الجمهـــوريـــــة الجزائــــريــــة الديمقــراطيـــة الشـعبيـــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التــــعلـــيــــــم العـــــــالـــــــي والبـــحـــــــث العــلمــــــي

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن احمد

Université Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة و الأمن الصناعي

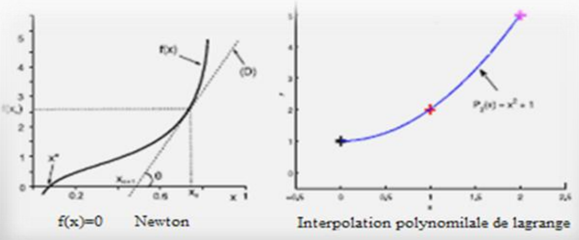
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Polycopié de cours

Méthodes Numériques

Auteur : Dr Mohammed Chennoufi

2ième année LMD



U

L

$$a_{rk}^{(k-1)} = MAX\left|a_{ik}^{(k-1)}\right| \qquad x^{k+1} = (D)^{-1}\left(b-(E+F)x^{k}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

2018 /2019

Avant-propos

Avant-propos

Ce document est un support pédagogique du cours destiné aux étudiants de 2ème Année des licences LMD assurées au trois départements: Maintenance en Electromécanique, Maintenance en Instrumentation et Hygiène et Sécurité Industrielle aux seins de l'institut de maintenance et de sécurité industrielle. Dans ce cours on s'intéresse a un certain nombre de **méthodes directes et itératives** utilisées pour la résolution des systèmes **d'équations linéaires**, **des équations non linéaires**, l'approximation des fonctions par **interpolation polynomiale**, **valeurs propres** et **vecteurs propres,** la résolution numérique des **équations différentielle** et les **formules de quadrature, Trapèze et Simpson** pour l'intégration numérique. Le tous est regroupé sous le terme générique de '' **Méthodes Numériques ''**. Toutes ces techniques de résolutions permettent de résoudre de manière exacte ou de manière approchée un problème donné.

A la fin de ce cours, l'étudient obtient des connaissances solides sur différentes méthodes numériques que par la suite sera capable de les implémenter en langage de programmation tel que Matlab ou Scilab. De plus ce cours est une base au plusieurs cours de méthodes numérique qui seront enseignés durant le cursus de graduation de nos étudiants.

Table des matières

CHAPITRE 3

CHAPITRE 4

CHAPITRE 5

CHAPITRE 6

CHAPITRE 7

Table des figures

Préambule

Préambule

Introduction

Les mots clés

L'organisation du polycopié

Introduction

Afin de bien maitrisé les méthodes numériques, J'ai pensé de présenter un rappel sur l'algèbre linéaires plus précisément sur les **matrices** (**Critère de Cauchy** pour la convergence) pour introduire aux étudiants les techniques de bases utilisées pour la résolution des systèmes d'équations algébriques. J'ai abordé dans ce support quelques méthodes **directes et indirectes** qui nous permettrons de résoudre les systèmes d'équations linéaires tel que (**Substitution, Cramer, élimination de Gauss, élimination de Gauss-Jordan, inversion de la matrice et la factorisation LU d'une matrice**), des équations non linéaires tel que (**La dichotomie, La sécante, Newton Raphson**), **Lagrange** comme une des méthodes d'interpolation polynomiales et le **polynômes caractéristique** des matrices pour la résolutions des **valeurs propres**, des **vecteurs propres**, **l'inverse** et les **puissances** d'une matrice. On termine par deux méthodes (**Euler** et **Runge –Kutta**) pour la résolution numérique des équations différentielle ainsi que les **formules de quadrature, trapèze et Simpson** pour l'intégration numérique. Ces méthodes vont êtres implémenté en langages de programmation Matlab, pour cela j'ai présenter une annexe qui résume un exemple élémentaire **de script** qui pourra êtres utile aux étudiants lors des séances de TP et des sujets **d'examens de synthèses et de rattrapages** depuis 2014 au 2018 .

Le contenu de ce polycopié de cours intitulé «Méthodes Numériques » résumé en sept chapitres **suit conformément le programme ministériel** de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique proposé aux étudiants de 2ième année LMD avec un Volume horaire hebdomadaire : 01h30mn de cours et 01h30mn de TP) ; Coefficient : 02 ; Crédit : 4.

Les mots clés

Matrice, Matlab, Gauss, convergence, dichotomie, polynôme, Newton, Jacobi, Gaus Seidel, Lagrange Euler, Runge –Kutta, trapèze, Simpson.

L’organisation du polycopié

Le cours des méthodes numériques que j’ai enseigné durant ces 5 dernières années pour les étudiant de deuxième année licence et rapporté dans ce polycopie est décomposée en sept chapitres organisés comme suit :
Un rappel sur l’algèbre linéaire est présenté au premier chapitre. J’ai abordé en deuxième chapitre des méthodes de résolution des systèmes d’équations linéaires (directe et indirecte). Le troisième chapitre est dédié à la résolution des équations non-linéaires. Le quatrième chapitre présentera le polynôme caractéristique d’une matrice, les valeurs propres et les vecteurs propres ainsi que l’interpolation polynomiale. La résolution numérique des équations différentielle est présentée en cinquième chapitre. Le sixième chapitre présentera l’intégration numérique avec les formules de quadrature, trapèze et Simpson. Nous terminerons par une annexe en septième chapitre qui résume des sujets d’examens de synthèses et de rattrapage et un script en Matlab que j’ai proposé dan notre établissement IMSI.

Rappel sur l’algèbre linéaire

Sommaire

1.1 Introduction

Afin de bien comprendre le cours des méthodes numériques. J'ai présenté dans ce chapitre un rappel d'algèbre linéaire, plus précisément sur les matrices

1.2 Vecteurs et matrices

1.2.1 Applications linéaires et matrices

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m. On fixe des bases $\mathcal{B} = (ej)$ j=1,…,m et $\mathcal{C} = (\varepsilon i)$ i=1,…,n respectivement de E et de F. Toute application linéaire $r \in \mathcal{L}(E, F)$ de $E \to F$ peut être représentée par un tableau de scalaires de n lignes et m colonnes suivant :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2m} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nm} \end{bmatrix}$$

On notera $$A = (a_{ij}), \forall i, 1 \le i \le n \quad \forall j, 1 \le j \le m$$

Lorsque on dispose que d'une colonne ou une ligne, on obtient un vecteur colonne Y ou ligne X

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{On notera} \qquad Y = (y_i), \forall i, 1 \le i \le n$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{bmatrix} \qquad \text{On notera} \qquad X = (x_j), \forall j, 1 \le j \le m$$

1.2.2 Opérations sur les matrices

1.2.2.1 Somme et différence des matrices

La somme ou la différence entre deux matrices est une opération très simple. Elle est notée + ou – tout simplement et on a la définition suivante :
Soit *A* et *B* deux matrices ayant la même taille, alors si l'on a :

$$A = (a_{ij}), \forall i, 1 \le i \le n$$
$$\forall j, 1 \le j \le m$$

$$B = (b_{ij}), \forall i, 1 \le i \le n$$
$$\forall j, 1 \le j \le m$$

Alors

A+B $= (a_{ij} + b_{ij})$
A-B $= (a_{ij} - b_{ij})$

1.2.2.2 Déterminant

A est une matrice carrée, on associe une quantité scalaire appelée déterminant et notée *det (A)* calculée par (1)

$$\det A = \sum_{\alpha} (-1)^t a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \text{ où } j_1, j_2, \ldots, j_n \qquad (1.1)$$

Représentent une des α (α=n!) permutations possibles des entiers 1,2,…, n

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^3 a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$(-1)^4 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^5 a_{13}a_{22}a_{31}$$

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses éléments diagonaux

Exemple

$$\det(\operatorname{diag}(10, 5,3)) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} \quad =10*5*3=150$$

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-àdire si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, l'inverse d'une matrice diagonale est une matrice diagonale où les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de la matrice de départ.

En effet, si :

$$D^{-1} = (\operatorname{diag}(1/10,1/5,1/3)) = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

1.2.2.3 Trace

La trace de la matrice carrée À d'ordre n est (2):

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (1.2)$$

1.2.2.4 Produit d'un scalaire par une matrice

Soit une matrice A telle que $A=(a_{ij})$ et un scalaire α , on peut multiplier une matrice A par un scalaire α

$$\alpha A=(\alpha a_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} \ \alpha a_{12} \ \dots \ \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} \ \alpha a_{22} \ \cdots \ \alpha a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha a_{n1} \ \alpha a_{n2} \ \dots \ \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$$

Plusieurs remarques sur cette opération :

On peut ne pas écrire le point de la multiplication ; ainsi on écrit α A plutôt que α . A

Le scalaire s'écrit toujours à la gauche, ainsi on écrit α A mais surtout pas A α

De même on écrit $\frac{1}{\alpha} A$ mais surtout pas A/α

α (A + B) = α A + α B

(α + ß)A = α A + ß A

α a (ß A) = (α ß)A

1.2.2.5 Produit d'une matrice par une matrice

Soit à multiplier deux matrices A et B, pour que cette opération devient réalisable : il faut que A possède d'autant de colonnes que B a de lignes.

Le produit de A [n,m] par B [m,q] est la matrice C[n,q] dont la colonne numéro j est le produit de A par la colonne numéro j de B et ce pour chaque numéro de colonne j compris entre 1 et q

Pour $A=(a_{ij}) \quad \begin{matrix} \forall i, 1 \le i \le n \\ \forall j, 1 \le j \le m \end{matrix}$ et $B=(b_{ij}) \quad \begin{matrix} \forall i, 1 \le i \le m \\ \forall j, 1 \le j \le q \end{matrix}$

alors $C=A*B = c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} * b_{kj}$

1.2.3 Quelques Matrices particulières

Il existe plusieurs types de matrices particulières, citons quelque une :

- ***Matrice carrée***

Si les espaces E et F sont de même dimension n alors A représente une fonction de E dans E

$r : E \rightarrow E$ la matrice A sera de n lignes et n colonnes, A est dite **matrice carrée.**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

La ligne de gauche à droite décroissante d'éléments de a_{11} à a_{nn} est appelée **la diagonale principale** de la matrice A ainsi que La ligne de droite à gauche décroissante d'éléments de a_{1n} à a_{n1} est appelée **la diagonale secondaire** de la matrice A.

