pression est toujours une inconnue à déterminer aussi bien que la vitesse. L'approche à suivre est sensé de résoudre les équations de quantité de mouvement et de continuité en même temps, donc vérifier le problème de transport et satisfaire la continuité.

Il existe quatre types d'algorithmes de couplage dans Ansys Fluent : SIMPLE [101], SIMPLER [102], PISO [103] et COUPLE [104]. En se basant sur la littérature et les besoins de calcul, les algorithmes SIMPLE et COUPLE ont été choisis pour être utilisés dans la recherche actuelle.

### 3.2.4.1 L'algorithme SIMPLE :

SIMPLE est un acronyme pour Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations. C'est une procédure numérique qui est généralement utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes. L'algorithme SIMPLE a été largement utilisé par de nombreux chercheurs pour résoudre différents types de problèmes d'écoulement de fluide et de transfert de chaleur depuis son développement dans les années 1970 par le professeur Brian Spalding et son étudiant Suhas Patankar [101, 105] à l'Imperial Collège de Londres. Le concept de procédure est essentiellement une supposition et une procédure de correction pour le calcul de la pression. En d'autres termes, une pression d'essai ( $p^*$ ) est utilisée pour déterminer la vitesse ( $u^*$ ) dans l'équation de quantité de mouvement, qui peut prédire la pression corrigée ( $p$ ) qui est exprimée en fonction de la correction de pression ( $p'$ ).

L'équation (3.10) se réfère à l'expression de la pression corrigée.

$$p = p^* + p' \quad (3.10)$$

Sur la base de la pression estimée, la correction de vitesse peut être exprimée comme suit :

$$u' = u - u^*, \quad v' = v - v^* \quad (3.11)$$

Le couplage pression-vitesse peut être calculé en utilisant l'équation (3.12) comme terme supplémentaire pour la pression par la reconfiguration de l'équation de continuité. Cette équation est exprimée sur un volume de contrôle de centre  $e$  et de limites P et E et donne :

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \quad (3.12)$$

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}$$

### 3.2.4.2 L'algorithme COUPLE :

La convergence de l'algorithme SIMPLE est fortement affectée par le traitement explicite du gradient de pression dans l'équation du mouvement et du champ de vitesse dans l'équation de continuité. Traiter les deux termes de manière totalement implicite est en essence le but de tout algorithme couplé. Ceci est réalisé en couplant l'équation de mouvement et la forme d'équation de pression dans l'équation de continuité à travers un ensemble de coefficients qui représentent l'influence mutuelle des équations de continuité et de mouvement sur les champs

de pression et de vitesse. Pour en citer quelques-uns, les références [106-110] sont des exemples sur l'approche couplée.

L'approche couplée offre certains avantages par rapport à l'approche non couplée ou séparée représentée dans une mise en œuvre de phase robuste et efficace. Plus précisément, dans Ansys Fluent [104], le couplage implicite complet est obtenu grâce à une discrétisation implicite des termes de gradient de pression dans les équations de mouvement, et une discrétisation implicite du flux de masse de la face, y compris les termes de dissipation de pression Rhie-Chow [111].

### 3.2.5 Schéma de relaxation :

Une implémentation élégante appelée sous-relaxation des équations, également connue sous le nom de relaxation implicite, est utilisée pour stabiliser le comportement de convergence des itérations non linéaires externes en introduisant des quantités sélectives de variable  $\phi$  dans le système d'équations discrétisées. Le facteur de sous-relaxation,  $\alpha$ , ayant une valeur entre 0 et 1. Le processus de sous-relaxation peut être introduit comme :

$$\frac{A_p \phi}{\alpha} = \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb} + b + \frac{1-\alpha}{\alpha} A_p \phi_{old} \quad (3.13)$$

La nouvelle valeur de la variable dans une cellule  $\phi$  dépend de l'ancienne valeur  $\phi_{old}$ , cela équivaut au pas de temps spécifique à l'emplacement.

La résolution de l'écoulement de manière couplée, permet l'utilisation d'une relaxation implicite où un facteur de sous-relaxation est utilisé en corrélation avec le nombre de courant d'écoulement (CFL) permet le contrôle de la stabilité et du comportement de convergence. Le nombre CFL peut être écrit en termes de  $\alpha$  comme :

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{CFL} \quad (3.14)$$

Par conséquent, la convergence peut être atteinte plus rapidement et la stabilité des calculs peut également être améliorée.

### 3.2.6 La résolution des équations :

Le processus de discrétisation aboutit à un système d'équations algébriques linéaires qui doit être résolu. La complexité et la taille de l'ensemble d'équations dépendent de la dimensionnalité du problème, du nombre de nœuds de grille et de la pratique de discrétisation. Bien que toute procédure valide puisse être utilisée pour résoudre les équations algébriques, les ressources informatiques disponibles posent une contrainte puissante. Il existe deux familles de techniques de résolution des équations algébriques linéaires : **les méthodes directes** et **les méthodes indirectes ou itératives**. Des exemples simples de méthodes directes sont l'inversion de matrice de règles de Cramer et l'élimination de Gauss. Le nombre d'opérations à la solution d'un système d'équations  $N$  avec  $N$  inconnues au moyen d'une méthode directe peut être déterminé au préalable et est de l'ordre de  $N^3$ . Le stockage simultané de tous les coefficients  $N^2$  de l'ensemble des équations dans la mémoire centrale est nécessaire.



Les méthodes itératives sont basées sur l'application répétée d'un algorithme relativement simple conduisant à une convergence éventuelle après un nombre parfois important de répétitions. Des exemples bien connus sont la méthode de Jacobi et la méthode d'itération point par point de Gauss-Seidel. Le nombre total d'opérations, généralement de l'ordre de  $N$  par cycle d'itération, ne peut pas être prédit à l'avance.

Une forme linéarisée de l'équation de transport scalaire discrétisée contient la variable scalaire inconnue  $\phi$  au centre de la cellule ainsi que les valeurs inconnues dans les cellules voisines. Cette équation peut s'écrire comme :

$$A_p \phi_p = \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.15)$$

Où l'indice  $nb$  fait référence aux cellules voisines et  $A_p$  et  $A_{nb}$  sont les coefficients linéarisés pour  $\phi$  et  $\phi_{nb}$ .

Des équations similaires peuvent être écrites pour chaque cellule du maillage. Il en résulte un ensemble d'équations algébriques avec une matrice de coefficients creuse. Pour les équations scalaires, basé sur une méthode itérative, Ansys Fluent résout ce système linéaire à l'aide d'un solveur d'équations linéaires implicites ponctuelles (Gauss-Seidel) en conjonction avec une méthode multi grille algébrique (AMG).

### 3.2.6.1 Critère de convergence :

À la fin de chaque itération du solveur, la somme résiduelle pour chacune des variables conservées est calculée et stockée, enregistrant ainsi l'historique de convergence. Sur un ordinateur avec une précision infinie, ces résidus iront à zéro à mesure que la solution converge. Sur un ordinateur réel, les résidus décroissent jusqu'à une petite valeur ('arrondi') puis cessent de changer ('nivellement').

Le résidu  $R^\phi$  calculé par le solveur d'Ansys Fluent est le déséquilibre de l'équation (3.15) additionné sur toutes les cellules de calcul. Il peut être écrit comme :

$$R^\phi = \sum_{\substack{\text{l'ensemble des} \\ \text{cellules}}} \left| \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb} + b - A_p \phi_p \right| \quad (3.16)$$

Ansys Fluent vérifiera la convergence, en fonction du critère de convergence que vous choisirez. Si la convergence est surveillée, la solution s'arrêtera automatiquement lorsque chaque variable répond à son critère de convergence spécifié. Par exemple, dans le cas de notre étude, une solution convergente a été obtenue en exécutant les calculs lorsque le résidu absolu de masse et de mouvement devient inférieur à  $10^{-7}$ .

### 3.3 La modélisation de la turbulence :

#### 3.3.1 Introduction :

La plupart des écoulements rencontrés dans la pratique de l'ingénierie sont turbulents et nécessitent donc un traitement différent. Les ingénieurs en fluides doivent avoir accès à des outils viables capables de représenter les effets de la turbulence. À des faibles nombres de Reynolds, les écoulements sont laminaires. À des nombres plus élevés de Reynolds, les écoulements sont observés pour devenir turbulents. Un état de mouvement chaotique et aléatoire se développe dans lequel la vitesse et la pression changent continuellement avec le temps dans des régions substantielles d'écoulement.

La turbulence se développe généralement comme une instabilité d'écoulements laminaires apparaissant à un certain nombre de Reynolds critique. Dans le fluide, ces instabilités sont provoquées par l'amplification de la perturbation due aux termes inertiels hautement non linéaires. La théorie de la turbulence la plus acceptée est basée sur le concept de *cascade d'énergie* développé par *Kolmogorov* [112, 113]. Selon cette théorie, la turbulence est composée de tourbillons de tailles différentes, chacun possédant une certaine quantité d'énergie qui dépend de sa dimension. Les plus grands tourbillons se décomposent en transférant leur énergie à des tourbillons de plus petite taille dans un processus en chaîne par lequel les petits tourbillons nouvellement formés subissent des processus de rupture similaires et transfèrent leur énergie à des tourbillons encore plus petits. Ce processus de rupture se poursuit jusqu'à ce que la plus petite taille de tourbillon possible soit atteinte. Les plus petits tourbillons sont des échelles auxquelles la viscosité moléculaire est très efficace pour dissiper l'énergie cinétique turbulente sous forme de chaleur.

#### 3.3.2 Approches de modélisation de la turbulence :

Dans le passé, la principale approche pour étudier les écoulements turbulents était expérimentale. Les paramètres globaux tels que la traînée moyennée dans le temps ou le transfert de chaleur sont relativement faciles à mesurer, mais à mesure que la sophistication des dispositifs d'ingénierie augmente, les niveaux de détail et de précision requis augmentent également, tout comme le coût et les dépenses et la difficulté des mesures. Pour optimiser une conception, il est généralement nécessaire de comprendre la source des effets indésirables ; cela nécessite des mesures détaillées coûteuses et chronophages. Certains types de mesures, par exemple la pression fluctuante dans un écoulement, sont presque impossibles à effectuer à l'heure actuelle. D'autres ne peuvent pas être fabriqués avec la précision requise. En conséquence, les méthodes numériques ont un rôle important à jouer.

Avant de passer à la discussion des méthodes numériques pour ces écoulements, il est utile d'introduire un schéma de classification des approches de prédiction des écoulements turbulents. Selon la littérature, il existe trois catégories, qui peuvent également être divisées en sous-catégories.

- La première est basée sur des équations obtenues en faisant la moyenne des équations de mouvement dans le temps (si l'écoulement est statistiquement stable), sur une coordonnée dans laquelle l'écoulement moyen ne varie pas, ou sur un ensemble de réalisations (un ensemble imaginé de flux dans lesquels tous les facteurs contrôlables sont maintenus fixes). Cette approche est appelée fermeture en un point et conduit à un ensemble d'équations différentielles partielles appelées équations de Navier-Stokes moyennées de Reynolds (ou

**RANS**). Comme nous le verrons plus loin, ces équations ne forment pas un ensemble fermé donc cette méthode nécessite l'introduction d'approximations (modèles de turbulence).

- La seconde est la simulation des grandes échelles (**LES**) et résout les mouvements à plus grande échelle de l'écoulement tout en se rapprochant ou en modélisant uniquement les mouvements à petite échelle. Il peut être considéré comme une sorte de compromis entre les méthodes de fermeture à un point et la simulation numérique directe.
- Enfin, il existe une simulation numérique directe (**DNS**) dans laquelle les équations de Navier-Stokes sont résolues pour tous les mouvements dans un écoulement turbulent.

### 3.3.2.1 La simulation numérique directe (DNS) :

L'approche la plus précise de la simulation de turbulence est de résoudre les équations de Navier-Stokes sans moyennage ou approximation autres que des discrétisations numériques dont les erreurs peuvent être estimées et contrôlées. C'est aussi l'approche la plus simple du point de vue conceptuel. Dans de telles simulations, tous les mouvements contenus dans l'écoulement sont résolus. Comme indiqué ci-dessus, cette approche est appelée simulation numérique directe (DNS).

Sur la base du concept de cascade d'énergie, une solution numérique directe de l'équation de Navier-Stokes pour les écoulements turbulents nécessite l'utilisation d'un très petit pas de temps limité par un nombre de Courant inférieur à 1 et un maillage fin ( $\Delta x < \eta$ ) ( $\eta$  est l'échelle de Kolmogorov) résultant en un grand nombre de points de grille pour résoudre l'ensemble du spectre des échelles turbulentes temporelles et spatiales impliquées. Cette approche exigeante en termes de calcul a été utilisée par certains chercheurs [114-117] dans un nombre limité d'études simples.

Les résultats d'un DNS contiennent des informations très détaillées sur l'écoulement. Cela peut être très utile, mais, d'une part, c'est beaucoup plus d'informations que tout ingénieur n'en a besoin et, d'autre part, le DNS est trop cher pour être utilisé très souvent et ne peut pas être utilisé comme outil de conception. Avec lui, nous pouvons obtenir des informations détaillées sur la vitesse, la pression et toute autre variable d'intérêt à un grand nombre de points de grille. Ces résultats peuvent être considérés comme l'équivalent de données expérimentales et peuvent être utilisés pour produire des informations statistiques ou pour créer une 'visualisation numérique des écoulements'. De ce dernier, on peut en apprendre beaucoup sur les structures cohérentes qui existent dans l'écoulement. Cette richesse d'informations peut ensuite être utilisée pour développer une compréhension qualitative de la physique de l'écoulement. Les progrès futurs de la technologie informatique pourraient changer en faveur du DNS.

### 3.3.2.2 La simulation des grandes échelles (LES) :

Les mouvements à grande échelle sont généralement beaucoup plus énergiques que ceux à petite échelle ; leur taille et leur résistance en font de loin les transporteurs les plus efficaces des propriétés conservées. Les petites échelles sont généralement beaucoup plus faibles et fournissent peu de transport de ces propriétés. Une simulation qui traite les grands tourbillons plus exactement que les petits peuvent avoir un sens ; la simulation de grandes échelles (LES) [118-121] est une telle approche. La méthode conçue qui est moins intensive sur le plan informatique que le DNS, simule directement les structures turbulentes à grande échelle, tandis que les petites échelles turbulentes sont modélisées à l'aide de modèles à l'échelle des sous-maille (*sub-grid models*).

Les simulations à grandes échelles sont tridimensionnelles, dépendantes du temps et coûteuses, mais beaucoup moins coûteuses que les DNS du même écoulement. En général, parce qu'il est plus précis, le DNS est la méthode préférée chaque fois que cela est faisable. LES est la méthode préférée pour les écoulements dans lesquels le nombre de Reynolds est trop élevé ou la géométrie est trop complexe pour autoriser l'application du DNS.

Le concept clé du LES est de filtrer l'équation de Navier-Stokes pour déterminer les échelles à conserver et les échelles à rejeter. Une variable filtrée (indiquée par une barre supérieure) est définie par :

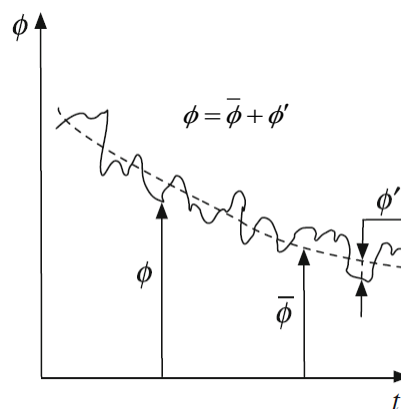
$$\bar{\phi}(x) = \int_D \phi(x') G(x, x') dx' \quad (3.17)$$

Où  $D$  est le domaine fluide et  $G$  est la fonction de filtre qui détermine l'échelle des tourbillons résolus.

Ainsi, dans l'approche LES, les structures turbulentes d'échelles plus grandes que le filtre minimum fixé ne sont pas filtrées. Cela a l'avantage de résoudre directement les plus grands tourbillons avec la teneur plus élevée en énergie (turbulence anisotrope) tandis que les plus petits tourbillons sont simplement modélisés. Une modélisation précise de ces tourbillons est possible, car à plus petite échelle (en dessous de la largeur du filtre) la turbulence peut être considérée comme isotrope et indépendante du type d'écoulement et des conditions aux limites. Les modèles à l'échelle du sous-maille les plus élémentaires ont été proposés par Smagorinsky [122] et développés par Lilly [123]. Dernièrement, avec les progrès récents de la technologie informatique, l'utilisation de LES pour résoudre des problèmes industriels est de plus en plus acceptée.

### 3.3.2.3 L'approche de Reynolds-moyenné (RANS) :

Actuellement, l'approche la plus populaire pour résoudre les problèmes d'écoulement turbulent industriel est celle basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennée (RANS) où la moyenne statistique est maintenant basée non pas sur une moyenne spatiale, mais sur un temps approprié, Reynolds [124].



**Figure 3.3.** Composantes des variables fluctuantes et moyennes.

L'approche clé consiste à décomposer les variables de l'écoulement en une composante de valeur moyenne temporelle et une composante fluctuante (Fig 3.3), en les remplaçant dans les équations d'origine et en faisant la moyenne temporelle des équations obtenues. Même si le nom fait référence à l'équation de Navier-Stokes, la décomposition est appliquée à toutes les équations gouvernantes. L'intention est de modéliser toutes les échelles d'écoulement turbulent, par conséquent, avec cette approche, la limitation de la taille du maillage n'est pas aussi contraignante que dans les approches DNS et LES.

### 3.3.3 Les équations de Navier-Stokes moyennées de Reynolds (RANS) :

Cette approche qui permet une solution pour les variables de l'écoulement moyen réduit considérablement l'effort de calcul. Si l'écoulement moyen est stationnaire, les équations gouvernantes ne contiendront pas de dérivées temporelles et une solution à l'état stationnaire peut être obtenue de manière économique. Un avantage de calcul est observé même dans les situations instationnaires, puisque le pas de temps sera déterminé par l'instationnarité globale de l'écoulement moyen plutôt que par la turbulence.

La substitution d'expressions des composantes des valeurs de variables moyennes et fluctuantes ( $\bar{\phi}, \phi'$ ) donne les équations de conservation moyennées de Reynolds (3.18 et 3.19) qui peuvent être exprimées en forme de tenseurs cartésiens comme suit :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.19)$$

$$\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$$

Où  $u_i$  est le vecteur de vitesse du fluide,  $\rho$  est la densité,  $p$  est la pression,  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

$\tau_{ij}$  est le tenseur de contrainte de Reynolds qui est introduit par la procédure de moyennage et il est utilisé pour suivre le transport dû au mouvement de turbulence.

Ces équations ont la même forme générale que les équations instantanées de Navier-Stokes, avec les vitesses et autres variables de solution représentant maintenant des valeurs de moyenne d'ensemble (ou de moyenne temporelle).

### 2.3.4 L'approche de Boussinesq contre les modèles de transport des tensions de Reynolds (RSM) :

La modélisation de la turbulence fondée sur l'approche de Reynolds moyenné exige que les contraintes de Reynolds de l'équation (3.19) soient modélisées de façon appropriée. Une méthode courante utilise l'hypothèse de Boussinesq [125] pour relier les contraintes de Reynolds aux gradients de vitesse moyenne peut être exprimée selon l'équation :

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.20)$$

Où l'énergie cinétique de turbulence,  $k$ , est définie comme :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (3.21)$$

$\nu_T$  est la viscosité cinématique turbulente supposée comme une quantité scalaire isotrope.

L'hypothèse de Boussinesq est utilisée dans le modèle de Spalart-Allmaras, les modèles  $k-\varepsilon$  et les modèles  $k-\omega$ . L'avantage de cette approche est le coût de calcul relativement faible associé au calcul de la viscosité turbulente,  $\nu_T$ . Dans le cas du modèle Spalart-Allmaras, une seule équation de transport supplémentaire (représentant la viscosité turbulente) est résolue. Dans le cas des modèles  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$ , deux équations de transport supplémentaires (pour l'énergie cinétique turbulente,  $k$ , et soit le taux de dissipation de turbulence,  $\varepsilon$ , ou le taux de dissipation spécifique,  $\omega$ ) sont résolues, ici, la viscosité turbulente est calculée en fonction de  $k$  et  $\varepsilon$ . L'inconvénient de l'hypothèse de Boussinesq telle que présentée est qu'elle suppose que  $\nu_T$  est une quantité scalaire isotrope, ce qui n'est pas strictement vrai.

L'approche alternative, incorporée dans la méthode RSM, consiste à résoudre les équations de transport pour chacun des termes des contraintes de Reynolds. Une équation supplémentaire déterminant l'échelle (normalement pour  $\varepsilon$ ) est également nécessaire. Cela signifie que cinq équations de transport supplémentaires sont nécessaires dans les écoulements 2D et sept équations de transport supplémentaires doivent être résolues en 3D. Dans l'ensemble, les modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq fonctionnent très bien, alors que la dépense de calcul supplémentaire du modèle de contraintes de Reynolds n'est pas justifiée. Cependant, l'approche RSM est nettement supérieure pour les situations dans lesquelles l'anisotropie de la turbulence a un effet dominant sur l'écoulement moyen. De tels cas incluent des écoulements fortement tourbillonnants et des écoulements secondaires induits par les contraintes.

### 3.3.5 Les modèles de turbulence :

La présence des contraintes de Reynolds et du flux scalaire turbulent dans les équations de conservation fait que ces dernières ne sont pas fermées, c'est-à-dire qu'elles contiennent plus de variables qu'il n'y a d'équations. La fermeture nécessite l'utilisation de certaines approximations, qui prennent généralement la forme de la prescription du tenseur de contrainte de Reynolds et des flux scalaires turbulents en termes de quantités moyennes.

Il est possible de dériver des équations pour les corrélations d'ordre supérieur, par exemple pour le tenseur de contraintes de Reynolds, mais celles-ci contiennent encore plus de corrélations inconnues (et d'ordre supérieur) qui nécessitent des approximations de modélisation. Les approximations introduites sont appelées les modèles de turbulence.

Les modèles de turbulence RANS peuvent être regroupés, comme prévu dans Ansys Fluent, en cinq catégories :

- Modèle à une équation (*Spalart-Allmaras*).
- Modèles à deux équations  $k$ -epsilon et  $k$ -oméga ( $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$ ).
- Modèle à trois équations (*Transition  $k-k\ell-\omega$* ).
- Modèle à quatre équations (*Transition SST*).
- Modèle à cinq équations (*RSM*), atteins sept équations en 3D.

Quatre modèles de turbulence RANS typiques sont testés dans la présente étude, y compris le modèle S-A, le modèle RNG  $k-\varepsilon$ , le modèle SST  $k-\omega$  et le modèle Omega-RSM, ceux-ci seront présentés dans les sous-sections suivantes.

### 3.3.5.1 Le modèle Spalart-Allmaras (S-A) :

Ce modèle à une équation proposé par Spalart-Allmaras [126] résout l'équation de transport pour une forme de quantité modifiée de la viscosité cinématique turbulente,  $\tilde{\nu}$ , avec une différence limitée uniquement à la région proche de la paroi (visqueuse affectée) avec une facilité dans le processus de calcul. Il est principalement destiné aux applications aérospatiales impliquant des écoulements aux parois, des applications de turbomachines, et a montré de bons résultats pour prédire les écoulements des couches limites. L'équation de transport pour  $\tilde{\nu}$  est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{\nu}u_i) = G_\nu + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\mu + \rho\tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2}\rho \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_\nu + S_{\tilde{\nu}} \quad (3.22)$$

Où  $G_\nu$  et  $Y_\nu$  désignent respectivement la production de viscosité turbulente et la destruction de la viscosité turbulente qui se produisent dans la région proche de la paroi en raison du blocage de la paroi et de l'amortissement visqueux.  $\sigma_{\tilde{\nu}}$  et  $C_{b2}$  sont constant et  $\nu$  est la viscosité cinématique moléculaire.  $S_{\tilde{\nu}}$  représente un terme source défini par l'utilisateur. La viscosité cinématique turbulente modifiée  $\tilde{\nu}$  est mise à zéro à toutes les limites. La production turbulente de Spalart-Allmaras est basée sur la vorticité. Notez que les régions près des murs sont automatiquement mod lis es avec le traitement de mur amélioré (enhanced wall treatment). La viscosité turbulente est donn e par :

$$f_{\nu1} = \frac{(\tilde{\nu}/\nu)^3}{(\tilde{\nu}/\nu)^3 + C_{\nu1}^3} \quad (3.23)$$

Les constantes prennent les valeurs :

$$C_{b1}=0.1335, C_{b2}=0.622, \sigma_{\tilde{\nu}}=2/3, C_{\nu1}=7.1, C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}}, C_{w2}=0.3, C_{w3}=2, Pr=0.667, \kappa=0.4187.$$

### 3.3.5.2 Le modèle RNG $k-\varepsilon$ :

Ce modèle [127] est considéré parmi les modèles à deux équations les plus largement utilisés. Il représente une modification du modèle classique  $k-\varepsilon$  standard amélioré par une technique statistique précise (théorie des groupes de renormalisation) avec une meilleure précision et fiabilité dans la prédiction de la longueur de recirculation dans les écoulements de séparation, les écoulements déformés et les écoulements tourbillonnants. Le modèle RNG  $k-\varepsilon$  est spécifié par deux équations de transport pour l'énergie cinétique de turbulente ( $k$ ) et son taux de dissipation ( $\varepsilon$ ) comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_\varepsilon \mu_{eff} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon + S_\varepsilon \quad (3.25)$$

Où  $G_k$  est la génération d'énergie cinétique turbulente due aux gradients de vitesse moyens.  $G_b$  est la génération d'énergie cinétique turbulente due au flottabilité.  $Y_M$  représente la contribution de la dilatation fluctuante dans la turbulence compressible.  $\alpha_k$  et  $\alpha_\varepsilon$  sont les nombres de Prandtl effectifs inverses pour  $k$  et  $\varepsilon$ , respectivement.  $S_k$  et  $S_\varepsilon$  représentent les termes source définis par l'utilisateur. Une forme modifiée de la viscosité turbulente  $\mu_t$  est fournie par le modèle RNG  $k$ - $\varepsilon$  lorsque l'écoulement moyen est affecté par un taux de rotation et de vorticité importants. La forme de modification peut être exprim e comme suit :

$$\mu_t = \mu_{t0} f \left( \alpha_s, \Omega, \frac{k}{\varepsilon} \right) \quad (3.26)$$

Où  $\mu_{t0}$  est la valeur de la viscosité turbulente calcul e sans modification.  $\Omega$  est un nombre tourbillonnaire caractéristique, et  $\alpha_s$  est une constante de tourbillon qui prend des valeurs différentes selon que l'écoulement est fortement tourbillonnant ou légèrement tourbillonnant. Nous notons que dans la présente étude régions près des murs sont mod elis es avec le traitement standard (standard wall treatment). Les constantes du modèle prennent les valeurs :  $C_{1\varepsilon}=1.42$ ,  $C_{2\varepsilon}=1.68$

### 3.3.5.3 Le modèle SST $k$ - $\omega$ :

Ce modèle de turbulence à deux équations SST  $k$ - $\omega$  le plus réussi a été d evelopp e par Menter [128]. Il atteint une précision et une fiabilité plus élevées pour prédire les écoulements aérodynamiques, la couche limite avec un gradient de pression défavorable, un gradient de pression nul et une couche de cisaillement libre. Cela est dû à la combinaison efficace du modèle  $k$ - $\omega$  dans la région proche de la paroi et à l'indépendance en courant libre du modèle  $k$ - $\varepsilon$  dans les zones de champ loi de la paroi. L'énergie cinétique turbulente ( $k$ ) et le taux de dissipation spécifique ( $\omega$ ) sont obtenus à partir des équations de transport suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega \quad (3.28)$$

Où  $G_k$  est la génération d'énergie cinétique turbulente due aux gradients de vitesse moyens.  $G_\omega$  est la génération de  $\omega$ .  $\Gamma_k$  et  $\Gamma_\omega$  représentent la diffusivité effective de  $k$  et  $\omega$ , respectivement.



$Y_k$  et  $Y_\omega$  représentent la dissipation de  $k$  et  $\omega$  due à la turbulence.  $D_\omega$  représente le terme de diffusion croisée.  $S_k$  et  $S_\omega$  sont des termes source définis par l'utilisateur.

L'avantage des performances du modèle SST  $k-\omega$  repose sur la forme modifiée de la viscosité turbulente qui s'exprime comme suit :

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max\left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{\Omega F_2}{\alpha_1 \omega}\right]} \quad (3.29)$$

$$\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad (3.30)$$

Où  $\Omega_{ij}$  est le taux principal de tenseur de rotation  $\left(\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)$ .  $\alpha^*$  est le coefficient d'amortissement de la viscosité turbulente  $\left(\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_0^* + \text{Re}_t / R_k}{1 + \text{Re}_t / R_k}\right)\right)$ .

Les fonctions de mélange  $F1$  et  $F2$  qui garantissent que le modèle atteint un rendement élevé à la fois près du mur et loin du mur sont données par :

$$F_1 = \tanh(\phi_1^4) \quad (3.31)$$

$$\phi_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09wy}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega}\right), \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2} D_\omega^+ y^2}\right] \quad (3.32)$$

$$D_\omega^+ = \max\left[2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20}\right] \quad (3.33)$$

$$F_2 = \tanh(\phi_2^2) \quad (3.34)$$

$$\phi_2 = \max\left[2 \frac{\sqrt{k}}{0.09wy}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega}\right] \quad (3.35)$$

Où  $y$  est la distance à la surface suivante et  $D_\omega^+$  est la partie positive du terme de diffusion croisée. Le traitement mural amélioré est la seule option pour ce modèle. Notez que le traitement de mur amélioré (enhanced wall treatment) est la seule option pour ce modèle.

Les constantes sont définies par :

$$\sigma_{k1}=1.176, \sigma_{\omega1}=2.0, \sigma_{k2}=1.0, \sigma_{\omega2}=1.168, a_1=0.31, \beta_{i,1}=0.075, \beta_{i,2}=0.0828$$

Les constantes de modèle supplémentaires ( $\alpha_\infty^*, \alpha_\infty, \alpha_0, \beta_\infty^*, R_\beta, R_k, R_\omega, \zeta^*$ , and  $M_{t0}$ ) sont similaires à celles du modèle  $k-\omega$  standard.

### 3.3.5.4 Le modèle des tensions de Reynolds (Oméga RSM) :

Indépendamment de l'hypothèse de Boussinesq (hypothèse de viscosité isotrope), le modèle des tensions de Reynolds (RSM) [129-131] est physiquement le modèle de turbulence le plus attractif, le plus réfléchi et le plus coûteux. Les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) sont fermées en résolvant les équations de transport des contraintes de Reynolds qui nécessitent plus de modélisation que les modèles turbulents à une et deux équations. Il est très approprié et potentiel principalement pour prédire les écoulements complexes en 3D, les cyclones, les chambres de combustion turbulente, les passages d'écoulement rotatifs et l'écoulement dans les conduits courbe. L'équation aux dérivées partielles pour le tenseur des contraintes est dérivée de l'équation de Navier-Stokes peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{u'_i u'_j})}_{\text{local time derivative}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k \overline{u'_i u'_j})}_{C_{ij}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'_i u'_j u'_k} + P(\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j) \right]}_{D_{T,ij}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right]}_{DL_{ij}} \\
 & \underbrace{-\rho \beta (g_i \overline{u'_j \theta} + g_j \overline{u'_i \theta})}_{G_{ij}} + \underbrace{P' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}} - \underbrace{2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}} - \underbrace{\rho \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}_{P_{ij}} \\
 & \underbrace{-2\rho \Omega_k (\overline{u'_j u'_m} e_{ikm} + \overline{u'_i u'_m} e_{jkm})}_{F_{ij}}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$C_{ij}$  représente le terme de convection,  $D_{T,ij}$  est le terme de diffusion turbulente.  $DL_{ij}$  est le terme de diffusion moléculaire,  $G_{ij}$  désigne le terme de production de flottabilité,  $\phi_{ij}$  est le terme de déformation de pression,  $\varepsilon_{ij}$  est le terme de dissipation, et  $F_{ij}$  représente la production par terme de rotation du système.

