جامـــــــــــــــــعة وهـــــــران 2

كلية العلـــــومالاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة

الاقتصاد الجزئي الجزء 2

تمارين تطبيقية مدعمة بملخصات المحاضرات

موجهة لطلبة السنة الأولى جدع مشترك L M D

السيدة : لكحل فريدة

الرتبة: أستاذة محاضرة أ

السـنـــــــــــة:2025 - 2026

الملخص

يعتبر مقياس الاقتصاد الجزئي من المقاييس الأساسية التي تدرس لطلبة السنة الأولى جذع مشترك نظام **(LMD)**، لما له من أهمية بالغة في إكساب الطالب المعارف الأولية المتعلقة بالمفاهيم والمصطلحات الاقتصادية، والتي تمكّنه من فهم وتحليل مختلف الظواهر الاقتصادية. كما تعتبر دراسة اقتصاديات المؤسسة الركيزة الأساسية التي يعتمد عليها في تشخيص واقع الاقتصاد الوطني وفهم آليات اشتغاله. ويهدف هذا المقياس إلى تقديم تصور شامل حول أهم النظريات الاقتصادية الجزئية، خاصة تلك المرتبطة بسلوك المنتج ويأتي هذا العمل تحت عنوان:

"**الاقتصاد الجزئي – الجزء الثاني: تمارين تطبيقية مدعّمة بملخصات المحاضرات**"، موجّها لطلبة السنة الأولى جذع مشترك، حيث تم تصميمه ليكون دعامة بيداغوجية مكملة للمحاضرات النظرية. ويعتمد هذا الجزء على تقديم مجموعة من التمارين التطبيقية المختارة بعناية، مرفقة بحلول مفصلة ومنهجية، بهدف تمكين الطلبة من الفهم الجيد للمفاهيم النظرية .

كما تم تعزيز هذه التمارين بملخصات مركّزة لأهم محاور المقياس، بما يساعد الطالب على مراجعة الدروس واستيعابها بشكل منهجي ومنظم، ويساهم في ترسيخ المعارف وتنمية مهارات التحليل الاقتصادي.

وقد تم تنظيم هذا العمل في ثلاثة فصول رئيسية:

- **الفصل الأول: نظرية الإنتاج**، ويتناول تحليل سلوك المنتج في الأجلين القصير والطويل .
- **الفصل الثاني: نظرية التكاليف والإيرادات**، ويشمل دراسة دوال التكاليف بمختلف أنواعها، إلى جانب تحليل الإيرادات وتحديد الأرباح .
- **الفصل الثالث: هياكل السوق وتوازن المؤسسة**، ويتضمن دراسة مختلف أشكال السوق، وهي: المنافسة التامة، الاحتكار التام، المنافسة الاحتكارية، واحتكار القلة .

وفي الأخير، يهدف هذا العمل إلى تزويد الطلبة بأداة تعليمية تساعدهم في الأعمال الموجهة لهذا المقياس وتمكنهم من الفهم والتحليل.

الفهرس

مقدمة 3

1–دالة الإنتاج تعريفات و .تمارين. 4

1.1–دالة الإنتاج في المدى القصير 6

2.1–دالة الإنتاج في المدى الطويل 14

3.1 دوال الإنتاج المتجانسة.....24

4.1–معادلة EULER 33

5.1– مسار توسع مؤسسة.....36

2–دالة التكاليف 47

1.2–التكاليف في المدى القصير.....48

2.2–التكاليف في المدى الطويل 60

3– توازن السوق و تعظيم الربح 68

1.3 –تحديد الأسواق.....69

2.3– المنافسة التامة 70

3.3–الاحتكار التام.....96

4.3–احتكار القلة.....104

4– المراجع 116

الفصل الأول: نظرية سلــوك المنتج

مقدمة

تهتمّ نظرية الإنتاج بدراسة وتحليل سلوك المنتج في السوق باعتباره الوحدة الإنتاجية المسؤولة عن عملية الإنتاج، وقد يتمثل هذا المنتج في شخص طبيعي أو معنوي، ويطلق عليه اسم المؤسسة أو المنشاة ،

يمكن تعريف المنشأة بأنها الوحدة الإنتاجية المثيلة في الاقتصاد للقيام بدورها الإنتاجي.تشتري المنشأة (المنتج)عوامل الإنتاج من مختلف الأسواق (العمل، رأس المال ، المواد الأولية...)، كما أن النفقات المخصصة لشراء عوامل الإنتاج تعرف بتكاليف الإنتاج. باستعمال عوامل إنتاج بكميات معينة، تنتج المؤسسة سلع وخدمات. إذا كان هدف المستهلك الحصول على أقصى منفعة تحت قيد دخله من خلال عملية الاستهلاك فان هدف المنشأة أو المنتج تحقيق أقصى ربح ممكن تحت قيد ميزانيته المتاحة من خلال عملية الإنتاج. كما افترض من اجل النموذج أن الكمية المنتجة كلها مباعة وبالتالي تعظيم الإنتاج من تعظيم الربح. و بالتالي يكون هدف المنتج تعظيم الإنتاج.

I. سلوك المنتج (المنشأة):

قبل التطرق إلى سلوك المنتج نسلط الضوء على بعض المفاهيم الأساسية نذكر منها:

تعريف الإنتاج

يعتبر الإنتاج من المفاهيم الأساسية في الاقتصاد الجزئي، إذ يشير إلى ذلك النشاط الاقتصادي الذي يتم من خلاله تحويل المدخلات(Inputs) ، المتمثلة في مختلف عناصر الإنتاج كعنصر العمل ورأس المال والمواد الأولية، إلى مخرجات (Outputs) في شكل سلع أو خدمات موجهة لإشباع حاجات الأفراد

وتحقيق أهداف المؤسسة. ويمثل الإنتاج بذلك عملية فنية وتنظيمية تهدف إلى الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة بما يضمن تحقيق الكفاءة الاقتصادية وتعظيم مستوى الناتج.