- ***Matrices égales***

Deux matrices *A(n, m)* et *B(n, m)* sont égales si

$$a_{ij} = b_{ij}\ \forall 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$$ On note *A= B*

- ***Matrice symétrique***

C'est une matrice carrée *A(n, n)* tq: $a_{ij} = a_{ji}$

- ***Matrice diagonale***

C'est une matrice carrée tq:

$$a_{ii} = \lambda_i, \forall i, \lambda_i \in R$$

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j$$

Exemple
$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- ***Matrice scalaire***

C'est une matrice diagonale tq*:* $a_{ii} = \lambda, \lambda \in R$

Exemple $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

- ***Matrice identité***

C'est une matrice scalaire tq: λ=1

Exemple $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matrice inverse**

On appelle matrice inverse d'une matrice carrée *A*, notée A^{-1} tq:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

- ***Matrice triangulaire inférieure gauche***

La matrice triangulaire inférieure gauche est une matrice carrée *L* tq: $l_{ij} = 0, \forall j > i$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & \mathrm{O} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemple $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

- ***Matrice triangulaire supérieure droite***

La matrice supérieure droite est une matrice U tq : $U_{ij} = 0, \forall i > j$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \ldots\ldots & u_{1n} \\ & u_{22} & \\ O & u_{33} & \\ & & u_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{Exemple} \qquad \begin{bmatrix} 10 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- ***Matrice orthogonale***

C'est une matrice carrée tq : $A^t \cdot A = A \cdot A^t = I$

- ***Matrice à diagonale fortement dominante***

A est dite à DFD si elle est (3) tel que :

$$\forall i \in [1, n], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (1.3)$$

Exemple A= $\begin{bmatrix} 10 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

✓ $|10| > |7| + |1|$
✓ $|5| > |-2| + |-1|$
x $|3| \langle |-8| + |1|$
Donc A est non DFD

- ***Matrice augmentée***

Soient la matrice *A(n, m)* et le vecteur *b(n)*, on appelle matrice augmentée que l'on note: *[A , b]* la matrice obtenue en augmentant *A* par *b*, *b* devient la colonne de *A*.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 27 & 15 \\ -100 & 1.3 & 18 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad [A, b] = \begin{bmatrix} 0 & 27 & 15 & -5 \\ -10 & 1.3 & 18 & -6 \end{bmatrix}$$

- ***Matrice transposée***

On appelle matrice transposée *B* d'une matrice carrée *A*, toute matrice *B* tel que $b_{ij} = a_{ji}$,

On notera $B = A^t$ avec $A = B^t$ de même que le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{Sera noté} \qquad X = (x_1 \ldots x_n)^t$$

- **La matrice nulle**

C'est la matrice non nécessairement carrée dont tous les coefficients sont nuls. On la note 0n,p ou 0*n p* dans le cas ou elle possède *n* lignes et m colonnes.

Exemple : $O_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.2.4 Critère de Cauchy pour la convergence

Soit V une norme matricielle sur M(R). Pour qu'une suite de matrices $A^{(k)}$ soit convergente il faut et il suffit qu'elle vérifier le critère de Cauchy suivant (4) :
Quel que soit ε > 0, il existe $p_0 \in$ N tel que les conditions m ϵ N et et $p \geq p_0$ entraînent

$$V(A^{(p+m)} - A^{(p)} \leq \varepsilon \qquad (1.4)$$

1.3 Arithmétique

1.3.1 Mesures de l'erreur

L'implémentation des algorithmes conduira inévitablement à des erreurs. Pour mesurer celles-ci, nous devons mesurer la distance entre le vecteur représentant la solution exacte$x = (x_1, x_2\ , x_3$ ……..x_n) et le vecteur $x' = (x'_1, x'_2\ , x'_3$ ……..x'_n)) représentant la solution approchée. Pour cela nous utilisons la longueur de R^n (5) :

$$\|x\|_\infty = max|x_i| \quad 1 \leq i \leq n \qquad (1.5)$$

Exemple

Soit $x = (1, -7, 2,4)$ alors

$\|x\|_{\infty} = max|x_i| \;\; = 7$

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Sommaire

2.1 Introduction

Un système de *n* équations à *n* *inconnues* $x_1,...,x_n$ *réelles est appelé* ***système linéaire d'ordre n*** *.*
Ce système se présente sous la forme suivante:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Les $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ sont les coefficients.

Les b_i $1 \le i \le n$ sont les termes du second membre du système.

Les $x_1,...,x_n$ sont les inconnues

Ce système peut être écrit sous forme matricielle de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_{nn} X_n = B_n$$

A est appelée matrice de transformation à n lignes et n colonnes

Exemple

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 50 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \qquad \textit{système linéaire} \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + 2y^3 + 6z = 9 \\ 6x^3 + 4y + 2z^4 = 1 \qquad \textit{système non linéaire} \\ 3x^{\frac{1}{2}} + 4y2 + 6z^5 = 0 \end{cases}$$

2.2 Les méthodes directes

Les méthodes directes sont des algorithmes qui permettent de fournir des solutions **exactes** si elles existent en un nombre **fini** d'opérations. Ex: méthode de Cramer, Gauss, de Gauss-Jordan, Substitution ….

2 .2.1 Cramer

L'existence et l'unicité de la solution d'un système linéaire dépend de la valeur du déterminant de *A.*

1- Si det (A) ≠ 0 La matrice est dite ***<u>régulière</u>*** *et le système admet une solution unique qui est donnée par la méthode de Cramer.*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},,,,,,,,,,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Le déterminant $\det(A_i)$ est obtenu en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de *A* par *b*.

$$\det(A_i) = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1i-1}\ b_1\ a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \dots a_{2i-1}\ b_2\ a_{2i+1} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \dots a_{n\,i-1}\ b_n\ a_{n\,i+1} \dots a_{n\,n} \end{vmatrix}$$

L'inconveignent de cette méthodes qu'elle est couteuse en temps et en espace de stockage.

2- Si $\det(A_i) = 0$ A est dite matrice ***<u>singulière</u>*** et le système est dégénéré.

Exemple

Soit le système suivant

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 50 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$$

La matrice A du système est: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

Donc

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Le système est régulier et admet alors la solution unique :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \\ 31 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-24}{-8} = 3 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 31 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-40}{-8} = 5 \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 50 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 31 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-64}{-8} = 8$$

La solution est $x = (3,5,8)'$

2.2.2 Gauss sans pivotation

La méthode d'élimination de gauss est une méthode directe qui permet de résoudre un système d'équation linéaire Ax=b en un nombre fini d'opérations.

Elle consiste à transformer le système A*x=b en un système *A'*x=b'*, où *A'* est une matrice *triangulaire supérieure droite.*

La matrice *A'* est obtenue par substitutions successives dans la matrice d'origine selon l'algorithme d'élimination de Gauss suivant:

1) *La triangulatisation*

pour $k = 1$ jusqu'à $n-1$

$pivot \leftarrow a_{kk}$ (*stratégie de pivot *)

si $pivot \neq 0$ alors

pour $i = k+1$ jusqu'à n

$$b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{pivot} b_k$$

pour $j = k+1$ jusqu'à n

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{pivot} a_{kj}$$

Fin pour

Fin pour

Fin Si

Fin

On appliquant cet algorithme de triangularisation le système devient le suivant

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{ii} & \ddots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

D'où la solution est

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_n} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) \end{cases}$$

2) *Résolution du système triangulaire*

$$x_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$\begin{array}{l} \text{pour } i = n-1 \text{ jusqu'à } 1 \\ \quad somme \leftarrow 0 \\ \quad \text{pour } j = i+1 \text{ jusqu'à } n \\ \qquad somme \leftarrow somme + a_{ij} x_j \\ \quad \text{Fin pour} \\ \quad x_i \leftarrow \dfrac{bi - somme}{a_{ii}} \\ \text{Fin pour} \end{array}$$

3) *Le déterminant*

La méthode de Gauss permet de calculer le déterminant par (1)

$$Det(A) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(n-1)} \qquad (2.1)$$

avec p est le nombre total de permutation de lignes et de colonnes

$$\det(A) = (-1^p) \prod_{i=1}^{n} \text{pivot}_i$$

Puisque il s'agit de gauss sans pivotation le p = 0, aucune permutation de ligne ou colonne (le pivot est < > de zero)

$$\det(A) = (-1^0) \prod_{i=1}^{n} \text{pivot}_i \quad = \prod_{i=1}^{n} \text{pivot}_i$$

2.2.2.1 Gauss avec pivotation

- Pivotation partielle

Dans le cas ou un des pivots est nul, on cherche un pivot non nul dans la même colonne.
Le pivot choisi est le plus grand en valeur absolu, il est appelé pivot maximal par colonne, celui-ci est trouvé on permute deux lignes, ce type de pivotation est appelée pivotation partielle (2)
Le pivot est choisit par la formule suivante :

$$a_{rk}^{(k-1)} = MAX\left|a_{ik}^{(k-1)}\right| \quad i \in [k, n] \qquad (2.2)$$

Exemple :

$$\begin{cases} x+3y+4z = 50 \\ 0x+0y-4z = 2 \\ 0x+7y-2z = 31 \end{cases} \quad \text{On permute les lignes 2 et 3} \quad \begin{cases} x+3y+4z = 50 \\ 0x+7y-2z = 31 \\ 0x+0y-4z = 2 \end{cases}$$

- *Pivotation totale*

Dans le cas de pivotation totale (3), le pivot choisi est le plus grand en valeur absolu dans toute la matrice, il est donné par la formule suivante :

$$a_{rm}^{(k-1)} = MAX\left|a_{ij}^{(k-1)}\right| \qquad \begin{matrix} k \le i \le n \\ k \le j \le n \end{matrix} \qquad (2.3)$$

Et on permute les colonnes r et k et les lignes m et k

Exemple 1 :

$$\begin{cases} x+3y+4z = 50 \\ 3x+5y-4z = 2 \\ 4x+77y-2z = 31 \end{cases} \quad \begin{matrix}\text{On permute} \\ \text{La ligne 1 et 3}\end{matrix} \quad \begin{cases} 4x+77y-2z = 31 \\ 3x+5y-4z = 2 \\ x+3y+4z = 50 \end{cases} \quad \begin{matrix}\text{On permute} \\ \text{la colonne 1et 2}\end{matrix} \quad \begin{cases} 77y+4x-2z = 31 \\ 5y+3x-4z = 2 \\ 3y+1x+4z = 50 \end{cases}$$

Exemple 2 :

Résoudre le système suivant par la méthode de gauss

pivot (1)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

(2) = (2)-a_{21}/pivot (1)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ 0 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

(3) = (3)-a_{31}/pivot (1)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ 0 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 0 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 17 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

2.2.3 Gauss Jordan

La méthode de Gauss-Jordan est une méthode très utilisés, elle agit sur les lignes d'une matrice en utilisant les mêmes opérations que celles de Gauss. Les opérations autorisées sont:

1. Échange de deux rangées.
2. Multipliez n'importe quelle ligne par une constante non nulle.
3. Remplacer une ligne par la somme de sur la ligne et un multiple constant d'une autre ligne.

On forme la matrice augmentée correspondante au système d'équations linéaires, après application l'algorithme de gauss, on obtient la solution X ainsi que la matrice inverse

$$A \quad I \quad b \rightarrow I \quad A^{-1} \quad X$$

Exemple

Soit le système à résoudre : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

On forme tout d'abord la matrice *[A, b]* :
K=1 k=1

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 11 \end{pmatrix}$

K=2 k=2

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -6 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

K=3 k=3

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$

La solution est $x_i = a_{i,n+1}$; d'où : $x^* = \begin{pmatrix} 7/2 & -5/2 & 4/3 \end{pmatrix}$

2.2.3.1 Inverse d'une matrice

Selon la méthode de Cramer, une matrice *A* de rang *n* n'est inversible que si son déterminant *Δ* est différent de zéro. Dans ce cas, le produit de *A* par la matrice inverse A^{-1} donne la matrice unitaire *I*.
$A^{-1}A = A.A^{-1} = I$ où $AI = A$
En appliquant la méthode de Cramer sur la matrice *A*, on peut déterminer A^{-1}.