Le modèle oméga RSM utilise l'approche oméga contrainte proposée par Wilcox [132] pour gérer le terme pression-déformation  $\phi_{ij}$  où aucun traitement de la réflexion de la paroi n'est nécessaire. Il est basé sur les équations oméga et le modèle LLR et possède une grande ressemblance avec le  $k-\omega$  avec une prédiction fiable d'une large gamme d'écoulements turbulents.

### 3.4 La méthode de Boltzmann sur réseau :

#### 3.4.1 Introduction :

La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM, Lattice Boltzmann method) est une méthode de CFD assez récente qui suscite l'intérêt depuis les années 90. C'est de plus en plus utilisé pour décrire le comportement de fluides en écoulement, qu'ils soient incompressibles ou compressibles. La méthode se présente comme une réelle alternative aux méthodes classiques puisqu'elle semble présenter la rapidité des méthodes RANS et la précision des méthodes LES. La notion 'sur réseau' désigne une méthode élégante de discrétisation de l'équation de Boltzmann 1872. En fait, le fondement de cette méthode peut être représenté non seulement comme un prolongement de travaux en physique statistique de la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, mais aussi sur l'étude des automates cellulaires et la théorie des gaz sur réseau a la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle.

L'idée principale de la technique est de combler le fossé entre la micro-échelle et la macro-échelle en considérant le comportement d'une collection de particules comme une unité (Fig 3.4). La transition d'une description microscopique d'un fluide à sa description macroscopique a été fondamentalement liée au développement de la physique statistique qui est dérivé de la théorie cinétique des gaz.

Au milieu du 19<sup>ème</sup> siècle, l'évolution décrite par les travaux de Lord Kelvin, James Clerk Maxwell et Ludwig Boltzmann semblait être une percée parfaite qui a permis Ludwig Boltzmann en 1872 de proposer sa célèbre équation, qui dépendre l'évolution spatio-temporelle d'une fonction de distribution  $f$  dépend de l'espace, de la vitesse ainsi que du temps. Par conséquent :  $f=f(x, c, t)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad (3.37)$$

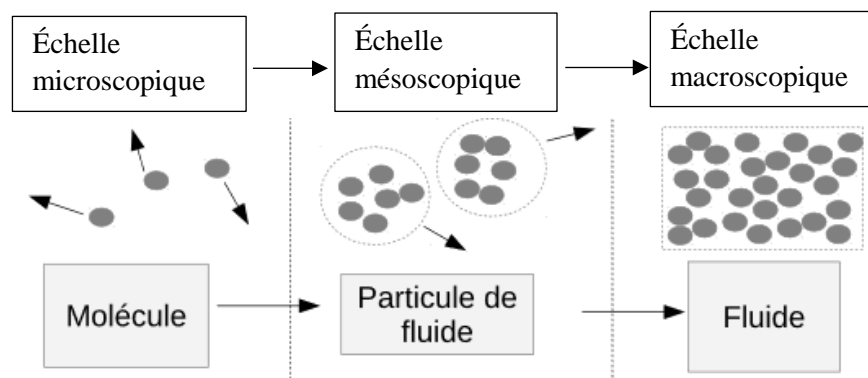
Le terme de droite est appelé opérateur de collision et représente la collision entre les particules. Les termes de gauche représentent le processus de propagation des particules et l'action de la force  $F$  sur ces particules. Lorsque l'opérateur de collision est négligé, les molécules se déplacent sous l'action de la force  $F$  sans collision, alors que, si l'opérateur de collision est considéré, les particules se rencontrent et l'évolution du système dépend ici de la forme de l'opérateur de collision.

Historiquement, le terme « fonction de distribution,  $f$  » a été défini par Maxwell en 1859 qui a reconnu qu'il était difficile de formuler un traitement avec un grand nombre de molécules. L'idée de Maxwell est que la connaissance de la vitesse et de la position de chaque molécule à chaque instant du temps n'est pas importante. La fonction de distribution est le paramètre le plus important pour caractériser l'effet des molécules, quel pourcentage des molécules à un certain emplacement d'un conteneur ont des vitesses dans une certaine plage, à un instant donné de temps. Plus tard, Boltzmann a généralisé la distribution de Maxwell pour les grands systèmes arbitraires, ce qui était certainement l'une des contributions révolutionnaires du LBM. Cependant, l'étude de l'opérateur de collision de Boltzmann ne s'est pas étendue à des collisions complexes et de ce fait ne considérait que les collisions à deux particules.

Quelques années après la mort de Ludwig Boltzmann en 1906, Sydney Chapman et David Enskog s'intéressent à des collisions plus complexes prenant en compte de plusieurs particules.

David Enskog a d'abord réalisé une étude systématique concernant le développement de la fonction de distribution de l'équation de Boltzmann. D'ailleurs, Sydney Chapman a voulu aller plus loin sur l'idée d'Enskog et considérait les particules comme sphères dures en tenant compte des collisions complexes. On sait aussi que, grâce à une analyse de Chapman-Enskog [133, 134], il est possible d'établir des liens directs entre l'équation de Boltzmann et celles de Navier-Stokes (1823), mais l'opérateur de collision reste malgré tout très complexe.

L'une des approches les plus populaires et les plus simples de la LBM apparait 30 ans plus tard grâce aux mathématiciens Prabhu Lal Bhatnagar, E.P. Gross et Max Krook [135], en 1954 ils ont donné naissance à un modèle de collision simple nommé opérateur BGK. L'idée principale de cet opérateur de collision BGK, est que la collision des particules peut être décrite comme la relaxation en un temps donné vers un état d'équilibre donné. En outre, il est intéressant de savoir qu'une démonstration de l'écoulement de la mécanique des fluides régit par l'équation de Boltzmann munie d'un opérateur BGK permet de décrire l'écoulement régi par les équations de Naviers-Stokes, c'est depuis les années 1954. Toutefois, la méthode de Boltzmann sur réseau a dû attendre plus pour voir le jour avec le développement de la notion de discrétisation, de la simulation numérique et l'apparition des automates cellulaires.



**Figure 3.4.** Différentes échelles de fluide.

Dans l'histoire du développement de la LBM, d'autre part, et en plus de la physique statistique, les automates cellulaires (Cellular Automaton, CA) ont également été considérés comme un facteur clé. Un automate cellulaire peut simplement décrire un univers de calcul composé de petites cellules, chacun contient un nombre fini d'états discrets. C'est vers 1950 que les automates cellulaires ont été introduits par Stanislas Ulam, John Von Neumann et Konrad Zuse. En 1966, Neumann a proposé un automate cellulaire auto-reproducteur [136]. Quelques années plus tard, cette CA a été implémentée pour la première fois sur un ordinateur [137].

Le premier modèle à vitesse discrète pour simuler des écoulements de fluide a été employé par Broadwell en 1964 [138] pour étudier les structures de choc, et plus tard par Gatignol [139]. Ici, bien que la vitesse des particules dans la fonction de distribution ait été discrétisée, l'espace et le temps étaient continus. Cette combinaison ne permettait pas de déduire de manière correcte des modèles macroscopiques de type Navier-Stokes.

En 1973, la première apparition d'un modèle de gaz sur réseau (Lattice-Gas Cellular Automata, LGCA) (types spéciaux d'automates cellulaires pour la simulation de l'écoulement de fluide et d'autres problèmes physiques) était due à Hardy, Pomeau et Pazzis [140]. Son nom HPP est dérivé des initiales des trois auteurs. Bien que le modèle HPP conserve la quantité de masse et de mouvement où une spatiale et temporelle discrétisations ont également appliqués sur un

réseau carré, il ne donne pas l'équation de Navier-Stokes souhaitée dans la limite macroscopique.

En 1983, Stephen Wolfram a relancé l'intérêt des automates cellulaires par une série d'articles [141-144]. Les tableaux unidimensionnels de cellules considérés par Wolfram exprimaient des motifs complexes lorsqu'ils étaient initialisés au hasard et mis à jour par de simples règles déterministes en fonction de l'état de la cellule et de quelques-uns de ses voisins. Puis, en 1986, Frisch, Hasslacher et Pomeau [145] ont découvert un modèle de gaz sur réseau FHP avec une symétrie hexagonale, c'est-à-dire avec une symétrie un peu plus élevée que pour le modèle HHP, il se révèle comme le premier modèle qui a conduit à une dynamique de Navier-Stokes éprouvée. Mais malheureusement, ce modèle présentait plusieurs problèmes tels que le bruit numérique dû à l'utilisation de variables booléennes et l'invariance non galiléenne due à l'utilisation des distributions Fermi-Dirac.

Afin d'éviter certains de ces problèmes inhérents, les fondements théoriques des automates à gaz sur réseau ont été donnés peu après par Wolfram [146] en 1986 et Frisch et al. [147] en 1987. Ces études permettent de faire le lien entre l'équation de Boltzmann et les gaz sur réseau, en un coup d'œil, tout le monde a immédiatement pris conscience de la possibilité d'utiliser un tel LGCA dans l'approximation de Boltzmann. Donc, les variables réelles ont remplacé des variables booléennes et les distributions de Maxwell-Boltzmann prennent la place des distributions Fermi-Dirac pour l'état d'équilibre.

En 1988, à la suite des améliorations des gaz sur réseau effectuées, l'équation de Boltzmann sur réseau en tant que schéma numérique a été proposée pour la première fois par McNamara et Zanetti [148]. Higuera et Jimenez [149] en 1989 ont montré que cette approche peut être simplifiée en utilisant une forme linéarisée de l'opérateur de collision. Ensuite, la mise en œuvre d'un opérateur BGK a également été abordée [150, 151] depuis 1991. Récemment, Succi et Benzi ont commencé une série de travaux abordant en fait une variété des écoulements de fluide [152]. Cela et de nombreuses autres améliorations ont ouvert la voie à l'utilisation industrielle réelle de la méthode LBM. Tout au long de cet historique, il est évident que la méthode de Boltzmann sur réseau vue aujourd'hui est le résultat d'une amélioration des modèles des gaz sur réseau depuis plus d'un siècle.

### 3.4.2 Equation de transport de Boltzmann :

L'équation de Boltzmann décrit la dynamique d'un gaz à l'échelle mésoscopique et conduit aux équations de la dynamique des fluides à l'échelle macroscopique. Une quantité de base d'un système statistique peut être expliquée par la fonction de distribution,  $f(r, c, t)$ , représenter le nombre de molécules à l'instant  $t$  positionnées entre  $r$  et  $r+dr$  qui ont des vitesses comprises entre  $c$  et  $c+dc$ .

Le nombre de molécules,  $f(r, c, t)$ , avant appliquer la force extérieure est égal au nombre de molécules après la perturbation,  $f(r+c dt, c+F dt, t+dt)$ , si aucune collision n'a lieu entre les molécules. On écrit :

$$f(r+c dt, c+F dt, t+dt) dr dc - f(r, c, t) dr dc = 0 \quad (3.38)$$

Où  $c+F dt$  et  $r+c dt$  sont les changements de vitesse  $c$  et de position  $r$  de particule due à une force extérieure  $F$ .

D'autre part, il y aura une nette différence entre les nombres de molécules dans l'intervalle  $drdc$  si des collisions ont lieu entre les molécules. Un taux de changement appelé opérateur de collision,  $\Omega$ , se situera entre l'état final et l'état initial de la fonction de distribution. Donc, la forme de l'équation pour le nombre de molécules peut s'écrire :

$$f(r+c dt, c+F dt, t+dt) drdc - f(r, c, t) drdc = \Omega(f) drdc dt \quad (3.39)$$

La division de l'équation ci-dessus par  $dt drdc$  et pour la limite  $dt \rightarrow 0$ , donne :

$$\frac{df}{dt} = \Omega(f) \quad (3.40)$$

Cette équation indique que le taux total de changement de la fonction de distribution est égal au taux de collision. Le taux total de changement peut être étendu, car  $f$  est une fonction de  $r$ ,  $c$  et  $t$ , et en écrit :

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \quad (3.41)$$

La division de l'équation (3.41) par  $dt$  donne :

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial r} c + \frac{\partial f}{\partial c} a + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \quad (3.42)$$

Où  $c$  et  $a$  égal respectivement à  $dr/dt$  et  $dc/dt$ , l'accélération est liée à la force  $F$  par la deuxième loi de Newton,  $a=F/m$ . Donc, l'équation de transport de Boltzmann peut s'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot c + \frac{F}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial c} = \Omega \quad (2.43)$$

Pour un système sans force extérieure, l'équation de Boltzmann devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \Omega \quad (2.44)$$

L'opérateur de collision  $\Omega$  doit être déterminé pour résoudre l'équation de Boltzmann.

### 3.4.3 Approximation BGK :

Un des problèmes majeurs rencontrés avec l'équation de Boltzmann est la nature compliquée de l'opérateur de collision. Il n'est donc pas surprenant que des expressions alternatives plus simples aient été proposées. L'idée derrière ce remplacement est que le résultat de deux collisions corporelles n'est pas susceptible d'influencer de manière significative les

valeurs de nombreuses grandeurs mesurées (Cercignani, 1990). Il est donc possible de rapprocher un opérateur simplifié sans introduire des résultats d'erreur significative.

En 1954, Bhatnagar, Gross et Krook (BGK) introduisent un modèle simplifié pour les opérateurs de collision, et cela peut être écrit comme suit :

$$\Omega = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (3.45)$$

Où :  $\omega = 1/\tau$ .

Le coefficient  $\omega$  est appelé fréquence de collision et  $\tau$  est le facteur de relaxation.  $f^{eq}$  désigne la fonction de distribution d'équilibre local, qui est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann.

La mise en œuvre de l'approximation BGK dans l'équation de Boltzmann (Eq. (3.44), sans forces extérieures) donne :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (3.46)$$

L'équation discrète de Boltzmann le long d'une direction spécifiée peut être donnée comme suit:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c_i \cdot \nabla f_i = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (3.47)$$

En CFD, l'équation ci-dessus conduit aux mêmes résultats que les équations de Navier-Stokes et leurs termes décrivent les points suivants :

- Elle est une équation linéaire aux dérivées partielles (PDE).
- Le côté gauche de l'équation représente l'advection (streaming).
- Le terme de droite représente le processus de collision, terme source.

L'équation (3.47) peut être discrétisée comme suit :

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(r, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] \quad (3.48)$$

Le type de problème à résoudre est déterminé par la fonction de distribution d'équilibre local et le temps de relaxation.

### 3.4.4 Arrangement du réseau :

La méthodologie de la LBM suggère que le domaine de la solution doit être divisé en réseau. Une particule (fonction de distribution) réside en chaque point d'un nœud de réseau. Certaines de ces particules se propagent (se déplacent) le long des directions spécifiées vers les nœuds voisins. Par conséquent, le nombre de directions dépend de l'arrangement du réseau.

Les différents arrangements du réseau sont unifiés par une terminologie commune [151], il s'agit de se référer à la dimension du problème et au nombre de vitesses en utilisant le terme

$DnQm$ . Ici,  $n$  se réfère à la dimension du problème (1 pour 1-D, 2 pour 2-D et 3 pour 3-D) et  $m$  se présente le nombre des vitesses.

De plus, dans un algorithme de LBM, chaque modèle  $DnQm$  est défini par : les vitesses ( $c_i$ ) et les facteurs de poids correspondant ( $w_i$ ).

Dans ce travail, la technique LBM est appliquée pour ne considérer que l'écoulement bidimensionnel dans une cavité doublement entraînée. Ainsi, certains des arrangements de réseau 2D seront décrits ci-dessous ( $D2Q5$ ,  $D2Q9$ ).

#### 3.4.4.1 Réseau D2Q5 :

Le modèle D2Q5 est le plus utilisé pour les problèmes thermiques, il comporte cinq vitesses (Fig 3.5). Une des particules réside au nœud central ( $f_0$ ), sa vitesse est donc nulle, notée  $c(0, 0)$ . Les fonctions de distribution  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  se déplacent avec  $c(1, 0)$ ,  $c(-1, 0)$ ,  $c(0, 1)$  et  $c(0, -1)$  à l'est, à l'ouest, au nord et au sud, respectivement.

Les facteurs de poids pour  $f_0, f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  sont  $2/6, 1/6, 1/6, 1/6$  et  $1/6$ , respectivement. Il convient de noter qu'il est supposé que  $\Delta x = \Delta y = \Delta t$ . Malheureusement, ce modèle ne permet pas de simuler les écoulements de fluide.

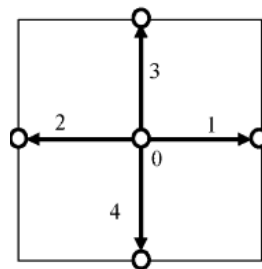


Figure 3.5. Réseau D2Q5.

#### 3.4.4.2 Réseau D2Q9 :

Ce modèle est le plus couramment utilisé pour résoudre les problèmes d'écoulement des fluides. Il a neuf vitesses avec une vitesse centrale des particules étant nulle (Fig 3.6). Les vitesses sont :  $c(0, 0)$ ,  $c(1, 0)$ ,  $c(0, 1)$ ,  $c(-1, 0)$ ,  $c(0, -1)$ ,  $c(1, 1)$ ,  $c(-1, 1)$ ,  $c(-1, -1)$  et  $c(1, -1)$  pour les fonctions de distributions  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$  et  $f_8$ , respectivement.

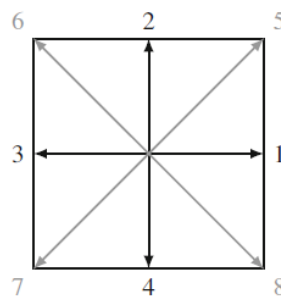


Figure 3.6. Réseau D2Q9.



Les facteurs de poids pour ces fonctions de distributions sont respectivement 4/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/36, 1/36, 1/36 et 1/36.

Ce modèle a été choisi pour la présente étude et les implémentations et applications seront discutées ci-dessous.

### 3.4.5 Fonction de distribution d'équilibre :

La fonction de distribution d'équilibre  $f^{eq}$  est un élément clé dans l'application du LBM pour différents problèmes. En fait, la procédure de résolution des équations est la même, la différence dépend principalement de la fonction de distribution d'équilibre.

La forme générale de la fonction de distribution d'équilibre obtenue à partir d'une fonction de distribution de Maxwell normalisée peut s'écrire :

$$f_i^{eq} = \Phi \omega_i \left[ A + B c_i \cdot u + C (c_i \cdot u)^2 + D u^2 \right] \quad (3.49)$$

$$\Phi = \sum_{i=0}^{i=n} f_i^{eq} \quad (3.50)$$

Où  $u$  est le vecteur de vitesse de l'écoulement macroscopique.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des constantes qui doivent être déterminées sur la base du principe de conservation (de mass et de mouvement).  $\Phi$  représente un paramètre scalaire tel que la densité ( $\rho$ ), et il est égal à la somme de toutes les fonctions de distribution.  $n$  est le nombre de mailles.

### 3.4.6 Modèle SRT à simple temps de relaxation :

L'équation de Boltzmann sur réseau pour le modèle SRT est obtenue de la même manière lorsqu'un opérateur BGK est inclus. Cette équation peut être reformulée à partir de l'équation (2.48) comme suit :

$$f_i(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_i(x, t) [1 - \omega] + \omega f_i^{eq}(x, t) \quad (3.51)$$

Où :  $\omega = \Delta t / \tau$ , représente le temps de relaxation.

La seule différence est la fonction de distribution d'équilibre caractérisant chaque problème. Par exemple, la fonction de distribution d'équilibre pour un problème d'advection-diffusion est donnée par :

$$f_i^{eq} = w_i \phi \left[ 1 + \frac{c_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} \right] \quad (3.52)$$

La fonction de distribution d'équilibre pour un problème d'écoulement de fluide incompressible peut s'écrire :

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[ 1 + \frac{c_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(c_i \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c_s^2} \right] \quad (3.53)$$

Où :  $\mathbf{u}$  est le vecteur de vitesse, par exemple pour un cas 2-D, le vecteur  $\mathbf{u}=u_i+v_j$ . Le terme  $c_s$  représente la vitesse du son qui est pour les arrangements,  $D1Q2$ ,  $D2Q4$  et  $D3Q6$ , égale à :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.54)$$

Pour les arrangements  $D1Q3$ ,  $D2Q5$ ,  $D2Q9$  et  $D3Q15$ , la vitesse du son égale a :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3.55)$$

$c_i$  est un vecteur unitaire désigne la vitesse de propagation de la fonction de distribution le long du direction du réseau :

$$c_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} i + \frac{\Delta y}{\Delta t} j \quad (3.56)$$

### 3.4.6.1 Exemple avec un Modèle D2Q9 pour un écoulement de fluide incompressible :

En substituant les valeurs des vitesses  $c_i$ , les facteurs de poids  $w_i$  et la vitesse du son  $c_s$  dans l'équation (3.53), on obtient les fonctions de distributions à l'équilibre pour chaque point des nœuds ( $i : 0$  à  $8$ ) du réseau de la manière suivante :

$$f_0^{eq} = \frac{2\rho}{9} (2 - 3\mathbf{u}^2) \quad (3.57)$$

$$f_1^{eq} = \frac{\rho}{18} (2 + 6u + 9u^2 - 3\mathbf{u}^2) \quad (3.58)$$

$$f_2^{eq} = \frac{\rho}{18} (2 + 6v + 9v^2 - 3\mathbf{u}^2) \quad (3.59)$$

$$f_3^{eq} = \frac{\rho}{18} (2 - 6u + 9u^2 - 3\mathbf{u}^2) \quad (3.60)$$

$$f_4^{eq} = \frac{\rho}{18} (2 - 6v + 9v^2 - 3\mathbf{u}^2) \quad (3.61)$$

$$f_5^{eq} = \frac{\rho}{36} (1 + 3(u + v) + 9uv + 3\mathbf{u}^2) \quad (3.62)$$

$$f_6^{eq} = \frac{\rho}{36} (1 - 3(u - v) - 9uv + 3\mathbf{u}^2) \quad (3.63)$$

$$f_7^{eq} = \frac{\rho}{36} (1 - 3(u + v) + 9uv + 3\mathbf{u}^2) \quad (3.64)$$

$$f_8^{eq} = \frac{\rho}{36} (1 + 3(u - v) - 9uv + 3\mathbf{u}^2) \quad (3.65)$$

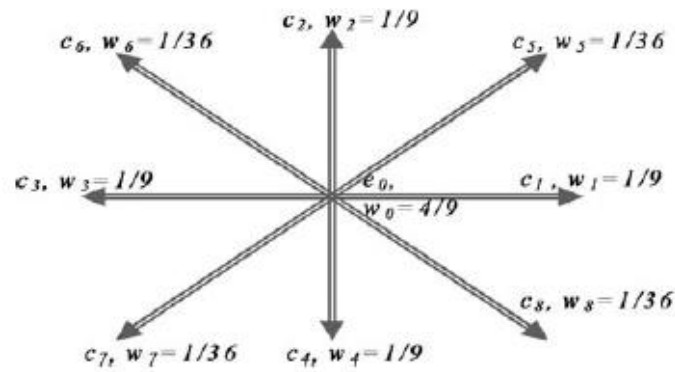


Figure 3.7. Directions de propagation (réseau  $D2Q9$ ).

### 3.4.7 Modèle MRT à plusieurs temps de relaxation :

En LBM, si l'on veut atteindre un nombre de Reynolds élevé ( $Re = uN\Delta x/v$ ), il est possible soit d'augmenter l'amplitude de la vitesse macroscopique ( $u$ ) ou le nombre de nœuds ( $N$ ), soit de diminuer la viscosité ( $v$ ). L'augmentation de  $N$  est limitée par le maintien de la mémoire et du temps d'exécution requis. L'approche habituelle consiste à diminuer la viscosité et/ou augmenter la vitesse macroscopique, ce qui entraîne des problèmes d'instabilité et de précision. BGK n'est que l'opérateur de collision le plus simple disponible avec un seul temps de relaxation  $\tau$ , ce qui rend beaucoup plus difficile la gestion de ces problèmes d'instabilité. L'extension possible est un modèle plus avancé où la stabilité est nettement améliorée avec un opérateur de collision de multiples temps de relaxation (MRT). En fait, le modèle MRT développé par d'Humières en 1992 avec des degrés de liberté supplémentaires, s'est avéré assez efficace pour surmonter les limitations du modèle SRT.

L'équation de Boltzmann sur réseau pour un opérateur de collision MRT peut s'écrire :

$$f_i(x + c\Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\mathbf{\Omega} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] \quad (3.66)$$

Où :  $\mathbf{\Omega}$  est la matrice de collision. L'idée de base de l'opérateur de collision MRT est de relaxer les moments avec des taux individuels. L'opérateur de collision BGK, au contraire, détend tous les moments avec un taux de relaxation. Par conséquent, l'équation 3.66 peut être transformée sous la forme suivante :

$$f_i(x + c\Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} [\mathbf{m}(x, t) - \mathbf{m}_i^{eq}(x, t)] \quad (3.67)$$

Où :  $\mathbf{S}$  représente une matrice diagonale de relaxation.  $\mathbf{m}(x, t)$  et  $\mathbf{m}^{eq}$  sont des vecteurs de moments.

Les fonctions de distribution  $\mathbf{f}$  sont reliées au moments  $\mathbf{m}$  par une transformation linéaire avec la matrice  $\mathbf{M}$  :

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{f} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m} \quad (3.68)$$

La matrice  $\mathbf{M}$  pour un réseau D2Q9 est la suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs moment  $\mathbf{m}$  sont donnés par [153] :

$$\mathbf{m} = (\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T \quad (3.69)$$

Les vecteurs moment à l'équilibre  $\mathbf{m}^{eq}$  sont donné par :

$$\begin{aligned} m_0^{eq} &= \rho, m_1^{eq} = -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2), m_2^{eq} = \rho - 3(j_x^2 + j_y^2), m_3^{eq} = j_x, m_4^{eq} = -j_x \\ m_5^{eq} &= j_y, m_6^{eq} = -j_y, m_7^{eq} = (j_x^2 - j_y^2), m_8^{eq} = j_x j_y \end{aligned} \quad (3.70)$$

Où :  $\rho$  représente la densité.  $e$  est le moment de deuxième ordre correspondant à l'énergie.  $\epsilon$  est le moment de quatrième ordre.  $j = \rho u$  désigne la quantité de mouvement et  $u$  la vitesse de l'écoulement.  $q_x$

et  $q_y$  sont les moments de troisième ordre correspondant au flux d'énergie.  $P_{xx}$  et  $P_{xy}$  représentent deux composantes indépendantes du tenseur de contraintes.

La matrice diagonale  $\mathbf{S}$  est donné par [153], et sa notation compacte peut s'écrire :

$$\mathbf{S} = \text{diag} (1.0, 1.4, 1.4, s3, 1.2, s5, 1.2, s7, s8) \quad (3.71)$$

Où :  $s7 = s8 = 2/(1 + 6\nu)$ ,  $s3$  et  $s5$  sont arbitraires et peuvent être réglés sur 1.0.

En bref, la procédure est la même que pour la méthode SRT, on peut écrire :

$$c_s = \frac{c_i}{\sqrt{3}} \quad (3.72)$$

$$\nu = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s_v} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.73)$$

Où :  $c_s$  et  $\nu$  désigne respectivement la vitesse du son et la viscosité cinématique.

La densité et la quantité de mouvement d'une échelle macroscopique peuvent être obtenues à partir des fonctions de distribution comme suit :

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \tag{3.74}$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^8 \mathbf{c}_i f_i \tag{3.75}$$

### 3.4.8 Conditions aux limites :

Une application précise des conditions aux limites est l'un des principaux problèmes de la simulation LBM. Contrairement à la spécification simple dans les méthodes conventionnelles de CFD, l'identification des fonctions de distribution aux limites du domaine est la solution clé dans la méthode LBM. Au cours des trois dernières décennies, différentes approches ont été suggérées et testées dans la littérature [154-157], plusieurs d'entre elles ont été validées et sont utilisées jusqu'à présent.

Ces approches sont utilisées selon les caractéristiques du domaine du cas étudié, dans ce qui suit, nous mentionnons uniquement les conditions aux limites utilisées dans la présente étude.

#### 3.4.8.1 La condition sur les murs : une approche de rebond :

Les phénomènes d'écoulement de fluide confiné et d'autres problèmes impliquent des parois solides, qui peuvent être stationnaires ou en mouvement, avec des conditions de non-glissement. La méthode de rebond [145, 158-160] est l'une des méthodes les plus utilisées pour modéliser les parois. Elle est largement utilisée dans la communauté LB en raison de sa simplicité de mise en œuvre avec un concept adopté à partir des modèles de gaz sur réseau [140, 145, 161, 162].

La méthode est assez simple et implique principalement qu'une particule entrante vers la limite du solide est réfléchiée vers son point d'origine. Ceci est illustré dans la figure 3.8. En bref, la formule générale du rebond peut s'exprimer par :

$$f_k = f_{k,opposée} \tag{3.76}$$

Où :  $f_k$  et  $f_{k,opposée}$  désignent les fonctions de distributions de deux directions opposées.

De plus, quelques versions du schéma de rebond ont été suggérées dans la littérature, mais la plus simple indique que les réseaux sont situés directement à la surface solide comme le montre la figure 3.8. Cela laisse, par exemple pour une paroi stationnaire inférieure,  $f_5=f_7$ ,  $f_2=f_4$  et  $f_6=f_8$ .

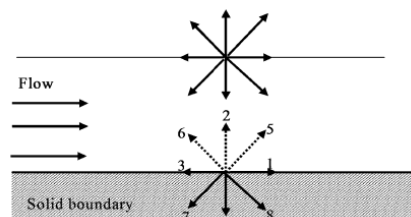


Figure 3.8. Le rebond des particules aux frontières.

Dans notre cas d'étude, l'approche de rebond est appliquée pour les deux parois stationnaires (parois gauche et droite de la cavité).

### 3.4.8.2 Conditions aux limites avec une vitesse connue :

Dans un problème CFD, les composantes de la vitesse d'écoulement doivent être spécifiées avec précision aux limites. Cependant, en LBM, les fonctions de distribution inconnues doivent être bien définies sur la base des fonctions de distributions connues.

Pour un exemple de la cavité entraînée avec des parois mobiles, les particules rebondies doivent gagner ou perdre une quantité de mouvement donnée après avoir heurté la paroi. Ceci rend l'équation (3.76) non valide.

Un effort a été fait par Zhu et He [163] qui ont défini une méthode pour calculer les fonctions de distribution inconnues basées sur les équations de conservation de masse (3.74) et de mouvement (3.75).

Pour le modèle D2Q9, l'équation de conservation de masse (3.74) s'écrit :

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (3.77)$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement (3.75) s'écrit :

- Suivant la composante x :

$$\rho u = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \quad (3.78)$$

- Suivant la composante y :

$$\rho v = f_5 + f_2 + f_6 - f_7 - f_4 - f_8 \quad (3.79)$$

Le concept peut être mieux illustré par l'exemple représenté à la figure 3.9, où les composantes de vitesse sont connues sur toutes les frontières (Est, Ouest, Nord et Sud). Dans la figure, les fonctions de distribution connues sont indiquées par des lignes continues tandis que les fonctions de distribution inconnues sont indiquées par des lignes pointillées. Ça vaut la peine de noter que dans notre cas d'étude, seules les limites supérieure et inférieure sont en mouvement.

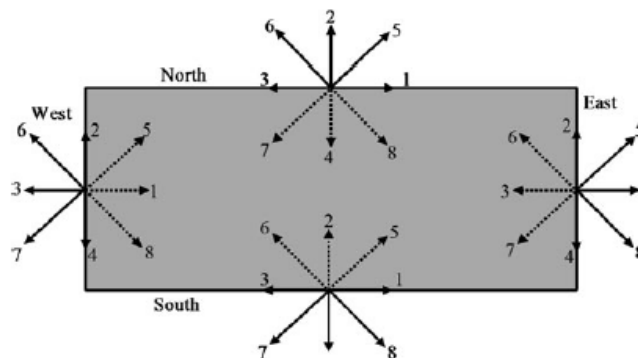


Figure 3.9. Fonctions de distribution aux parois de la géométrie.