وانطلاقا من هذا التصور، تعرف دالة الإنتاج بأنها العلاقة الفنية أو التقنية التي تربط بين كميات عناصر الإنتاج المستخدمة وكمية الناتج الممكن الحصول عليها خلال فترة زمنية معينة.

يشترط سلوك المنتج العقلانية، يكون المنتج عقلاني إذا حاول تحقيق أقصى إنتاج ممكن تحت قيد كلفة معينة أو البحث إلى تحقيق أدنى كلفة ممكنة عند مستوى إنتاج معين. ومنه يتبين أن أقصى قيمة للربح هو تدنيه الكلفة و تعظيم الإنتاج. و لهذا تدرس نظرية سلوك المنتج بطريقتين:

باستعمال دوال الإنتاج.

باستعمال دوال التكاليف.

هدف المنشأة أو المنتج العقلاني هو تعظيم الربح من وراء عملية الإنتاج.

لدينا الفرضيات التالية :

نفترض أن المنتج يستعمل عاملي(عنصري) الإنتاج (L) و (k) في عملية الإنتاج حيث : L

يعبر عن اليد العاملة (العمل) و K يعبر عن الرأسمال وذلك للحصول على منتوج معين نسميه X.

نقصد بالرأسمال : مجموعة من الآلات والمواد الأولية المستعملة في عملية الإنتاج.

نقصد بالعمل : عدد ساعات العمل أو عدد العمال.

تتم دراسة تصرف المنتج بطريقتين.

1.باستعمال دوال الإنتاج (الطريقة التقنية)

2.باستعمال دوال التكاليف (الطريقة الاقتصادية)

II. دراسة دوال الإنتاج

تعبر دالة الإنتاج عن العلاقة التي تربط بين الكميات المستعملة من عاملي الإنتاج **(L)** و **(K)** ومستوى الإنتاج المحصل عليه **X** او **Q**

رياضيا تسمى هذه العلاقة بدالة الإنتاج وتكتب على الشكل التالي :

$$X = f(L, K)$$

او

$$Q = f(L, K)$$

تتم دراسة دول الإنتاج عبر فترتين زمنيتين:

الفترة القصيرة **(Short run)** و الفترة الطويلة (Long run)

دالة الإنتاج في الفترة القصيرة

تتميز الفترة القصيرة بأنها الفترة التي لا تستطيع المؤسسة خلالها زيادة الإنتاج، حيث تكون عناصر الإنتاج متغيرة خلال المدى القصير كعدد العمال ، وعناصر ثابتة لا يمكن تغييرها في هذه الفترة. أي أن وحدات العمل هي الأكثر قدرة على التغيير في المدى القصير مقارنة برأس المال ، إذن في الفترة القصيرة هناك حد للإنتاج لا يمكن تجاوزه بسبب وجود طاقة إنتاجية محدودة فلا يمكن للمؤسسة تغيير جميع عناصر الإنتاج بل المتغيرة منها فقط، وفي الغالب يعتبر عنصر العمل **L**هو العنصر الإنتاجي المتغير،

بينما يعتبر رأس المال **K** هو العنصر الإنتاجي الثابت، وبالتالي إذا أراد المنتج زيادة الإنتاج، عليه استخدام المزيد من عنصر العمل، مع استخدام حجم ثابت من عنصر رأس المال.

أما إذا درسنا الإنتاج في الفترة طويلة تصبح وسائل الإنتاج عاملا متغيرا بحيث تقوم المنشأة باستثمارات لتجديد و توسيع هذه الوسائل. لهذا السبب، فرق التحليل الاقتصادي ما بين الفترة القصيرة و الفترة الطويلة.

إذن لدراسة دوال الإنتاج في الفترة القصيرة نفرض انه يمكن حصر كل عوامل الإنتاج اللازمة لإنتاج المنتوج **Q** في عاملي إنتاج العمل **(L)** و رأس المال **(K)**. ولتكن دالة الإنتاج **Q= f(L,K)** ، حيث يمثل **L** الكمية المستعملة من عامل الإنتاج العمل و **K** الكمية المستعملة من عامل الإنتاج رأس المال ، وبما أننا في التحليل في الفترة القصيرة، هذا يعني أن عامل الإنتاج واحد يكون متغير والآخر ثابت. عادة نعتبر رأس المال **(K)** هو عامل الإنتاج الثابت ، أما العمل**(L)** فهو عامل الإنتاج المتغير أي أن حجم الإنتاج يتغير بتغير العمل حسب الدالة الإنتاج التالية:

$$Q = f(L,K_0)$$

1. إنتاجيات عوامل الإنتاج:

في حالة دالة إنتاج من الشكل: $X= f(L,K_0)$، يمكننا تعريف كل من الإنتاجية الكلية، الإنتاجية المتوسطة، الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل الإنتاج المتغير**(L)**.

أ) نفترض أن أحد عناصر الإنتاج يكون ثابت والآخر متغير:

- نفترض أن عنصر الإنتاج (L)يكون متغير وعنصر الإنتاج (K_0) يكون ثابت

في هذه الحالة تكون الكمية المنتجة من المنتج x مرتبطة بالعامل المتغير (L)وهذا ما يؤدي بنا إلى تعريف مصطلح إنتاجية عناصر الإنتاج

- يمكن استنتاج ثلاثة أنواع من الإنتاجيات :

✓ الإنتاجية الكلية للعامل المتغير (L) : (X_L)

وهي تعبر عن الكمية المنتجة من المنتوج x المحصل عليها عند استعمال كمية متغيرة من العامل (L) وكمية ثابتة من العامل (K)و يعرف أيضا بالناتج الكلي تكتب هذه العلاقة على الشكل التالي :

$$X_L = f(L, K_0)$$

الإنتاجية الكلية للعامل: (L)

كمية متغيرة — كمية ثابتة

✓ الإنتاجية المتوسطة للعامل

وهي تعبر عن حجم الإنتاج المحصل عليه عند كل وحدة مستعملة من العامل المتغير **(L)** الإنتاجية المتوسطة بالنسبة لعامل الإنتاج العمل**(L)**: هي إنتاجية وحدة واحدة من عنصر الإنتاج المتغير أو هي متوسط إنتاج وحدة واحدة.