<u>Exemple</u> :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient en utilisant la méthode de Cramer : $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ Qui vérifie que : $A^{-1}A = A.A^{-1} = I$

De même L'algorithme de Gauss-Jordan présenté au début de ce cours (méthode du pivot) opère aussi le passage de la matrice *C=[A,y]* à la matrice *D=[I,X]* où *X* est la solution du système linéaire *A.X=y* ; Soit $X = A^{-1}.y$.

Après les opérations de l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient : $D=A^{-1}.C=A^{-1}.[A,I]=[I,A^{-1}]$ Cette méthode, de calcul de l'inverse d'une matrice qui est résumée ci-dessous, permet de calculer A^{-1} avec un nombre d'opérations nettement inférieur à celui de la méthode de Cramer.

Transformation (A,I) $\Rightarrow$ ***(I,A⁻¹)***

Pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on a :

Pour $j = 2n, \ldots, k \Rightarrow a_{k,j} = \dfrac{a_{k,j}}{a_{k,k}}$

Pour $\left.\begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,k \\ j = 2n,\ldots,k \\ i \neq j \end{array}\right\} \Rightarrow a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k}.a_{k,j}$

<u>Exemple</u> :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} par la méthode de Gauss Jordan.

k =1

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

k =2

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\Rightarrow$ Réduction $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 15/2 & 1/2 & -7/4 & 1 \end{pmatrix}$

k =3

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$; Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$

Finalement, on vérifie que : $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1/2 & -1 \\ 1/3 & -7/6 & 2/3 \end{pmatrix}.A = I$

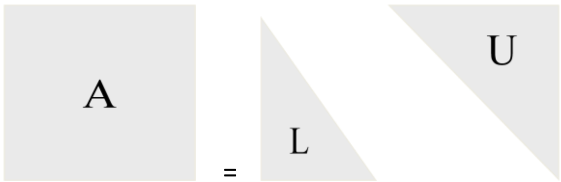
2.2.3 Factorisation LU

Il est très facile de résoudre un système triangulaire comme celui du Gauss que celui ordinaire de type Ax=b, donc on décompose A sous forme LU avec L matrice triangulaire inférieur et U matrice triangulaire supérieure

$$A = LU$$

$$\ell_{i,k} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} = -m_{i,k}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & Ly = b \\ (2) & Ux = y \end{cases}$$



$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\ell_{k+1,k} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\ell_{n,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On multiplions la matrice A par une matrice $M^{(k)}$

$$A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k)} \qquad A^{(1)} = A \quad \text{et} \quad A^{(n)} = U$$

$$\begin{cases} b_i \leftarrow b_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k \\ a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj} \end{cases}$$

$$U = M^{(n-1)} ... M^{(k)} ... M^{(1)} A = MA$$

$$A = M^{-1} U = LU$$

donc $L = M^{-1}$

Les matrices élémentaires $M^{(k)}$ sont inversibles et leurs inverses sont les matrices $L^{(k)}$ triangulaires inférieures telles que :

$$L^{(k)} = \begin{cases} & l_{ij} = 0 \\ \text{sauf} & l_{ii} = 1 \quad i = 1, n \\ \text{sauf} & l_{ik} = \ell_{ik} \quad i = k+1, n \end{cases}$$

$$L^{(k)} = I - \left(M^{(k)} - I\right)$$

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\ell_{k+1,k} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\ell_{n,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ell_{k+1,k} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ell_{n,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = L^{(n-1)} ... L^{(k)} ... L^{(1)}$$

Algorithme LU

pour $k = 1$ jusqu'à $n - 1$
    $pivot \leftarrow a_{kk}$ (* stratégie de pivot *)
    si $pivot \neq 0$ alors
        $\ell_{kk} \leftarrow 1$
        pour $i = k + 1$ jusqu'à n
            $\ell_{ik} \leftarrow \dfrac{a_{ik}}{pivot}$
            pour $j = k + 1$ jusqu'à n
                $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \ell_{ik} a_{kj}$
            fait
        fait
    sinon érreur
fait

2.3 Les méthodes itératives

Les méthodes itératives ou indirectes sont des algorithmes qui permettent de fournir des solutions approchées si elles existent en un nombre **infini** d'opérations. Ex: méthode de Jacobi, Gauss Seiedel….

2.3.1 La méthode de Jacobi (4)

Soit D la diagonale de la matrice A, et G le reste :

$A = D+G$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{i-1,i} & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i,i-1} & 0 & a_{i-1,i} & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & a_{i,i+1} & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dx^{\text{new}} = b - Gx^{\text{old}} \Leftrightarrow x^{\text{new}} = D^{-1}\left(b - Gx^{\text{old}}\right)$$

Don on a $$Dx^{\text{new}} = \left(b-(E+F)x^{\text{old}}\right) : \begin{cases} M = D \\ N = -E-F = -(E+F) \end{cases} \qquad (2.4)$$

<u>Théorème de convergence</u> :

Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge

<u>Démonstration</u> Jacobi :

$$x^{k+1} = (D)^{-1}\left(b-(E+F)x^{k}\right)$$

$$x^{k+1} = Cx^{k} + d \quad \text{avec} \quad C = D^{-1}(E+F), \quad d = D^{-1}b$$

$$\|C\|_{\infty} = \left\|D^{-1}(E+F)\right\|_{\infty} = \max_{i=1,n}\left(\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) < 1$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

soit $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ une solution approchée

imaginons que $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ avec par exemple $dist(A, \tilde{A}) < \varepsilon$

si on essayait: $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6-4\tilde{x}_2+2\tilde{x}_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{0-\tilde{x}_1-\tilde{x}_4}{3} \\ x_3 = \dfrac{8-3\tilde{x}_1+\tilde{x}_2-2\tilde{x}_4}{1} \\ x_4 = \dfrac{6+\tilde{x}_2-2\tilde{x}_3}{1} \end{cases} \qquad \text{soit} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j}{a_{ii}}$$

tant que $dist(Ax_{new}, b) > \varepsilon$ $\quad (i.e. 10^{-12})$

$$x_i^{\text{new}} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{\text{old}}}{a_{ii}}$$

fin

2.3.2 La méthode de Gauss Seidel (5)

Soit E la triangulaire inférieure et F la supérieure de la matrice A :

$$A = D+E+F$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i,i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{i,i+1} & 0 & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{i-1,i} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i-1,i} & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D+E)x^{\text{new}} = b - Fx^{\text{old}} \Leftrightarrow x^{\text{new}} = (D+E)^{-1}\left(b - Fx^{\text{old}}\right)$$

$$(D+E)x^{\text{new}} = \left(b - Fx^{\text{old}}\right) : \begin{cases} M = D+E \\ N = -F \end{cases} \qquad (2.5)$$

Exemple

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - 4\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{0 - x_1 - \tilde{x}_4}{3} \\ x_3 = \dfrac{8 - 3x_1 + x_2 - 2\tilde{x}_4}{1} \\ x_4 = \dfrac{6 + x_2 - 2x_3}{1} \end{cases} \quad \text{soit } x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j}{a_{ii}}$$

tant que $dist(Ax_{new}, b) > \varepsilon \qquad (i.e. 10^{-12})$

$$x_i^{\text{new}} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{\text{new}} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{\text{old}}}{a_{ii}}$$

fin

Lorsqu'une inconnue est utilisée, c'est automatiquement la plus récente valeur qui est calculée. Ceci assure une convergence des calculs bien plus rapide que la méthode de JACOBI.
On arrête les calculs lorsque les valeurs successives de x_j sont suffisamment voisines. Pour cela, on peut utiliser,

- soit le critère de **Convergence absolue** (6) :

$$\left| x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)} \right| \leq \varepsilon \qquad (2.6)$$

- soit le critère de **Convergence relative** (7):

$$\left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right| \leq \varepsilon \qquad (2.7)$$

Pour les systèmes où les matrices qui sont de rang élevé, il n'est pas commode de faire le test de convergence sur chaque inconnue x_j.
Dans ce cas, on fait le test soit seulement sur certaines inconnues que l'on choisit, soit les quantités suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} \left| x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)} \right| \text{ ou } \left(\sum_{j=1}^{n} \left| x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)} \right|^2 \right)^{1/2} \text{ ou } \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right| \text{ ou } \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right|^2 \right)^{1/2}$$

La convergence du procédé ne dépend pas du choix des valeurs initiales x_j^0, mais seulement des valeurs des coefficients.
On montre que la convergence est assurée si on a, pour chaque valeur de i (c'est à dire pour chaque ligne), la relation est vérifiée.

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (2.8)$$

Autrement dit, il y a convergence si chaque élément diagonal est supérieur ou égal, en module, à la somme des modules des autres éléments de sa ligne (la matrice A soit DFD (8)).

2.4 Quelque exemples élémentaires

Exemple 1 : Voici un aperçu d'exécution pour le système suivant par la méthode de Gauss

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 & -2x_2 & 2x_3 & = -2 \\ 4\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = \text{-11} \\ 2x_1 & +3\ x_2 & \text{-}\ x_3 & = \text{-1} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{c} -2 \\ -11 \\ -1 \end{array}$$

En appliquant l'algorithme de triangularisation de gauss on trouve le système suivant

$$\left.\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -18 \end{array}\right| \begin{array}{c} -2 \\ -9 \\ -36 \end{array}$$

Après substitution on trouve la solution suivante

X=(-1 , 1 , 2)

Le déterminant est $\det(A) = (-1^0)\prod_{i=1}^{n} \text{pivot}_i$ = 4*-1*-18=72

Exemple 2 : Voici un aperçu d'exécution pour un autre système par la méthode de Gauss

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 & +2x_2 & -x_3 & =5 \\ x_1 & +6x_2 & -3x_3 & = 4 \\ 2x_1 & + x_2 & +4x_3 & = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ 4 \\ 7 \end{array}$$

En appliquant l'algorithme de triangularisation de gauss on trouve le système suivant :

$$\left.\begin{array}{ccc} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5.59 & -2.8 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ 2.8 \\ 4.5 \end{array}$$

Après substitution on trouve la solution suivante

X=(1, 1, 1)

Le déterminant est $\det(A) = (-1^0)\prod_{i=1}^{n} \text{pivot}_i$ = 121

Exemple 3 : Voici un aperçu d'exécution pour le système suivant par la méthode de Gauss Seidel

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & + x_2 & - x_3 & = 13 \\ x_1 & - 5x_2 & - x_3 & = 8 \\ 4x_1 & {}_2 & + 7x_3 & = 16 \end{cases}$$