### 3.4.8.2.1 Vitesse imposée au paroi Nord :

Pour la limite supérieure, les fonctions de distribution connues sont :  $f_2, f_5, f_6$ . Les fonctions de distributions  $f_4, f_7, f_8$  ainsi que la densité  $\rho_N$  sont inconnues. La condition d'équilibre normale à la frontière peut s'écrire de la manière suivante :

$$f_4 - f_4^{eq} = f_2 - f_2^{eq} \quad (3.80)$$

Où :  $f_4^{eq}$  peut être calculé à partir de l'équation (3.53) ce qui donne :

$$f_4 = f_2 - \frac{2}{3} \rho_N v_N \quad (3.81)$$

La Résolution des équations (3.77-3.81) pour quatre inconnues ( $f_4, f_7, f_8$  et  $\rho_N$ ) donne les équations suivantes :

$$\rho_N = \frac{1}{1+v_N} [f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_2 + f_6 + f_5)] \quad (3.82)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6} \rho_N v_N - \frac{1}{2} \rho_N u_N \quad (3.83)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_3 - f_1) + \frac{1}{2} \rho_N u_N - \frac{1}{6} \rho_N v_N \quad (3.84)$$

Les conditions pour les autres limites (Est, Ouest et Sud) peuvent être données en suivant la même procédure.

### 3.4.8.2.2 Vitesse imposée au paroi Sud :

Pour la limite inférieure, les fonctions de distribution connues sont :  $f_4, f_7, f_8$ . Les fonctions de distributions  $f_2, f_5, f_6$  ainsi que la densité  $\rho_S$  sont inconnues.

$$\rho_S = \frac{1}{1-v_S} [f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_4 + f_7 + f_8)] \quad (3.85)$$

$$f_2 = f_4 + \frac{2}{3} \rho_S v_S \quad (3.86)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_1 - f_3) + \frac{1}{6} \rho_S v_S + \frac{1}{2} \rho_S u_S \quad (3.87)$$

$$f_6 = f_8 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) + \frac{1}{6} \rho_S v_S - \frac{1}{2} \rho_S u_S \quad (3.88)$$

### 3.4.9 Processus de collision et de propagation :

Le concept de résolution dans la méthode de Boltzmann sur réseau basé sur les particules de fluide comme un point de départ se fait en deux sous-étapes principales appelées collision et propagation.

La première partie qui est la collision provient de la partie droite de l'équation de transport de Boltzmann (3.48), ce qui signifie que chaque fonction de distribution  $f_i(x, t)$  reçoit une contribution de collision :

$$f_i^*(x, t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] \quad (3.89)$$

Où :  $f_i^*$  désigne l'état de la fonction de distribution après la collision et  $f_i^{eq}$  la fonction de distribution d'équilibre.

L'autre étape est l'étape de diffusion ou de propagation provient de la partie gauche de l'équation de transport de Boltzmann (3.48). Ici, les fonctions de distribution post-collision  $f_i^*$  ne font que suivre leur direction associée  $c_i$  pour atteindre un site de réseau voisin où elles deviennent  $f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t)$  :

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(x, t) \quad (3.90)$$

### 3.4.10 La conservation de masse et de quantité de mouvement :

La densité macroscopique du fluide peut être représentée par la sommation des fonctions de distribution à chaque nœud du réseau, c'est la conservation de la masse. Pour un réseau D2Q9 on écrit :

$$\rho = \sum_{k=0}^8 f_k \quad (3.91)$$

La conservation de la quantité de mouvement peut être représentée comme une sommation du produit des vitesses microscopique du réseau par la fonction de distribution :

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{k=0}^8 f_k \mathbf{c}_k \quad (3.92)$$

### 3.4.11 Conclusion :

Ce chapitre a été consacré pour la présentation de méthodes numérique utilisée pour la simulation du problème étudié. Cela inclut la méthode des volumes finis (FVM) intégrée dans le code commercial Ansys Fluent, la modélisation de la turbulence ainsi que la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) comme une nouvelle méthode prometteuse. Dans le chapitre suivant, la validation et les résultats avec leurs interprétations seront détaillés.



## Chapitre 4 : Résultats et discussions

### 4.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de la simulation numérique de l'écoulement de fluide dans une cavité simplement entraînée et dans une cavité doublement entraînée avec différents nombres de Reynolds.

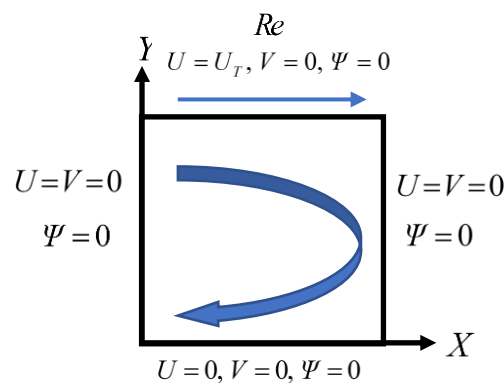
Tout d'abord, l'étude numérique du problème de référence de la cavité entraînée est réalisée pour objectif de validation, puis il vise à explorer ce type d'écoulement au sein des nombres de Reynolds très élevés.

Deuxièmement, l'étude de la cavité doublement entraînée est réalisée avec deux méthodes à savoir, la méthode des volumes finis et la méthode de Boltzmann sur réseau, proposée pour révéler l'écoulement de fluide entraîné avec différents rapports de Reynolds.

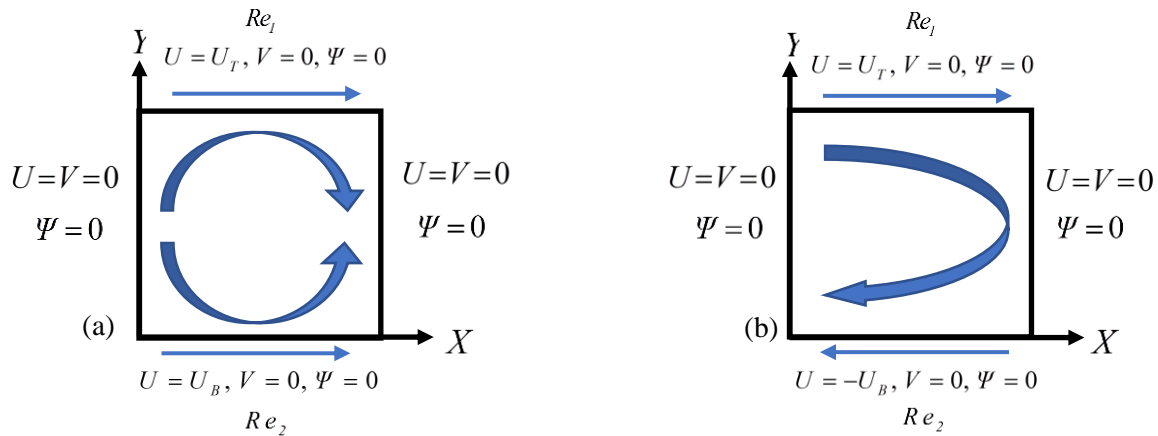
Pour terminer, une évaluation numérique de l'écoulement turbulent de fluide dans une cavité antiparallèlement doublement entraînée est effectuée dans la vicinity des nombres de Reynolds élevés.

### 4.2 Description du problème étudié :

Deux modes d'entraînement sont considérés, il s'agit de deux configurations géométriques données par le problème de la cavité simplement entraînée (Fig 4.1), et celui de la cavité doublement entraînée (Fig 4.2).



**Figure 4.1.** Vue schématique de la cavité entraînée.



**Figure 4.2.** Vue schématique de la cavité doublement entraînée : (a) entrainement parallèle, (b) entrainement antiparallèle.

#### 4.2.1 Cavité simplement entraînée :

On considère un écoulement d'un fluide newtonien incompressible mis en mouvement dans une cavité carrée ( $\Gamma=1$ ). Dans cette configuration (Fig 4.1), la paroi supérieure se déplace vers la droite avec une vitesse constante tandis que les trois parois restantes sont supposées stationnaires.

#### 4.2.2 Cavité doublement entraînée :

Pour le deuxième cas de la cavité doublement entraînée, le fluide est mis en mouvement sous l'effet de deux parois mobiles. Les parois supérieure et inférieure se déplacent indépendamment et simultanément vers la droite pour un entrainement parallèle (Fig 4.2a). Cependant, pour un entrainement antiparallèle, la paroi inférieure glisse dans la direction gauche opposée à la paroi supérieure (Fig 4.2b). Les deux parois verticales restantes sont considérées stationnaires.

#### 4.3 Les hypothèses de calcul :

Les hypothèses retenues dans les cas à étudier comprennent les points suivants :

- Le fluide est considéré Newtonien et incompressible.
- L'écoulement est considéré stationnaire et bidimensionnel (suivant les coordonnées cartésiennes  $X$  et  $Y$ ).
- L'écoulement peut être soit en régime laminaire ou turbulent.
- Les propriétés physiques du fluide sont constantes.
- Le transfert de chaleur est négligeable.

En prenant compte de toutes ces hypothèses, les équations adimensionnelles de conservation de masse et de mouvement (Navier-Stokes équations) peuvent s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right] \quad (4.2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] \quad (4.3)$$

Dans les équations (4.1-4.3),  $X=x/H$ ,  $Y=y/H$ ,  $U= u/U_T$ ,  $V= v/U_T$  et  $P=p/\rho U_T^2$  respectivement représentent les variables adimensionnelles de la position du fluide dans les coordonnées cartésiennes, les composants de vitesse et la pression. Avec ( $H$ ) désigne la hauteur physique de la cavité, ( $\rho$ ) la densité du fluide et ( $\mu$ ) la viscosité dynamique, le nombre de Reynolds peut s'écrire :

$$Re_{1,2} = \frac{\rho U_{T,B} H}{\mu} \quad (4.4)$$

Où :  $Re_2=0$ , dans le cas du problème de la cavité entraînée.

La fonction du courant ( $\psi$ ) et la vorticité ( $\omega$ ) peuvent être obtenues à partir des définitions des composantes de vitesse :

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial Y}, V = \frac{\partial \psi}{\partial X}, \nabla^2 \psi = \omega \quad (4.5)$$

Il est à noter que les équations moyennées de Reynolds (3.18 et 3.19) remplacent les équations de Navier-Stokes précitées (4.1-4.3) dans le cas d'un régime turbulent.

#### 4.4 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites de l'écoulement de la cavité sont utilisées dans le calcul numérique et exprimées sous forme adimensionnelle généralisée comme suit :

Limites	Cavité entraînée	Cavité doublement entraînée
(a) Paroi supérieure (Y=1)	$U = U_T, V = 0, \Psi = 0$	$U = U_T, V = 0, \Psi = 0$
(b) Paroi inférieure (Y=0)	$U = V = 0, \Psi = 0$	$U =  U_B , V = 0, \Psi = 0$
(c) Paroi droite (X=1)	$U = V = 0, \Psi = 0$	$U = V = 0, \Psi = 0$
(d) Paroi gauche (X=0)	$U = V = 0, \Psi = 0$	$U = V = 0, \Psi = 0$

Dans le cas d'une cavité doublement entraînée, les conditions (a), (c) et (d) sont identiques pour un mouvement de paroi parallèle et antiparallèle. Cependant, la composante de vitesse  $U$  dans la condition (b) provoque respectivement ( $U=U_B$ ) et ( $U=-U_B$ ) pour un mouvement de paroi parallèle et antiparallèle.

La valeur de la fonction de courant disparaît à toutes les parois ( $\Psi = 0$ ) avec une condition de non-glissement aux parois non poreuses.

## 4.5 Étude du maillage :

Afin de choisir un maillage optimal pour la mise en œuvre dans la présente étude, une analyse de sensibilité de grille a été utilisée. Le logiciel ICEM-CFD gère la génération du maillage hexaédrique structuré pour le cas de la méthode des volumes finis utilisé.

### 4.5.1 Cavitité simplement entraînée :

Pour tous les résultats de l'écoulement dans une cavité simplement entraînée présentés avec la méthode des volumes finis (FVM), un maillage uniforme très fin avec une résolution de  $1024 \times 1024$  a été utilisé. Cela nous a permis d'obtenir des solutions stationnaires convergées jusqu'à un nombre de Reynolds très élevé (Fig 4.3).

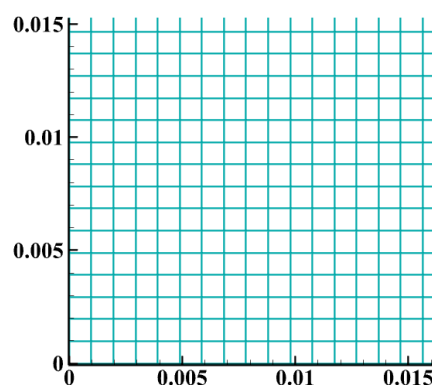


Figure 4.3. Vue rapprochée de la grille utilisée ( $1024 \times 1024$ ).

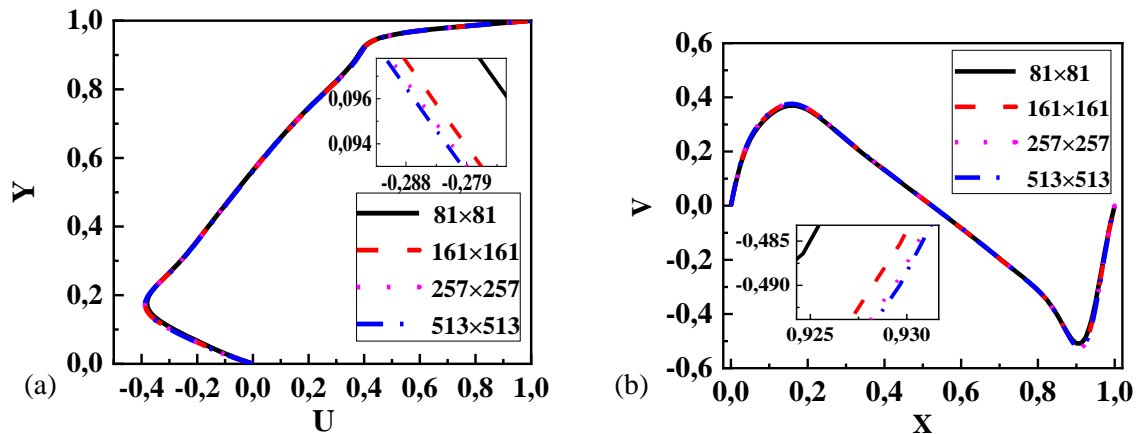
### 4.5.2 Cavitité doublement entraînée :

L'étude de dépendance de maillage pour ce cas a été menée pour des résolutions de grille relativement faibles. Cela est dû aux nombres de Reynolds suggérés dans des valeurs relativement faibles par rapport au premier cas (cavitité simplement entraînée). Le challenge est de sélectionner une taille de grille optimale avec moins de temps de calcul et une bonne précision.

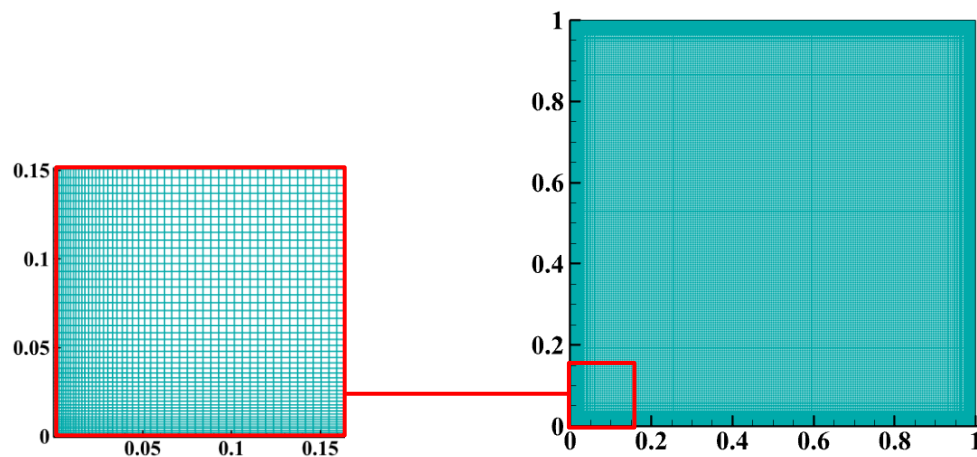
#### (a) Méthode des volumes finis (FVM) :

Les composantes de vitesses  $U$  et  $V$  des plans médians vertical et horizontal d'une cavité simplement entraînée, sont calculées avec la méthode des volumes finis pour  $Re = 1000$ . Quatre maillages d'une grille non uniforme ont été testés :  $81 \times 81$ ,  $161 \times 161$ ,  $257 \times 257$  et  $513 \times 513$  comme le montre la figure 4.4.

On voit que les courbes de vitesse sont très proches et les différences sont presque marginales, surtout lorsque la taille de la grille dépasse  $257 \times 257$ , où elle devient moins efficace sur les solutions obtenues. Par conséquent, pour gagner du temps et obtenir des résultats plus précis, un maillage hexaédrique structuré de  $257 \times 257$  points distribués de manière non égale (resserré près des parois) est adopté et utilisée pour tous les calculs de l'écoulement de la cavité doublement entraînée (Fig 4.5).



**Figure 4.4.** Effet du maillage sur les composantes de vitesses  $U$  et  $V$  passant respectivement par la ligne médiane verticale (a) et la ligne médiane horizontale (b) pour  $Re=1000$ .

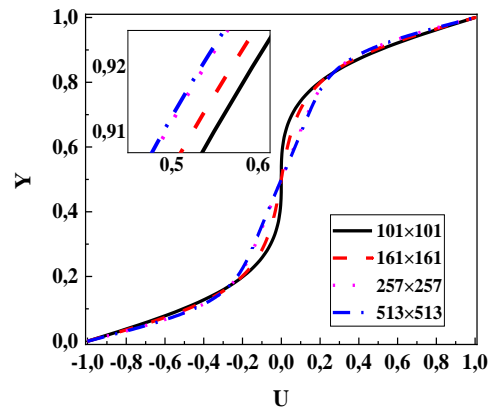


**Figure 4.5.** Vue rapprochée de la grille utilisée ( $257 \times 257$ ).

#### (b) Méthode de Boltzmann sur réseau à temps de relaxation multiples (MRT-LBM) :

Afin d'étudier l'influence de la taille du maillage sur les résultats obtenus par la méthode de Boltzmann sur réseau à multiple temps de relaxation (MRT-LBM), la composante de la vitesse  $U$  le long de la ligne médiane verticale ( $X=1/2$ ) a été examinée pour quatre grilles de tailles différentes,  $101 \times 101$ ,  $161 \times 161$ ,  $257 \times 257$  et  $513 \times 513$  (Fig 4.6). Pour cela nous avons considéré le cas de l'écoulement du fluide dans une cavité doublement entraînée avec un entraînement antiparallèle des deux parois opposées avec  $Re_1 = -Re_2 = 100$ .

Lors de l'examen de la figure 4.6, il a été constaté que l'augmentation du nombre de mailles au-dessus de  $257 \times 257$  a un effet réduit sur le résultat obtenu. Par contre, il est clairement visible que le profil de vitesse est plus sensible avec les deux résolutions  $101 \times 101$  et  $161 \times 161$ . En tenant compte du temps d'exécution du code de calcul (Matlab) pris en utilisant la grille  $513 \times 513$ , le maillage d'une résolution  $257 \times 257$  a été adopté comme un choix optimal vu qu'il donne une bonne précision avec moins de temps CPU.

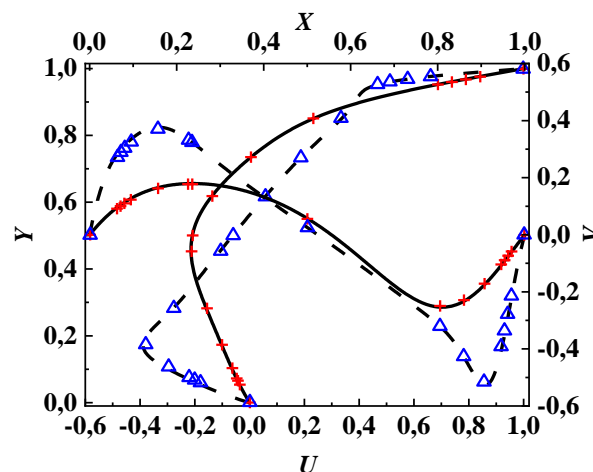


**Figure 4.6.** Effet du maillage sur la composante de vitesse  $U$  passant par la ligne médiane verticale pour  $Re_1 = -Re_2 = 100$ .

#### 4.6 Validation du code de calcul :

Des tests de vérification rigoureux devraient être effectués pour confirmer la méthode de solution proposée. Le but est d'évaluer la précision du code afin de lui donner plus de crédibilité. Les résultats obtenus avec la méthode des volumes finis adopté dans le code Ansys Fluent ont été comparés avec d'autres bien connus dans la littérature.

Tout d'abord, le cas de la cavité simplement entraînée a été considéré à des fins de validations. Ceci est illustré respectivement par la figure 4.7 et le tableau 4.1 en termes des profils de vitesse et des emplacements des vortex. En effet les composantes de vitesses  $U$  et  $V$  passant par les lignes médianes verticale et horizontale de la cavité pour  $Re = 100$  et  $1000$ , se sont avérés en bon accord avec celles publiées par Ghia et al. [10]. Dans le même contexte, les emplacements des vortex primaires et secondaires calculés pour différents nombres de Reynolds se sont avérés proches des valeurs décrit dans la littérature.



**Figure 4.7.** Comparaison des composantes de vitesses  $U$  et  $V$  passant respectivement par les axes médians  $X=0.5$  et  $Y=0.5$  : Les résultats actuels sont définis par des lignes, les symboles indiquent les calculs de Ghia et al. [10]. La ligne continue et le symbole  $+$  pour  $Re=100$ . La ligne discontinue et le symbole  $\Delta$  pour  $Re=1000$ . Les résolutions de nos calculs et celles de Ghia et al. [10] sont  $257 \times 257$  et  $129 \times 129$ , respectivement.

**Tableau 4.1.** Validation des emplacements des vortex primaires et secondaires.

$Re$	Auteur	Maillage	Vortex Primaire		Vortex secondaire droit		Vortex secondaire gauche	
			X	Y	X	Y	X	Y
100	Ghia et al [10]	(129×129)	0.6172	0.7344	0.9453	0.0625	0.0313	0.0391
	Vanka [6]	(321×321)	0.6188	0.7375	0.9375	0.0563	0.0375	0.0313
	Schreiber et Keller [11]	(180×180)	0.6167	0.7417	0.9417	0.0500	0.0333	0.0250
	Hou et al. [12]	(256×256)	0.6196	0.7373	0.9451	0.0627	0.0392	0.0353
	Bruneau et Jouron [8]	(128×128)	0.6172	0.7344	0.9453	0.0625	0.0313	0.0391
	Zhang [9]	(129×129)	0.6172	0.7343	-	-	-	-
	Ghupta et Kalita [13]	(81×81)	0.6125	0.7375	0.9375	0.0625	0.0375	0.0375
	Marchi et al. [5]	(1024×1024)	0.6162	0.7373	-	-	-	-
	AbdelMigid et al. [7]	(601×601)	0.6156	0.7371	0.9418	0.0616	0.0333	0.0349
	<b>Present</b>	<b>(1024×1024)</b>	<b>0.6157</b>	<b>0.7373</b>	<b>0.9424</b>	<b>0.0618</b>	<b>0.0345</b>	<b>0.0344</b>
400	Ghia et al [10]	(129×129)	0.5547	0.6055	0.8906	0.1205	0.0508	0.0469
	Vanka [6]	(321×321)	0.5563	0.6000	0.8875	0.1188	0.0500	0.0500
	Schreiber et Keller [11]	(180×180)	0.5571	0.6071	0.8857	0.1143	0.0500	0.0429
	Hou et al. [12]	(256×256)	0.5608	0.6078	0.8902	0.1255	0.0549	0.0510
	Ghupta et Kalita [13]	(81×81)	0.5563	0.6000	0.8875	0.1188	0.0500	0.0500
	Marchi et al. [5]	(1024×1024)	0.5537	0.6054	-	-	-	-
	AbdelMigid et al. [7]	(601×601)	0.5541	0.6057	0.8852	0.1215	0.0516	0.0466
	<b>Present</b>	<b>(1024×1024)</b>	<b>0.5541</b>	<b>0.6055</b>	<b>0.8853</b>	<b>0.1224</b>	<b>0.0512</b>	<b>0.0471</b>
1000	Ghia et al [10]	(129×129)	0.5313	0.5625	0.8594	0.1094	0.0859	0.0781
	Vanka [6]	(321×321)	0.5438	0.5625	0.8625	0.1063	0.0750	0.0813
	Schreiber et Keller [11]	(180×180)	0.5286	0.5643	0.8643	0.1071	0.0857	0.0714
	Hou et al. [12]	(256×256)	0.5333	0.5647	0.8667	0.1137	0.0902	0.0784
	Bruneau et Jourou [8]	(256×256)	0.5313	0.5586	0.8711	0.1094	0.0859	0.0820
	Zhang [9]	(129×129)	0.5313	0.5625	-	-	-	-
	Ghupta et Kalita [13]	(81×81)	0.5250	0.5625	0.8625	0.1063	0.0750	0.0813
	Marchi et al. [5]	(1024×1024)	0.5312	0.5654	-	-	-	-
	Botella et Peyret [4]	(N=160)	0.5308	0.5652	0.8711	0.1094	0.0859	0.0820
	Erturk [15]	(1025×1025)	0.5313	0.5654	0.8643	0.1123	0.0830	0.0781
	AbdelMigid et al. [7]	(601×601)	0.5308	0.5657	0.8636	0.1115	0.0832	0.0782
	<b>Present</b>	<b>(1024×1024)</b>	<b>0.5308</b>	<b>0.5653</b>	<b>0.8640</b>	<b>0.1117</b>	<b>0.0832</b>	<b>0.0780</b>
	3200	Ghia et al [10]	(129×129)	0.5165	0.5469	0.8125	0.0859	0.0859
Zhang [9]		(129×129)	0.5157	0.5390	-	-	-	-
Ghupta et Kalita [13]		(161×161)	0.5188	0.5438	0.8125	0.0875	0.0813	0.1188
AbdelMigid et al. [7]		(601×601)	0.5175	0.5408	0.8236	0.0849	0.08153	0.1198
<b>Present</b>		<b>(1024×1024)</b>	<b>0.5178</b>	<b>0.5404</b>	<b>0.8236</b>	<b>0.0841</b>	<b>0.0811</b>	<b>0.1199</b>

**Tableau 4.2.** Validation des valeurs de fonction de courant et de vorticité pour  $Re=1000$ .

Auteurs	Maillage	Vortex primaire		Vortex secondaire droite		Vortex secondaire gauche	
		$\psi$	$\omega$	$\psi$	$\omega$	$\psi$	$\omega$
Ghia et al. [10]	129×129	-0.117929	2.04968	1.75102E-03	-1.15465	2.31129E-04	-0.36175
Botella et Peyret [4]	160×160	0.1189366	2.067753	-1.729717E-03	-1.109789	-2.334528E-04	-0.3522861
<b>Present</b>	<b>257×257</b>	<b>-0.118969</b>	<b>-2.068799</b>	<b>1.730248E-03</b>	<b>1.108873</b>	<b>2.321085E-04</b>	<b>0.350789</b>

**Tableau 4.3.** Validation des valeurs de la fonction du courant et d'emplacement des vortex pour  $Re=1000$ .

Vortex	Fonction du courant et emplacement	Present (257×257)	Référence	
			Lemée et al. [54] (113×113)	Perumal [56] (256×256)
Vortex primaire	$\psi$ (X, Y)	<b>-0.10156</b> <b>0.53360, 0.75452</b>	-0.1005 0.5280, 0.7540	- 0.5304, 0.7526
Vortex secondaire	$\psi$ (X, Y)	<b>0.330387E-03</b> <b>0.95588, 0.53848</b>	0.3133E-03 0.9564, 0.5420	- 0.9582, 0.5406

De plus, le tableau 4.2 montre les valeurs de la fonction du courant et de vorticité correspondant au vortex primaire et deux vortex secondaires inférieurs pour  $Re=1000$ . Ces valeurs sont compar es avec les résultats obtenus par Ghia et al. [10] et Botella et Peyret [4].   l'examen du tableau, l'écart relatif maximal des valeurs de la fonction du courant et de vorticité dans le vortex primaire est d'environ (0,87% -0,92%), respectivement. Les deux vortex secondaires se trouvent dans une variation inférieure à 1.20% pour la valeur de fonction du courant et une valeur relativement plus  lev e pour la vorticité d'environ 4.13%.

Ensuite, pour approfondir l'investigation, une deuxième validation a été r alis e en considérant le cas de la cavité doublement entraînée (entraînement parallèle). Les propriétés des vortex primaire et secondaire de la moitié supérieure de la cavité ont été  valu es avec les valeurs de Lem e et al. [54] et Perumal [56] comme le montre le tableau 4.3. La valeur de la fonction du courant dans les vortex primaire et secondaire donne respectivement un écart maximal d'environ (1,05% - 5,45%).

Conformément aux travaux publiés précédemment, il ne fait aucun doute que les résultats actuels sont en bon accord, sauf pour les erreurs résultant de la non-uniformité du maillage et de la variété des méthodes numériques. La méthode présente en volumes finis est donc valid e.

## 4.7 Simulation de l'écoulement de fluide stationnaire dans une cavité entraînée carr e pour un nombre de Reynolds jusqu'à 50000 :

### 4.7.1 Motivation et introduction :

Dans la littérature, l'écoulement stationnaire de la cavité entraînée a été largement rapport . Il ressort que les études peuvent être class es en deux groupes. Dans le premier groupe d'études, il a été montré que l'écoulement subit une bifurcation supercritique de Hopf au-delà des nombres de Reynolds modéré conduisant à un état d'écoulement instationnaire [26-37]. Cependant, les études de l'autre groupe [4-18, 20] qui sont plus intéressantes dans cette étude tendent à être en désaccord, fournissant des solutions de l'écoulement stationnaire jusqu'à une valeur maximale de Reynolds de 35000.

Par conséquent, nous allons étudier dans ce chapitre la possibilité de calculer un écoulement stationnaire bidimensionnel et incompressible dans une cavité simplement entraînée carr e ( $\Gamma=1$ ), même à des nombres de Reynolds très élevés, allant de 100 à 50000.

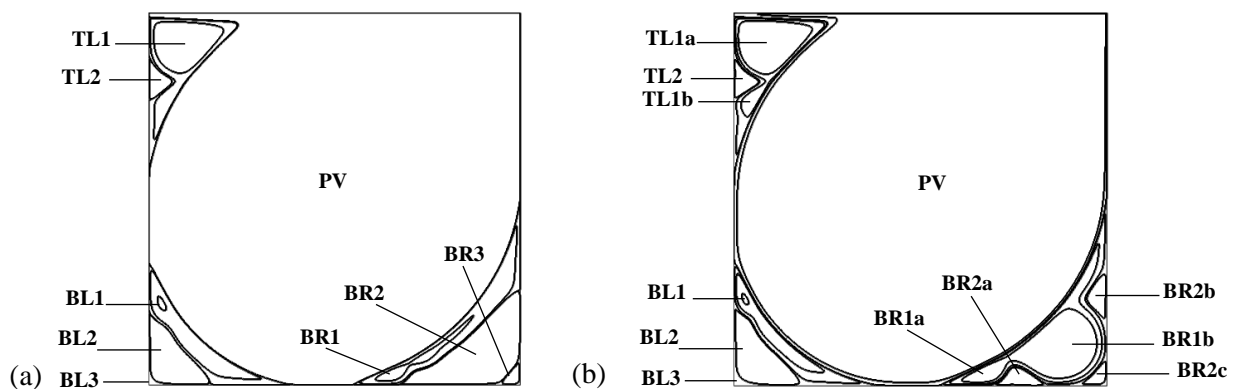


Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'un article de conférence internationale [19]. Les simulations ont été effectuées par une combinaison efficace de la méthode des volumes finis (FVM) et de l'algorithme couplé. Un maillage uniforme d'une résolution de  $1024 \times 1024$  points a été utilisé dans les directions  $X$  et  $Y$  et procéder à tous les calculs. Le nombre de courant d'écoulement (CFL) et le facteur de sous-relaxation ( $\alpha$ ) ont été respectivement pris dans les rangs  $20 \leq \text{CFL} \leq 200$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Rappelant que les faibles valeurs de ces paramètres peuvent ralentir le processus de convergence, mais ils sont nécessaires pour contrôler la stabilité à des niveaux élevés de nombres de Reynolds.