تكتب علاقتها كالتالي $\overline{Q} = \frac{Q}{L}$ أو: $\mathbf{PML} = \frac{\mathbf{Pt}}{\mathbf{L}}$

✓ الإنتاجية الحدية للعامل(L) (Q'_L)

وهي تعبر عن التغير الذي يحدث في الإنتاجية الكلية عند استعمال وحدة إضافية من العامل المتغير (L)

وتكتب علاقتها كالتالي :

- في نقطة معينة(في حالة دالة):

$$Q'L = \frac{\delta Q}{\delta L} \quad \text{أو} \quad \mathrm{PmL} = \frac{\mathrm{dPt}}{\mathrm{dL}}$$

- **ما بين نقطتين (في حالة جدول أو منحنى)** $\mathrm{PmL} = \frac{\Delta \mathrm{Pt}}{\Delta \mathrm{L}}$:

أو

$$Q'L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

<u>التمرين 1</u>:

يبين الجدول التالي تغير الإنتاج الكلي تبعا لتغير كميات العمل المستخدمة عند مستوى معين من رأس المال .

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q	8	24	34	40	44	46	48	48	22

المطلوب :

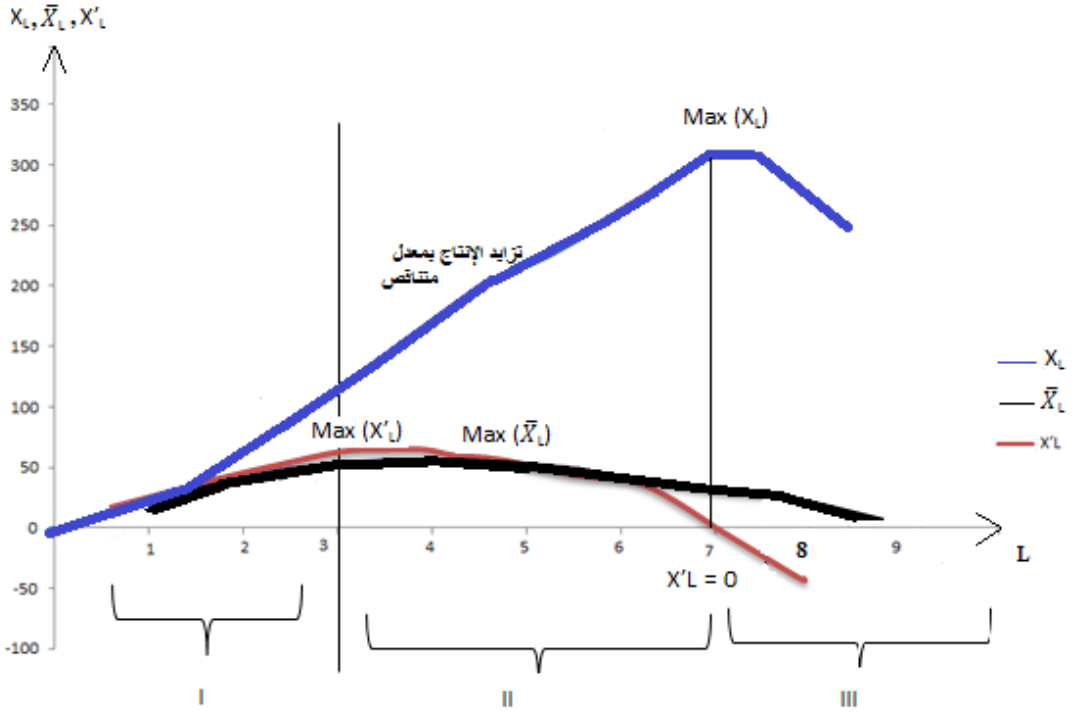
- أحسب الإنتاجية المتوسطة للعامل المتغير $(\boldsymbol{L})$
- أحسب الإنتاجية الحدية للعامل المتغير $(\boldsymbol{L})$
- عبر بيانيا على مختلف الإنتاجيات (الكلية، المتوسطة والحدية) في نفس المعلم.

حل التمرين1

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q	8	24	34	40	44	46	48	48	22
$\bar{Q}_{\mathrm{L}}$	8	12	11.33	10	8.8	7.66	6.85	6	2.4
$Q'L$	16	10	6	4	2	2	0	−26	

الإنتاجية المتوسطة : $\bar{Q}$ L=Q/L

الإنتاجية الحدية : Q'L=$\frac{\Delta Q}{\Delta L}$



نلاحظ من خلال التمثيل البياني أن منحنى الإنتاج الكلي عبارة على منحنى متزايد حيث يكون متزايد بمعدل متزايد إلى **Max PML** عند **L=2** وبعدها يبدأ بالتزايد بمعدل متناقص إلى أن يصل إلى أقصى قيمة **Max PT= 24** عند **L=8** وبعدها يبدأ بالتناقص.

- يقابل تزايد الإنتاج الكلي بمعدل متزايد تزايد في الإنتاج الحدي.

- يقابل بداية تزايد الإنتاج الكلي بمعدل متناقص أقصى قيمة للإنتاج الحدي (نقطة انعطاف) أين يبدأ تناقص الغلة.

- يقابل تزايد الإنتاج الكلي بمعدل متناقص تناقص في الإنتاج الحدي.

-يقابل أقصى قيمة للإنتاج الكلي انعدام في الإنتاج الحدي.(ذروة)

-يقابل تناقص منحنى الإنتاج الكلي تناقص الإنتاج الحدي بقيم سالبة.

ويقسم المنحنى إلى ثلاث مراحل :

المرحلة الأولى: تبدأ من نقطة الأصل إلى نقطة تقاطع منحنى الإنتاج الحدي مع منحنى الإنتاج المتوسط أين يكون الإنتاج المتوسط في أقصى قيمة له. **Max PML= PmL**، و يكون ميل راس المال سالب.