2X1 + X2 -X3 = 13 X1= (13 – X2+X3)/2

X1 -5X2 -X3 = 8 ➔ X2= (8 -X1 +X3)/-5 ➔

4X1 +0X2 +7X3 =16 X3 =(16 - 4X1)/7

Après 3 itérations et $x^{(0)} = (1,0,0)^T$

On trouve la solution suivante $x^{(3)} = (6.0139050, -0.16744637, -1.1508029)^T$

Exemple 4 : Voici un aperçu d'exécution pour le système suivant par la méthode de Gauss Seidel après la vérification de la convergence

Soit le système $Ax = b$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 \\ 23 \\ 0 \end{vmatrix}$$

En algèbre linéaire, une matrice carrée à coefficients réels ou complexes est dite **à diagonale dominante** lorsque le module de chaque terme diagonal est supérieur ou égal à la somme des modules des autres termes de sa ligne.

$$A = (a_{ij}), \forall i, 1 \le i \le n$$
$$\forall j, 1 \le j \le m$$

on a alors

$$\forall i \in [1, n], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}|$$

On vérifier la formule pour les trois lignes :

|2| < |0| + |7 | pas bon
|5| > |-2|+|0| bon
|2| < |6|+|-2| pas bon

Donc A n'est pas dominante

Pour avoir A strictement diagonale dominante il faut arranger A, donc si on permute la 1 colonne avec la 3 colonne et on change la position des Xi, on obtient le système suivant

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 \\ 23 \\ 0 \end{vmatrix}$$

|7| > |0| + |2 | bon
|5| > |0|+ |-2| bon
|6| > |2|+|-2| bon

Une fois notre système set DFD, on exécute méthode de Gauss Seidel avec 5 itérations et comme solution initiale $x^{(0)} = (1,0,0)^T$, on trouve la solution suivante

X3=2 , X2=5, X1=1

Donc la solution est $x^{(5)} = (1,5,2)^T$

Exemple 5 : Voici un aperçu d'exécution pour le système suivant par la méthode de Gauss Jordon

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 \qquad - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Etape 1 Former la matrice augmentée correspondant au système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Etape 2: Transformer la matrice augmentée en matrice sous forme d'échelons réduits par des opérations de lignes élémentaires.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Étape 3: Résoudre le système linéaire correspondant à la matrice en forme d'échelon de ligne réduite. La solution (s) sont également pour le système d'équations linéaires à l'étape 1.

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$$

Exercice

Est ce que le système linéaire A x= b suivant converge et pour quoi ?

A=$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ x=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ b=$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Donner les matrices D, U et L qui correspondent à la décomposition A = D – U – L de la méthode de jacobi
- Résoudre le système linéaire A x= b avec $x^{(0)}$ = (0, 0 , 0) en 4 itérations.

Résolution des systèmes non-linéaires (zéros des fonctions)

Sommaire

3.1 Introduction

Plusieurs méthodes existent dans la littératures (Point fixe, dichotomie, la sécante, Newton, lagrange….) qui cherchent les zeros de fonction $= 0$, la plupart de ces méthodes sont itératives elles calculent des approximations successive x_1, x_2, x_3...... de la racine x de l'équation $f(x) = 0$, à partir d'une valeur initiale x_0 bien choisie. La seule différence entre eux c'est la vitesse de convergence (Figure 3.1).

- Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, on sait que l'équation possède n racines complexes.
- Si l'équation est transcendante, elle peut avoir un nombre fini, voire nul, ou infini de racines.

Le problème est alors de trouver la racine dont on sait l'existence et dont, parfois, on connaît une valeur approchée.

D'une manière générale, on suppose que l'équation a été mise sous la forme $f(x) = 0$: (ceci est toujours possible en définissant par exemple $g(x) = x + f(x)$ puisque lorsque $(f(x) = 0$, $g(x) = \pi)$.

$$
\begin{aligned}
x_2 &= f(x_1) \\
x_3 &= f(x_2) \\
x_4 &= f(x_3) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&. \\
&. \\
&. \\
&. \\
x_n &= f(x_{n-1})
\end{aligned}
$$

À partir d'une valeur initiale x_1, que l'on se donne, on engendre la suite :

Si la suite des mesures $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ converge vers une valeur x_0, alors :

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} = x_0$, et $f(x_0) = x_0$; **x_0 est une racine**.

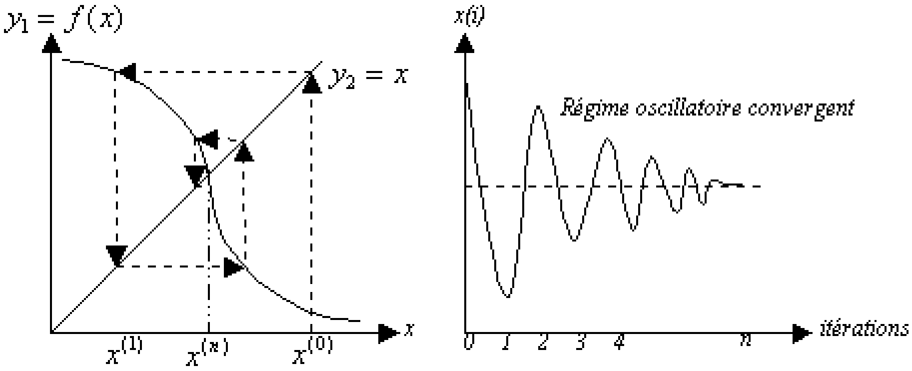


Figure 3.1 : *Exemple de solution convergente*

Supposons que l'équation admette une racine x_0 sur l'intervalle [a,b]. On peut légitimement supposer que *f(x)* prendra des valeurs sur cet intervalle. Si l'on n'ajoute pas d'hypothèses supplémentaires, on ne peut être sûr de la convergence. Il est donc impossible de donner une condition nécessaire sans expliciter la fonction *f*. C'est donc une étude de cas.

3.2 *La dichotomie*

La méthode de dichotomie, encore appelée méthode de bissection, est basé sur le théorème de la valeur intermédiaire. Elle exploite uniquement le signe de la fonction f aux extrémités des sous-intervalles. Elle est décrite comme suit :

soit, $f : [a\ b] \rightarrow R$, une fonction continue sur l'intervalle $[a\ b]$.

Si $f(a)\times f(b) < 0$, il existe donc au moins une racine de $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a\ b]$.

On prend $c = (a + b)/2$ tel que :

1.Si $f(c) = 0 \rightarrow c$ est la racine de $f(x)$.

2.Sinon, nous testons le signe de $f(a)\times f(c)$ (et de $f(c)\times f(b)$).

3.Si $f(a)\times f(c) < 0 \rightarrow$ la racine se trouve dans l'intervalle $[a\ c]$ qui est la moitié de $[a\ b]$.

4. Si $f(c)\times f(b) < 0 \longrightarrow$ la racine se trouve dans l'intervalle $[c\ b]$ qui est la moitié de $[a\ b]$.

Ce processus de division, par deux, de l'intervalle (à chaque itération on divise l'intervalle par deux) de la fonction est réitéré jusqu'à la convergence (Figure 3.2).

Algorithme

$$f(a)f(b) < 0 \quad \rightarrow \quad c = \frac{a+b}{2}$$

$Tantque |a-b| \langle \xi$

faire

si $|f(c)| < \varepsilon$

alors on a trouvé la solution : c

sinon si $f(a)f(c) > 0$

alors $a \leftarrow c$

sinon si $f(b)f(c) > 0$

alors $b \leftarrow c$

FinTantque

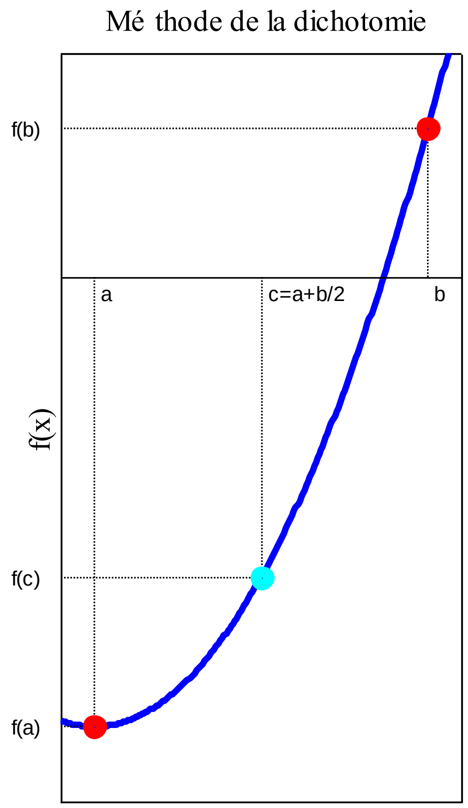


Figure 3.2 : *Méthode de la dichotomie*

3.3 La sécante

L'idée de cette méthode est très simple : pour une fonction f continue sur un intervalle [a,b], et vérifiant f (a) ≤ 0, f (b) > 0, on trace le segment [AB] où *A = (a, f (a)) et B = (b, f (b)).* Si le segment reste au-dessus du graphe de f alors la fonction s'annule sur l'intervalle [a' ,b] où (a' ,0) est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses. La droite (AB) s'appelle la **sécante**. On recommence en partant maintenant de l'intervalle [a' ,b] pour obtenir une valeur a'' (Figure 3.3)

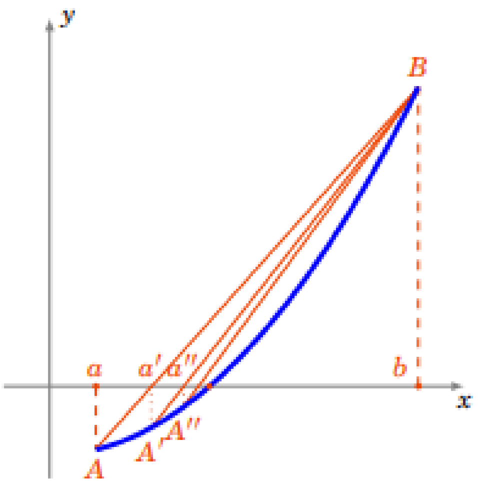


Figure 3.3 *: Méthode de la sécante*

Soit f : [a,b] → R une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que f (a) ≤ 0, f (b) > 0. Alors la suite définie par (1)

$$a_0 = \text{a et } a_{n+1} = a_n - \frac{\text{b} - a_n}{f(\text{b}) - f(a_n)} f(a_n) \qquad (3.1)$$

est croissante et converge vers la solution l de (f (x) = 0).

3.4 Newton Raphson

Lorsque la fonction est différentiable, on peut établir une méthode en exploitant les valeurs de la fonction f et de ses dérivées (2).