Les résultats obtenus ont été visualisés graphiquement par les contours de fonction de courant, les contours de vorticité, les profils de vitesse  $U$  et  $V$  ainsi que les propriétés des vortex primaires et secondaires.

#### 4.7.2 Structures d'écoulement :

  des fins de comparaison, la figure 4.8 décrit une configuration g n ralis e de la structure d'écoulement à l'intérieur de la cavité entraînée. Les abréviations PV, BR, BL et TL décrivent les éléments suivants : vortex primaire, vortex secondaire inférieur droit, vortex secondaire inférieur gauche et vortex secondaire supérieur gauche, respectivement. Les nombres 1, 2, 3 indiquent la hiérarchie des vortex secondaires comme premier, deuxième et troisième, respectivement. Les lettres a, b et c signifie l'ordre d'apparition des vortex secondaires de même sens de rotation.



**Figure 4.8.** Vue schématique de l'écoulement de la cavité entraînée : (a)  $Re \leq 41710$ , (b)  $Re \geq 41710$ .

La figure 4.9 montre les contours de la fonction de courant à l'intérieur de la cavité pour un nombre de Reynolds variant de 100 jusqu'à 50000. Ces contours attirent notre attention à l'évolution remarquable de la structure de l'écoulement. On voit que le comportement typique de la configuration d'écoulement connu par de nombreux auteurs dans la littérature [4, 6, 8-18, 20] s'accorde très bien avec cette étude (Fig 4.8a) jusqu'au seuil de  $Re = 41710$ . En effet, trois vortex secondaires pourraient être obtenus sur les coins inférieurs de la cavité (BR1, BR2, BR3 et BL1, BL2, BL3) et deux sur le coin supérieur gauche de la cavité (TL1 et TL2). En plus du vortex primaire impliqué dans le centre du domaine, une croissance significative de la taille des vortex secondaires se produit de manière exponentielle avec l'augmentation du nombre de Reynolds affectant ainsi leurs centres de localisation. Le troisième vortex secondaire BR3 est clairement visible au coin de la cavité.

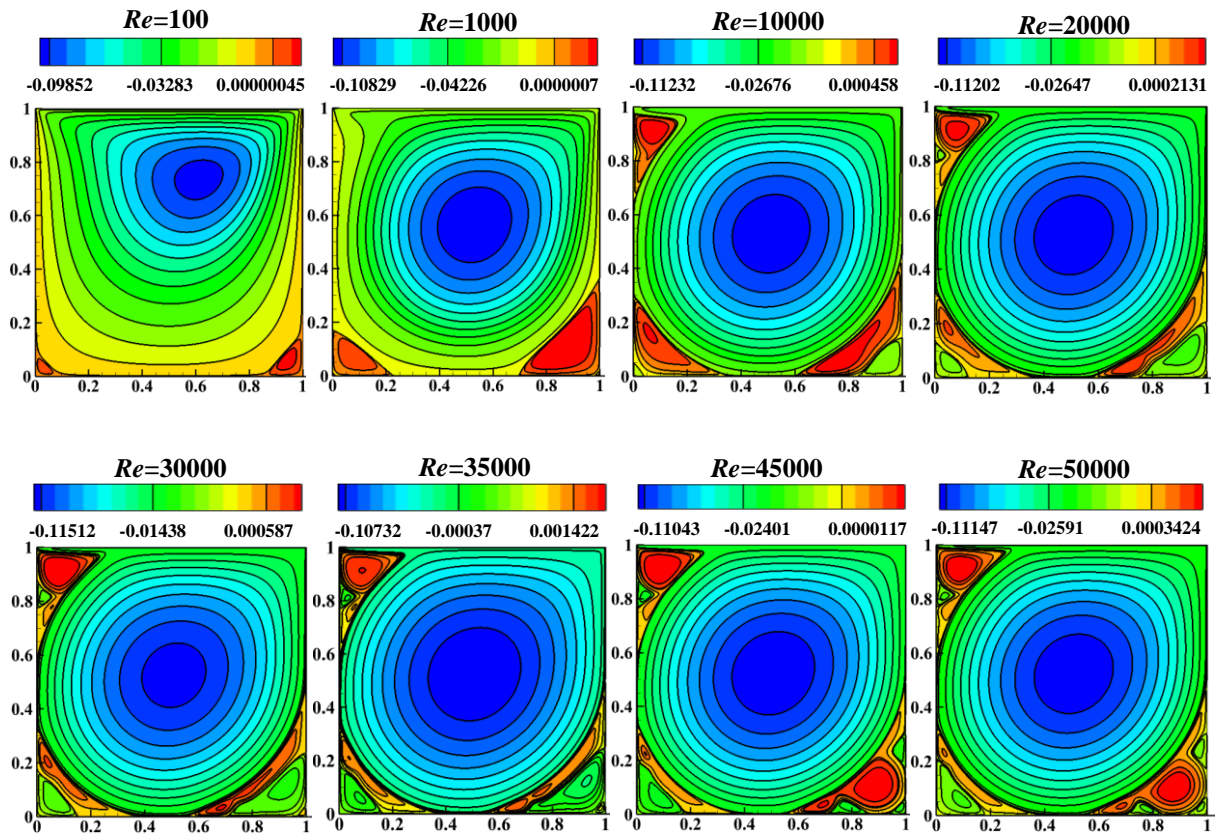


Figure 4.9. Contours de fonction de courant pour différents nombres de Reynolds.

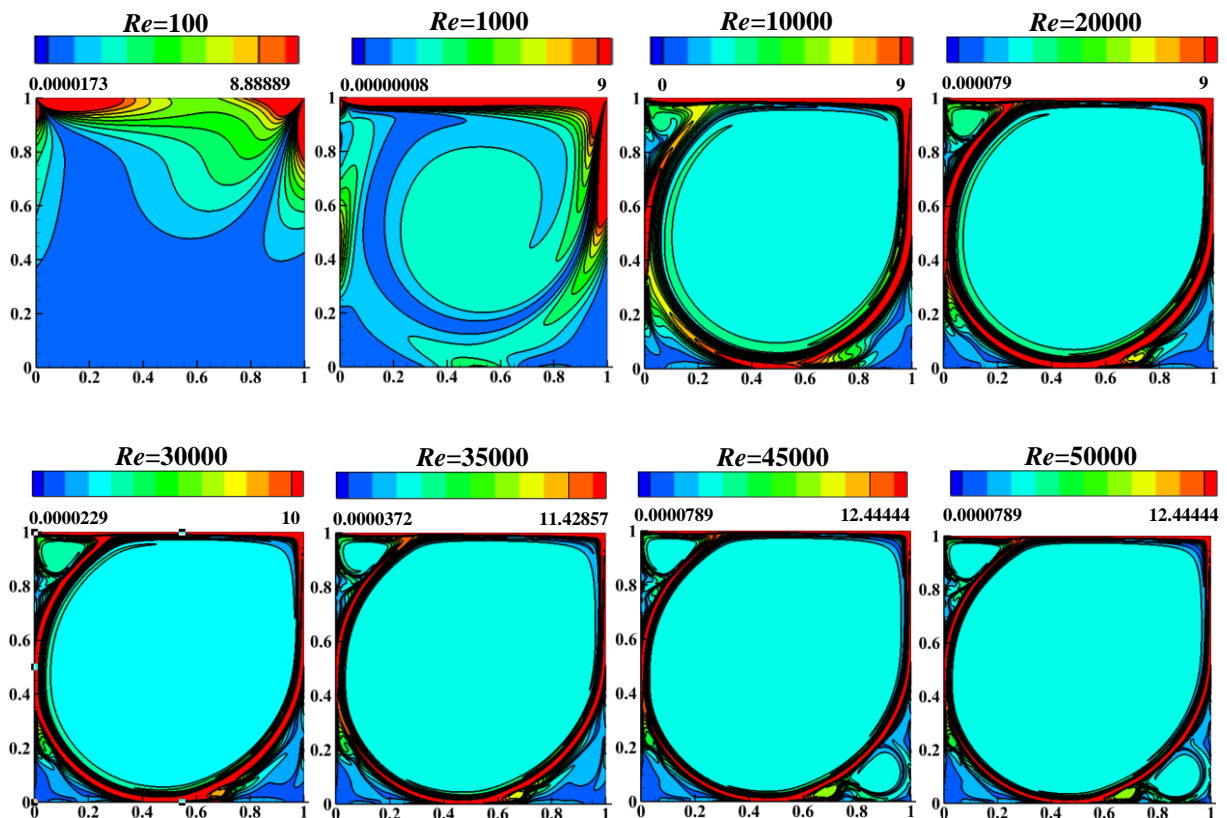


Figure 4.10. Contours de vorticité pour différents nombres de Reynolds.

L'aspect le plus intéressant se produit lorsque le nombre de Reynolds dépasse le seuil de 41000 surtout dans les limites de  $Re = 41710$  (Fig 4.8b), un changement très significatif de la structure d'écoulement a été observé dans le coin inférieur droit de la cavité comme un comportement inattendu représenté par l'apparition de cinq vortex secondaires de différentes tailles. Cela consiste en deux vortex secondaires tournants dans le sens antihoraire représentés par un vortex de petite taille (BR1a) voisin d'un autre de grande taille (BR1b). Ce dernier est entouré de trois vortex secondaires adjacents avec une rotation dans le sens horaire (BR2a, BR2b, BR2c). Pour les coins restants de la cavité (inférieur gauche) et (supérieur gauche), le comportement d'écoulement maintient la même structure avec un léger changement de l'emplacement des vortex secondaires respectifs.

La figure 4.10 illustre les contours de vorticité obtenus à l'intérieur de la cavité pour différents nombres de Reynolds,  $100 \leq Re \leq 50000$ . Il est évident que les régions indiqu es par la concentration et les régions en rouge désignent les emplacements de hautes valeurs de vorticité. En outre, comme on peut le voir dans les tableaux 4.6-4.9, l'augmentation du nombre de Reynolds entraîne une augmentation du taux de rotation des vortex secondaires, tandis qu'une légère baisse du taux de rotation des vortex primaire aboutit à une rotation relativement constante à partir de  $Re \geq 10000$ .

### 4.7.3 Profils de vitesse :

L'efficacité du présent code numérique et le couplage entre les équations de mouvement (4.2 et 4.3) et l'équation de continuité (4.1) support es avec un maillage très fin utilisé ici peuvent être mieux  valu es au voisinage des nombres de Reynolds très élevés. Les figures 4.11 et 4.12 montre l'évaluation des profils de vitesse actuels ( $U$     $X=0.5$  et  $V$     $Y=0.5$ ) avec ceux de la littérature pour des nombres de Reynolds dans la gamme  $10000 \leq Re \leq 50000$ .

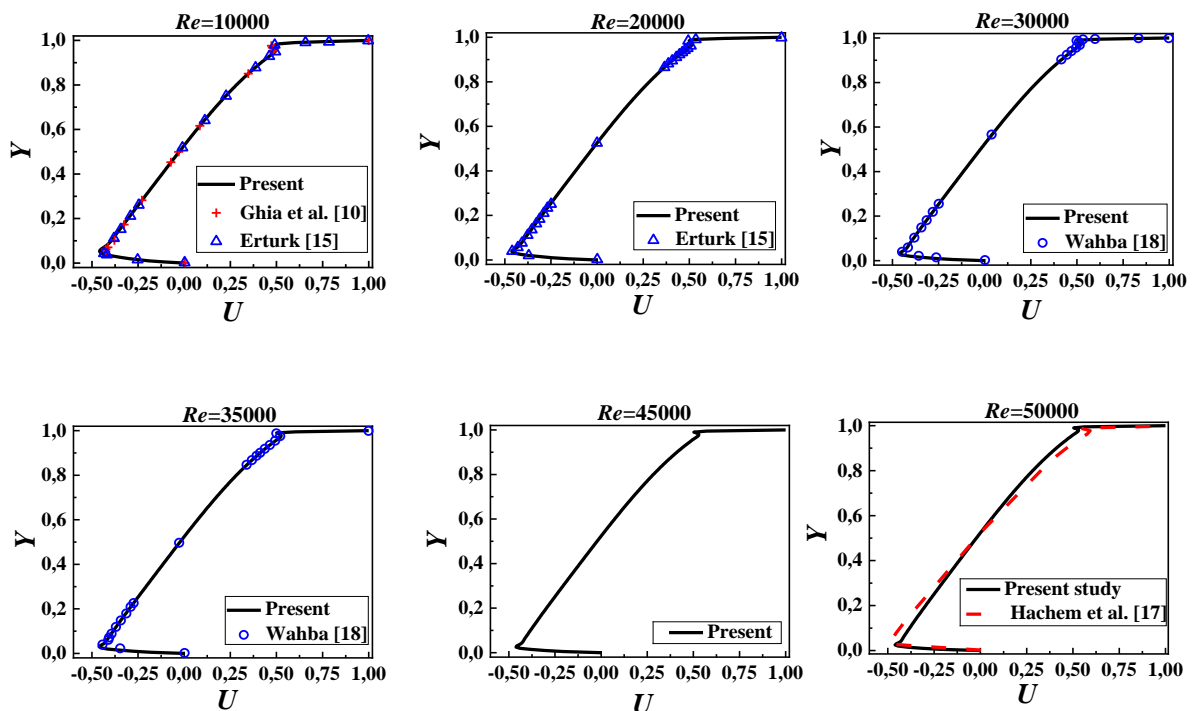


Figure 4.11. Profils de vitesse  $U$  le long de la ligne médiane verticale  $X=0.5$  pour différents nombres de Reynolds.

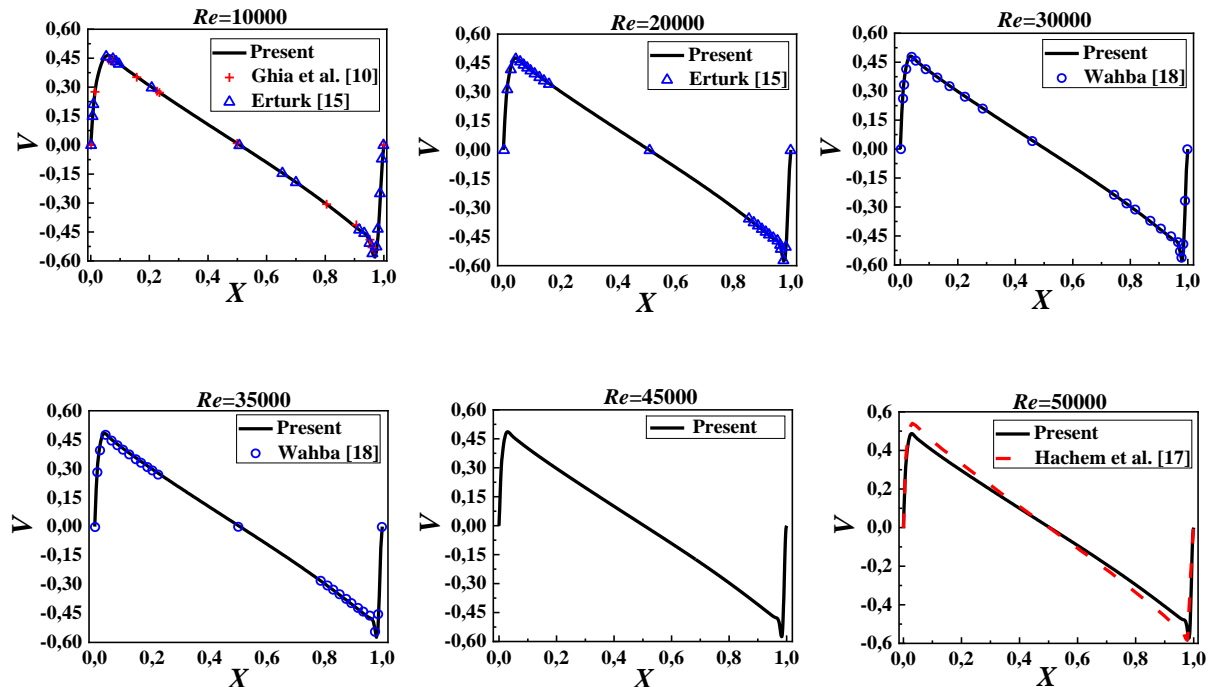
Pour  $Re=10000$ , les données de la solution sont comparées aux résultats de Ghia et al. [10] d'un maillage de  $256 \times 256$  points et avec Erturk [15] d'un maillage de  $1024 \times 1024$  points. Les données de la solution sont comparées avec Erturk [15] pour  $Re=20000$ .

Pour  $Re=30000$  et  $Re=35000$ , la comparaison a été effectuée avec les résultats numériques de Wahba [18] d'une résolution de  $501 \times 501$  points tandis que les données de la solution ont été comparées avec Hachem et al. [17] d'une résolution de  $180 \times 180$  points pour  $Re=50000$ .

La comparaison des profils de vitesse révélée dans une grande concordance sauf pour le cas de  $Re=50000$ , ceci est dû à une faible résolution de maillage employée par Hachem et al. [15] ce qui conduit à des solutions instables incompatibles avec les résultats actuels. Cela suggère alors que pour résoudre l'écoulement stationnaire à des nombres de Reynolds élevés, des grilles fines sont nécessaires.

On voit également d'après la figure 4.11 que les composantes de la vitesse horizontale  $U$  ont atteint leur maximum ( $|U_{max}|$ ) dans la cavité le long de la ligne médiane verticale ( $X=0.5$ ) près des parois supérieure et inférieure de la cavité. D'autre part, d'après la figure 4.12, les composantes de la vitesse verticale  $V$  ont atteint leur maximum ( $|V_{max}|$ ) dans la cavité le long de la ligne médiane horizontale ( $Y=0.5$ ) près des parois droite et gauche de la cavité.

Afin d'étendre l'analyse de l'écoulement et de fournir plus de résultats de benchmark, les tableaux 4.4 et 4.5 fournissent des valeurs correspondant aux profils de vitesse  $U$  et  $V$  passant respectivement par les lignes médianes verticales et horizontales de la cavité. Les points sélectionnés ont été pris en fonction des écarts significatifs le long de ces profils en tenant compte de toutes les valeurs de  $Re$ .



**Figure 4.12.** Profils de vitesse  $V$  le long de la ligne médiane verticale  $Y=0.5$  pour différents nombres de Reynolds.

**Tableau 4.4.** Valeurs de la vitesse  $U$  le long de la ligne médiane verticale de la cavité.

$Y$	$Re$							
	100	1000	10000	20000	30000	35000	45000	50000
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.0100	-0.00745	-0.0398	-0.19054	-0.24281	-0.26713	-0.27522	-0.30442	-0.31143
0.0200	-0.01458	-0.07606	-0.2969	-0.36718	-0.40465	-0.41646	-0.44052	-0.44558
0.0301	-0.02142	-0.10923	-0.37849	-0.44549	-0.46098	-0.46108	-0.45755	-0.45382
0.0401	-0.02801	-0.13984	-0.43474	-0.46222	-0.45021	-0.44367	-0.43467	-0.43169
0.0501	-0.03437	-0.16852	-0.45754	-0.44539	-0.43026	-0.42652	-0.42338	-0.42236
0.0601	-0.04054	-0.1959	-0.45342	-0.42693	-0.41942	-0.41791	-0.41601	-0.41508
0.0701	-0.04652	-0.22241	-0.43695	-0.41519	-0.41159	-0.41029	-0.40793	-0.40701
0.0802	-0.05236	-0.24824	-0.41976	-0.40655	-0.40338	-0.40202	-0.39958	-0.3988
0.0902	-0.05806	-0.27328	-0.4062	-0.3981	-0.39479	-0.39355	-0.39123	-0.39057
0.1002	-0.06366	-0.29717	-0.39572	-0.38929	-0.38614	-0.38504	-0.38285	-0.38227
0.1723	-0.10197	-0.38853	-0.32989	-0.32469	-0.32291	-0.32224	-0.32075	-0.32044
0.2004	-0.11647	-0.37566	-0.30408	-0.29941	-0.29782	-0.2972	-0.29592	-0.29565
0.2826	-0.1583	-0.27889	-0.22854	-0.22473	-0.22341	-0.22288	-0.222	-0.22179
0.3006	-0.16708	-0.25847	-0.21195	-0.20825	-0.20696	-0.20644	-0.20562	-0.20542
0.4509	-0.21391	-0.11035	-0.07311	-0.06999	-0.06879	-0.06836	-0.06776	-0.06758
0.5010	-0.20891	-0.06107	-0.02629	-0.02331	-0.02212	-0.02172	-0.02113	-0.02095
0.6012	-0.15324	0.04028	0.06962	0.07225	0.07336	0.07366	0.07424	0.07442
0.8016	0.11805	0.27423	0.28497	0.28516	0.28509	0.28484	0.28497	0.28491
0.8517	0.23686	0.33732	0.34858	0.34753	0.34678	0.34625	0.34605	0.34583
0.9018	0.41615	0.3857	0.4188	0.41637	0.41481	0.41396	0.41333	0.41291
0.9319	0.5657	0.41332	0.46603	0.4617	0.45962	0.4586	0.45773	0.45719
0.9419	0.62298	0.43283	0.4817	0.47799	0.47537	0.47426	0.47332	0.47276
0.9519	0.68361	0.46693	0.49454	0.49498	0.49193	0.49056	0.48936	0.48874
0.9619	0.74709	0.52411	0.50077	0.51034	0.50932	0.50799	0.50641	0.50558
0.9720	0.81275	0.61213	0.49632	0.51679	0.52268	0.5233	0.52375	0.52334
0.9820	0.8797	0.73321	0.49759	0.50369	0.51638	0.52066	0.52743	0.52957
0.9920	0.94689	0.87899	0.65569	0.56525	0.52571	0.51514	0.50499	0.50277
1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

**Tableau 4.5.** Valeurs de la vitesse  $V$  le long de la ligne médiane horizontale de la cavité.

$X$	$Re$							
	100	1000	10000	20000	30000	35000	45000	50000
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.0100	0.01832	0.07103	0.21325	0.27495	0.3114	0.32462	0.34572	0.35432
0.0200	0.0354	0.13081	0.33013	0.39103	0.42578	0.438112	0.45668	0.4637
0.0301	0.05128	0.17984	0.39323	0.45218	0.47633	0.4818	0.48634	0.48685
0.0401	0.06598	0.21919	0.43595	0.476	0.48015	0.47847	0.47418	0.47232
0.0501	0.07954	0.25044	0.45918	0.47234	0.46553	0.46252	0.45878	0.45768
0.0601	0.092	0.27546	0.46448	0.45812	0.45082	0.44883	0.44647	0.44566
0.0701	0.10341	0.29595	0.45756	0.4436	0.4385	0.43694	0.43475	0.4339
0.0802	0.11381	0.31322	0.44484	0.43101	0.42691	0.42533	0.42314	0.42231
0.0902	0.12324	0.32813	0.43088	0.41944	0.41544	0.41386	0.41176	0.41097
0.1002	0.13177	0.34107	0.41772	0.40813	0.40412	0.40258	0.40059	0.39983
0.1723	0.17039	0.37467	0.3376	0.33014	0.32688	0.32562	0.32424	0.32363
0.2004	0.17678	0.35886	0.30795	0.30111	0.29811	0.29693	0.29573	0.29517
0.2826	0.17567	0.26728	0.22355	0.21825	0.21588	0.21493	0.21412	0.21365
0.3006	0.17209	0.24541	0.20537	0.20036	0.19811	0.19721	0.19645	0.19601
0.4509	0.09901	0.07856	0.05672	0.05374	0.05228	0.05172	0.05126	0.05093
0.5010	0.0566	0.02471	0.0077	0.00533	0.0041	0.00366	0.00325	0.00296
0.6012	-0.05409	-0.08433	-0.0912	-0.09225	-0.09291	-0.09309	-0.0934	-0.0936
0.8016	-0.25318	-0.31593	-0.30308	-0.30015	-0.29892	-0.29834	-0.29807	-0.29788
0.8517	-0.23957	-0.40725	-0.36132	-0.35687	-0.35484	-0.35397	-0.35338	-0.35301
0.9018	-0.18391	-0.52312	-0.42245	-0.41586	-0.41275	-0.41148	-0.4104	-0.40978
0.9319	-0.13372	-0.48226	-0.45492	-0.45221	-0.44839	-0.44671	-0.4451	-0.44426
0.9419	-0.11505	-0.43153	-0.46948	-0.46251	-0.4602	-0.4586	-0.4568	-0.45582
0.9519	-0.09572	-0.36411	-0.50245	-0.47112	-0.46989	-0.46917	-0.46824	-0.46735
0.9619	-0.07593	-0.28513	-0.55857	-0.49362	-0.47802	-0.47619	-0.47623	-0.47608
0.9720	-0.05588	-0.2015	-0.57383	-0.5603	-0.52092	-0.50712	-0.49109	-0.4866
0.9820	-0.03576	-0.12049	-0.42766	-0.53668	-0.5713	-0.57543	-0.57334	-0.56929
0.9920	-0.01577	-0.04837	-0.15418	-0.20533	-0.23808	-0.25025	-0.2724	-0.27938
1.0000	1.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

#### 4.7.4 Propriétés des vortex primaires et secondaires :

Pour fournir plus de précisions et soutenir les résultats numériques affichés ci-dessus, une analyse des propriétés d'écoulement en termes d'emplacement, des valeurs de fonction du courant et des valeurs de vorticité des vortex primaires et secondaires a été décrite dans les tableaux 4.6 et 4.7 pour  $100 \leq Re \leq 35000$ . De plus, les mêmes propriétés d'écoulement pour  $Re=45000$  et  $50000$  ont également été décrites dans les tableaux 4.8 et 4.9. Ces résultats sont en bon accord avec la littérature disponible pour  $Re \leq 35000$ .

Les vortex étiquetés (PV, BR2, BR2a, BR2b, BR2c, BL2 et TL2) tournent dans le même sens des aiguilles d'une montre tandis que les vortex (BR1, BR1a, BR1b, BR3, BL1, BL3, TL1, TL1a et TL1b) tournent dans le sens inverse.

**Tableau 4.6.** Propriétés des vortex primaires et secondaires du côté inférieur droit de la cavité.

		<i>Re</i>					
		100	1000	10000	20000	30000	35000
PV	$\psi$	-0.1035204	-0.118929	-0.122323	-0.12202	-0.121787	-0.121612
	$\omega$	-3.16698	-2.0676	-1.91861	-1.903689	-1.89846	-1.895308
	(X, Y)	(0.6157, 0.7373)	(0.5308, 0.5653)	(0.5118, 0.5300)	(0.5093, 0.5269)	(0.5081, 0.5257)	(0.5078, 0.5249)
BR1	$\psi$	1.274E-05	1.73030E-03	3.1888E-03	2.79857E-03	2.96556E-03	2.34589E-03
	$\omega$	3.524367E-02	1.107643	3.781775	6.216516	8.482063	9.54100
	(X, Y)	(0.9424, 0.0618)	(0.8640, 0.1117)	(0.7748, 0.0594)	(0.7213, 0.0431)	(0.6856, 0.0340)	(0.6722, 0.0311)
BR2	$\psi$	-	-5.2E-8	-1.40964E-04	-4.63858E-04	-6.68679E-04	-7.493584E-04
	$\omega$	-	-7.911979E-03	-0.297161	-0.563582	-0.65354	-0.663195
	(X, Y)	-	(0.9926, 0.0074)	(0.9349, 0.0679)	(0.9302, 0.1053)	(0.9319, 0.1218)	(0.9303, 0.1229)
BR3	$\psi$	-	-	-	2.385E-08	4.36866E-07	1.55514E-06
	$\omega$	-	-	-	4.71657E-03	1.99580E-02	0.03898
	(X, Y)	-	-	-	(0.9939, 0.0070)	(0.9862, 0.0162)	(0.9815, 0.0214)

**Tableau 4.7.** Propriétés des vortex secondaires dans les coins inférieur gauche et supérieur gauche de la cavité.

		<i>Re</i>					
		100	1000	10000	20000	30000	35000
BL1	$\psi$	1.81E-06	2.33412E-04	1.6149E-03	1.63011E-03	1.50016E-03	1.44003E-03
	$\omega$	1.50452E-02	0.351918	2.149298	2.957627	3.905502	4.364118
	(X, Y)	(0.0345, 0.0344)	(0.0832, 0.0780)	(0.0589, 0.1618)	(0.0480, 0.1830)	(0.0401, 0.2016)	(0.037, 0.2093)
BL2	$\psi$	-	-8E-09	-1.1205E-06	-8.38227E-05	-1.806998E-04	-2.094140E-04
	$\omega$	-	-2.739669	-3.17418E-02	-0.252762	-0.368702	-0.407321
	(X, Y)	-	(0.0048, 0.0048)	(0.0170, 0.0203)	(0.0590, 0.0544)	(0.0737, 0.0595)	(0.0790, 0.0579)
BL3	$\psi$	-	-	-	2.15069E-09	7.96666E-09	1.359714E-08
	$\omega$	-	-	-	1.7053507E-03	3.13831E-03	3.92891E-03
	(X, Y)	-	-	-	(0.0034, 0.0031)	(0.0044, 0.0041)	(0.0049, 0.0049)
TL1	$\psi$	-	-	2.631351E-03	3.76156E-03	4.39063E-03	4.63383E-03
	$\omega$	-	-	2.311531	2.51234	2.63238	2.68339
	(X, Y)	-	-	(0.0704, 0.9112)	(0.0805, 0.9117)	(0.0848, 0.9128)	(0.0863, 0.9129)
TL2	$\psi$	-	-	-	-7.336075E-05	-1.807805E-04	-2.19032E-04
	$\omega$	-	-	-	-0.975955	-1.35001	-1.43439
	(X, Y)	-	-	-	(0.0247, 0.8192)	(0.0310, 0.8119)	(0.0313, 0.8093)

**Tableau 4.8.** Propriétés des vortex primaires et secondaires du côté inférieur droit de la cavité.

		Vortex					
		Vortex primaire	BR1a	BR1b	BR2a	BR2b	BR2c
$Re=45000$	$\psi$	-0.121548	3.006625E-03	4.458081E-03	-3.284708E-04	-8.58804E-05	-3.4603E-05
	$\omega$	-1.894415	8.3370	1.756255	-2.47146	-0.626041	-0.628747
	(X, Y)	(0.5073, 0.5245)	(0.6943, 0.0369)	(0.8866, 0.1071)	(0.7971, 0.0252)	(0.9704, 0.2440)	(0.9794, 0.0254)
$Re=50000$	$\psi$	-0.121470	2.91424E-03	4.78432E-03	-3.21092E-04	-9.80703E-05	-6.593614E-05
	$\omega$	-1.893674	8.97085	1.822144	-2.77719	-0.63670	-0.941995
	(X, Y)	(0.5070, 0.5241)	(0.6855, 0.0351)	(0.8817, 0.1031)	(0.7802, 0.0230)	(0.9691, 0.2465)	(0.9781, 0.0325)

**Tableau 4.9.** Propriétés des vortex secondaires dans les coins inférieur gauche et supérieur gauche de la cavité.

		Vortex					
		BL1	BL2	BL3	TL1a	TL1b	TL2
$Re=45000$	$\psi$	1.342516E-03	-2.660884E-04	3.177777E-08	5.004871E-03	7.302959E-4	-2.734150E-04
	$\omega$	5.364649	-0.476916	5.679480E-03	2.758090	3.613825	-1.654226
	(X, Y)	(0.0321, 0.2251)	(0.0914, 0.0547)	(0.0071, 0.0064)	(0.0884, 0.9133)	(0.0509, 0.7702)	(0.0299, 0.8077)
$Re=50000$	$\psi$	1.293551E-03	-2.90259E-04	5.664E-08	5.16770E-03	8.10963E-04	-2.97105E-04
	$\omega$	5.812606	-0.497776	7.89659E-03	2.79116	3.348625	-1.790126
	(X, Y)	(0.0302, 0.2304)	(0.0947, 0.0537)	(0.0088, 0.0078)	(0.0892, 0.9136)	(0.0460, 0.7655)	(0.0292, 0.8086)

#### 4.7.5 Conclusion :

Une étude numérique de l'écoulement du fluide incompressible et stationnaire dans une cavité simplement entraînée carrée a été faite par la méthode des volumes finis. La validation par comparaison directe avec des recherches numériques de référence trouvées dans la littérature pour  $Re \leq 35000$ , ont montré un bon accord. Les résultats de l'analyse numérique ont été présentés pour les nombres de Reynolds allant de 100 jusqu'à 50000. Sur la base des discussions ci-dessus, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Un algorithme couplé utilisé avec un maillage de grille très fin ( $1024 \times 1024$ ) révèle une grande efficacité en termes de stabilité, de robustesse et de précision en maintenant un écoulement stationnaire à des nombres de Reynolds très élevés ( $Re=50000$ ).
- Au-dessus du seuil  $Re=41710$ , contrairement aux écoulements conventionnels, un comportement excentrique distingue la structure d'écoulement dans le coin inférieur droit de la cavité représentée par l'apparition de cinq vortex secondaires au lieu de trois.
- De nouveaux résultats de benchmark ont été fournis dans la gamme  $35000 < Re \leq 50000$ .