المرحلة الثانية: تبدأ من نقطة تقاطع منحنى الإنتاج الحدي مع منحنى الإنتاج المتوسط أين يكون الإنتاج المتوسط في أقصى قيمة له الى نقطة انعدام الانتاج الحدي **PmL=0** . ويكون ميلا عاملي الانتاج موجبين.

المرحلة الثالثة: لما يكون الانتاج الحدي **PmL** سالب لما يتناقص الانتاج الكلي.و تتميز المرحلة بميل عامل العمل سالب. في هذه المرحلة لا يستمر المنتج بالانتاج و لو كانت العمالة بدون مقابل.

المرحلة المفضلة اقتصاديا هي المرحلة الثانية التي تتميز بكل من الإنتاج الحدي **PmL** و الإنتاج المتوسط **PML** موجبين ولكنهما متناقصين بحيث **PmL** يقع اسفل **PML** و ميلا العمل و رأس المال موجبين. والمنتج يعمل في مجال تناقص الغلة.

تناقص الغلة : يختص بدوال الإنتاج في الفترة القصيرة ويعني زيادة الإنتاج الكلي بمعدلات متناقصة حيث يكون الإنتاج الحدي متناقص بقيم سالبة.

نلاحظ من خلال التمثيل البياني أن منحنى الإنتاج الكلي عبارة على منحنى متزايد حيث يكون متزايد بمعدل متزايد إلى **Max PML** عند **L=2** وبعدها يبدأ بالتزايد بمعدل متناقص إلى أن يصل إلى أقصى قيمة **Max PT= 24** عند **L=8** وبعدها يبدأ بالتناقص.

- يقابل تزايد الإنتاج الكلي بمعدل متزايد تزايد في الإنتاج الحدي.
- يقابل بداية تزايد الإنتاج الكلي بمعدل متناقص أقصى قيمة للإنتاج الحدي (نقطة انعطاف) اين يبدأ تناقص الغلة.

– يقابل تزايد الإنتاج الكلي بمعدل متناقص تناقص في الإنتاج الحدي.

–يقابل أقصى قيمة للإنتاج الكلي انعدام في الإنتاج الحدي.(ذروة)

–يقابل تناقص منحنى الإنتاج الكلي تناقص الإنتاج الحدي بقيم سالبة.

استنتاج العلاقات التي تجمع بين مختلف هذه الإنتاجيات

$$\text{MAX } [Q_L] \Rightarrow \begin{cases} ① \; Q'_L = 0 \\ ② \; Q''_L < 0 \end{cases} ①$$

$$\text{MAX } [\overline{Q}_L] \Rightarrow Q'_L = \overline{Q}_L ②$$

$$③ MAX\ [Q'L] \Rightarrow$$

بداية تزايد الإنتاج بمعدل متناقص أي بإنتاجية حدية متناقصة

$$MAX\ [Q'L] \Rightarrow \begin{cases} ① \; [Q'_L]' = 0 \\ ② \; [Q'_L]'' < 0 \end{cases}$$

<u>التمرين 2:</u>

ينتج المنتوج Q طبقا للدالة التالية :

$$Q = -L^3 + 10\,L^2$$

المطلوب :

1. **حدد حجم اليد العاملة(L) الذي يسمح بالحصول على أقصى إنتاجية كلية.**
2. **حدد حجم اليد العاملة(L) الذي يسمح بالحصول على أقصى إنتاجية متوسطة لعامل اليد العاملة.**
3. **أحسب قيمة Q التي تناسب بداية تزايد الإنتاج بمعدل متناقص.**

حل التمرين 2

① نستعمل $MAX\,[Q_L] \Rightarrow \begin{cases} ①[\,Q'_L] = 0 \\ ②[\,Q''_L] < 0 \end{cases}$

$$①Q'_L = -3L^2 + 20\,L = 0 \Rightarrow L(-3\,L + 20) = 0$$

$\Rightarrow L = 0$ **مرفوض**

$$L = \frac{20}{3}$$

$-6\,L + 20 < 0 \Rightarrow \quad L > \frac{20}{6}$② **(محقق)**

② نستعمل: $MAQ\,[\bar{Q}] \Rightarrow Q'_L = \bar{Q}L$

$$\Rightarrow -3L^2 + 20L = -L^2 + 10\,L \Rightarrow -2\,L^2 + 10\,L = 0$$

$$L(-2\,L + 10) = 0$$

$$\Rightarrow L = 5$$

حيث $L = 0$**:(مرفوض)**

③ **حساب قيمة**Q **نستعمل**

$$MAX\,[Q'_L] \Rightarrow \begin{cases} ①\ [\,Q'_L]' = 0 \\ ②\ [Q'_L]'' < 0 \end{cases}$$

$$-6L + 20 = 0 \Rightarrow L = \frac{20}{6}①$$

$-6 < 0$② **(محقق)**

نعرض : $L = \frac{20}{6}$ **في دالة الإنتاج**

$$Q = -(\frac{20}{6})^{3} + 10(\frac{20}{6})^{2} = 74$$

التمرين 3:

إذا كانت لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$Q = -12L^2 + 12L + 10$$

المطلوب:

استنتاج دالة الإنتاج المتوسط و دالة الإنتاج الحدي

تحديد عدد العمال الذي يبلغ عنده الإنتاج الكلي قيمته القصوى.