Soit x_1 une valeur approchée de la racine s inconnue. Posons : $x_2=x_1+h$, et cherchons l'accroissement qu'il faut donner à x_1, de façon à ce que :

$$f(x_2) = f(x_1 + h) = 0$$

Après développement en série de *Taylor* à l'ordre 2, on obtient :

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + h.f'(x_1) + \frac{h^2}{2}.f''(x_1 + \theta h) = 0$$

ou approximativement : $f(x_1) + h.f'(x_1) = 0$

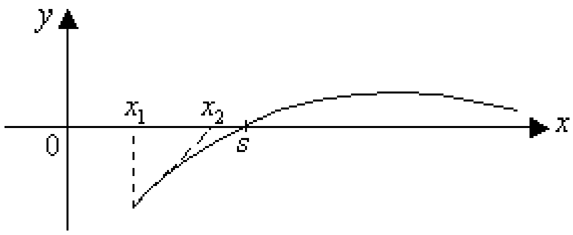
c'est à dire : $h = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

et plus généralement, la solution : $x_{n+1} - x_n = h$, soit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (3.2)$$

Interprétation géométrique :

La valeur x_2 est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe *ox* de la tangente au graphe *y=f(x)* en x_1.



Sens de l'approximation :

Si l'on avait fait aucune approximation dans l'écriture de $f(x_1+h)=0$, on aurait obtenu, pour la racine *s*, l'expression suivante :

$$s = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{h^2}{2}\cdot\frac{f''(x_1+\theta h)}{f'(x_1)}$$

donc :

$$s - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{h^2}{2}\cdot\frac{f''(x_1+\theta h)}{f'(x_1)}$$

$$s - x_2 = -\frac{h^2}{2}\cdot\frac{f''(x_1+\theta h)}{f'(x_1)}$$

$$c = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$c = b - f(b)\frac{1}{f'(b)}$$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Les critères d'arrêts peuvent être

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| \langle \xi$$

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| / \left|x_k\right| \langle \xi$$

Les polynômes :
Interpolations et Caractéristiques

Sommaire

4.1 Introduction

L'illustration la plus triviale dans les problèmes numériques en estimation de données en des points intermédiaires non évalués est l'interpolation linéaire où les points de mesure sont reliés par des segments de droites.

On substitue très souvent une fonction f(x) connue en un nombre fini de points x par une fonction P(x) simple: c'est l'approximation. En termes mathématiques, l'approximation consiste à minimiser la distance qui sépare les fonctions f(x) et P(x).

4.2 Interpolation et approximation

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle [a, b]. De par la technologie, l'´etude numérique de f ne peut se faire sur un spectre continu de valeurs $x \in [a, b]$, mais uniquement sur un certain nombre (n + 1) fini de valeurs discrètes (même si (n + 1) peut être aussi grand que l'on veut). C'est la discretisation de f :

l'interpolation : on va chercher une fonction ϕ, passant par y en x pour 0 = i = n et on va ensuite travailler avec ϕ

l'approximation : on va chercher une fonction θ qui va d´ecrire globalement le « mouvement » de f . Plus exactement, on va chercher `a minimiser la distance entre θ et les (yi)

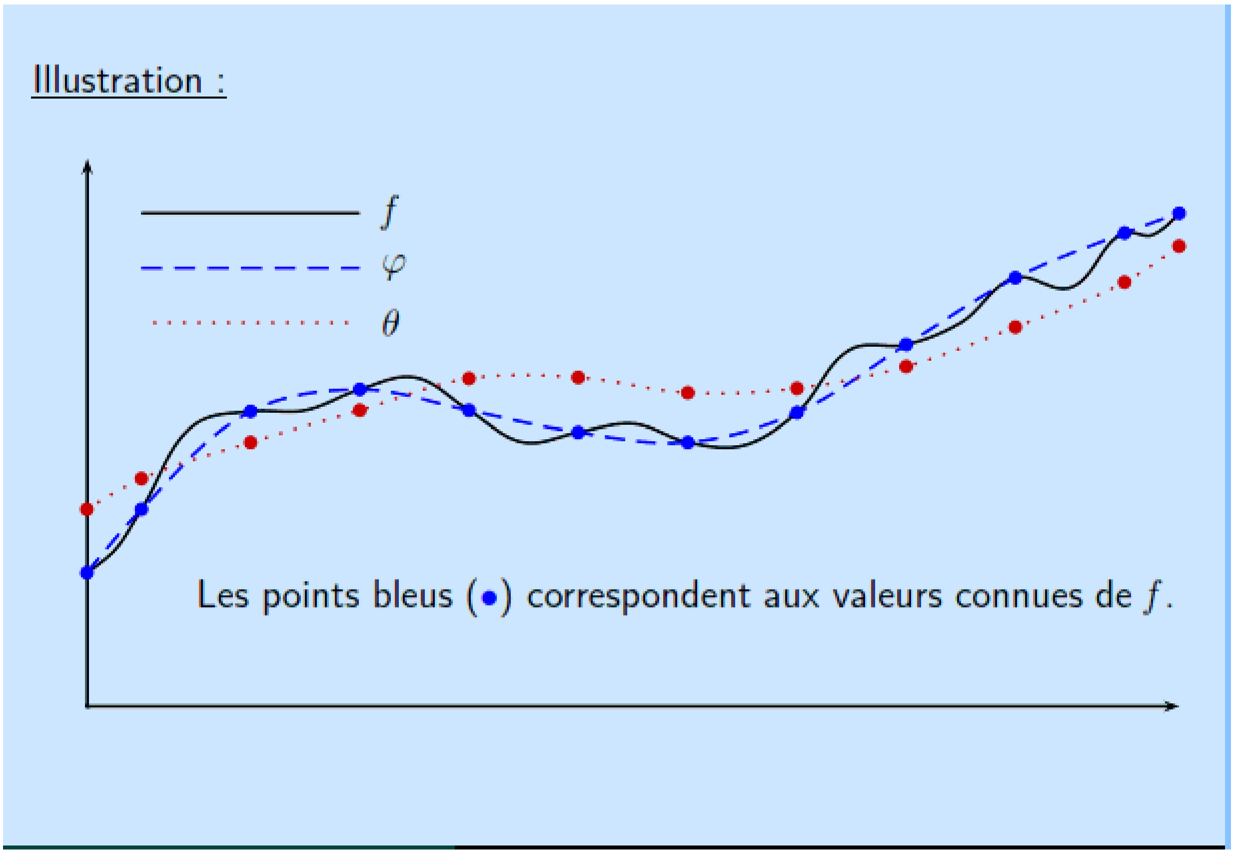


Figure 4.2: *Interpolation*

Étant donné un ensemble de doublets numériques (résultats expérimentaux, par exemple), le problème à résoudre consiste à trouver un modèle mathématique (polynomial, trigonométrique, exponentiel, etc.), et ses paramètres significatifs (c'est à dire ses coefficients), afin de réduire (on parle de régression) toute une information en une expression mathématique utilisable, c'est à dire calculable, intégrable, dérivable, etc. Lorsque les doublets sont considérés comme 'sûrs', au sens expérimental du mot, on tentera une interpolation qui restituera toutes les valeurs numériques des doublets là où ils se trouvent. Lorsque les doublets sont entachés d'incertitudes sur leurs déterminations, en particulier s'ils sont très nombreux, on tentera une approximation qui restituera 'au mieux' l'information contenue dans les doublets. On raisonne sur une fonction numérique 'f' à une seule variable réelle x, connue pour N valeurs. Soit n, le nombre de paramètres du modèle mathématique à déterminer.

4.2.1 But de l'interpolation

Étant donnée une fonction *f* définie sur un intervalle fermé *[a,b]*, pour *n+1* valeurs de sa variable x_i ($i=0,1,2,\ \dots,\ n$), mais inconnue ou d'expression très complexe en dehors de ces valeurs ; il s'agit de calculer une fonction $\varphi(x)$ numériquement plus commode à manier et qui coïncide avec la fonction pour les valeurs connues de f. la recherche peut s'étendre au cas où la fonction f n'est même pas connue pour ses n+1 valeurs de définition, mais où sont connues des valeurs de ses dérivées, par exemple. La fonction φ est pratiquement une somme finie de n+1 fonctions de base $u_i(x)$, linéairement indépendantes (1):

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i u_i(x) \qquad (4.1)$$

le but de l'interpolation est de trouver les a_i pour que : $\varphi_n(x) = f(x_i)$ où $0 \le i \le n$ et où les fonctions de base devront pouvoir se prêter à tous les traitements numériques courants.
Pratiquement, on pourra choisir la suite des monômes :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 \\ u_1(x) = x \\ u_2(x) = x^2 \\ u_3(x) = x^3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n(x) = x^n \end{cases}$$

puisqu'on en vertu du théorème de *WEIERSTRAUSS*, toute fonction continue peut être approchée uniformément par un polynôme.
Il pourrai être opportun pour simplifier les calculs, de choisir des fonctions de base qui en plus de l'indépendance linéaire, ont des propriétés d'orthogonalité, suivant la définition d'un produit scalaire.
Enfin, pour une fonction périodique, la base formée par les fonctions sinus et cosinus paraît tout à fait adaptée.

4.2.2 Interpolation polynomiale de Lagrange

La méthode est ancienne, mais elle est parfaitement adaptée aux traitements informatiques. Soit *f* une fonction définie sur un fermé *[a,b]* de $\Re$ *(a<b)*, pour *n+1* valeurs distinctes de sa variable, cet ensemble étant désigné sous le nom partition (x_i, $0 \leq i \leq n$).

On cherche s'il existe un polynôme *P(x)*, tel que $P(x_i) = f(x_i)$, pour *i* variant de *0* à *n+1*

Posons : $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ où les $a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_m \in \Re$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & . & . & . & x_0^j & . & . & . & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & . & . & . & x_1^j & . & . & . & x_1^m \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 & . & . & . & x_i^j & . & . & . & x_i^m \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & . & . & . & x_n^j & . & . & . & x_n^m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_i \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x1) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_i) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, trois éventualités peuvent se présenter :

- *m>n* $\Rightarrow$ système impossible aucune solution,
- *m=n* $\Rightarrow$ système de Cramer une solution unique,
- *m<n* $\Rightarrow$ système surdéterminé une solution est à chercher par la méthode des moindres carrés.

Ici, c'est le cas où *m=n* qui nous intéresse. La solution existe et est unique, car le déterminant des coefficients (x_i^j) est un déterminant de *Van der Monde*, non nul et qui vaut :

$$\Delta = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

<u>*Recherche de la solution*</u> *:*

Considérons les polynômes (de Lagrange) suivants (2) :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \qquad (4.2)$$

; où *i=0* à *n.*

Le produit effectué sur les indices *j* tels que $0 \leq j \leq n$ et $i \neq j$.

Il est clair que $L_i \in P_n$ et que : $L_i(x_j) = 0$; si $i \neq j$, $L_i(x_i) = 1$

Donc, ces polynômes sont de degré n, et sont tels que : $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$
Ils sont linéairement indépendants, puisque si :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i . L_i(x) = 0$$

alors pour : $x = x_k$, avec *k=0* à *n*, on a : $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i . L_i(x_k) = \lambda_k = 0$

Les *n+1* polynômes de Lagrange forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à n. Sur cette base, on a :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) . L_i(x)$$

Car, on a bien : $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour *i=0* à *n*.