## 4.8 Simulation numérique de l'écoulement asymétrique de fluide dans une cavité doublement entraînée :

### 4.8.1 Introduction et motivation :

Les études sur le problème classique de la cavité simplement entraînée ont été commodes pour inspirer les recherches sur les écoulements des cavités doublement entraînées des mouvements parallèle et antiparallèle des deux parois opposées. Kuhlmann et al. [59] ont entrepris les premiers examens expérimentaux et numériques pour un mouvement antiparallèle en étudiant la non-unicité de l'écoulement, les instabilités et les structures cellulaires. Ils ont constaté que l'écoulement bidimensionnel n'était pas toujours unique et que des structures d'écoulement supplémentaires pouvaient exister pour le même ensemble de paramètres.

En outre, jusqu'à présent, des examens numériques bidimensionnels approfondis pour l'écoulement des cavités de mouvements de paroi parallèle et antiparallèle avec différents rapports d'aspect ont été effectués. Les recherches sur ce contexte peuvent être intégrées dans trois catégories, la première série d'investigations [68-77] a été limitée à des solutions uniques stationnaires pour les paramètres dans ( $1 \leq \Gamma \leq 5$  ;  $100 \leq Re_{1,2} \leq 5000$ ), les deuxièmes tentatives [50, 54-56] se sont concentrées sur multiples solutions stables dans ( $0.5 \leq \Gamma \leq 3.5$  ;  $Re_{1,2} \leq 14000$ ); ou les deux solutions stables et instables [51-53] avec l'inclusion d'une méthode de continuation combinée à une analyse de stabilité linéaire et ceci pour les paramètres compris ( $0.5 \leq \Gamma \leq 2.5$  ;  $Re_{1,2} \leq 2000$ ), les enquêtes de la troisième catégorie [20, 36] sont très récentes et se sont intéressés à la bifurcation de l'écoulement (écoulement non stationnaire) et aux calculs dans les nombres de Reynolds de turbulence ( $\Gamma=1$ ,  $Re_{1,2} \leq 10^6$ ).

Indépendamment des études de la multiplicité des écoulements, on peut noter de la littérature que la grande majorité des études et recherches d'un écoulement unique n'ont été discutées qu'en entrainement symétrique, dans laquelle les valeurs absolues des vitesses imposées aux parois sont égales. Jusqu'à présent, l'évaluation de l'écoulement asymétrique dans une cavité doublement entraînée a été effectuée [69], mais il était limité à étudier l'écoulement du fluide uniquement pour le mouvement parallèle de la paroi.

Par conséquent, le présent chapitre cherche à étudier l'écoulement stationnaire et bidimensionnel dans une cavité doublement entraînée avec des mouvements parallèle et antiparallèle des deux parois opposées (Fig 4.2a et b). L'accent est mis sur un entrainement asymétrique des deux parois mobiles lorsque différents rapports de Reynolds sont suggérés ( $\lambda=1, 2, 4, 8$  et  $10$  ;  $Re_1 = \lambda Re_2$ ) avec  $Re_2=100$  dans la paroi basse. De ce fait, la méthode des volumes finis (FVM) avec un algorithme simple et la méthode de Boltzmann sur réseau de multiple temps de relaxation (MRT-LBM) ont été utilisées pour le calcul. Un maillage d'une résolution de  $257 \times 257$  points a été utilisé dans les directions  $X$  et  $Y$  et procéder à tous les calculs. Les résultats obtenus ont été visualisés graphiquement par les contours de fonction de courant, les profils de vitesse  $U$  et  $V$  ainsi que les propriétés des vortex primaires et secondaires. Une partie des résultats de ce chapitre ont fait l'objet de deux articles de revues internationales [164, 165].



### 4.8.2 Mouvement parallèle des parois :

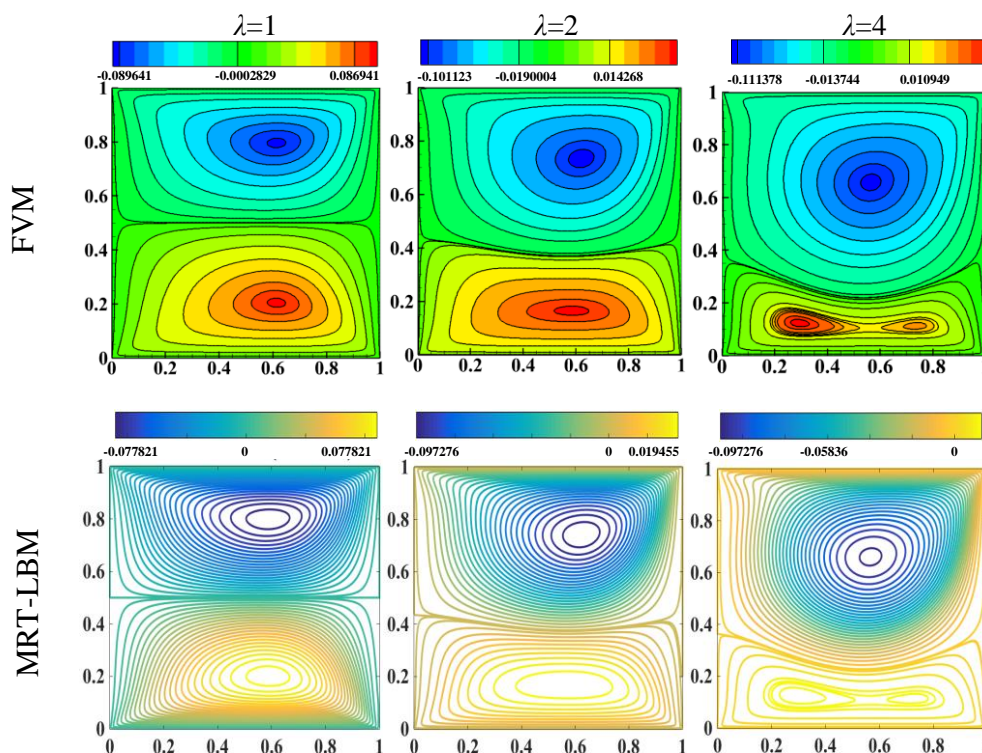
#### a) Structures d'écoulement :

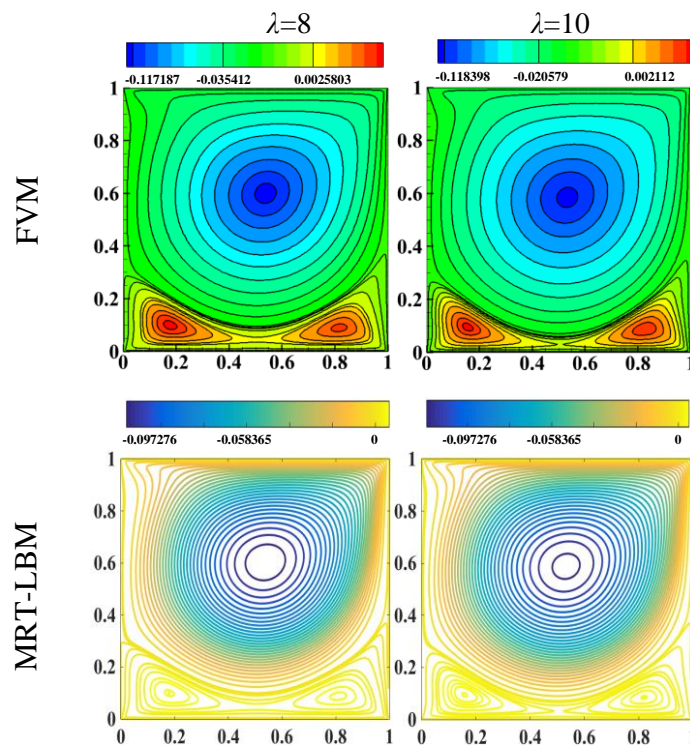
Pour un mouvement de paroi parallèle, la paroi inférieure se déplace dans la direction droite avec une vitesse constante ( $U=U_B$ ) obtenue grâce à un faible nombre de Reynolds  $Re_2=100$ , tandis que la paroi supérieure glisse dans la direction droite avec des vitesses différentes,  $U_T=\lambda U_B$ , par rapport à divers rapports de vitesse imposés,  $\lambda=1, 2, 4, 8$  et  $10$ .

La figure 4.13 représente une comparaison des lignes de courant entre les méthodes FVM et MRT-LBM obtenus pour l'écoulement entraîné de manière symétrique ( $U_T=U_B$ ;  $\lambda=1$ ), et asymétrique à différents rapports de vitesse ( $U_T \neq U_B$ ;  $\lambda=2, 4, 8$  et  $10$ ), avec  $Re_2=100$ . On voit clairement que la configuration d'écoulement à l'intérieur de la cavité entraînée est très sensible à la variation des rapports de vitesse.

Pour  $\lambda=1$ , les incitations sur les parois supérieure et inférieure sont égales. On peut voir que les parois mobiles supérieure et inférieure induisent leur vortex primaire respectif dans la moitié supérieure et inférieure de la cavité, respectivement. Le vortex supérieur tourne dans le sens horaire tandis que le vortex inférieur tourne dans le sens antihoraire. Les deux motifs de cellules sont une image en miroir à travers la ligne médiane horizontale ( $Y=0.5$ ) et leur centre se trouve près des côtés supérieur droit et inférieur droit de la cavité.

Pour  $\lambda=2$ , l'incitation sur la paroi supérieure est deux fois plus importante que l'incitation sur la paroi inférieure. Par conséquent, la structure d'écoulement est caractérisée par deux vortex contrarotatifs principaux l'un à l'autre. Le vortex supérieur remplit la majeure partie de la cavité avec une rotation horaire tandis que le vortex inférieur est confiné dans la partie inférieure de la cavité occupant moins de volume que celui supérieur et tourne dans le sens antihoraire.





**Figure 4.13.** Contours de fonction de courant pour différents rapports de vitesse.

Pour  $4 \leq \lambda \leq 10$ , le vortex principal qui tourne dans le sens horaire devient plus puissant, dans lequel il occupe plus d'espace à l'intérieur de la cavité. Cependant, le vortex inférieur est raccourci et divisé en deux vortex secondaires individuels adjacents aux coins inférieurs de la cavité avec une région presque stagnante au milieu comme une conséquence de l'effet de compression du vortex supérieur principal. Les deux vortex secondaires résultants tournent dans le sens antihoraire.

Avec l'augmentation du rapport de vitesse ( $\lambda$ ), l'asymétrie de l'écoulement a progressivement augmenté ce qui est évident à partir de la couche de cisaillement de séparation à la jonction du vortex primaire avec les vortex secondaires, tandis que le centre du vortex primaire se déplace progressivement pour être plus proche du centre géométrique de la cavité. De plus, le centre des deux vortex secondaires se déplace près des coins inférieur droit et inférieur gauche de la cavité.

On voit bien que les deux méthodes (FVM et MRT-LBM) reproduisent bien le phénomène physique avec une grande similarité pour les lignes de courant obtenues.

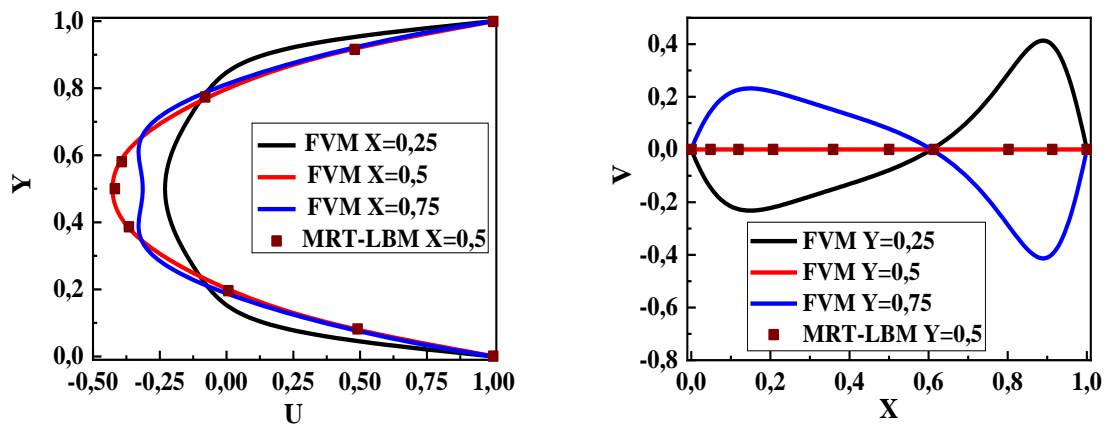
#### b) Analyse des profils de vitesse :

Les figures 4.14-4.18 illustrent la variation des composantes des vitesses  $U$  et  $V$  obtenus par la méthode FVM le respectivement long des lignes verticales ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ) et horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ), avec  $Re_2=100$  et à différents rapports de vitesse,  $\lambda=1, 2, 4, 8$  et  $10$ . Une comparaison des vitesses  $U$  et  $V$  avec la méthode MRT-LBM est présentée le long des lignes médianes vertical et horizontal ( $X=0.5$  et  $Y=0.5$ ).

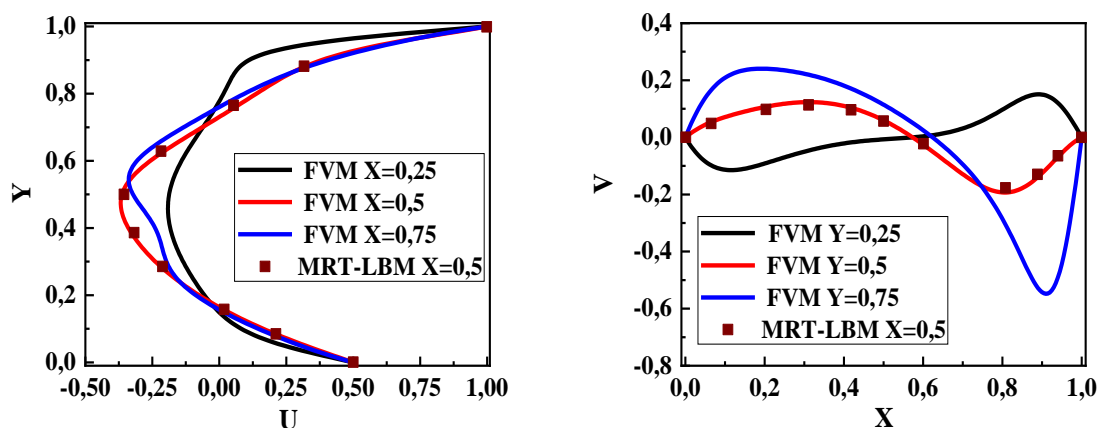
Pour  $\lambda=1$ , la composante de vitesse  $U$  a atteint sa valeur maximale ( $|U_{\max}|$ ) dans la cavité à travers la ligne médiane verticale ( $X=0.5$ ) au centre de la cavité ( $(X, Y) = (0.5, 0.5)$ ). D'autre

part, la valeur maximale de la composante de vitesse ( $|V_{\max}|$ ) dans la cavité est obtenue le long de ( $Y=0.25, 0.75$ ) approximativement près des coins inférieur droit et supérieur droit de la cavité. Les profils des deux composantes de vitesse  $V$  le long de ( $Y=0.25, 0.75$ ) montrent une symétrie parfaite par rapport à la ligne médiane horizontale ( $Y=0,5$ ) le long de laquelle la composante de vitesse  $V$  respective reste nulle.

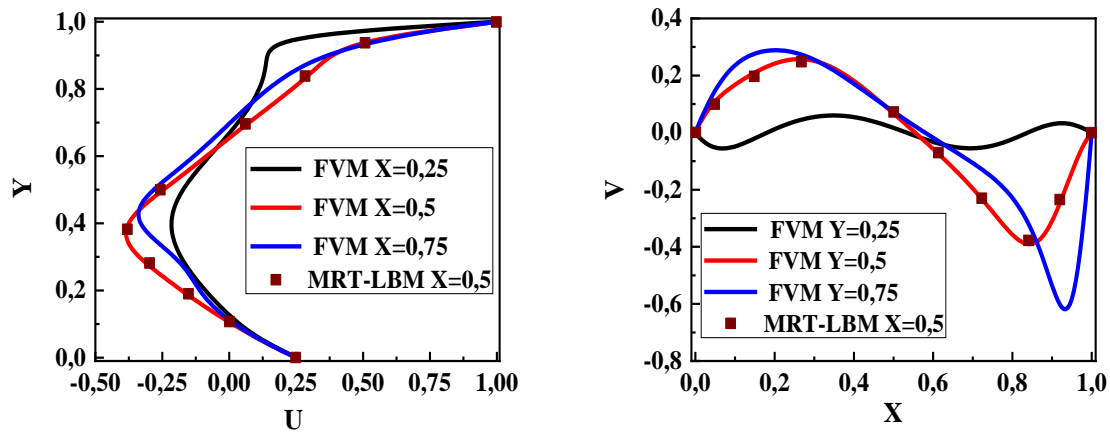
Pour  $2 \leq \lambda \leq 10$ , on voit clairement que l'amplitude maximale des profils de vitesse augmente continuellement avec l'augmentation des rapports de vitesse. De plus, les composantes de la vitesse  $U$  ont atteint leur maximum ( $|U_{\max}|$ ) à l'intérieur de la cavité le long de la ligne médiane verticale ( $X=0,5$ ) en dessous du centre de la cavité contrairement au cas d'un entrainement symétrique ( $\lambda=1$ ), révèle que la distribution de la vitesse à l'intérieur de la cavité est fortement affectée par la résistance de la couche de cisaillement de séparation qui est confinée à la partie inférieure de la cavité. D'autre part, la valeur maximale de la composante de vitesse ( $|V_{\max}|$ ) est atteinte dans la cavité le long de la ligne horizontale ( $Y=0.75$ ) approximativement près du coin supérieur droit de la cavité.



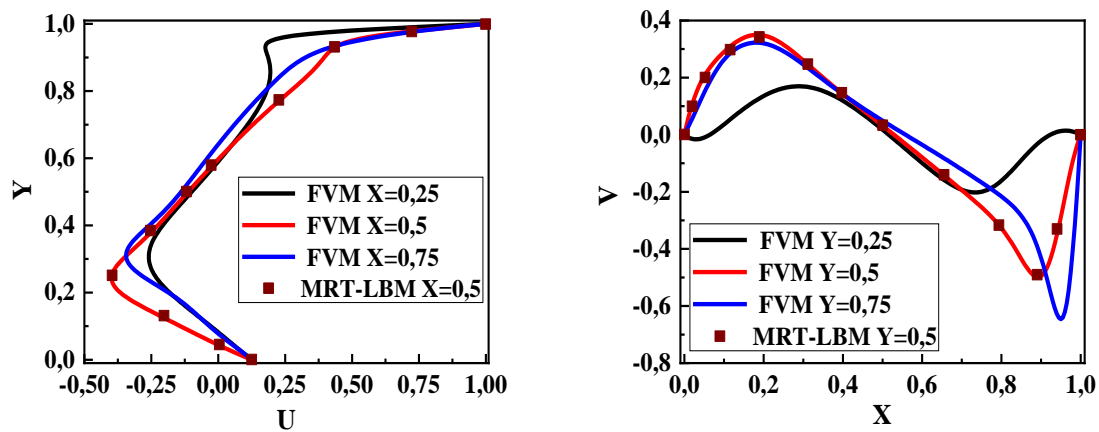
**Figure 4.14.** Profils de vitesse pour  $\lambda=1$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).



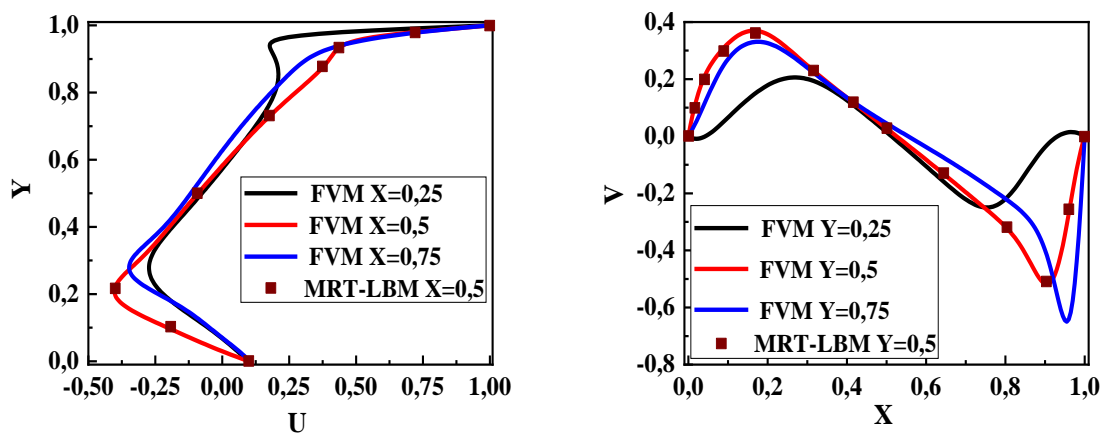
**Figure 4.15.** Profils de vitesse pour  $\lambda=2$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).



**Figure 4.16.** Profils de vitesse pour  $\lambda=4$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).



**Figure 4.17.** Profils de vitesse pour  $\lambda=8$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).



**Figure 4.18.** Profils de vitesse pour  $\lambda=10$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).

La composante de vitesse maximale ( $|U_{\max}|$ ) le long de ( $X=0.75$ ) reste supérieur à celle de ( $X=0.25$ ) et cela pour  $1 \leq \lambda \leq 10$ .

On constate qu'il y'a une bonne concordance entre les deux méthodes (FVM et MRT-LBM) entre les profils de vitesses  $U$  et  $V$  le long des lignes médianes vertical et horizontal ( $X=0.5$  et  $Y=0.5$ ).

### c) Propriétés des vortex primaires et secondaires :

Pour clarifier et étayer les résultats numériques affichés ci-dessus, les emplacements des centres des vortex primaire et secondaire calculés pour  $\lambda=1, 2, 4, 8$  et  $10$  avec  $Re_2=100$  sont affichés dans le tableau 4.10, et cela pour les méthodes FVM et MRT-LBM. Une analyse complète des propriétés des vortex primaires et secondaires est également présentée dans le tableau 4.11 en termes de fonction de courant aux emplacements des vortex susmentionnés (voir le tableau 4.10).

**Tableau 4.10.** Emplacements des centres des vortex primaire et secondaire pour différents rapports de vitesse.

$\lambda$	Méthode numérique	Vortex primaire				Vortex secondaire			
		Supérieur		Inférieur		Inférieur gauche		Supérieur droite	
		X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	FVM	0.61450	0.79626	0.6150	0.20341	-	-	-	-
	MRT-LBM	0.59176	0.79767	0.5922	0.20392	-	-	-	-
2	FVM	0.62039	0.7340	0.58658	0.16468	-	-	-	-
	MRT-LBM	0.62439	0.7375	0.57618	0.16608	-	-	-	-
4	FVM	0.56442	0.65779	-	-	0.29345	0.12391	0.73664	0.11302
	MRT-LBM	0.56738	0.65991	-	-	0.30280	0.12311	0.72452	0.11231
8	FVM	0.53775	0.60021	-	-	0.17699	0.09991	0.81654	0.09042
	MRT-LBM	0.53873	0.60288	-	-	0.18286	0.09782	0.81107	0.08691
10	FVM	0.53287	0.58518	-	-	0.15559	0.09588	0.82618	0.08780
	MRT-LBM	0.53252	0.58677	-	-	0.15946	0.09368	0.82135	0.08287

**Tableau 4.11.** Valeurs de fonction du courant aux centres des vortex primaire et secondaire.

$\lambda$	Méthode numérique	Vortex primaire		Vortex secondaire	
		Supérieur	Inférieur	Inférieur gauche	Supérieur droite
		$\psi$	$\psi$	$\psi$	$\psi$
1	FVM	-0.09015	0.09015	-	-
	MRT-LBM	-0.08793	0.08793	-	-
2	FVM	-0.102416	0.011628	-	-
	MRT-LBM	-0.099922	0.038058	-	-
4	FVM	-0.112153	-	0.064363	0.063030
	MRT-LBM	-0.109844	-	0.014568	0.013264
8	FVM	-0.118045	-	0.005845	0.005374
	MRT-LBM	-0.115680	-	0.006171	0.005552
10	FVM	-0.119218	-	0.004535	0.004418
	MRT-LBM	-0.116809	-	0.004898	0.004571



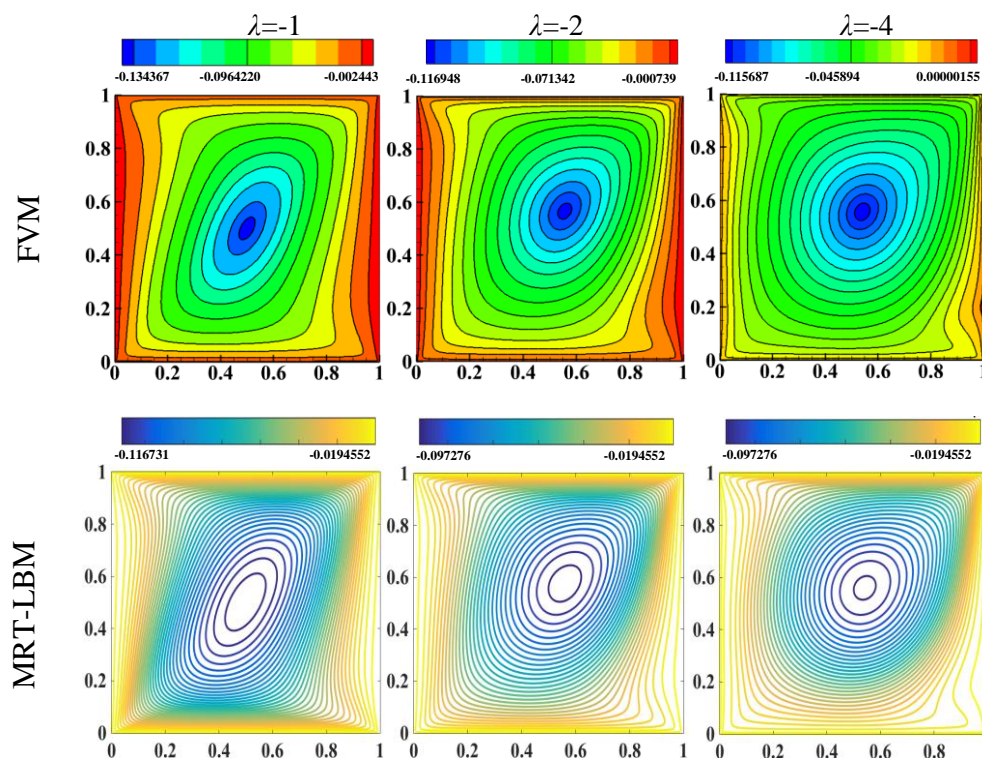
### 4.8.3 Mouvement antiparallèle des parois :

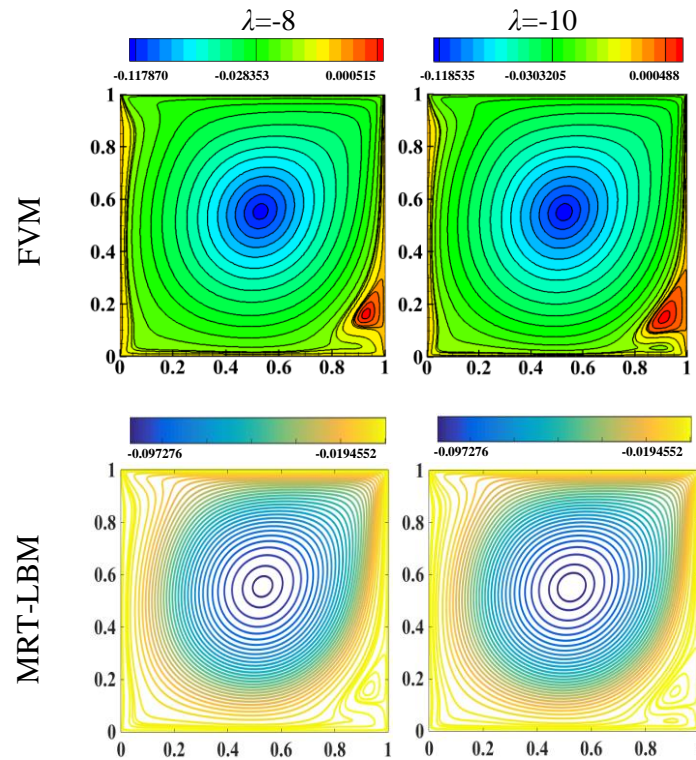
#### a) Structures d'écoulement :

Pour un mouvement de paroi antiparallèle, la paroi inférieure se déplace dans la direction gauche avec une vitesse constante ( $U=-U_B$ ) obtenue grâce à un faible nombre de Reynolds égal à  $Re_2=100$ , tandis que la paroi supérieure glisse dans la direction droite avec des vitesses différentes,  $U_T=\lambda U_B$ , par rapport à divers rapports de vitesse imposés,  $\lambda=-1, -2, -4, -8$  et  $-10$ .

La figure 4.19 représente les contours de la fonction du courant obtenus pour l'écoulement entraîné de manière symétrique ( $U_T=-U_B$  ;  $\lambda=-1$ ), et asymétrique à différents rapports de vitesse ( $U_T \neq -U_B$  ;  $\lambda=-2, -4, -8$  et  $-10$ ) avec  $Re_2=100$ , celles-ci pour les méthodes FVM et MRT-LBM. Il ressort de cette figure que l'augmentation des rapports de vitesse ( $\lambda$ ) influence la topologie de la structure d'écoulement à l'intérieur de la cavité.