حل التمرين3

دالة الإنتاج المتوسط أو دالة الإنتاجية المتوسطة بالنسبة للعمل: $PML = \bar{Q}_L$

$$PML = \bar{Q}_L = \frac{-12L^2 + 12L + 10}{L} = -12L + 12 + \frac{10}{L}$$

دالة الإنتاج الحدي أو دالة الإنتاجية الحدية بالنسبة للعمل: $\mathrm{PmL} = \mathrm{Q'_L} = \mathrm{dQ/dL}$

$$\mathrm{PmL} = \mathrm{Q'_L} = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dL}} = -24\mathrm{L} + 12$$

عدد العمال الذي يبلغ عنده الإنتاج الكلي قيمته القصوى

$$MAX\left[Q'_L\right] \Rightarrow \begin{cases} ① \ [Q'_L]' = 0 \\ ② \ [Q'_L]'' < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \ -24\mathrm{L} + 12 = 0 \\ ②(-24\mathrm{L} + 12)'' < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ① \ L = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} \\ ② - 24 < 0 \end{cases}$$

الشرطين محققين

إذن عدد العمال الذي يحقق أقصى إنتاج هو 1/2 =L: يمكن اعتبار كمية العمل تقدر ب 1/2

و بالتالي يقدر أقصى إنتاج نعوض **L** في الدالة:

$$\mathbf{Q = 12\left(\frac{1}{12}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{12}\right) + 10 = 13}$$

تحليل سلوك المنتج في الفترة الطويلة:

في الفترة الطويلة، يستطيع المنتج تغيير جميع عناصر الإنتاج عكس الفترة القصيرة التي لا تسمح بذلك. ففي الفترة الطويلة لا يوجد عائق أمام تغيير أي عنصر من عناصر الإنتاج، وبالتالي فكل العناصر تكون متغيرة. وسوف نعتمد على عاملين فقط هما العمل و رأس المال، فتصبح الكمية المنتجة دالة في العمل ورأس المال معاً، وتكتب بالصيغة التالية: $\mathbf{Q = f\ (L, K)}$

التمرين 4:

لدينا الجدول التالي يبين إنتاج منتوج **Q** باستعمال عناصر الإنتاج ،العمل و رأس المال

الكمية / **المجموعة**	Q = 1200		Q = 2000		Q = 2800	
	العمل L	**رأس المال** K	**العمل** L	**رأس المال** K	**العمل** L	**رأس المال** K
A	2	18	6	20	10	24

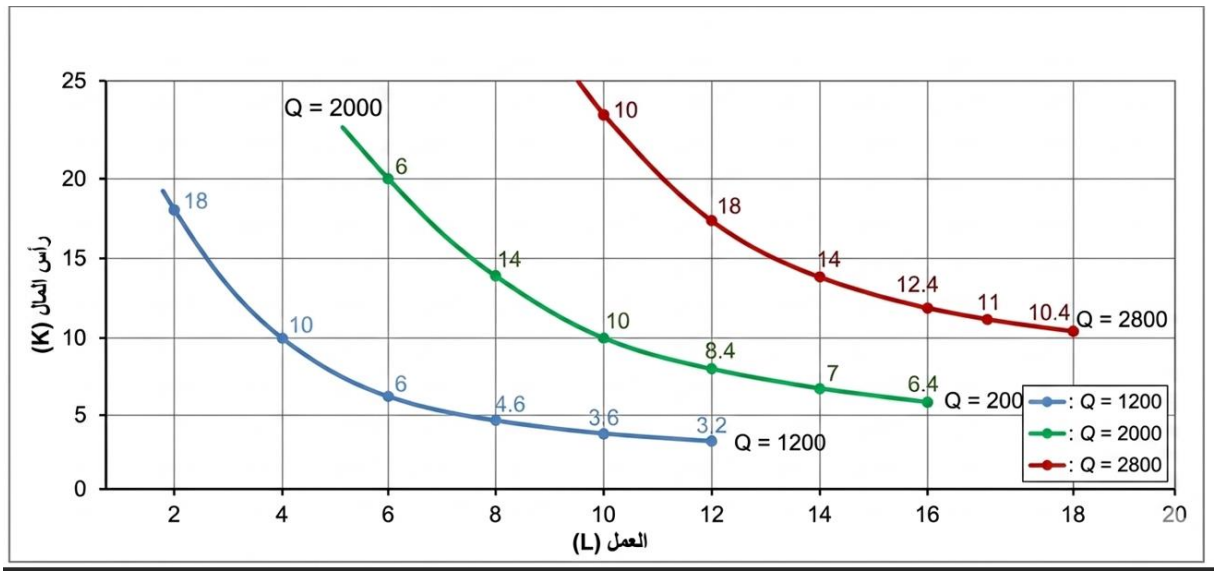
B	4	10	8	14	12	18
C	6	6	10	10	14	14
D	8	4,6	12	8,4	16	12,4
E	10	3,6	14	7	18	11
F	12	3,2	16	6,4	20	10,4

المطلوب:

1. **في نفس البيان مثل المستويات الثلاثة للإنتاج**
2. **ما هي المنحنيات المتحصل عليها؟ مع الشرح**
3. **ما هي خصائص هذه المنحنيات ؟**

حل التمرين الثاني

1 التمثيل البياني



2 . المنحنيات المحصل عليها تسمى منحنيات الناتج المتساوي

كل منحنى من منحنيات الناتج المتساوي يمثل مجموعة من التوليفات المختلفة لعوامل الإنتاج، والمتمثلة في رأس المال والعمل، والتي تؤدي إلى تحقيق نفس مستوى من الإنتاج، أي أن التحرك على طول المنحنى نفسه يعني الحفاظ على نفس كمية الإنتاج، في حين أن الانتقال يمينا أي إلى منحنى ناتج متساوي آخر يعبر عن مجموعة جديدة من التوليفات الإنتاجية التي تحقق مستوى مختلفا من الإنتاج. وعليه، فإن الانتقال نحو اليمين يرتبط بزيادة مستوى الإنتاج ومن ثم، فإن تمثيل مجموعة من منحنيات الناتج المتساوي يعرف بخريطة منحنيات الناتج المتساوي، حيث تمثل هذه الخريطة عدة منحنيات، يعبر كل واحد منها عن مستوى محدد من مستويات الإنتاج.