Autres propriétés :

$$x^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k . L_i(x)$$

et si l'on pose :

$$\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = \prod (x)$$

on a alors :

$$L_i(x) = \frac{\prod (x)}{(x - x_i) . \prod '(x_i)}$$

Cas particuliers des abscisses équivalentes :

Soit h un réel positif, appelé pas de la partition.

On pose : $x_i = x_0 + i.h$ et $x = x_0 + s.h$ où s est un réel quelconque.
Alors l'expression de $L_i(x)$ donnée dans le polynôme de Lagrange devient (3):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{h.(s - j)}{h.(i - i)} \right) = M_i(s) \qquad (4.3)$$

$M_i(s)$ est un polynôme de degré n, à coefficients purement numériques ($m_{i,j}$) :

$$M_i(s) = \sum_{j=0}^{n} m_{i,j} . s^j$$ où $0 \le i \le n$

Le tableau des coefficients $m_{i,j}$ forme une matrice, de rang *n+1*, appelée *matrice régulière de Lagrange*. Ces matrices peuvent être tabulées.

Exemple **:** Établir la matrice régulière correspondant au cas de l'interpolation quadratique (matrice régulière de Lagrange)

Solution

Soit les données de la fonction *f* suivante :

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	-2	-1

où : $0 \leq i \leq 2$

Recherchons tout d'abord le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f . Ce polynôme s'écrit sous la forme :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$; où $0 \leq i \leq 2$

i	0	0	1	1	2	2
j	1	2	0	2	0	1

On obtient alors 3 polynômes $L_i(x)$: $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$.

$$\begin{cases} L_0(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 3.x + 2\right) \\ L_1(x) = -x^2 + 3.x + 0 \\ L_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - x + 0\right) \end{cases}$$

D'où :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x).f(x_i) = 2.x^2 - 5.x + 1 = f(x)$$

Détermination de la matrice régulière correspondante :

On a :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{s - j}{i - i} \right) = M_i(s)$$

Avec $M_i(s) = \sum_{j=0}^{n} m_{i,j}.s^j$, $0 \leq i \leq n$

On obtient alors :

$$\begin{cases} M_0(s) = \frac{1}{2}\left(s^2 - 3.s + 2\right) \\ M_1(s) = -s^2 + 3.s + 0 \\ M_2(s) = \frac{1}{2}\left(s^2 - s + 0\right) \end{cases}$$

D'où la matrice régulière de Lagrange correspondant à l'interpolation quadratique est la suivante :

$$M_{rég,2} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On peut monter également les autres cas de matrices régulières d'ordre inférieur ou supérieur (interpolation linéaire, cubique, etc.) :

$$M_{rég,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ □ interpolation linéaire

$$M_{rég,3} = \begin{pmatrix} 1 & -11/6 & 1 & -1/6 \\ 0 & 3 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$ □ interpolation cubique

$$M_{rég,4} = \begin{pmatrix} 1 & -25/12 & 35/24 & -5/12 & 1/24 \\ 0 & 4 & -13/3 & 3/2 & -1/6 \\ 0 & -13/12 & 19/4 & -2 & 1/4 \\ 0 & 3/2 & -7/3 & 7/6 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 11/24 & -1/4 & 1/24 \end{pmatrix}$$

Suivant les auteurs et/ou suivant la conduite des calculs, les matrices régulières de Lagrange peuvent être ces matrices ou leurs transposées.

4.2.3 Erreur de l'interpolation de Lagrange

Pour $x \in \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, il s'agit d'estimer $\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x)$

Si on ne possède d'aucun renseignement sur *f*, autre que $f(x_i) = P_n(x_i)$, on ne peut rien dire sur ε (autre que $\varepsilon(x_i) = 0$). Si l'on ajoute des hypothèses sur *f*, elles se répercuteront sur ε.

Exercice : Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau de valeurs suivant :

x	0	2	3	5
y	−1	2	9	87

Comme il y a quatre points d'appui, le polynôme sera de degré 3.

$$A_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} = -\frac{1}{30}\left(x^3-10x^2+31x-30\right)$$

$$A_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x(x-3)(x-5)}{(2)(-1)(-3)} = \frac{1}{6}\left(x^3-8x^2+15x\right)$$

$$A_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-2)(x-5)}{(3)(1)(-2)} = -\frac{1}{6}\left(x^3-7x^2+10x\right)$$

$$A_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x-2)(x-3)}{(5)(3)(2)} = \frac{1}{30}\left(x^3-5x^2+6x\right)$$

Donc $P(x) = y_0A_0(x) + y_1A_1(x) + y_2A_2(x) + y_3A_3(x) = \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1$

4.3 Polynôme caractéristique d'une matrice

Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A noté P(A) est le det (A – λI) (c'est un polynôme en λ)

Exemple : Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$ = (A – λ) (d- λ) - bc
$=\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$

4.3.1 La trace et le déterminant

Définition. On appelle la trace de A la somme des éléments sur la diagonale.

Exemple Soit A une matrice carrée d'ordre 2
tr $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$

Rappel

Les valeurs propres d'une matrice carrée sont **les racines** de son polynôme caractéristique.

Théorème. La trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A et le déterminant de A est le produit des valeurs propres de A.

Démonstration Pour une matrice d'ordre 2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le déterminant est
det(A)= $ad - bc$, tr (A) = $a + d$

det (A – λI) = $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$ (1)

$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - \lambda_1\lambda - \lambda_2\lambda + \lambda_1\lambda_2$

$= \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$ (2)

De (1) et (2) on a $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ = tr(A)
$\lambda_1\lambda_2 = ad - bc$ = det(A)

Et d'une manière similaire on démontre le cas général

4.3.2 Théorème de Caylay-Hamilton,

Théorème : Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros.

Exemple

Soit une matrice d'ordre 2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ alors

P(A) est le det (A – λI) = $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$ = $\lambda^2 - 5\lambda - 2$

Selon le thèoreme de caylay Hamilton $A^2 - 5A - 2I$ doit etre la matrice des zéro, c'est adire

$A^2 - 5A - 2I = 0$

Ce théorème nous aide a calculer la matrice inverse ainsi que les puissance des matrice

<u>La matrice inverse</u> A^{-1}

$$A^2 - 5A - 2I = 0$$
$$A^2 - 5A = 2I \text{ et}$$
$$A(A-5) = 2I \text{ et}$$
$$A\frac{1}{2}(A-5) = I \text{ donc}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I)$$

<u>Les puissances</u> A^n

$$A^3 = A^2.A = (5A + 2I).A = 5\ A^2 + 2.A.I = 5(5A + 2I) + 2.A.I$$
$$= 25A + 10I + 2AI = 27A + 10I \text{ donc}$$
$$A^3 = 27A + 10I$$

De la même manière, on trouve

$$A^4 = 145A + 54I$$

4.3.3 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition

On dit que $\lambda \epsilon k$ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $y \neq 0$ tel que

$$AY = \lambda Y$$

Dans ce cas on dit que Y est un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ et que (λ, y) est un couple propre de A

Exemple

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante A= $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A est P(A) = det (A – λI) = $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$= $\lambda^2 - 7\lambda + +6$ = $(\lambda - 1)(\lambda - 6)$

On obtient donc 2 valeurs propres réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$

- On détermine les vecteurs propres associés à $\underline{\lambda = 1}$

Soit le vecteur propre associé y=$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$AY = \lambda Y$

$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ => $\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 = \lambda y_1 \\ 2y_1 + 2y_2 = \lambda y_2 \end{cases}$ => $\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 = y_1 \\ 2y_1 + 2y_2 = y_2 \end{cases}$ $=>$ $\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$

$=> y_2 = -2y_1$ => Y= $\begin{cases} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \alpha \epsilon\ R \end{cases}$

- On détermine les vecteurs propres associés à $\underline{\lambda = 6}$

  Soit le vecteur propre associé y=$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$AY = \lambda Y$

$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ => $\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 = \lambda y_1 \\ 2y_1 + 2y_2 = \lambda y_2 \end{cases}$ => $\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 = 6y_1 \\ 2y_1 + 2y_2 = 6y_2 \end{cases}$ $=>$ $\begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 4y_2 = 0 \end{cases}$

$=> y_2 = 2y_1$ => y = $\begin{cases} \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha \epsilon\ R \end{cases}$

Résolution numérique des équations différentielles

Sommaire

5.1 Introduction

Les méthodes de résolution numériques des équations différentielles sont basées sur un développement en série de Taylor.

Pour les équations différentielles ordinaires le lien entre la dérivée et la valeur de la fonction est donné par la formule suivante (1):

$$f'(x) = F(f(x)) \qquad (5.1)$$

Avec la forme génirique suivante

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = f\left(\mathbf{X}(t), t\right)$$

$$X : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

- t représente le temps
- f variable en fonction du temps
- Parfois **Y** au lieu de **X**, parfois x au lieu de t,…

5.2. *Méthodes explicites*

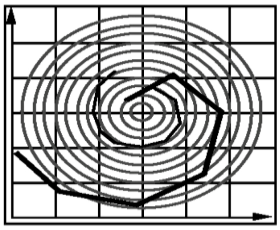
5.2.1 Méthode d'Euler

C'est la plus simple et la plus intuitive des méthodes explicites : c'est une approximation linéaire par morceaux de la trajectoire sur l'intervalle [a b], on choisit n+1 points $t_0, t_1, t_1, t_2 \dots . t_n$, avec $t_0 = a,\ t_1 = b$ et le pas $h = (b-a)/2$

$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$, on avance d'un pas h avec une taille petite ce qui permet de suivre la courbe de plus près (2) :

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + h \\ \mathbf{X}_1 &= \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0) \end{aligned} \qquad (5.2)$$

Dans la méthode d'Euler



- Lorsqu'on suit la tangente, on s'éloigne de la courbe

Exemple : $f(\mathbf{X}, t) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

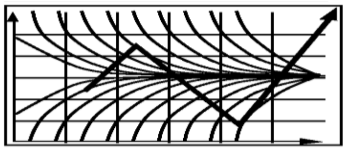
- Formation d'un cercle lorsque la solution est exacte :

Exemple : $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t+k) \\ r\sin(t+k) \end{pmatrix}$

- La solution exacte est une exponentielle

Exemple : $x(t) = x_0 e^{-kx}$

- En fonction de la taille



$$x_1 = x_0(1-kh)$$

Exemple : $\begin{cases} h \le 1/k & \text{ok} \\ h > 1/k & \text{oscillations + / -} \\ h > 2/k & \text{divergence} \end{cases}$

- Plus k est grand, plus h doit être petit

5.2.2 Méthode de Runge–Kutta

C'est le même principe que la méthode d'Euler à des ordres plus élevés ''Ordre 4 '', cette méthode permettre d'obtenir une plus grande précision (3).

$$\begin{aligned} f_0 &= f(\mathbf{X}_0, t_0) \\ f_1 &= f(\mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{2} f_0, t_0 + \tfrac{h}{2}) \\ f_2 &= f(\mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{2} f_1, t_0 + \tfrac{h}{2}) \\ f_3 &= f(\mathbf{X}_0 + h f_2, t_0 + h) \\ \mathbf{X}(t_0 + h) &= \mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{6}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.3 Pas variable

Com ment choisir le pas h ?