Pour  $\lambda=-1$ , au début du calcul, deux vortex co-rotatifs séparés sont générés près de la paroi (appelés écoulement de deux vortex) avec une direction de circulation dans le sens horaire. Après quelques itérations, les deux vortex primaires fusionnent et un seul vortex semble occuper la majeure partie de la cavité tourne dans le sens horaire. La génération d'une telle structure d'écoulement est attribuée à une forte inertie induite par les deux coins en aval qui correspondent aux deux parois coulissantes, poussant ainsi les deux vortex pour se rapprocher puis se combiner et former un seul vortex. Ce type d'écoulement est appelé l'écoulement d'œil-de-chat par Kuhlmann et al. [59, 80] qui est parfaitement symétrique par rapport au centre de la cavité ( $(X, Y) = (0.5, 0.5)$ ).





**Figure 4.19.** Contours de fonction de courant pour différents rapports de vitesse.

Pour  $-2 \leq \lambda \leq -10$ , l'écoulement n'est plus symétrique par rapport au centre de la cavité puis qu'il est accéléré de manière asymétrique par un mouvement important de la paroi supérieure par rapport à la paroi inférieure.

Pour  $\lambda = -2$ , l'écoulement de fluide est constitué d'un vortex principal qui occupe la majeure partie de la cavité avec une rotation dans le sens horaire. Le centre du vortex principal est quelque peu décalé du centre géométrique de la cavité vers le côté supérieur droit.

À mesure que  $\lambda$  augmente jusqu'à  $-4$ , en plus du vortex principal, un petit vortex tournant dans le sens antihoraire commence à apparaître de manière adjacente au coin inférieur droit qui a tendance à croître en taille et en force avec les rapports de vitesse croissants.

Lorsque  $\lambda$  augmente pour atteindre  $-10$ , une formation progressive d'une région presque stagnante est observée sous le vortex mineur dans laquelle un second vortex secondaire commence à apparaître. Le centre du vortex primaire se déplace progressivement vers le bas pour être près du centre de la cavité.

On voit aussi bien que les deux méthodes (FVM et MRT-LBM) reproduisent bien le phénomène physique avec une grande similarité pour les lignes de courant obtenues.

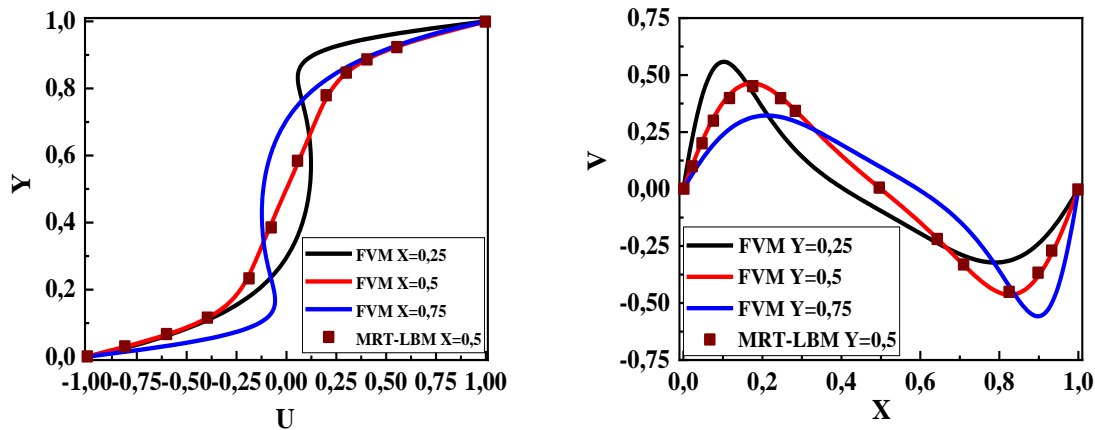
#### b) Analyse des profils de vitesse :

Pour démontrer l'effet de divers rapports de vitesse sur les profils de vitesse à l'intérieur de la cavité, les figures 4.20-4.24 illustrent la variation des composantes des vitesses  $U$  et  $V$  obtenus par la méthode FVM respectivement le long des lignes verticales ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ) et horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ), pour  $Re_2=100$  et  $\lambda = -1, -2, -4, -8$  et  $-10$ . Une comparaison

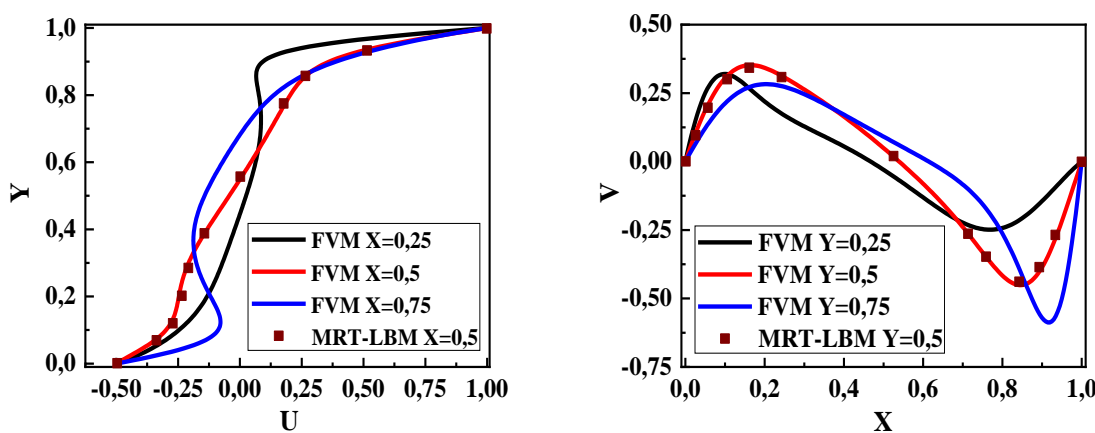
des vitesses  $U$  et  $V$  avec la méthode MRT-LBM est présenté le long des lignes médianes vertical et horizontal ( $X=0.5$  et  $Y=0.5$ ).

Pour  $\lambda=-1$ , les composantes de vitesse  $U$  le long ( $X=0.25$  et  $0.75$ ) représentent une double symétrie l'une de l'autre ( $U_{0.25}$  et  $U_{0.75}$  apparaissent identiques lorsqu'elles tournent à  $180^\circ$  autour du centre de la cavité). La composante de vitesse  $V$  maximale ( $|V_{\max}|$ ) dans la cavité est obtenue le long de ( $Y=0.25, 0.75$ ) respectivement près du coin inférieur gauche et du coin supérieur droit de la cavité, tandis que les composantes de vitesse  $V$  le long de ( $Y=0.25$  et  $0.75$ ) représentent également une double symétrie autour du centre de la cavité.

Pour  $-2 \leq \lambda \leq -10$ , on voit que l'amplitude maximale des profils de vitesse augmente continuellement avec l'augmentation des rapports de vitesse. En outre, la plage de la vitesse maximale ( $|U_{\max}|$ ) à l'intérieur de la cavité est étendue de la paroi inférieure vers la paroi supérieure avec les rapports de vitesse croissants. En outre, la composante de vitesse maximale ( $|V_{\max}|$ ) dans la cavité est atteinte le long de ( $Y=0.75$ ) près du coin supérieur droit de la cavité. On constate aussi qu'il y'a une bonne concordance entre les deux méthodes (FVM et MRT-LBM) pour les profils de vitesses  $U$  et  $V$  le long des lignes médianes vertical et horizontal ( $X=0.5$  et  $Y=0.5$ ).



**Figure 4.20.** Profils de vitesse pour  $\lambda=-1$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).



**Figure 4.21.** Profils de vitesse pour  $\lambda=-2$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).



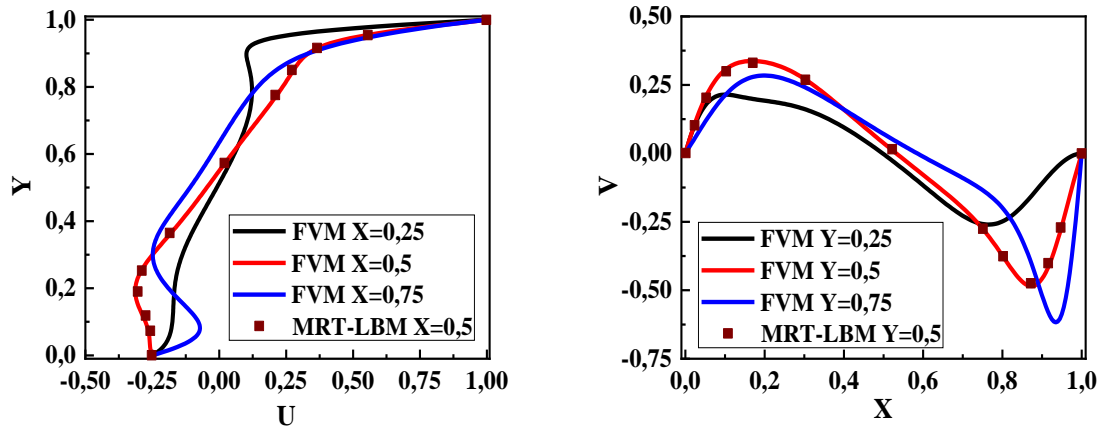


Figure 4.22. Profils de vitesse pour  $\lambda=-4$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).

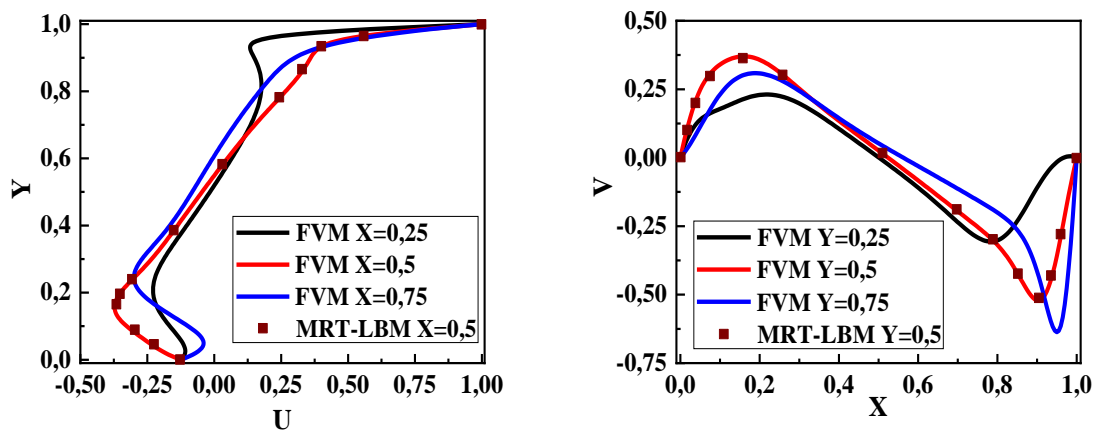


Figure 4.23. Profils de vitesse pour  $\lambda=-8$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).

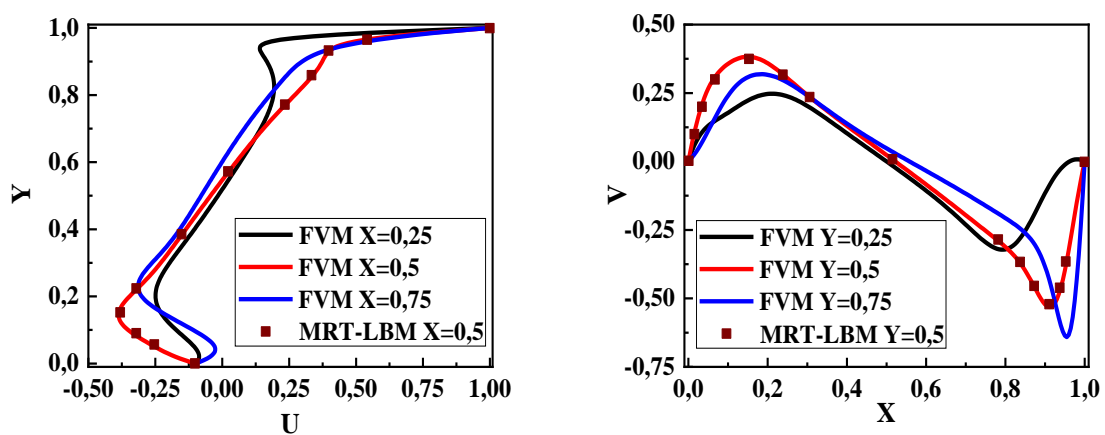


Figure 4.24. Profils de vitesse pour  $\lambda=-10$  : (a) vitesse  $U$  le long des lignes verticale ( $X=0.25, 0.5, 0.75$ ), (b) vitesse  $V$  le long des lignes horizontales ( $Y=0.25, 0.5, 0.75$ ).

## c) Propriétés des vortex primaires et secondaires :

Les tableaux 4.12 et 4.13 donnent l'emplacement et les propriétés des centres des vortex primaire et secondaire pour  $Re_2=100$  et  $\lambda=-1, -2, -4, -8$  et  $-10$ , et cela pour les méthodes FVM et MRT-LBM. Ces résultats de benchmark reflètent l'écoulement à l'intérieur de la cavité.

**Tableau 4.12.** Emplacements des centres des vortex primaire et secondaire pour différents rapports de vitesse.

$\lambda$	Méthode numérique	Vortex primaire		Premier vortex secondaire inférieur droit		Deuxième vortex secondaire inférieur droit	
		X	Y	X	Y	X	Y
		-1	FVM	0.50032	0.50006	-	-
	MRT-LBM	0.50000	0.50000	-	-	-	-
-2	FVM	0.55595	0.56593	-	-	-	-
	MRT-LBM	0.56020	0.57218	-	-	-	-
-4	FVM	0.54054	0.55746	0.99352	0.20003	-	-
	MRT-LBM	0.54254	0.55870	0.99216	0.19839	-	-
-8	FVM	0.53044	0.55286	0.92830	0.16153	-	-
	MRT-LBM	0.52998	0.55576	0.92814	0.16195	-	-
-10	FVM	0.52767	0.55053	0.91200	0.14995	0.89908	0.03428
	MRT-LBM	0.52894	0.55245	0.91192	0.15013	0.89787	0.03901

**Tableau 4.13.** Valeurs de fonction du courant aux centres des vortex primaire et secondaire.

$\lambda$	Méthode numérique	Vortex primaire	Premier vortex secondaire inférieur droit	Deuxième vortex secondaire inférieur droit
		$\psi$	$\psi$	$\psi$
		-1	FVM	-0.134859
	MRT-LBM	-0.131128	-	-
-2	FVM	-0.117322	-	-
	MRT-LBM	-0.114824	-	-
-4	FVM	-0.116165	6.048551E-07	-
	MRT-LBM	-0.113774	9.400778E-05	-
-8	FVM	-0.118288	5.793521E-04	-
	MRT-LBM	-0.115719	4.237354E-04	-
-10	FVM	-0.119027	9.482300E-04	-1.53147E-03
	MRT-LBM	-0.116420	7.801556E-04	-1.18871E-03

## 4.8.4 Conclusion :

La méthode des volumes finis du second ordre (FVM) et la méthode de Boltzmann sur réseau de plusieurs temps de relaxation (MRT-LBM) ont été utilisées pour simuler un écoulement bidimensionnel dans une cavité carrée doublement entraînée avec un mouvement de paroi parallèle et antiparallèle. Un écoulement asymétrique inexploré ( $|Re_1| \neq |Re_2|$ ) attire l'attention dans ce chapitre où il démontre grandement l'utilisation de divers rapports de vitesse ( $1 \leq |\lambda| \leq 10$ ) pour prédire le comportement de l'écoulement et les caractéristiques du fluide à l'intérieur de la cavité doublement entraînée pour  $Re_2=100$ . Sur la base des discussions ci-dessus, nous pourrions extraire ce qui suit :

- 
- Les structures d'écoulement sont directement et significativement affectées lorsque différents rapports de vitesse provoquent l'incitation.
  - Pour  $|\lambda| > 1$ , aucun écoulement symétrique existe et un écoulement asymétrique apparaît et évolue continuellement avec les rapports de vitesse croissants.
  - Pour un mouvement parallèle et  $\lambda > 2$ , l'écoulement se compose d'un vortex primaire tournant dans le sens horaire occupant la majeure partie de la cavité, avec deux vortex secondaires tournant dans le sens antihoraire confinés aux coins inférieurs. Ces derniers sont séparés par une couche de cisaillement en forme d'arc du vortex primaire.
  - Pour un mouvement antiparallèle et  $2 < |\lambda| < 10$ , l'écoulement consiste en un vortex primaire tournant dans le sens horaire occupant la majeure partie de la cavité et un vortex secondaire tournant dans le sens antihoraire adjacent au coin inférieur droit. Pour  $\lambda = -10$ , un autre vortex secondaire rotatif dans le sens horaire apparaît sous le premier vortex.
  - Les profils de vitesse à l'intérieur de la cavité ont été influencés par divers rapports de vitesse, ce qui est mis en évidence par les amplitudes croissantes et les distributions asymétriques. Pour  $2 \leq |\lambda| \leq 10$ , les composantes de vitesse  $U$  ont atteint leur maximum ( $|U_{\max}|$ ) le long de la ligne médiane verticale ( $X=0,5$ ), ce maximum se trouve au-dessus de la couche de cisaillement de séparation pour un mouvement parallèle et près de la paroi inférieure pour un mouvement antiparallèle. Alors que le maximum ( $|V_{\max}|$ ) est atteint le long de ( $Y=0,75$ ) près du coin supérieur droit de la cavité.
  - Les résultats ont montré la bonne concordance entre la méthode des volumes fini (FVM) et celle du Boltzmann sur réseau avec multiple temps de relaxation (MRT-LBM).
  - L'écoulement parallèle s'avère considérablement affecté par rapport à l'écoulement antiparallèle.

## 4.9 Évaluation numérique de l'écoulement turbulent dans une cavité doublement entraînée avec un mouvement antiparallèle des deux parois opposées :

### 4.9.1 Introduction et motivation :

Le sujet de l'écoulement turbulent dans une cavité entraînée a été initié expérimentalement par Koseff et Street [42]. Ils ont constaté que l'écoulement du fluide présentait la première preuve de turbulence dans la gamme de nombres de Reynolds de 6000 à 8000. Numériquement, bien qu'il y ait eu quelques études numériques sur le seuil pour une transition vers l'écoulement instationnaire [26-37] dans les nombres de Reynolds dans la gamme de 7500 à 10000, et l'écoulement chaotique pour les nombres de Reynolds qui dépassent 11000, une grande partie de la littérature accorde une attention particulière aux investigations numériques au voisinage de nombres de Reynolds très élevés basés sur l'hypothèse laminaire. Des exemples de telles études ont été réalisés pour étudier les écoulements stationnaires bidimensionnels de la cavité entraînée jusqu'à un nombre maximum de Reynolds de 50000 [4-19], tandis qu'une étude récente [20] fournit des résultats instables et chaotiques pour  $20000 \leq Re_{1,2} \leq 10^6$ .

En ce qui concerne le problème de l'écoulement de la cavité doublement entraînée, les signes de turbulence devraient apparaître tôt même avec de faibles nombres de Reynolds. Ceci est dû au fait que l'écoulement étant induit avec deux parois coulissantes, une quantité importante de fluide est accélérée à partir des deux coins aval provoque des problèmes d'instabilité et de fluctuations. Les premières investigations expérimentales et numériques de l'écoulement ont été menées par Kuhlmann et al. [59, 80] afin d'étudier l'écoulement bidimensionnel et tridimensionnel, le processus d'instabilité et la multiplicité des solutions dans une cavité rectangulaire doublement entraînée pour  $Re_{1,2} \leq 800$  alors que l'écoulement turbulent n'était pas une priorité.

Les investigations numériques de l'écoulement bidimensionnel stationnaire dans une cavité carrée et rectangulaire parallèle et antiparallèle doublement entraîné ont fait l'objet de nombreux chercheurs [50-53, 55-58, 68-77]. Leurs résultats se sont également limités au concept d'hypothèse d'écoulement laminaire sur une large gamme de nombres de Reynolds,  $Re_{1,2} \leq 10500$ .

Les examens numériques de l'écoulement étendu à des nombres de Reynolds plus élevés ont abordé le début de l'écoulement instationnaire. Par exemple, Lémee et al. [54] ont constaté que, pour un entraînement parallèle des deux parois d'une cavité carrée, les calculs qui dépassaient le seuil de  $Re_{1,2} \in [10500, 11000]$  étaient estimés instationnaires et ont été présentés jusqu'à  $Re=14000$ . Dernièrement, An et al. [36] ont étudié les caractéristiques d'écoulement, les nombres de Reynolds de transition et les symétries des solutions dans une cavité carrée pour un mouvement parallèle et antiparallèle jusqu'à un nombre de Reynolds maximal de 18000. Pour un mouvement antiparallèle des deux parois, ils ont constaté que l'écoulement devient instationnaire dans la gamme des nombres de Reynolds de 10100 à 10200. Ils ont affirmé que l'écoulement devient chaotique pour  $Re_{1,2} \in [16500-17000]$ . Un autre examen récent important

a été réalisé par An et al. [20] qui sont allés plus loin et ont étudié les écoulements doublement entraînés en mouvement parallèle et antiparallèle dans une cavité carrée et en régime turbulent,  $20000 \leq Re_{1,2} \leq 10^6$ , cependant, les solutions présentées étaient instables et chaotiques.

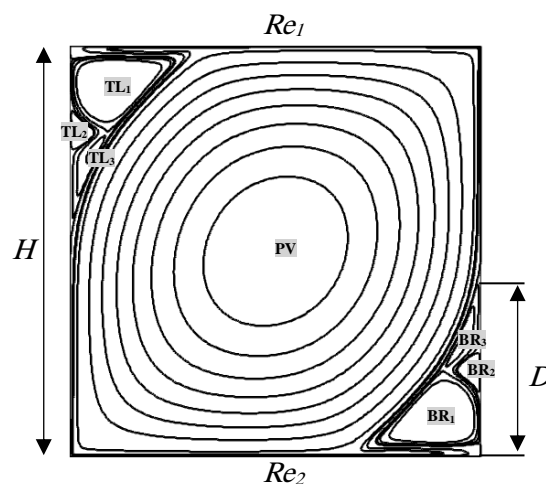
À travers les revues de littérature susmentionnées, l'étude de l'écoulement turbulent dans une cavité doublement entraînée n'a pas encore été abordée expérimentalement. À ce jour, il y a eu quelques recherches numériques sur un tel écoulement dans des nombres de Reynolds turbulents, cependant, leurs résultats étaient basés sur le code LBM [20, 36] et étaient instables, asymétriques et chaotiques.

Ce chapitre vise donc à étudier l'écoulement turbulent stationnaire et bidimensionnel dans une cavité doublement entraînée avec un mouvement de paroi antiparallèle ( $Re_1 = -Re_2$  (Fig 3.2b)) à divers nombres de Reynolds,  $Re_{1,2} = 10000, 15000$  et  $20000$ . En tant que telle, la méthode des volumes finis avec un algorithme couplé a été utilisé avec l'inclusion de quatre modèles de turbulence RANS fréquemment utilisés (SA, RNG  $k-\varepsilon$ , SST  $k-\omega$  et Omega-RSM). Un maillage non uniforme d'une résolution de  $257 \times 257$  points a été utilisé dans les directions  $X$  et  $Y$  et procéder à tous les calculs.

Les résultats obtenus ont été visualisés graphiquement par les contours de fonction de courant, les profils de vitesse  $U$  et  $V$  ainsi que les propriétés des vortex primaires et secondaires. L'évaluation des résultats a été effectuée à l'aide des résultats obtenus à partir de l'hypothèse de l'écoulement laminaire. Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'un article de revue internationale et un article de conférence internationale [166, 167].

#### 4.9.2 Discuter les structures d'écoulement :

À des fins de comparaison, la figure 4.25 décrit une configuration généralisée de la structure d'écoulement à l'intérieur de la cavité antiparallèlement doublement entraînée. Les abréviations PV, BR et TL décrivent respectivement les éléments suivants : vortex primaire, vortex secondaire inférieur droit et vortex secondaire supérieur gauche. Les nombres 1, 2, 3 indiquent respectivement la hiérarchie en fonction de la taille des vortex secondaires comme premier, deuxième et troisième.  $D$  et  $H$  désignent respectivement la profondeur des vortex secondaires inférieur droite et la hauteur physique de la cavité.



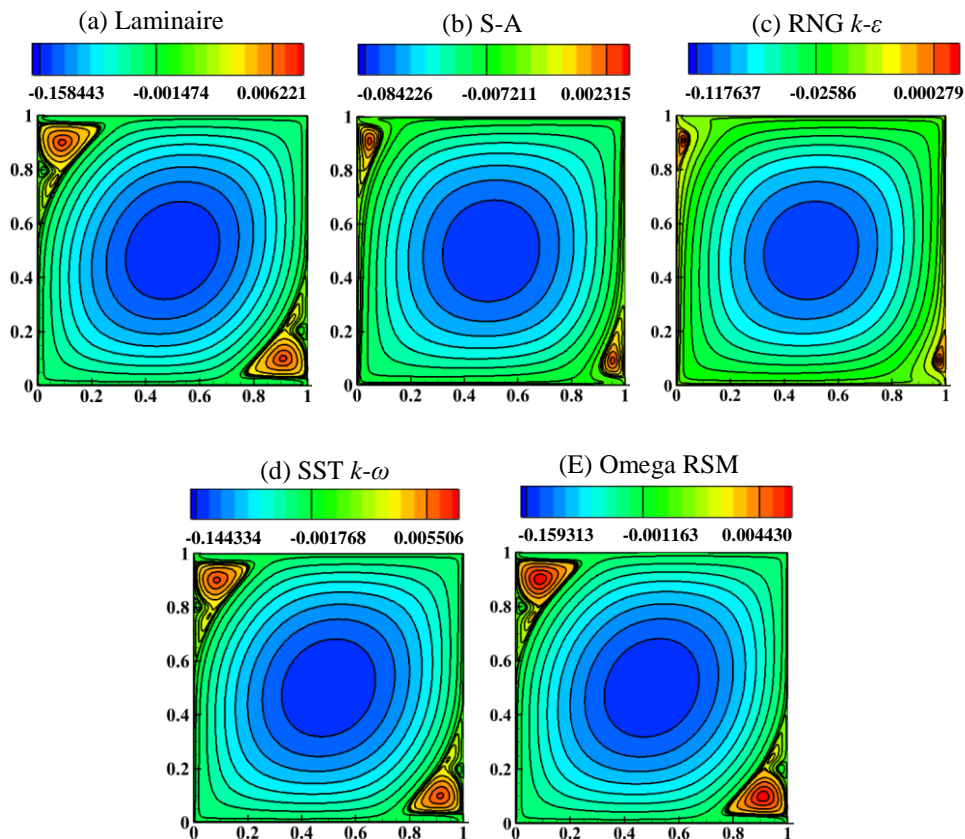
**Figure 4.25.** Vue schématique de l'écoulement de la cavité antiparallèlement doublement entraînée.

Comme mentionné précédemment, l'écoulement sera considéré comme turbulent au-dessus du seuil de Reynolds de 10000. La figure 4.26 illustre les structures d'écoulement obtenues en termes de contours de fonction de courant avec l'hypothèse laminaire et quatre modèles de turbulence (le modèle S-A, le modèle RNG  $k-\epsilon$ , le modèle SST  $k-\omega$  et le modèle Omega RSM) affichées pour  $Re_{1,2}=10000, 15000$  et  $20000$ .

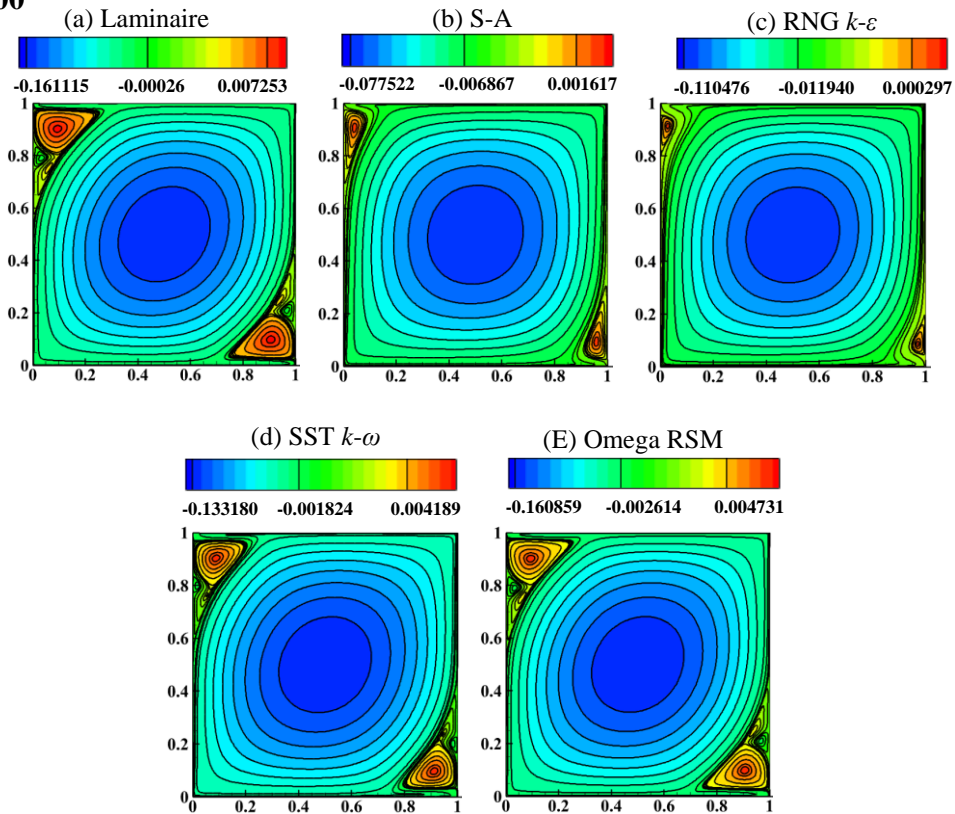
La figure 4.27 représente un examen attentif en agrandissant le coin inférieur droit pour une meilleure visualisation des structures des vortex secondaires.

En général, à  $Re=10000$ , toutes les simulations révèlent la même structure dans la majeure partie de la cavité. Évidemment, un écart se limite principalement aux régions des murs d'extrémité. Les écoulements prédits avec l'hypothèse laminaire et le modèle Omega RSM sont très proches et cela est clairement illustré par les vortex secondaires ( $BR_{1,2,3}$  et  $TL_{1,2,3}$ ) développés près des coins. De plus, une diminution raisonnable peut être observée dans la taille des vortex secondaires capturés avec le modèle SST  $k-\omega$ , cependant, ils sont étroitement comparés à ceux du modèle Omega RSM. Au contraire, seuls les premiers vortex secondaires  $BR_1$  et  $TL_1$  sont détectés à partir des calculs S-A et RNG  $k-\epsilon$  avec une taille décroissante, respectivement.