3 . خصائص منحنيات الناتج المتساوي :

تتميز منحنيات الناتج المتساوي بعدة خصائص أساسية، فهي سالبة الميل ومحدبة نحو الأصل، كما أنها لا يمكن أن تتقاطع فيما بينها، لا تقطع احد المحاور لأن كل منحنى يعبر عن مستوى إنتاج معين، لا تقطع احد المحاور. كذلك فإن المنحنيات الأبعد عن الأصل تمثل مستويات إنتاجية أعلى و إذا آلت نحو المبدأ ، انخفض مستوى الإنتاج

التمرين **5:**

لدينا دالة الإنتاج التالية **:** $Q = 2\sqrt{L.K}$

(حيث **Q** هو حجم الإنتاج، **L** عنصر العمل و **K** عنصر رأس المال)

إذا كانت المؤسسة تنتج مستوى إنتاج معين باستخدام التوليفة**(A)**

1. احسب مستوى الإنتاج عند هذه التوليفة؟
2. إذا قررت المؤسسة زيادة عدد العمال إلى **9** مع الحفاظ على نفس مستوى الإنتاج **Q** احسب كمية رأس المال **K** الجديدة؟ وما هي التوليفة الثانية **(B)**؟

3. أحسب المعدل الحدي للإحلال التقني بين التوليفتين أي بين النقطتين **A** و **B** وماذا تلاحظ ؟
4. أحسب قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني عند النقطة **A(4,9)**
5. فسّر اقتصادياً النتيجة المتحصل عليها في النقطة **A**

حل التمرين5

1. **نلخص أهم النقاط المتعلقة بالمعدل الحدي للإحلال التقني**

Taux Marginal de Substitution Technique **و نرمز له ب** TMST

- **تعريف المعدل الحدي للإحلال التقني**

يعتبر المعدل الحدي للإحلال التقني من المفاهيم الأساسية في نظرية الإنتاج، وهو يعبر عن مدى إمكانية إحلال عنصر إنتاجي محل عنصر آخر مع الحفاظ على نفس كمية الإنتاج.

يشير هذا المعدل إلى عدد الوحدات التي يجب التنازل عنها من عنصر إنتاجي معين مثل رأس المال **K** مقابل الحصول على وحدة إضافية واحدة من عنصر إنتاجي آخر مثل العمل**L** شرط البقاء على نفس منحنى الناتج المتساوي وهذا ما يوضح شرط البقاء على نفس مستوى من الإنتاج

- الخصائص الاقتصادية والرياضية للمعدل الحدي للإحلال التقني

- ميل منحنى الناتج المتساوي: يمثل المعدل الحدي للإحلال التقني ميل منحنى الناتج المتساوي عند نقطة معينة. وبما أن المنحنى يتجه من أعلى لأسفل نحو اليمين، فإن قيمة الميل تكون سالبة.
- القيمة المطلقة :عند تفسير المعدل اقتصاديا، يتم أخذ القيمة المطلقة للميل لتسهيل فهم النسبة بين العناصر.

- تناقص المعدل :يتميز هذا المعدل بالتناقص كلما انتقلنا من أعلى المنحنى إلى أسفله. أي كلما زادت كمية العمل المستخدمة وقلت كمية رأس المال، تقل نسبة الإنتاجية الحدية للعمل مقارنة بالإنتاجية الحدية لرأس المال. العلاقة بالإنتاجية
- :يرتبط **TMST** بالإنتاجية الحدية للعناصر، حيث يمثل نسبة الإنتاجية الحدية للعمل إلى الإنتاجية الحدية لرأس المال
- الصيغة الرياضية

يحسب المعدل الحدي للإحلال التقني بطريقتين

1. بين نقطتين (التغير): حالة مستويات

وفق العلاقة التالية:

$$TMST_{L,K} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{K_2 - K_1}{L_2 - L_1}$$

عند نقطة: حالة دالة معرفة مستمرة

$$\mathrm{TMST_{L,K}} = -\frac{\mathrm{dk}}{\mathrm{dL}}$$

أولاً: الإحلال بين نقطتين (المعدل المتوسط)

1. **حساب الإنتاج عند النقطة A:**

$$Q = 2\sqrt{4 \times 9} = 2\sqrt{36} = 2 \times 6 = 12$$

2. **إيجاد التوليفة B عند نفس مستوى الإنتاج ($Q = 12$):**

$$12 = 2\sqrt{9 \times K} \implies 6 = \sqrt{9K}$$

بتربيع الطرفين: $36 = 9K \implies K = 4$.
إذن التوليفة الجديدة هي $B(9, 4)$.

3. **حساب $TMST_{LK}$ بين A و B:**
القانون: $TMST_{LK} = -\frac{\Delta K}{\Delta L}$

$$TMST_{LK} = -\frac{K_B - K_A}{L_B - L_A} = -\frac{4 - 9}{9 - 4} = -\frac{-5}{5} = 1$$

ثانياً: الإحلال في نقطة (المعدل الحدي الدقيق)

1. **العبارة الرياضية ($TMST$ في نقطة):**
قانون النقطة يعتمد على المشتقات (الإنتاجية الحدية): $TMST_{LK} = \frac{PmL}{PmK}$

- $PmL = \frac{\partial Q}{\partial L} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{LK}} \cdot K = \frac{K}{\sqrt{LK}} = \sqrt{\frac{K}{L}}$
- $PmK = \frac{\partial Q}{\partial K} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{LK}} \cdot L = \frac{L}{\sqrt{LK}} = \sqrt{\frac{L}{K}}$

إذن: $TMST_{LK} = \frac{\sqrt{K/L}}{\sqrt{L/K}} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} \cdot \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \frac{K}{L}$

2. **الحساب عند النقطة $A(4, 9)$:**

$$TMST_{LK} = \frac{9}{4} = 2.25$$

التفسير الاقتصادي :عند النقطة **A** ، إذا أرادت المؤسسة زيادة العمل بمقدار وحدة واحدة يجب عليها التخلي عن **2.25** وحدة من رأس المال للحفاظ على نفس مستوى الإنتاج اي 12 وحدة.