- Trop large : erreurs, instabilité, divergence…
- Trop petit : on n'avance pas, long temps de calcul

- On veut un pas idéal :
  - Aussi grand que possible sans trop d'erreur
  - Lié aux raideurs des équations
  - Le pas idéal peut varier au cours du temps

L'estimation de l'erreur se fait par deux méthodes :

- Euler avec un pas h
- Euler avec deux pas $h/2$
- Erreur estimée = différence des deux valeurs :

Erreur=$|\mathbf{X}_a-\mathbf{X}_b|$

Intégration numérique

Sommaire

6.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'approcher numériquement $\int_a^b f(x)dx$, très souvent le calcul explicite de l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a, b]$ dans R, définie par $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ est impossible à atteindre. Par conséquent, on fait appel à des méthodes numériques, afin de calculer une approximation de (f). Dans ces méthodes numériques, la fonction f, est remplacée par une somme finie constituée de n sous-intervalles selon (1):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{n} * \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Dans ce type d'évaluation, on calcul forcément une approximation (passage d'une intégrale à une somme) de la vraie valeur. La méthode d'intégration mise en œuvre est dite d'ordre p si l'erreur d'intégration (1):

$$Err(f) = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{n} * \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \right| \qquad (6.1)$$

est nulle quand f est un polynôme de degré inférieur ou égal à p et non nulle pour au moins un polynôme de degré supérieur ou égal à $p + 1$, soit $f \in$ C $([a, b])$. Nous allons étudier quelques méthodes d'intégration dans lesquelles la fonction à intégrer est substituée par un polynôme d'interpolation sur chaque intervalle élémentaire

6.2 Formule de quadrature

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dans R et ont veut approcher numériquement $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, pour passer de l'intervalle sur $[x_i, x_{i+1}]$ en [-1, 1] un changement de variable à t est nécessaire (2).

$$x = x_i + h\,\frac{t+1}{2}$$

$$dx = \frac{h}{2}\,dt$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \;=\sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})dt \qquad (6.2)$$

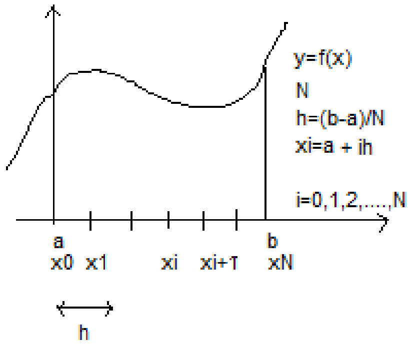


Figure 6.1: *Quadrature*

Donc on se retrouve avec une fonction g continue sur [-1 1] dans R et ont veut approcher numériquement $I(g) = \int_{-1}^{1} g(t)dt$

Soit M en entier positif M = (1, 2, 3…) et des points d'intégrations comprissent dans l'intervalle

[-1 1] tel que $-1 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \dots t_M \leq 1,$

L'idée c'est d'évaluer la fonction en ces points avec des poids d'intégration pour chaque point w_1 w_2 $\dots w_M$

La formule de quadrature pour rapprocher numériquement $I(g) = \int_{-1}^{1} g(t)dt$ est (3)

$$J(g) = w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2) + \cdots .. w_M g(t_M) \qquad (6.2)$$

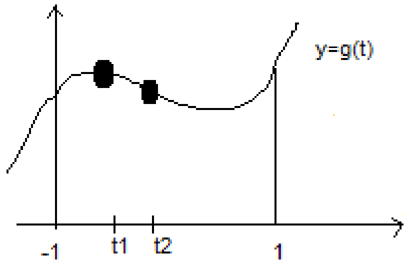


Figure 6.2 : *Points et poids d'intégrations*

Exemple

On prend un seul point dans [-1 1]

M=1 , $t_1 = 0$ $J(g) = 2 * g(0)$

La problématique est comment choisir les point et les poids d'intégrations

6.3 Formule du trapèze

On subdivise l'intervalle $[a,b]$ en sous- intervalles $\{[x_{i-1},x_i]$, i = 1,2,…, n; $x_0 = a$; $x_n = b\}$ sur lesquels la fonction f est remplacée par le segment de droite qui joint les points $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ et $(x_i, f(x_i))$.

Sur $[a,b]$, on remplace f par une fonction d'interpolation linéaire par morceaux. D'un point de vue géométrique, on assimile l'aire comprise entre le graphe de f et l'axe des x à la somme des aires de n trapèzes.

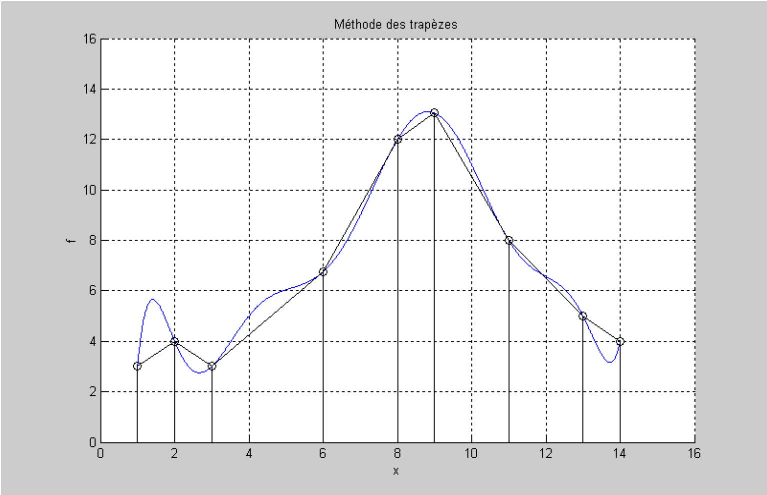


Figure 6.3: *Formule de Trapèze*

Considérons que la division en sous-intervalle est uniforme et posons :

$x_i = a + ih$ où $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $f(x_i) = f_i$; i = 0, 1, 2, …, n.

Sur l'intervalle $[x_i , x_{i+1}]$ l'aire $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ est remplacée par $h(f_i + f_{i+1})/2$, aire du trapèze correspondant.

En additionnant les aires des n trapèzes, on obtient la *formule des trapèzes* (3):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \qquad (6.3)$$

On peut montrer que l'erreur commise est proportionnelle à h^2 (si la fonction f est deux fois continûment dérivable).

On dit que la méthode des trapèzes est *d'ordre 2*.

La formule est « exacte » pour les fonctions f de degré ≤ 1.

6.4 Formule de Simpson

Développons à présent une méthode d'ordre 4 qui équivaut à remplacer la fonction à intégrer par des paraboles définies sur des sous-intervalles comprenant trois abscisses d'intégration successives.

Approximation parabolique par morceaux

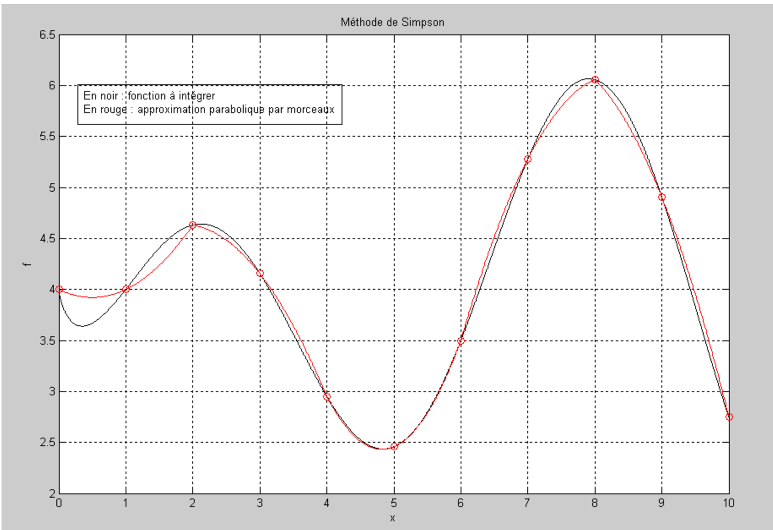


Figure 6.3: *Formule de Simpson*

On suppose que l'intervalle $[a,b]$ est partagé en n sous-intervalles égaux :

$[x_{i-1}, x_i]$,tels que $x_i = a + ih$, avec $h = (b-a)/n$.

On groupe les points par trois, n doit donc être pair

$a = x_0, x_1, x_2 \mid x_2, x_3, x_4 \mid \ldots \mid x_{n-2}, x_{n-1}\ x_n = b$.

Et on remplace, sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, la fonction f par une parabole.

Pour l'intervalle $[x_0, x_2]$, la courbe représentée par $f(x)$ est approchée par la parabole d'équation :

$$\begin{aligned} p(x) &= f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} \end{aligned}$$

et l'intégrale est alors approchée par : $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$

En répétant ce procédé pour les n (pair !) sous-intervalles, on a finalement la

formule de Simpson (4) :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n] \qquad (6.4)$$

Cette formule est exacte pour les polynômes $f(x)$ de degré ≤ 3

Annexe 1

Examen de Rattrapage
Méthode Numériques
2014

***__Exercice 1__*(5pts)**

Résoudre par la méthodede Gauss, en donnant l'expression de toutesles matrices et seconds membres intermédiaires, le système linéaire S1

$$(s_1)\begin{cases} 2x - y + 4Z = 8 \\ 4x - y + 5z + w = 16 \\ -2x + 2y - 2z + 3w = 3 \\ 3y - 9z + 4w = 3 \end{cases} \quad , (x, y, z, w) \in R^4$$

- Calculer le déterminant.

***__Exercice 2__*(6pts)**

Donner les matrices D, U et L qui correspondent à la décomposition A = D – U – L de la méthode deJacobi dans le cas suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

- Résoudre le système linéaire AX=b par la méthode de Jacobi, $b = (11, 13, 15)^t$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$$

En 4 itérations

- Etudier la convergence de la méthode de Jacobi dans le cas suivant:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

***__Exercice 3__*(5pts)**

-Appliquer la méthode de dichotomie à la fonction$f: x \to e^{x/10} - x$sur l’intervalle [0, 1], avec une précision de 10^{-2}.

***__Exercice 4__*(4pts)**

- Donner les instructions Matlab permettant de calculer l’expression suivante :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{|x| + 1}}\left(ln\left(\sqrt{2x + 1}\right)\right)^{5/2}}{tg(x^2) + (\cos(\exp x^2) + 11)}$$

- L’écriture A=[2:5 ; 12 :-3 :3] permet d’afficher sur écran:
  A= ?

Examen Final
Méthode Numériques
2015

Exercice 1 **(7pts)**

Donner les matrices D, U et L qui correspondent à la décomposition A = D – U – L de la méthode de Jacobi dans le cas suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

- Résoudre le système linéaire AX=b par la méthode de Jacobi, $b = (11, 13, 15)^t$
$x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$
En 4 itérations

- Arranger le système B suivant de manière à avoir une matrice strictement diagonalement dominante

$$B \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 **(5pts)**

- Donner les instructions Matlab permettant de calculer les expressions suivantes :

1) $$\frac{\sqrt{\sqrt{|x|+1}}\left(ln\left(\sqrt{|x|+1}\right)\right)^{3/2}}{arctg\,(x^2)+(\sin(\exp x^3)+1)}$$

2) A = [1 2 3 4 5 ; 2 3 4 5 1 ; 3 4 5 1 2; 4 5 1 2 3 ; 5 1 2 3 4];
B = A(1:4,2:3) ?
C=A(:,[1 3]) ?