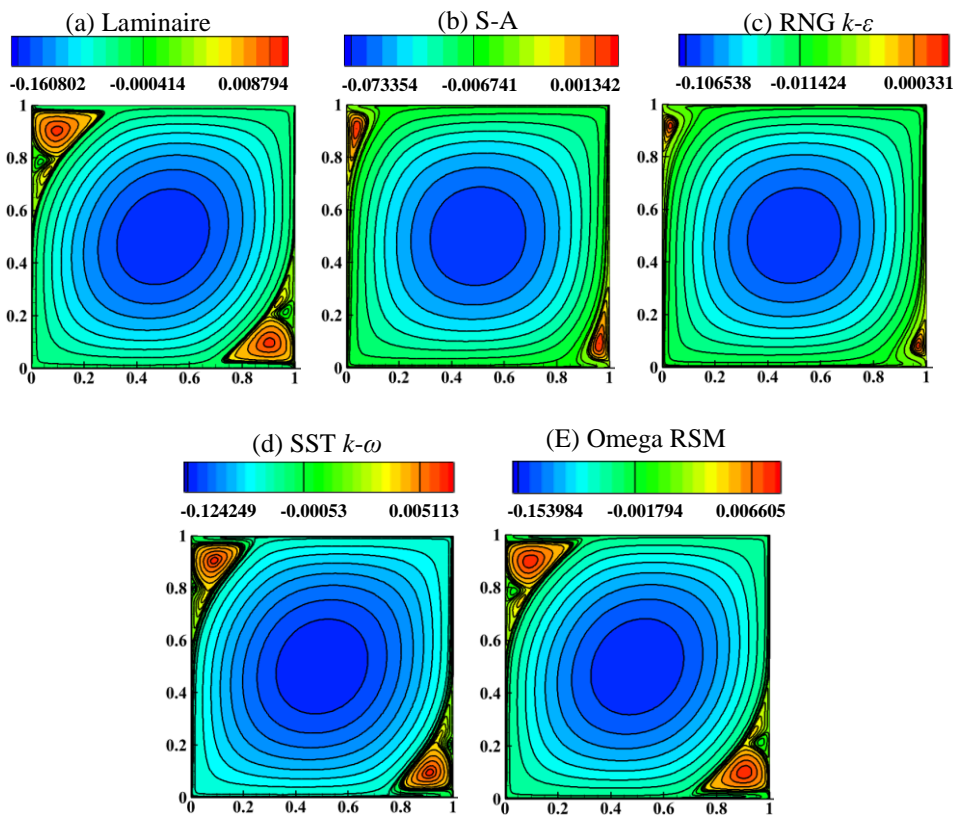
**$Re_{1,2}=10000$**



$Re_{1,2}=15000$



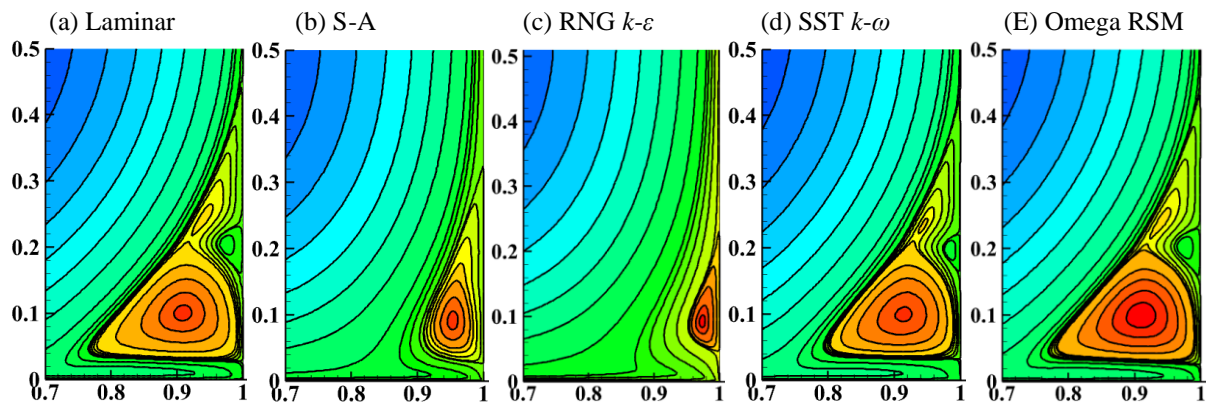
$Re_{1,2}=20000$



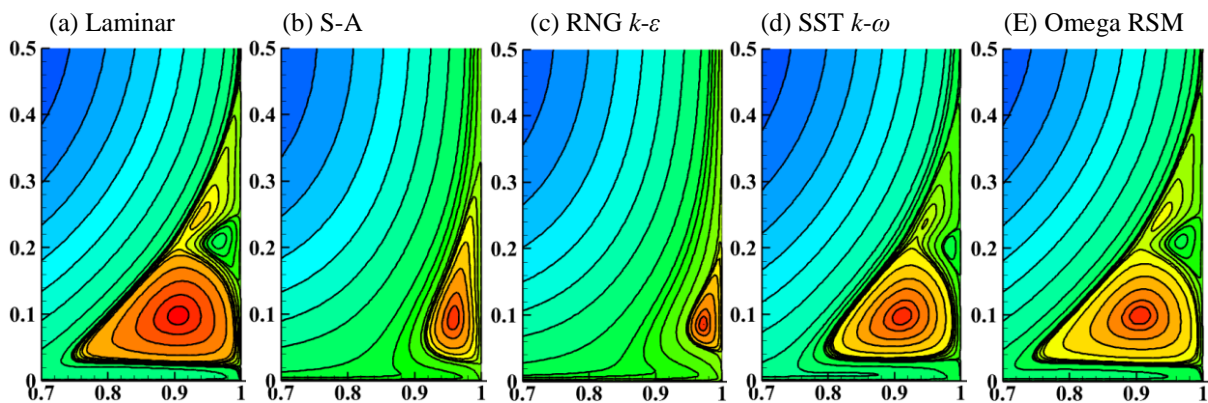
**Figure 4.26.** Contours de fonction de courant obtenus avec l’hypothèse laminaire et différents modèles de turbulence RANS pour différents nombres de Reynolds.



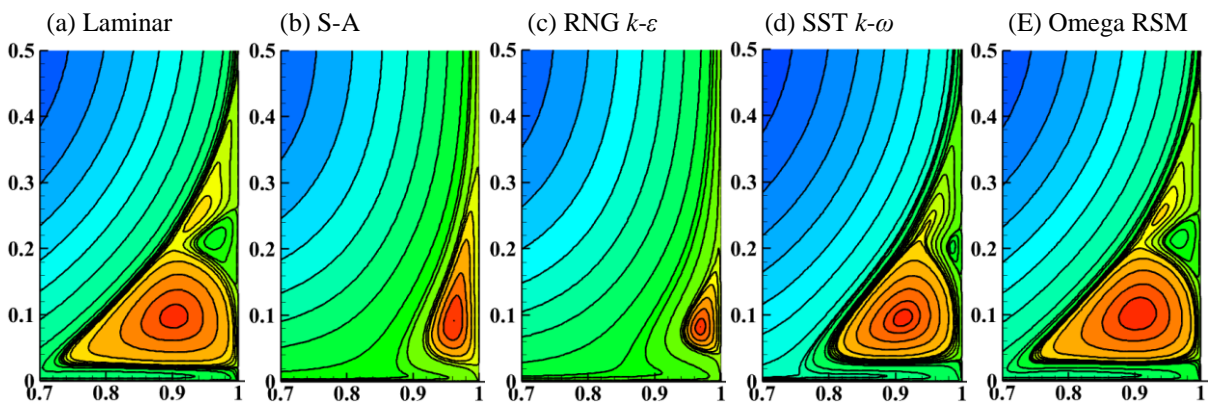
$Re_{1,2}=10000$



$Re_{1,2}=15000$



$Re_{1,2}=20000$



**Figure 4.27.** Vue rapprochée des vortex secondaires dans le côté inférieur droit pour différents nombres de Reynolds.

Une image complète de la structure d'écoulement à l'intérieur de la cavité entraînée est illustrée pour des nombres de Reynolds plus élevés de  $Re_{1,2} = 15000$  et  $Re_{1,2} = 20000$ . De toute évidence, le même comportement se distingue par des caractéristiques d'écoulement très similaires. La



taille des vortex secondaires augmente relativement avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Encore une fois, l'écoulement avec hypothèse laminaire et le modèle Omega RSM est capturé avec une sensibilité élevée dans les régions proches de la paroi avec une petite différence globale. En outre, une sous-estimation relative pour imiter la dynamique de l'écoulement est notée pour le modèle SST  $k-\omega$  avec des tailles plus faibles de vortex secondaires. D'un autre côté, l'écoulement ne peut pas être correctement démontré pour les cas S-A et RNG  $k-\epsilon$  avec des variations significatives dans les régions proches de la paroi. Seuls les premiers vortex secondaires (BR<sub>1</sub> et TL<sub>1</sub>) sont capturés.

### 4.9.3 Évaluation des propriétés des vortex primaires et secondaires :

L'évaluation des propriétés d'écoulement pour les hypothèses laminaires et turbulentes est décrite dans les tableaux 4.14, 4.16 et 4.18 en termes d'emplacement, de fonction du courant et de valeurs de vorticité des vortex primaires et secondaires respectivement pour  $Re_{1,2}=10000$ ,  $Re_{1,2}=15000$  et  $Re_{1,2}=20000$ . De plus, les tableaux 4.15, 4.17 et 4.19 montrent les écarts en pourcentage des valeurs de fonction de courant et de vorticité des modèles RANS par rapport aux valeurs prédites par l'hypothèse laminaire comme cas de référence.

**Tableau 4.14.** Propriétés des vortex primaires et secondaires obtenus avec l'hypothèse laminaire et les modèles turbulents RANS avec  $Re_{1,2}=10000$ .

Vortex	Propriétés des vortex	Laminaire	S-A	RNG $k-\epsilon$	SST $k-\omega$	Oméga RSM
PV	$\psi$	-0.15844	-0.08423	-0.11763	-0.14433	-0.15931
	$\omega$	2.37670	1.11016	1.62574	2.18051	2.38203
	(x, y)	0.49992, 0.49999	0.50048, 0.49987	0.50147, 0.50063	0.50055, 0.50030	0.50021, 0.50023
BR <sub>1</sub>	$\psi$	0.71461E-02	0.24125E-02	0.36051E-02	0.66301E-02	0.72201E-02
	$\omega$	-3.79642	-4.13794	-2.07047	-4.04545	-3.93129
	(x, y)	0.90876, 0.10059	0.95384, 0.09130	0.97399, 0.09229	0.91413, 0.09976	0.91048, 0.09962
BR <sub>2</sub>	$\psi$	-0.11094E-03	-	-	-0.042467E-03	-0.11577E-03
	$\omega$	1.35485	-	-	1.00682	1.41933
	(x, y)	0.97499, 0.20490	-	-	0.98353, 0.19767	0.97484, 0.20232
BR <sub>3</sub>	$\psi$	0.10658E-02	-	-	0.097947E-02	0.10440E-02
	$\omega$	-5.23813	-	-	-4.47934	-5.32241
	(x, y)	0.93992, 0.24316	-	-	0.94353, 0.23278	0.94026, 0.24039
TL <sub>1</sub>	$\psi$	0.71461E-02	0.24124E-02	0.36049E-02	0.66300E-02	0.72201E-02
	$\omega$	-3.79641	-4.13851	-2.07075	-4.04538	-3.93128
	(x, y)	0.09122, 0.89940	0.04610, 0.90869	0.02612, 0.90761	0.08586, 0.90023	0.08951, 0.90038
TL <sub>2</sub>	$\psi$	-0.11094E-03	-	-	-0.04247-E03	-0.11576E-03
	$\omega$	1.35545	-	-	1.00686	1.41987
	(x, y)	0.02500, 0.79509	-	-	0.01646, 0.80232	0.02515, 0.79768
TL <sub>3</sub>	$\psi$	0.10658E-02	-	-	0.097945E-02	0.10440E-02
	$\omega$	-5.23978	-	-	-4.48010	-5.32387
	(x, y)	0.06007, 0.75682	-	-	0.05645, 0.76721	0.05973, 0.75960

**Tableau 4.15.**  carts en Pourcentage des modèles RANS par rapport à l'hypothèse laminaire pour  $Re_{1,2}=10000$ .

Vortex	Propriétés des vortex	S-A	RNG $k-\epsilon$	SST $k-\omega$	Oméga RSM
PV	$\psi$	45.84%	25.75%	8.90%	0.54%
	$\omega$	53.28%	31.59%	8.25%	0.22%
BR <sub>1</sub>	$\psi$	66.24%	49.55%	7.22%	1.035%
	$\omega$	8.99%	45.46%	6.55%	3.55%
BR <sub>2</sub>	$\psi$	-	-	61.72%	4.35%
	$\omega$	-	-	25.68%	4.75%
BR <sub>3</sub>	$\psi$	-	-	8.10%	2.05%
	$\omega$	-	-	14.48%	1.60%

**Tableau 4.16.** Propriétés des vortex primaires et secondaires obtenus avec l'hypothèse laminaire et les modèles turbulents RANS avec  $Re_{1,2}=15000$ .

Vortex	Propriétés des vortex	Laminaire	S-A	RNG $k-\epsilon$	SST $k-\omega$	Oméga RSM
PV	$\psi$	-0.16111	-0.07752	-0.11047	-0.13317	-0.16085
	$\omega$	2.41680	1.02134	1.52506	2.01248	2.41382
BR <sub>1</sub>	(x, y)	0.50057, 0.50003	0.50028, 0.49994	0.49985, 0.50033	0.50004, 0.50020	0.50058, 0.50026
	$\psi$	0.82751E-02	0.19624E-02	0.03758E-02	0.68832E-02	0.81572E-02
BR <sub>2</sub>	$\omega$	-4.04726	-3.41646	-1.76642	-4.02702	-4.03363
	(x, y)	0.90549, 0.09846	0.95818, 0.09355	0.97140, 0.08707	0.91170, 0.09724	0.90604, 0.09914
BR <sub>3</sub>	$\psi$	-0.31470E-03	-	-	-0.07532E-03	-0.29136E-03
	$\omega$	2.07033	-	-	1.56783	1.99858
TL <sub>1</sub>	(x, y)	0.96686, 0.21004	-	-	0.98202, 0.20173	0.96676, 0.21055
	$\psi$	0.11418E-02	-	-	0.10775E-02	0.11113E-02
TL <sub>2</sub>	$\omega$	-6.27768	-	-	-4.91185	-6.29530
	(x, y)	0.93969, 0.24808	-	-	0.94561, 0.23594	0.93851, 0.24663
TL <sub>3</sub>	$\psi$	0.82751E-02	0.19624E-02	0.03758E-02	0.68832E-02	0.81571E-02
	$\omega$	-4.04727	-3.41635	-1.76664	-4.02698	-4.03360
TL <sub>1</sub>	(x, y)	0.09450, 0.90153	0.04181, 0.90644	0.02861, 0.91292	0.08831, 0.90275	0.09392, 0.90085
	$\psi$	-0.31469E-03	-	-	-0.075312E-03	-0.29134E-03
TL <sub>2</sub>	$\omega$	2.07069	-	-	1.56805	1.99860
	(x, y)	0.03313, 0.78995	-	-	0.01796, 0.79823	0.03325, 0.78942
TL <sub>3</sub>	$\psi$	0.11417E-02	-	-	0.10775E-02	0.11113E-02
	$\omega$	-6.27825	-	-	-4.91273	-6.29743
	(x, y)	0.06031, 0.75190	-	-	0.05436, 0.76404	0.06143, 0.75334

**Tableau 4.17.** Écart en Pourcentage des modèles RANS par rapport à l'hypothèse laminaire pour  $Re_{1,2}=15000$ .

Vortex	Propriétés des vortex	S-A	RNG $k-\epsilon$	SST $k-\omega$	Oméga RSM
PV	$\psi$	51.88%	31.43%	17.34%	0.16%
	$\omega$	57.73%	36.89%	16.72%	0.12%
BR <sub>1</sub>	$\psi$	76.28%	95.45%	16.82%	0.001%
	$\omega$	15.58%	56.35%	0.50%	0.33%
BR <sub>2</sub>	$\psi$	-	-	76.06%	7.41%
	$\omega$	-	-	24.27%	3.46%
BR <sub>3</sub>	$\psi$	-	-	5.62%	2.66%
	$\omega$	-	-	21.75%	0.28%

Ces données soutiennent fortement le concept dans les images susmentionnées. De toute évidence, à  $Re_{1,2}=10000$ , les écarts mineurs constatés entre l'hypothèse laminaire et les cas d'Oméga RSM concernant les valeurs de fonction de courant et de vorticité sont dans des limites acceptables. On outre, les résultats prédits avec le modèle SST  $k-\omega$  sont approximativement dans une petite différence avec ceux de l'hypothèse laminaire et cela est clairement montré à travers les écarts en pourcentage.

En revanche, des pourcentages d'écarts significatifs sont déterminés avec les modèles S-A et RNG  $k-\epsilon$  par rapport à l'hypothèse laminaire. Ici, l'écoulement n'est pas correctement capturé dans les régions proches de la paroi et cela se reflète clairement sur les propriétés des vortex. Il est à noter que les pourcentages d'écart ne sont pris que dans le vortex primaire et le coin inférieur droit, car l'écoulement est symétrique et presque les mêmes écarts existent dans le coin supérieur gauche.

**Tableau 4.18.** Propriétés des vortex primaires et secondaires obtenus avec l'hypothèse laminaire et les modèles turbulents RANS avec  $Re_{1,2}=20000$ .

Vortices	Vortices propriétés	Laminar	S-A	RNG $k-\epsilon$	SST $k-\omega$	Oméga RSM
PV	$\psi$	-0.16080	-0.07335	-0.10653	-0.12424	-0.15398
	$\omega$	2.41789	0.96445	1.46383	1.86994	2.30924
BR <sub>1</sub>	(x, y)	0.50042, 0.50017	0.50035, 0.50037	0.50015, 0.50018	0.50091, 0.50086	0.50018, 0.50010
	$\psi$	0.91875E-02	0.15843E-02	0.04644E-02	0.66538E-02	0.90271E-02
BR <sub>2</sub>	$\omega$	-4.18343	-2.98594	-1.84251	-3.85247	-4.83277
	(x, y)	0.90275, 0.09771	0.96130, 0.09105	0.96871, 0.08234	0.91098, 0.09527	0.90490, 0.10083
BR <sub>3</sub>	$\psi$	-0.47466E-03	-	-	-0.059330E-03	-0.32149E-03
	$\omega$	2.44713	-	-	1.75850	2.08389
TL <sub>1</sub>	(x, y)	0.96560, 0.21579	-	-	0.98521, 0.20231	0.96742, 0.21446
	$\psi$	0.12344E-02	-	-	-	0.10635E-02
TL <sub>2</sub>	$\omega$	-6.78973	-	-	-	-6.29228
	(x, y)	0.93915, 0.25168	-	-	-	0.93940, 0.25110
TL <sub>3</sub>	$\psi$	0.91876E-02	0.15843E-02	0.46436E-03	0.66538E-02	0.90271E-02
	$\omega$	-4.18338	-2.98590	-1.84249	-3.85248	-4.83272
TL <sub>1</sub>	(x, y)	0.09721, 0.90221	0.03862, 0.90892	0.03125, 0.91763	0.08900, 0.90471	0.09507, 0.89914
	$\psi$	-0.47466E-03	-	-	-0.05933E-03	-0.32149E-03
TL <sub>2</sub>	$\omega$	2.44708	-	-	1.75866	2.08385
	(x, y)	0.03435, 0.78418	-	-	0.01476, 0.79765	0.03255, 0.78552
TL <sub>3</sub>	$\psi$	0.12344E-02	-	-	-	0.10635E-02
	$\omega$	-6.79046	-	-	-	-6.29254
	(x, y)	0.06080, 0.74831	-	-	-	0.06058, 0.74886

**Tableau 4.19.** Écart en Pourcentage des modèles RANS par rapport à l'hypothèse laminaire pour  $Re_{1,2}=20000$ .

Vortices	Propriétés des vortex	S-A	RNG $k-\epsilon$	SST $k-\omega$	Oméga RSM
PV	$\psi$	54.38%	33.75%	22.73%	4.24%
	$\omega$	60.11%	39.45%	22.66%	4.49%
BR <sub>1</sub>	$\psi$	82.75%	94.94%	27.57%	1.74%
	$\omega$	28.62%	55.95%	7.91%	15.52%
BR <sub>2</sub>	$\psi$	-	-	87.50%	32.26%
	$\omega$	-	-	28.14%	14.84%
BR <sub>3</sub>	$\psi$	-	-	-	13.84%
	$\omega$	-	-	-	7.32%

**Tableau 4.20.** Profondeur des vortex secondaires inférieure droite ( $D/H$ ) en fonction des nombres de Reynolds.

$Re$	Laminar	S-A	RNG $k-\epsilon$	SST $k-\omega$	Oméga RSM
10000	0.4511	0.3283	0.2339	0.4372	0.4476
15000	0.4658	0.3396	0.2262	0.4445	0.4623
20000	0.4769	0.3430	0.2231	0.4556	0.4715

La même image se dégage avec l'augmentation des nombres de Reynolds jusqu'à 15000 et 20000. En vérité, les propriétés d'écoulement calculées avec l'oméga RSM sont dans une différence relativement faible avec celles de l'hypothèse laminaire qui est également illustrée à partir des écarts de pourcentages, cependant, ces différences augmentent légèrement pour  $Re_{1,2}=20000$ . De plus, les écarts en pourcentages déterminés par les modèles S-A, RNG  $k-\epsilon$  et SST  $k-\omega$  augmentent progressivement avec l'augmentation des nombres de Reynolds. Ici, les écarts les plus élevés sont obtenus pour les modèles S-A et RNG  $k-\epsilon$  tandis que le modèle SST

$k-\omega$  indique des écarts plus faibles. Il est évident que les propriétés d'écoulement prévues avec l'hypothèse laminaire de référence dépassent toutes les valeurs prévues avec les modèles RANS lorsque le nombre de Reynolds dépasse 10000.

Un examen plus approfondi de l'enquête peut être réalisé en examinant la taille verticale des vortex secondaires, comme le montre le tableau 4.20. Il représente la profondeur  $D/H$  des vortex secondaires inférieur droite (identifiés à partir du point de séparation avec le vortex primaire jusqu'à la limite inférieure de la cavité) en fonction des nombres de Reynolds et des différentes stratégies de calcul. Cette profondeur a été prédite expérimentalement par Koseff et Street. [42] dans une cavité simplement entraînée et s'est avérée proche de certains des calculs laminaires 2D numériques [10, 11] lorsque  $Re=10000$ . Cela peut fournir un signe direct que l'écoulement avec une hypothèse laminaire peut éventuellement émuler la physique de l'écoulement à l'intérieur de la cavité entraînée.

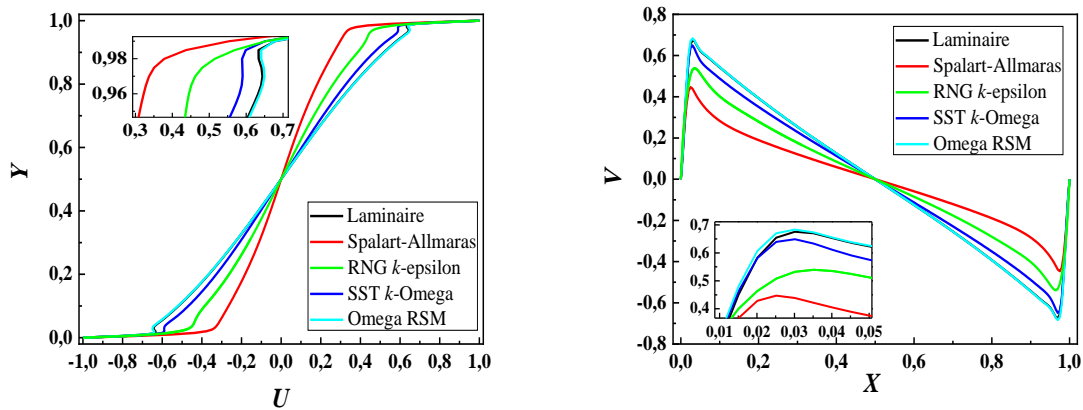
Maintenant, concernant la présente enquête, le tableau 4.20 illustre les effets des hypothèses d'écoulement et des nombres de Reynolds sur la profondeur des vortex secondaires. Évidemment, sauf pour le cas RNG  $k-\varepsilon$ , la profondeur des vortex secondaires augmente avec l'augmentation des nombres de Reynolds. De toute évidence, la taille des vortex prédits avec l'hypothèse laminaire sont les plus importants, la taille prédite avec les modèles Omega RSM, SST  $k-\omega$ , S-A et RNG  $k-\varepsilon$  vient après par ordre décroissant. Le comportement étrange a été obtenu avec le modèle RNG  $k-\varepsilon$  où la profondeur des vortex secondaires diminue légèrement avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

Par conséquent, ces données soutiennent fortement l'idée que l'écoulement avec l'hypothèse laminaire peut être la représentation correcte de la physique de l'écoulement à l'intérieur des cavités entraînée, cependant, d'autres expériences peuvent le confirmer.

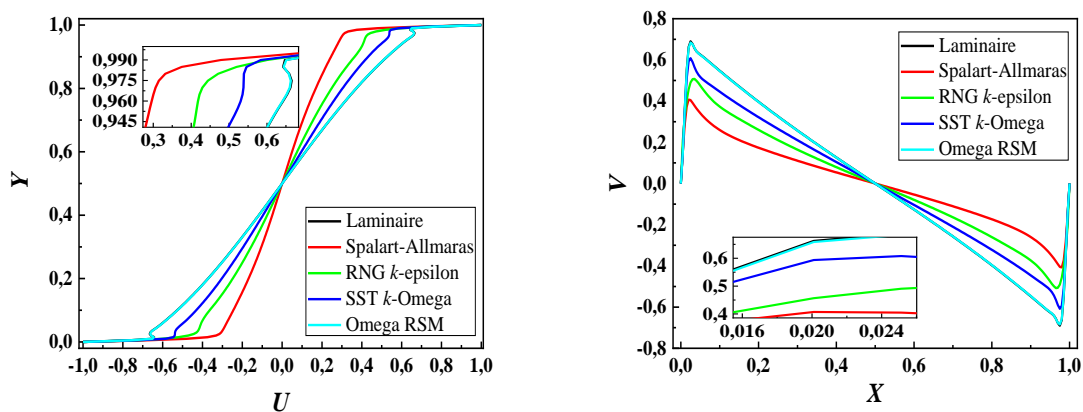
#### 4.9.4 Analyse des profils de vitesse :

Les profils de vitesse calculés par le modèle S-A, le modèle RNG  $k-\varepsilon$ , le modèle SST  $k-\omega$  et le modèle Omega RSM sont comparés à l'hypothèse d'écoulement laminaire correspondant pour différents nombres de Reynolds, comme illustré sur les Figures 4.28-4.30.

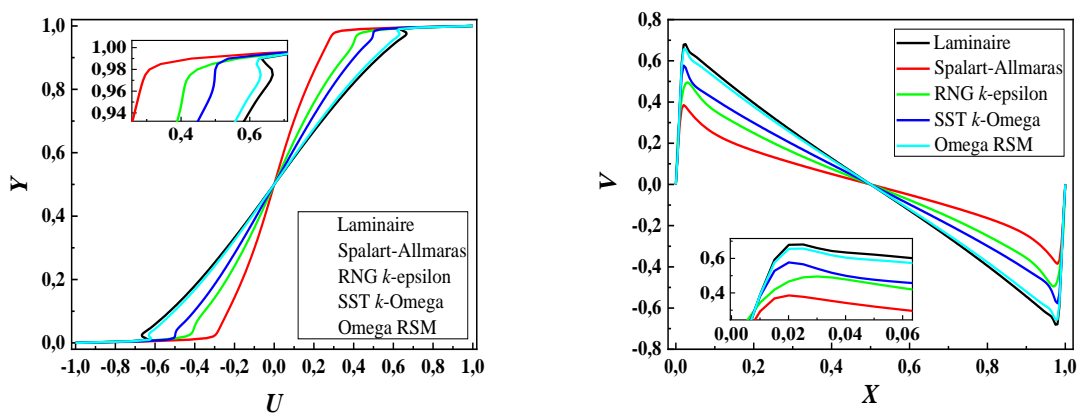
La figure 4.28 (a et b) montre respectivement les profils des composantes de vitesse  $U$  et  $V$  à travers la ligne médiane verticale et horizontale de la cavité, pour  $Re_{1,2}=10000$ . On voit clairement qu'il y a un bon accord entre les profils de vitesse obtenus par l'hypothèse laminaire et le modèle Omega RSM qui surpasse légèrement et atteint les valeurs maximales de composantes de vitesse ( $|U_{max}|$  et  $|V_{max}|$ ) dans la cavité entraînée. De plus, ces dernières indiquent un léger écart par rapport au modèle SST  $k-\omega$ . Au contraire, les profils de vitesse avec les modèles RNG  $k-\varepsilon$  et S-A illustrent un écart important. Ils montrent respectivement des écarts significatifs et des pics de composantes de vitesse inférieure dans la cavité.



**Figure 4.28.** Comparaison des Profils de vitesse obtenus avec l’hypothèse laminaire et différents modèles de turbulence RANS pour  $Re_{l,2}=10000$  : (a) vitesse  $U$  le long de la ligne médiane verticale  $X=0.5$ , (b) vitesse  $V$  le long de la ligne médiane horizontale  $Y=0.5$ .



**Figure 4.29.** Comparaison des Profils de vitesse obtenus avec l’hypothèse laminaire et différents modèles de turbulence RANS pour  $Re_{l,2}=15000$  : (a) vitesse  $U$  le long de la ligne médiane verticale  $X=0.5$ , (b) vitesse  $V$  le long de la ligne médiane horizontale  $Y=0.5$ .



**Figure 4.30.** Comparaison des Profils de vitesse obtenus avec l’hypothèse laminaire et différents modèles de turbulence RANS pour  $Re_{l,2}=20000$  : (a) vitesse  $U$  le long de la ligne médiane verticale  $X=0.5$ , (b) vitesse  $V$  le long de la ligne médiane horizontale  $Y=0.5$ .

Les profils des composantes de vitesse examinées avec l'effet d'un nombre de Reynolds plus élevé sont représentés sur la figure 4.29 (a et b), pour  $Re_{1,2}=15000$ . Il est évident qu'il existe un accord parfait entre les profils de vitesse de l'hypothèse laminaire et du modèle Omega RSM, cependant, les écarts avec le modèle SST  $k-\omega$  augmentent relativement et enregistrent des pics de composantes de vitesse plus faibles dans la cavité. Les résultats des modèles RNG  $k-\varepsilon$  et S-A montrent systématiquement des écarts significatifs et des pics de composantes de vitesse plus faibles dans la cavité. En effet, le modèle S-A montre les composantes de vitesse les plus faibles dans la cavité.

L'aspect le plus surprenant du calcul est illustré sur la figure 4.30 (a et b). Il ressort de cette figure qu'il existe une tendance claire à la diminution des pics des composantes de vitesse calculés avec une hypothèse turbulente basée sur les modèles RANS lorsque  $Re_{1,2}=20000$ . L'hypothèse laminaire de l'écoulement surpasse tous les modèles RANS atteignant les pics de composantes de vitesse les plus élevés ( $|U_{max}|$  et  $|V_{max}|$ ) dans la cavité entraînée, tandis que les résultats du modèle Omega RSM restent les plus proches. Les déviations des composants de vitesse par le modèle SST  $k-\omega$  augmentent et se rapprochent de celles du modèle RNG  $k-\varepsilon$ .

#### 4.9.5 Conclusion :

Une étude numérique a été effectuée sur l'écoulement de fluide bidimensionnel dans une cavité doublement entraînée avec un mouvement de parois antiparallèle. La principale préoccupation de l'investigation était d'examiner et d'explorer l'écoulement basé sur les hypothèses turbulentes en utilisant les modèles appropriés, y compris celui de Spalart-Allmaras (SA), RNG  $k-\varepsilon$ , SST  $k-\omega$  et Omega RSM, à partir d'un seuil de nombre Reynolds de 10000 jusqu'à 20000. L'hypothèse laminaire de l'écoulement a été prise comme référence et également examinée. Sur la base des discussions ci-dessus, nous pourrions conclure ce qui suit :

- Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, l'écoulement calculé avec l'hypothèse laminaire surpasse tous les écoulements prévus avec l'hypothèse turbulente.
- L'écoulement prédit avec le modèle Omega RSM révèle des caractéristiques proches de l'hypothèse laminaire avec une bonne sensibilité de capture dans les régions proches de la paroi.
- L'écart a été systématiquement limité aux calculs avec les modèles S-A, RNG  $k-\varepsilon$  et SST  $k-\omega$ . Ceci a été clairement indiqué par les sous-prédictions des structures d'écoulement, les écarts de propriétés d'écoulement et de profondeur du vortex secondaire inférieur droite, ainsi que les écarts significatifs de composants des vitesses par rapport à ceux obtenus avec l'hypothèse laminaire.
- Pour  $Re_{1,2} \leq 20000$ , l'hypothèse laminaire de l'écoulement bidimensionnel dans une cavité doublement entraînée est numériquement la plus pratique. Cependant, une expérience pratique doit être entreprise pour en déduire laquelle des hypothèses est la plus proche du problème physique.