ملاحظة : الفرق بين النتيجة في القوس (1) والنتيجة في النقطة (2.25)؛ فالمعدل في نقطة هو ميل المماس للمنحنى عند تلك النقطة، بينما في القوس هو متوسط الميل بين نقطتين

التمرين 6:

لنفترض أن لدينا دالة إنتاج معبر عنها بالعلاقة التالية :

$$Q = 2L^{0,5}K^{0,5}$$

حيث **Q** هو حجم الإنتاج، **L** هو عنصر العمل، و **K** هو عنصر رأس المال

إذا كانت المؤسسة تنتج كمية معينة باستخدام التوليفة **A(L=4, K=16)** ، ثم انتقلت إلى التوليفة **B(L=16, K=4)** على نفس منحنى الناتج المتساوي.

المطلوب :

1. برهن عن العلاقة الموجودة بين المعدل الحدي للإحلال التقني و الإنتاجيات الحدية لعناصر الإنتاج
2. أحسب المعدل الحدي للإحلال التقني بين النقطتين **A** و **B**
3. أحسب المعدل الحدي للإحلال التقني عند النقطة **A** حيث **(L=4, K=16)**

حل التمرين 6

1. البرهان عن العلاقة الموجودة بين المعدل الحدي للإحلال التقني و الإنتاجيات الحدية لعناصر الإنتاج:

ستعمل البرهان التالي : لدينا

- $dQ = \frac{\delta Q}{\delta L}\, dL + \frac{\delta Q}{\delta K}\, dK$

بما أن قيمة الإنتاج **Q** تكون ثابتة على طول منحنى الناتج المتساوي فإن:

$$dQ = 0$$

أي :

$$\frac{\delta Q}{\delta L}\, dL + \frac{\delta Q}{\delta K}\, dK = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\delta Q}{\delta l}}{\frac{\delta Q}{\delta k}} = -\frac{dk}{dl} \Rightarrow \frac{Q'_L}{Q'_k} = -\frac{dk}{dL} = \mathrm{TMST_{L,K}}$$

حيث:

$$Q'L = \frac{\delta Q}{\delta L}$$

$$Q'K = \frac{\delta Q}{\delta K}$$

أي في أي نقطة من نقاط منحنى الناتج المتساوي المعدل الحدي للإحلال التقني (TMST) **يساوي نسبة إنتاجيات عناصر الإنتاج** L **و** K.

2.المعدل الحدي للإحلال التقني بين النقطتين **A** و **B**

$$\mathrm{TMST_{L,K}} = -\frac{\Delta \mathrm{K}}{\Delta \mathrm{L}} = -\frac{\mathrm{K_2} - \mathrm{K_1}}{\mathrm{L_2} - \mathrm{L_1}}$$

$$\mathrm{TMST_{L,K}} = \left|-\frac{\Delta \mathrm{K}}{\Delta \mathrm{L}}\right| = \left|-\frac{\mathrm{K_2} - \mathrm{K_1}}{\mathrm{L_2} - \mathrm{L_1}}\right|$$

$$\mathrm{TMST_{L,K}} = \left|-\frac{4-16}{16-4}\right| = |-1| = 1$$

$$\mathrm{TMST_{L,K}} = 1$$

التفسير: لزيادة العمل بوحدة واحدة في هذا المجال، يجب التنازل عن وحدة واحدة من رأس المال للحفاظ على نفس مستوى الإنتاج

3. حساب المعدل الحدي للإحلال التقني عند النقطة A(4,16)

$$\mathrm{TMST_{L,K}} = -\frac{\mathrm{dk}}{\mathrm{dL}} = \frac{Q'_L}{Q'_k}$$

دالة الإنتاج: $Q = 2L^{0,5}K^{0,5}$

$$\frac{Q'_L}{Q'_k} = \frac{2.0{,}5\ L^{-0,5}\ K^{0,5}}{2L^{0,5}\ 0{,}5K^{-0,5}} = \frac{K^{0,5}K^{0,5}}{L^{0,5}L^{0,5}} = \frac{K}{L}$$

$$\mathrm{TMST_{L,K}} = \frac{16}{4} = 4$$

التفسير:لزيادة العمل بوحدة واحدة، على المنتج التخلي عن 4 وحدات من رأس المال للحفاظ على نفس مستوى من الإنتاج

التمرين 7:

لدينا دوال الإنتاج التالية

$Q = L + KQ = \sqrt{L} + \sqrt{K}$ $\quad , Q = (L + K)^2$ $\quad , Q = 2K^{3\,l2}L^{2l3}$

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{2}\mathrm{K}^{1\,l2}\mathrm{L}^{1l4}$$

المطلوب

1. هل هذه الدوال متجانسة؟
2. حدد غلة الحجم أو مردود لهده الدوال؟
3. هل يمكن استنتاج مردود الحجم مباشرة من معادلة هذه الدوال؟ علل ذلك.

ملاحظات

نقول ان الدالة $Q=f(K,L)$ متجانسة إذا حققت الشرط التالي:

$$f(tK, tL) = t^{\alpha}f(K, L)$$

يمثل α درجة تجانس الدالة ويدل على مردود الحجم أو غلة الحجم وتعبر عن مرونة الإنتاج بالنسبة لعناصر الإنتاج لأنها توضح مدى تأثير تغيير عناصر الإنتاج على الإنتاج الكلي و يمثل المقدار t نسبة الزيادة في عوامل الانتاج

-إذا كان $\alpha < 1$ فإن مردود الحجم يكون متناقصا، فإذا تمت زيادة عناصر الإنتاج بكمية معينة t فإن حجم الإنتاج لا يزيد إلا بنسبة أقل من t .

-إذا كان $\alpha = 1$ نقول أن مردود الحجم ثابت بمعنى أنه إذا تم ضرب عناصر الإنتاج في قيمة t فإن حجم الإنتاج يتزايد كذلك بنفس المقدار t.

-إذا كان $\alpha > 1$ فإن حجم الإنتاج يكون متزايدا. إذا تمت زيادة عناصر الإنتاج بالمقدار t فإن حجم الإنتاج يزيد بمقدار أكبر من t.