3) Donner des instructions Matlab **<u>les plus simples possibles</u>** pour produire la matrice A de genre 3 × 3 ayant la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 **(6pts)**

-Ecrire un script Matlab pour résoudre le système d'équation linéaire par la méthode de gauss sans pivotions avec le calcul du déterminant, donner les résultats détaillé pour ce système

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 6 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right|$$

Exercice 4 **(2pts)**

- Citer la différence entre les méthodes directes et indirectes pour résoudre le système d'équation linéaire AX=B ?
- Citez les fenêtres de l'espace de travail du Matlab et sur quoi est basé sans calcul ?

Examen de Rattrapage
Méthode Numériques
2015

Exercice 1 **(8pts)**

-Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire A x= b suivant et déduire le déterminant

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 1 & 6 & -3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad x=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}6\\ 4\\ 7\end{pmatrix}$$

- E = R3 est rapporté à sa base canonique e = {e1 , e2 , e3 }. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Déterminer son polynôme caractéristique.
- Calculer ses valeurs propres.
- Donner une base des sous-espaces propres.

Exercice 2 **(6pts)**

Décrire l'algorithme de la dichotomie et utiliser le pour calculer le zéro de la fonction

$f(x) = x^3 - 4x - 8{,}95$ dans l'intervalle [2;3] avec une précision de 0,01

Exercice 3 ***Questions de cours*** **(6pts)**

Répondre aux questions suivantes

- Le choix d'une des méthodes de résolution des systèmes non linéaires est conditionné par quels critères ?
- Donner des instructions Matlab **les plus simples possibles** pour produire la matrice A de genre 3 × 3 ayant la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Quand une matrice est- inversible ?
- Quelle est la condition pour inverser une matrice diagonale ?
- Pour un système d'ordre 3 comment le résoudre par la méthode de cramer ?

$$M = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Déterminer son polynôme caractéristique.
- Calculer ses valeurs propres.

Examen Final
Méthode Numériques
Mai 2016

Exercice 1 **(6pts)**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 9/4 \end{pmatrix}$

- Etudier la convergence du système.
- Résoudre par la méthode de Gauss en détail le système linéaire suivant et déduire le déterminant.

Exercice 2 **(7pts)**

-Pour $\alpha \in R$ donné, on considère la matrice M

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

-Ecrire la matrice d'itération de la méthode itérative de Jacobi. Pour quelles valeurs de α cette méthode converge-t-elle ?
-Ecrire la matrice d'itération de la méthode itérative de Gauss-Seidel. Pour quelles valeurs de α cette méthode converge-t-elle ?

Exercice 3 **(7pts)**

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.
Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$
Calculer A^{-1} , A^3 par la méthode de Hamilton avec résultats numériques.

Examen de Rattrapage
Méthode Numériques
2016

<u>Questions de cours</u> **(8pts)**

a) Démontrer l'interpolation polynomiale de Lagrange <u>d'ordre n</u> donné par la formule suivante :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x)\, f_i$$

Avec
$$L_{n,i}(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

b) Le choix d'une des méthodes de résolution des systèmes non linéaires est conditionné par quels critères ?

<u>Exercice 1</u> **(6pts)**

- Résoudre par la méthode de <u>Gauss Jordon en détail</u> le système linéaire suivant et déduire le déterminant et la matrice inverse

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ -x + y + t &= 1 \\ -x - y + z + t &= 0 \\ -x - y - z + t &= -2 \end{aligned}$$

<u>Exercice 2</u> **(6pts)**

On considère la matrice suivante A= $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Coché la ou les bonnes réponses

La matrice A a deux valeurs propres distinctes. ☐

La matrice A a trois valeurs propres distinctes. ☐

La somme des valeurs propres de A est égale à leur produit. ☐

La matrice A est diagonalisable. ☐

Examen Final

Méthode Numériques

2017

Exercice 1 (6pts):

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -9 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 2 \\ -3x_2 - 12x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

-Résoudre le système $AX = b$ par la méthode de Gauss

-Déduire le déterminant

-Extraire la deuxième ligne, la troisième colonne el la diagonale de la matrice A par commande Matlab avec résultats.

-Donner les résultats des instructions Matlab : D= diag (A) ; C= A(:,1) ; R=([C D]′ –A(1 :2, :))

Exercice 2 (6pts):

Dans l'espace vectoriel R^3 , on considère l'endomorphisme U dont la matrice dans la base canonique est la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

-Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

- Calculer les valeurs propres

-En déduire le déterminant et la trace par le théorème des valeurs propres

-Calculer la solution détaillé de A^2 et A^{-1} (par le Théorème de Caylay Hamilton avec résultats numériques)

Exercice 3 (8pts):

Soit la fonction suivante $f(x) = x - \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0$

-Séparer graphiquement les racines de la fonction dans l'intervalle [0, 4].

-Montrer que la fonction $f(x)$ admet une racine unique α sur l'intervalle [0, 1]

-Calculer les quatre premières itérations avec quatre chiffres significatifs après la virgule par la recherche dichotomique sur l'intervalle [0, 1]

-Écrire la suite de Newton associée à $f(x)$ dans l'intervalle [0, 1] avec démonstration.

- Quelle sont les conditions d'application de la méthode de Newton. Vérifier si elles sont applicables.

- Calculer les quatre premières itérations par Newton avec $x_0 = 1$. Conclure.

Examen de Rattrapage
Méthode Numériques
2017

Exercice 1 (6pts):

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 8 \\ 3x + 3y - 5z = 14 \\ 4x + 5y - 2z = 16 \end{cases}$$

-Résoudre le système $AX = b$ par la méthode de Gauss Jordon ainsi que sa matrice inverse A^{-1}
-Déduire le déterminant en utilisant la matrice triangulaire
-Résoudre le même système en utilisant la méthode de cramer ? conclure ?

Exercice 2 (6pts):

-Donner avec démonstration la formule matricielle de Jacobi a partir du point fixe
- Démontrer la suite approchée de la sécante pour résoudre l'équation non linéaire de type $f(x) = 0$
- Du point de vue résolution et convergence, qu'elle est la meilleur méthode Gauss, Jacobi, Gauss Seidel ou Gauss Jordon ? pour quoi ?
- Dans la résolution des systèmes linéaires, il existe deux types de méthodes: directes et itératives, quelle est la meilleur méthode ? pour quoi ?

Exercice 3 (8pts):

1) Résoudre par la méthode de Jacobi le système suivant

$$\begin{cases} 10x + y + z = 12 \\ 2x + 10y + z = 13 \\ 2x + 2y + 10z = 14 \end{cases}$$

On prendra pour approximation initiale $x^{(0)}$ = (1.2, 0 , 0) et on cherchera une approximation de la solution avec une précision de 10^{-2}

2) Calculer le rayon spectral de la matrice d'itération de Jacobi ? Conclure

Examen Final
Méthode Numériques
Mai 2018

Exercice 1 **(7 pts)**

Soit α un paramètre réel et soient les matrices A et le vecteur b définis par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ \alpha & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. À quelle condition sur α, la matrice A est inversible (admet une matrice inverse) ?
2. Soit α=- 1. Résoudre le système linéaire $AX = b$ par la méthode du pivot de **Gauss**
3. Déduire le déterminant
4. Calculer les valeurs propres de A
5. Déduire la trace et vérifier le déterminant de A

Exercice 2 **(6 pts)**

Soit f une application de R dans R définie par

$$f(x) = e^{x^2} - 4x^2$$

1. Montrer qu'il y a une racine α comprise dans l'intervalle $[0 \quad 1]$.
2. Trouver les approximations de la racine (2 chiffres après la virgule) en utilisant la méthode de **Newton** pour la recherche des zéros de la fonction f avec $x_0 = \frac{1}{2}$ en 3 itérations.
3. Discuter sur la convergence des méthodes de résolutions des systèmes d'équations non linéaires.

Exercice 3 Cours **(7 pts)**

Considérons le système linéaire $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$$

Avec α, β, δ et γ sont des paramètres réels de la matrice A.

1. Donner des **conditions suffisantes** sur les coefficients de A pour avoir une convergence de la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel.
2. Ecrire les formules de Jacobi et de Gauss –Seidel au avec démonstration matricielle.
3. Donner les matrices D, U et L qui correspondent à la décomposition A = D – U – L de la méthode de Jacobi

Implémentation sous Matlab de la méthode de gauss pour un système d'ordre 3

```
clc, clear all, close all
%Nombre de variables et d'équations
n=3;
%Initialisation de la matrice du système
a=[4 -2 2; 4 -3 -2 ; 2 3 -1 ];
%Initialisation du vecteur b
b=[-2 -11 -1]';
%Formation de la matrice augmentée
A=[a b];

%Algorithme de triangularisation de Gauss
for k=1:n-1
   for i=k+1:n
      A(i,:)=A(i,:)-(A(i,k)/A(k,k))*A(k,:);
   end
end
A
 %Extraction de la solution du système d'équations
for i=n:-1:1
   s=0;
   for j=i+1:n
      s=s+A(i,j)*x(j);
   end
   x(i)=(A(i,n+1)-s)/A(i,i);
end
X=x'
```

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 & -11 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

En appliquant l'algorithme de triangularisation de gauss on trouve le système suivant

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -18 & -36 \end{array}\right)$$

Après substitution on trouve la solution suivante

X=(-1 , 1 , 2)'

Bibliographie

Bibliographie du polycopié du cours

[1]. G. Allaire et S.M. Kaber, *Algèbre linéaire numérique*, Ellipses, 2002.
[2]. C. Brezinski, *Introduction à la pratique du calcul numérique*, Dunod, Paris 1988.
[3]. J. D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists* , New York, 1992, Marcel Dekker, Inc.
[4]. F. Liret et D.Martinais, *Cours de mathématiques*, *Algèbre 1ère année*, 2003, Dunod
[5]. J. G. Dion et R. Gaudet , *Méthodes d'Analyse Numérique : de la théorie à l'application*. MODULO, 1996.
[6]. P., LASCAUX et R THÉODOR., *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art del'ingénieur. Méthodes itératives*. Dunod, 2000
[7]. FFILBET., *Analyse numérique* **-** *Algorithme et étude mathématique.* Dunod, 2009.
[8]. F .Jedrzejewski ., *Introduction aux méthodes numériques,* Deuxième edition, SpringerVerlag, 2005. France.
[9]. P. G CIARLET., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* **-** *cours et exercices corrigés*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1998.
[10]. G. Allaire et S.M. Kaber, Introduction *à Scilab. Exercices pratiques corrigés d'algèbre linéaire*, Ellipses, 2002.