### Conclusion générale :

L'étude numérique de l'écoulement laminaire et turbulent de fluide incompressible dans des cavités carrées entraînées a été faite. La méthode des volumes finis (FVM) et la méthode de Boltzmann sur réseau avec un modèle de multiple temps de relaxation (MRT-LBM) ont été utilisées pour les calculs. Deux configurations géométriques sont utilisées, à savoir : une cavité simplement entraînée par une seule paroi supérieure, et une cavité doublement entraînée par deux parois opposées supérieure et inférieure. Ces parois se déplacent dans la direction droite pour un mouvement parallèle tandis qu'elles se déplacent dans des directions opposées pour un mouvement antiparallèle.

La configuration classique de la cavité simplement entraînée a été utilisée pour la validation des résultats obtenus par la méthode des volumes finis intégrée dans le code de calcul Ansys Fluent. La comparaison avec les travaux numériques trouvés dans la littérature montre une bonne concordance avec nos simulations.

La première analyse consacrée à l'étude de l'écoulement de fluide stationnaire bidimensionnel dans une simplement cavité carrée entraînée jusqu'à des nombres de Reynolds très élevés ( $100 \leq Re \leq 50000$ ), et en utilisant une résolution de maillage de  $1024 \times 1024$  a été réalisée par la méthode des volumes finis. L'analyse des résultats obtenus nous a permis de conclure qu'une résolution de maillage très fine utilisée avec un l'algorithme couplé permet de stabiliser l'écoulement stationnaire jusqu'à  $Re=50000$ . On constate aussi que, la structure d'écoulement conventionnelle change dans le coin inférieur droit à un nombre de seuils de Reynolds ( $Re=41710$ ) donnant cinq vortex secondaires au lieu de trois.

L'étude de l'écoulement de fluide stationnaire et bidimensionnel dans une cavité carrée doublement entraînée a été effectuée par la méthode des volumes finis (FVM) et la méthode de Boltzmann sur réseau de multiple temps de relaxation (MRT-LBM). L'effet de différents rapports de Reynolds ( $|\lambda|=1, 2, 4, 8, 10$  ; avec  $Re_2=100$ ) sur l'écoulement de fluide a été examiné pour les mouvements parallèle et antiparallèle des deux parois opposées. Cette étude montre que les structures d'écoulement sont directement et significativement affectées lorsque différents rapports de Reynolds provoquent l'entraînement. Un écoulement asymétrique apparaît et évolue continuellement avec les rapports de vitesse croissants. L'écoulement parallèle s'avère considérablement affecté par rapport à l'écoulement antiparallèle. La confrontation des résultats obtenus par la méthode des volumes finis et ceux de la méthode de Boltzmann sur réseau permet de constater un bon accord entre les deux méthodes, ce qui démontre clairement l'efficacité et le potentiel de ces deux méthodes à reproduire ce type de problèmes physique.

L'investigation de l'écoulement turbulent stationnaire et bidimensionnel dans une cavité doublement entraînée avec un mouvement antiparallèle des deux parois opposées a été réalisée par la méthode des volumes finis (FVM). Cette simulation a été présentée avec l'inclusion de quatre modèles de turbulence RANS les plus utilisés (S-A, RNG  $k-\varepsilon$ , SST  $k-\omega$  et Omega-RSM). L'évaluation des résultats de l'hypothèse de l'écoulement turbulent est faite en les comparant avec ceux de l'hypothèse de l'écoulement laminaire pour les valeurs de Reynolds,  $Re_{1,2}= 10000, 15000$  et  $20000$ . L'analyse des résultats numériques obtenus nous montre que, pour

$Re_{1,2} \leq 20000$ , indépendamment de l'écoulement prédit avec le modèle Omega-RSM qui est largement acceptable, l'hypothèse laminaire de l'écoulement bidimensionnel dans une cavité doublement entraînée est numériquement la plus pratique. Toutefois, une expérience pratique devrait être entreprise pour déduire laquelle des hypothèses est la plus proche de la physique du problème.

Enfin nous souhaitons étudier le problème de la convection mixte dans une cavité doublement entraînée en utilisant la méthode thermique de Boltzmann sur réseau. Nous envisagerons aussi à reproduire le phénomène physique en trois dimensions, le cas qui est assez coûteux.



---

**Références :**

- [1] Shankar N, Deshpande MD. Fluid mechanics in the driven cavity. *Annual Review of Fluid Mechanics* 32 (2000) 93–136.
- [2] Kuhlmann HC, Romanò F. The lid-driven cavity, in: A. Gelfgat, (Ed.), *Computational Modelling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics*, Springer, Cham, 2019, pp. 233-309.
- [3] Burggraf OR. Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows. *Journal of Fluid Mechanics* 24 (1966) 113-151.
- [4] Botella O, Peyret R. Benchmark spectral results on the lid driven cavity flow. *Computers & Fluids* 27 (1998) 421–433.
- [5] Marchi CH, Suero R, Araki LK. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid. *Journal of the Brazilian Society Mechanical Sciences and Engineering* 31 (2009) 186-198.
- [6] Vanka SP. Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables. *Journal of Computational Physics* 65 (1986) 138–158.
- [7] AbelMigid TA, Saqr KM, Kotb MA, Aboelfarag AA. Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using GPU accelerated code. *Alexandria Engineering Journal* 56 (2016) 123-135.
- [8] Bruneau CH, Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics* 89 (1990) 389–413.
- [9] Zhang J. Numerical simulation of 2D square driven cavity using fourth-order compact finite difference schemes. *Computers and Mathematics with Applications* 45 (2003) 43-52.
- [10] Ghia U, Ghia KN, Shin C. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics* 48 (1982) 387–411.
- [11] Schreiber R, Keller H. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *Journal of Computational Physics* 49 (1983) 310–333.
- [12] Hou S, Zou Q, Chen S, Doolen G, Cogley AC. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics* 118 (1995) 329–347.
- [13] Gupta MM, Kalita JC. A new paradigm for solving NavierStokes equations: streamfunction–velocity formulation. *Journal of Computational Physics* 207 (2005) 52–68.
- [14] Barragy E, Carey G. Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements. *Computers & Fluids* 26 (1997) 453– 468.
- [15] Erturk E. Discussions on driven cavity flow. *International Journal of Numerical Method in Fluids* 60 (2009) 275–294.
- [16] Erturk E, Corke TC, Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *International Journal of Numerical Method in Fluids* 48 (2005) 747–774.

- [17] Hachem E, Rivaux B, Kloczko T, Dignonnet H, Coupez T. Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number. *Journal of Computational Physics* 229 (2010) 8643-8665.
- [18] Wahba EM. Steady flow simulations inside a driven cavity up to Reynolds number 35000. *Computers & Fluids* 66 (2012) 85–97.
- [19] Azzouz EA, Houat S, Benhizia O. Numerical study of steady flow inside a lid-driven square cavity for Reynolds number up to 50000. 23<sup>eme</sup> Congès Français de Mécanique, Lille, France, 2017.
- [20] An B, Bergada JM, Mellibovsky F, Sang WM. New applications of numerical simulation based on lattice Boltzmann method at high Reynolds numbers. *Computers and Mathematics with Applications*. 79 (2019) 1718-1741.
- [21] Ramanan N, Homsy GM. Linear stability of lid-driven cavity flow. *Physics of Fluids* 6 (1994) 2690-2701.
- [22] Albensoeder S, Kuhlmann HC. Accurate three-dimensional lid-driven cavity flow. *Journal of Computational Physics* 206 (2005) 536–558.
- [23] Albensoeder S, Kuhlmann HC, Rath HJ. Three-dimensional centrifugal-flow instabilities in the lid-driven cavity problem. *Physics of Fluids* 13 (2001) 121–135.
- [24] Theofilis V, Duck PW, Owen J. Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics* 505 (2004) 249-286.
- [25] Ding Y, Kawahara M. Linear stability of incompressible fluid flow in a cavity using finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 27 (1998) 139–157.
- [26] Fortin A, Jardak M, Gervais JJ, Pierre R. Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 24 (1997) 1185-1210.
- [27] Sahin M, Owens RG. A novel fully-implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity flow problem, Part II, Linear stability analysis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 42 (2003) 79-88.
- [28] Abouhamza A, Pierre R. A neutral stability curve for incompressible flows in a rectangular driven cavity. *Mathematical and Computer Modelling* 38 (2003) 141-157.
- [29] Nuriev AN, Egorov AG, Zaitseva ON. Bifurcation analysis of steady-state flows in the lid-driven cavity. *Fluid Dynamics Research* 48 (2016) 061405-1-06140515.
- [30] Gervais JJ, Lemelin D, Pierre R. Some experiments with stability analysis of discrete incompressible flows in the lid-driven cavity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 24 (1997) 477-492.
- [31] Peng Y-H, Shiau Y-H, Hwang RR. Transition in a 2-D lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids* 32 (2003) 337–352.
- [32] Poliashenko M, Aidun CK. A direct method for computation of simple bifurcations. *Journal of Computational Physics* 121 (1995) 246-260.
- [33] Bruneau C-H, Saad M. The 2D lid-driven cavity problem revisited. *Computers & Fluids* 35 (2006) 326-348.
- [34] Auteri F, Parolini N, Quartapelle L. Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow. *Journal of Computational Physics* 183 (2002) 1-25.

- 
- [35] Murdock JR, Ickes JC, Yang SL. Transition flow with an incompressible lattice Boltzmann method. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* 9 (2017) 1271–1288.
- [36] An B, Mellibovsky F, Bergada JM, Sang WM. Towards a better understanding of wall-driven square cavity flows using the Lattice Boltzmann method. *Applied Mathematical Modelling* 82 (2020) 469-486.
- [37] Lee M, Dowell E, Balajewicz M. A study of the regularized lid-driven cavity's progression to chaos. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 71 (2019) 50-72.
- [38] Idris MS, Irwan MA-M, Ammar NM-M. Steady state vortex structure of lid driven flow inside shallow semi ellipse cavity. *Journal of Mechanical Engineering and Science* 2 (2012) 206-216.
- [39] Ren J, Guo P. Lattice Boltzmann simulation of steady flow in a semi-elliptical cavity. *Communication in Computational Physics* 21 (2017) 692–717.
- [40] Ali N, Nazeer M, Javed T, Abbas F. A numerical study of micropolar flow inside a lid-driven triangular enclosure. *Meccanica* 53 (2018) 3279-3299.
- [41] Nazeer M, Ali N, Javed T. Effects of moving wall on the flow of micropolar fluid inside a right angle triangular cavity. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 28 (2018) 2404-2422.
- [42] Koseff JR, Street RL. Visualization studies of a shear driven three-dimensional recirculating flow. *Journal of Fluids Engineering* 106 (1984) 21-27.
- [43] Koseff JR, Street RL. On end wall effects in a lid-driven cavity flow. *Journal of Fluids Engineering* 106 (1984) 385-389.
- [44] Koseff JR, Street RL. The lid-driven cavity flow: a synthesis of qualitative and quantitative observations. *ASME Journal of Fluids Engineering* 106 (1984) 390–398.
- [45] Prasad AK, Koseff JR. Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 1 (1989) 208-218.
- [46] Freitas CJ, Street RL, Findikakis AN, Koseff JR. Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 5 (1985) 561–575.
- [47] Leong CW, Ottino JM. Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity. *Journal of Fluid Mechanics* 209 (1989) 463-499.
- [48] Jana SC, Metcalfe G, Ottino JM. Experimental and numerical studies of mixing in complex Stokes flow: the vortex mixing flow and multicellular cavity flow. *Journal of Fluid Mechanics* 269 (1994) 199-246.
- [49] Kelmanson MA, Lonsdale B. Eddy genesis in the double-lid-driven cavity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 49 (1996) 635-655.
- [50] Albensoeder S, Kuhlmann H, Rath H. Multiplicity of steady two-dimensional flows in two-sided lid-driven cavities. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 14 (2001) 223-41.
- [51] Luo WJ, Yang RJ. Multiple fluid flow and heat transfer solutions in a two-sided lid-driven cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 2394-2405.

- [52] Chen KT, Tsai CC, Luo WJ, Chen CN. Multiplicity of Steady Solutions in a Two-Sided Lid-Driven Cavity with Different Aspect Ratios. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 27(2013) 767-776.
- [53] Chen KT, Tsai CC, Lu CW, Luo WJ, Chen CH. Aspect ratio effect on multiple flows solution in a two-sided parallel motion lid-driven cavity. *Journal of Mechanics* 31 (2015) 153-160.
- [54] Lemée T, Kasperski G, Labrosse G, Narayanan R. Multiple stable solutions in the 2d symmetrical two-sided square lid-driven cavity. *Computers & Fluids* 119 (2015) 204-212.
- [55] Prasad C, Dass AK. Use of an HOC scheme to determine the existence of multiple steady states in the antiparallel lid-driven flow in a two-sided square cavity. *Computers & Fluids* 140 (2016) 297-307.
- [56] Perumal A. Lattice Boltzmann Computation of Multiple Solutions in a Double Sided Square and Rectangular Cavity Flows. *Thermal Science and Engineering Progress* 6 (2018) 48-56.
- [57] Wabha EM. Multiplicity of states for two-sided and four-sided lid-driven cavity flows. *Computers & Fluids* 38 (2009) 247-253.
- [58] Guo C, Zhong C, Zhuo J. Cao. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for study of two-lid-driven cavity flow solution multiplicity. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 28 (2014) 215–231.
- [59] Kuhlmann HC, Wanschura M, Rath HJ. Flow in two-sided lid-driven cavities: non-uniqueness, instabilities, and cellular structures. *Journal of Fluid Mechanics* 336 (1997) 267–299.
- [60] Albensoeder S, Kuhlmann HC. Linear stability of rectangular cavity flows driven by antiparallel motion of two facing walls. *Journal of Fluid Mechanics* 458 (2002) 153-180.
- [61] Blohm C, Kuhlmann HC. The two-sided lid-driven cavity: Experiments on stationary and time-dependent flows. *Journal of Fluid Mechanics* 450 (2002) 67-95.
- [62] Blohm C, Albensoeder S, Kuhlmann HC, Broda M, Rath HJ. The two-sided lid-driven cavity: Aspect-ratio dependence of the flow stability. *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 81(Supplement 3) (2001) 781–782.
- [63] Albensoeder S, Kuhlmann HC. Three-dimensional instability of two counter-rotating vortices in a rectangular cavity driven by parallel wall motion. *European Journal Mechanics-B/Fluids* 21 (2002) 307-316.
- [64] Siegmann-Hegerfeld T, Albensoeder S, Kuhlmann HC. Two- and three-dimensional flows in nearly rectangular cavities driven by collinear motion of two facing walls. *Experiments in Fluids* 45 (2008) 781-796.
- [65] Siegmann-Hegerfeld T, Albensoeder S, Kuhlmann HC. Three-dimensional flow in a lid-driven cavity with width-to-height ratio of 1.6. *Experiments in Fluids* 54 (2013) 1526–1–1526–10.
- [66] Albensoeder S, Kuhlmann HC, Rath HJ. Three-dimensional centrifugal-flow instabilities in the lid-driven cavity problem. *Physics of Fluids* 13 (2001) 121–135.

- 
- [67] Albensoeder S, Kuhlmann HC. Stability balloon for the double-lid-driven cavity flow. *Physics of Fluids* 15 (2003) 2453–2456.
- [68] Karmakar H, Pandit SK. Numerical solutions of incompressible viscous flows in a double-lid-driven cavity. In: Sarkar S, Basu U, De S. (eds) *Applied Mathematics. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol 146. Springer, New Delhi, 2015.
- [69] Sidic N. AC, Razali SA. Two-Sided Lid-Driven Cavity Flow at Different Speed Ratio by Lattice Boltzmann Method. *Journal of Applied Mechanics and Materials* 554 (2014) 675–679.
- [70] Perumal DA, Dass AK, Simulation of flow in two-sided lid-driven square cavities by the lattice Boltzmann method, *Advances in Fluid Mechanics VII*, vol. 45–54, Oxford University Press, United Kingdom, 2008.
- [71] Perumal A, Dass AK. Simulation of incompressible flows in two-sided lid–driven square cavities. Part I. FDM. *CFD Letters* 2 (2010) 13–24.
- [72] Perumal A, Dass AK. Simulation of incompressible flows in two-sided lid– driven square cavities. Part II. LBM. *CFD Letters* 2 (2010) 25–38.
- [73] Munir A, Riswan M, Khan M, Salah A. Simulation of incompressible flow in two sided lid driven cavity using Upwind compact scheme. *CFD Letters* 5(3) (2013) 57-66.
- [74] Marković JĐ, Lukić N.Lj, Ilić JD, Nikolovski BG, Sovilj MN, Šijački IM. Using the ansys fluent for simulation of two-sided lid-driven flow in a staggered cavity. *APTEFF* 43 (2012) 169-178.
- [75] Kesana B, Shetty VV, Perumal DA. Lattice Boltzmann simulation of double-sided deep cavities at low Reynolds number. In: Chandrasekhar U, Yang LJ, Gowthaman S. (eds) *Innovative Design, Analysis and Development Practices in Aerospace and Automotive Engineering (I-DAD 2018)*. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Singapore, 2019.
- [76] Perumal A. Simulation of flow in Two-Sided Lid-Driven deep cavities by finite difference method. *Journal of Applied science in Thermodynamics and Fluid Mechanics* 6 (2012) 1–6.
- [77] Arun S, Satheesh A. Analysis of flow behaviour in a two sided lid driven cavity using lattice Boltzmann technique. *Alexandria Engineering Journal* 54 (2015) 795-806.
- [78] Oztop HF, Dagtekin I. Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 (2004) 1761-1769.
- [79] Ismael MA, Pop I, Chamkha AJ. Mixed Convection in a lid-driven square cavity with partial slip. *International Journal of Thermal Sciences* 82 (2014) 47-61.
- [80] Kuhlmann HC, Wanschura M, Rath HJ. Elliptic instability in two-sided lid-driven cavity flow. *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 17 (1998) 561–569.
- [81] Triantafillopoulos NG, Aidun CK. Relationship between flow instability in short-dwell ponds and cross directional coat weight nonuniformities. *Tappi Journal* 73 (1990) 127–136.
- [82] Aidun CK, Triantafillopoulos NG, Benson JD. Global stability of a lid-driven cavity with throughflow: flow visualization studies. *Physics of Fluids A* 3 (1991) 2081–2091.

- 
- [83] Cao Z, Ismail NM. Numerical simulation of short-dwell coaters: steady state flow patterns and pressure distributions. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 90 (1992) 654-659.
- [84] Aidun CK, Triantafillopoulos NG. High-speed blade coating. In *Liquid film coating* (S.F. Kistler and P.M. Schweizer, eds.), Chapter 12d, Chapman and Hall, London, pp. 637-672, 1997.
- [85] Cao Z, Esmail MN. (1995). Numerical study on hydrodynamics of short-dwell paper coaters. *AIChE Journal* 41 (1995) 1833–1842.
- [86] Zdanski P, Ortega MA, Nide GCR, Fico Jr. Numerical study of the flow over shallow cavities. *Computers & Fluids* 32 (2003) 953-974.
- [87] Canedo EL, Denson CD. Flow in a driven cavity with a free surface. *AIChE Journal* 35 (1989) 129–138.
- [88] Gaskell PH, Summers JL, Thompson HM, Savage MD. Creeping flow analyses of free surface cavity flows. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 8 (1996) 415–433.
- [89] Alleborn N, Raszillier H, Durst F. Lid-driven cavity with heat and mass transport. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42 (1999) 833–853.
- [90] Malone B. An experimental investigation of roll coating phenomena. PhD thesis, University of Leeds, 1992.
- [91] Gaskell PH, Innes GE, Savage MD. An experimental investigation of meniscus roll coating. *Journal of Fluid Mechanics* 355 (1998) 17–44.
- [92] Gaskell PH, Savage MD, Summers JL, Thompson HM. Modelling and analysis of meniscus roll coating. *Journal of Fluid Mechanics* 298 (1995) 113–137.
- [93] Leong CW, Ottino JM. Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity. *Journal of Fluid Mechanics* 209 (1989) 463–499.
- [94] Jana SC, Tjahjadi M, Ottino JM. Chaotic mixing of viscous fluids by periodic changes in geometry: baffled cavity flow. *AIChE Journal* 40 (1994) 1769–1781.
- [95] Blazek J. *Computational fluid dynamics: principles and applications*. 3<sup>rd</sup> ed, Elsevier: Amsterdam, 2015.
- [96] Ferziger JH, Peric M, Street LR. *Computational methods for fluid dynamics*. 3rd ed, Springer, Berlin, 2002.
- [97] Versteeg HK, Malalasekera W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 2007.
- [98] Launder BE, Spalding DB. *Mathematical models of turbulence*. Academic Press, Massachusetts, 1972.
- [99] Patankar SV. *Heat and mass transfer in turbulent boundary layers*, Ph.D. Thesis, Imperial College, London University, UK, 1967.
- [100] Patankar SV. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere, Washington DC, Publishing Corporation, 1980.

- 
- [101] Patankar SV, Spalding DB. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15 (1972) 1787-1806.
- [102] Doormaal van JP, Raithby GD. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow. *Numerical Heat Transfer* 7 (1984) 147-163.
- [103] Issa RI. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics* 62 (1986) 40-65.
- [104] Ghobadian A, Vasquez SA. A general purpose implicit coupled algorithm for the solution of Eulerian multiphase transport equation. *International Conference on Multiphase Flow*, Leipzig, Germany, 2007.
- [105] Mangani L, Bianchini C. Heat transfer applications in turbomachinery. *Proceedings of the OpenFOAM International Conference*, London, UK, 2007.
- [106] Caretto LS, Curr RM, Spalding DB. Two numerical methods for three-dimensional boundary layers. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering* 1 (1972) 39–57.
- [107] Webster R. An algebraic multigrid solver for navier-stokes problems in the discrete second-order approximation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 22 (1996) 1103–1123.
- [108] Darwish M, Sraj I, Moukalled F. A coupled incompressible flow solver on structured grids. *Numerical Heat Transfer, Part B* 52 (2007) 353–371.
- [109] Darwish M, Sraj I, Moukalled F. A coupled incompressible flow solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics* 228 (2009) 180–201.
- [110] Mazhar Z. A procedure for the treatment of the velocity-pressure coupling problem in incompressible fluid flow. *Numerical Heat Transfer, Part B* 39 (2001) 91–100.
- [111] Rhie CM, Chow WL. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal* 21 (1983) 1525–1532.
- [112] Kolmogorov AN. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large Reynolds numbers. *Doklady Akademiia Nauk SSSR* 30 (1941) 299–303.
- [113] Kolmogorov AN. Energy dissipation in locally isotropic turbulence. *Doklady Akademiia Nauk SSSR* 32 (1941) 19–21.
- [114] Moser RD, Kim J, Mansour NN. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Physics of Fluids* 11 (1999) 943–945.
- [115] Scardovelli R, Zaleski S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 31 (1999) 567–603.
- [116] Le H, Moin P, Kim J. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics* 330 (1997) 349–374.
- [117] Choi H, Moin P, Kim J. Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *Journal of Fluid Mechanics* 255 (1993) 503–539.

- 
- [118] Leonard A. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Advances in Geophysics* 18 (1975) 237–248.
- [119] Sagaut P. *Large eddy simulation for incompressible flows-an introduction*. Springer, Berlin, 2006.
- [120] Ferziger JH. Large eddy simulation. in *Simulation and modeling of turbulent flows*, edited by Gatski TB, Hussaini MY, Lumly JL, pp. 109-154, Oxford University Press, New York, 1996.
- [121] Nieuwstadt FTM, Mason PJ, Moeng C-H, Schuman U. Large eddy simulation of the convective boundary layer: a comparison of four computer codes. In: Durst F et al (eds) *Turbulent shear flows*, 8th ed. Springer, Berlin, 1991.
- [122] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment. *Monthly Weather Review* 91 (1963) 99–164.
- [123] Lilly DK. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 4 (1992) 633–635.
- [124] Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 186 (1895) 123–164.
- [125] Hinze JO. *Turbulence*. McGraw-Hill Publishing Co, New York, 1975.
- [126] Spalart PR, Allmaras SR. A one-equation turbulence model for aerodynamics flows. *La Recherche Aérospatiale* 1 (1994) 5–21.
- [127] Orszag SA, Yakhot V, Flannery WS, Boysan F, Choudhury D, Maruzewski J, Patel B. Renormalization group modeling and turbulence simulations. *International Conference on Near-Wall Turbulent Flows*, Tempe, Arizona, 1993.
- [128] Menter FR. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J.* 32 (1994) 1598–1605.
- [129] Gibson MM, Launder BE. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* 86 (1978) 491–511.
- [130] Launder BE. Second-moment closure: present... and future?. *International Journal of Heat Fluid Flow* 10 (1989) 282–300.
- [131] Launder BE, Reece GJ, Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics* 68 (1975) 537–566.
- [132] Wilcox DC. *Turbulence modeling for CFD*. La Canada, CA: DCW industries, California, 1998.
- [133] Chapman S, Cowling TG. *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge, 3rd edition, 1991.
- [134] Enskog D. *Kinetische theorie der vorgänge in mässig verdunntën gasen*. PhD thesis, Uppsala, (1917).
- [135] Bhatnagar P, Gross E, Krook M. A model for collision process in gases. I. Small amplitude process in charged and neutral one-component systems. *Physical Review* 94(3) (1954) 511-525.



- [136] Neumann J, Burks AW. The theory of self-reproducing automata. University of Illinois Press, Urbana, 1966.
- [137] Signorini J. Complex computing with cellular automata. In: Manneville P, Boccaro N, Vichniac GY, Bidaux R, editor, *Cellular Automata and Modeling of Complex Physical Systems*, Springer, Berlin, 1989. 57-72.
- [138] Broadwell J. Study of rarified shear flow by the discrete velocity method. *Journal of Fluid Mechanics* 19 (1964) 401-414.
- [139] Gatignol R. Théorie cinétique des gaz à répartition discrète des vitesses. Springer, Berlin, 1975.
- [140] Hardy J, Pomeau Y, De Pazzis O. Time evolution of two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions. *Journal of Mathematical Physics* 14 (1973) 1746-1759.
- [141] Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics* 55 (1983) 601-644.
- [142] Wolfram, S. Computer software in science and mathematics. *Scientific American* 251 (1984) 188-203.
- [143] Wolfram S. Cellular automata as models of complexity. *Nature* 311 (1984) 419-424.
- [144] Wolfram S. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 10 (1984) 1-35.
- [145] Frisch U, Hasslacher B, Pomeau Y. Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Physical Review Letter* 56 (1986) 1505-1508.
- [146] Wolfram S. Theory and application of cellular automata. World Scientific, 1986.
- [147] Frisch U, D'Humièrè D, Hasslacher B, Lallemand P, Pomeau Y, Rivet J. Lattice-gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex Systems* 1 (1987) 649-707.
- [148] McNamara G, Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas Automata. *Physical Review Letters* 61 (1988) 2332-2335.
- [149] Higuera FJ, Jimènez J. Boltzmann approach to lattice-gas simulations. *Europhysics Letters* 9 (1989) 663-668.
- [150] Chen H, Chen S, Matthaeus WH. Recovery of Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method. *Physical Review A* 45 (1992) 39-42.
- [151] Qian YH, d'Humières D, Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *EPL Europhysics Letters* 17 (1992) 479-484.
- [152] Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation: For Fluid Dynamics and Beyond*. Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [153] Mohamad AA. *Lattice Boltzmann method fundamentals and engineering applications with computer codes*. Springer, London, 2011.
- [154] Skordos PA. Initial and boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Physical Review E* 48 (1993) 4823-4842.

- [155] Noble DR, Chen S, Georgiadis JG, Buckius RO. A consistent hydrodynamic boundary condition for the lattice Boltzmann method. *Physics of Fluids* 7 (1995) 203-209.
- [156] Ginzbourg I, Adler PM. Boundary flow condition analysis for the three-dimensional lattice Boltzmann model. *Journal de Physique II* 4 (1994) 191-214.
- [157] He X, Zou Q, Luo LS, Dembo M. Analytic solutions of simple flows and non-slip boundary condition for the lattice Boltzmann BGK model. *Journal of Statistical Physics* 87 (1997) 115-136.
- [158] Cornubert R, d’Humières D, Levermore D. A Knudsen layer theory for lattice gases. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 47 (1991) 241-259.
- [159] Ziegler DP. Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations. *Journal of Statistical Physics* 71 (1993) 1171-1177.
- [160] Krüger T, Kusumaatmaja H, Kuzmin A, Shardt O, Silva G, Viggien EM. *The lattice Boltzmann method: principles and practice*. Springer, Switzerland, 2017.
- [161] Rivet JP, Boon JP. *Lattice gas hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [162] Wolf-Gladrow DA. *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models*. Springer, New York, 2004.
- [163] Zou Q, He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of Fluids* 9 (1997) 1591–1596.
- [164] Azzouz EA, Houat S. Numerical analysis and explore of asymmetrical fluid flow in a two-sided lid-driven cavity. *Journal of Mechanical Engineering and Sciences* 14, 3 (2020) 7269–7281.
- [165] Azzouz EA, Houat S. Asymmetrical Flow Driving in Two-Sided Lid-Driven Square Cavity with Antiparallel Wall Motion. *Matec web of conference*, 330 (2020).
- [166] Azzouz EA, Houat S, Dellil AZ. Numerical assessment of turbulent flow driving in a two-sided lid-driven cavity with antiparallel wall motion. *Defect and diffusion forum*, 406 (2021) 133-148.
- [167] Azzouz EA, Houat S. Numerical model’s effect in asymmetrical flow driving in two-sided lid-driven square cavity. *24<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Brest, France, 2019.

**Liste des publications :**

**Publications internationales:**

- 1. E.A. Azzouz, and S. Houat**, Numerical analysis and explore of asymmetrical fluid flow in a two-sided lid-driven cavity, *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, 14, 3 (2020) 7269–7281. (ISSN: 2289-4659) (*Emerging Sources Citation Index, Scopus*).  
<https://doi.org/10.15282/jmes.14.3.2020.26.0571>
- 2. Azzouz El Amin, Houat Samir, Dellil Ahmed Zineddine**, Numerical assessment of turbulent flow driving in a two-sided lid-driven cavity with antiparallel wall motion. *Defect and diffusion forum*,406 (2021) 133-148. (ISSN:1662-9507) (*Scopus*).  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/DDF.406.133>
- 3. El Amin Azzouz, Samir Houat**, Asymmetrical Flow Driving in Two-Sided Lid-Driven Square Cavity with Antiparallel Wall Motion, *Matec web of conference*, 330 (2020). EDP Sciences. (ISSN:2261236X) (*Conference Proceedings Citation Index*).  
<https://doi.org/10.1051/mateconf/202033001009>

**Communications internationale:**

- 1. Azzouz El Amin, Houat Samir, Benhizia Oussama**, Numerical study of steady flow inside a lid-driven square cavity for Reynolds number up to 50000, *23ème Congrès Français de Mécanique, Lille, 28 Août au 1er Septembre (2017)*. ISSN: 2491-715X.
- 2. El Amin Azzouz, Samir Houat**, Asymmetrical Flow Driving in Two-Sided Lid-Driven Square Cavity with Antiparallel Wall Motion, *International Conference on Materials & Energy ICOMÉ'19, Hammamet, Tunisia, 23-26 April (2019)*.
- 3. El Amin Azzouz, Samir Houat**, Numerical model's effect in asymmetrical flow driving in two-sided lid-driven square cavity, *24ème Congrès Français de Mécanique, Brest, 26 au 30 Août (2019)*.