وأيضا تكون الدوال متجانسة إذا كانت من نوع Cobb-Douglas وشكل

$$Q = A\,K^{\alpha}L^{\beta}$$

إذا أردنا أن نبرهن أن دالة *Cobb-Douglas* دالة متجانسة نكتب:

$$(tK)^{\alpha}\ (tL)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}K^{\alpha}\,L^{\beta}$$

وتكون درجة التجانس هي: $\alpha + \beta$

- **إذا كان** $\alpha + \beta < 1$ **يكون مردود الحجم متناقصا.**

- **إذا كان** $\alpha + \beta = 1$ **يكون مردود الحجم ثابتا.**

- **إذا كان** $\alpha + \beta > 1$ **يكون مردود الحجم متزايدا.**

تعبر α و β **عن المرونات النسبية للإنتاج بالنسبة لعناصر الإنتاج**

بحيث مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال $EQ/_K$ **و مرونة الانتاج بالنسبة للعمل** $EQ/_L$

لتكن دالة الإنتاج التالية: $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$

ومنه تكون المرونات النسبية للإنتاج بالنسبة لعناصر الإنتاج :

مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال $EQ/_K = \alpha\, K^{\alpha-1}\, L^{\beta}\, \frac{K}{K^{\alpha}L^{\beta}} = \alpha$

و مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل $EQ/_L = \beta K^{\alpha}\, L^{\beta-1}\, \frac{L}{K^{\alpha}L^{\beta}} = \beta$

حل التمرين 7

- $\boldsymbol{Q = L + K}$

هل $(tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$ ؟

$$f(tK,tL) = tK + tL = t(K + L)$$

نستنتج إذا أن **α=1** . تكون درجة تجانس هذه الدالة هي **1**. نلاحظ أننا عندما ضربنا عناصر الإنتاج **K** و **L** في **t** فإن الإنتاج الكلي زاد بنفس المقدار t . يدل هذا على أن مردود الحجم ثابت.

- $\boldsymbol{Q = f(K, L) = \sqrt{L} + \sqrt{K}}$

هل $(tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$ ؟

$$f(tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$$

$$f(tK, tL) = \sqrt{t}\sqrt{K} + \sqrt{t}\sqrt{L} = \sqrt{t}\,(\sqrt{L} + \sqrt{K})$$

أي : $(tK, tL) = t^{1/2} f(K, L)$

الدالة متجانسة و درجة التجانس α=1/2 اصغر من 1، اذن غلة الحجم أو مردود الحجم متناقص

- $\mathbf{Q\ f(K,L)\ = (L + K)^2}$

$$f(\ tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$$

$$f(\ tK, tL) = (\mathrm{tL} + \mathrm{tK})^{\mathbf{2}} \ = (\mathbf{t}(\mathrm{L} + \mathrm{K}))^{\mathbf{2}}$$

$$f(\ tK, tL) = \ (\mathrm{t})^{\mathbf{2}}\ (\mathrm{L} + \mathrm{K})^2$$

اذن الدالة متجانسة و درجة التجانس $\mathbf{\alpha=2}$ ومردود الحجم متزايد لأن درجة التجانس أكبر من 1.

- $\boldsymbol{Q = \ 2K^{3\ l2} L^{2l3}}$

$$f(\ tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$$

$$f(\ tK, tL) = 2(\ tK)^{3\ l2}\ (\ tL)^{2l3} \ = \ 2\ t^{\frac{13}{6}}\ K^{3\ l2} L^{2l3}$$

$$f(\ tK, tL) = \ = \ t^{\frac{13}{6}}\ \ 2\ K^{3\ l2} L^{2l3}$$

اذن الدالة متجانسة و درجة التجانس $\mathbf{\alpha=\frac{13}{6}}$ ومردود الحجم متزايد لأن درجة التجانس أكبر من 1.

- $\boldsymbol{Q = \ \frac{1}{2} K^{1\ l2} L^{1l4}}$

$$f(\ tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$$

$$f(\ tK, tL) = \frac{1}{2}(\ tK)^{1\ l2}\ (\ tL)^{1l4} \ = \frac{1}{2}\ t^{3/4}\ K^{1\ l2} L^{1l4}$$

الدالة متجانسة ودرجة التجانس 3/4 أصغر من 1 اذن مردود الحجم متناقص

كل الدوال من نوع دالة **Cobb-Douglas** هي متجانسة و يمكننا أن نستنتج مباشرة درجة التجانس و مردود الحجم و ذلك بجمع المعاملين α و β.

3 .إذن الدوال هي:

$$Q = f(K,L) = 2K^{3\,l2}L^{2l3} \longrightarrow \alpha + \beta = \frac{13}{6} > 1$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{f(K,L)} = \frac{1}{2}\mathrm{K}^{1\,l2}\mathrm{L}^{1l4} \longrightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{4} < 1$$

التمرين 8:

لدينا الدالة التالية : $\mathbf{Q = f\,(L,K) = (2L + K)^2}$

1. أثبت أن هذه الدالة تمثل دالة متجانسة .
2. حدّد غلة الحجم الخاصة بهذه الدالة .
3. في حالة **t=2**، احسب نسبة الزيادة في المنتوج **Q**

حل التمرين 8

$$\mathrm{Q = f\,(L,K) = (2L + K)^2}$$

1. الدالة متجانسة إذا توفر الشرط :

$$f(\,tK,tL) = t^{\alpha} f(K,L)$$

$$f(\,tK,tL) = (2\mathrm{tL} + \mathrm{tK})^2 = (t(2\mathrm{L} + \mathrm{K}))^2$$

$$f(\,tK,tL) = t^2(2L + K)^2$$

$$f(\,tK,tL) = t^2 f(K,L)$$

وعليه فإن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية.

2. **تحديد غلة الحجم** :بما أن درجة التجانس $\boldsymbol{\alpha}$=2 اكبر من 1 فان غلة الحجم متزايدة

3. في حالة t=2، نسبة الزيادة في المنتوج Q

$$f(\,tK,tL) = t^2 f(K,L) = 2^2 f(K,L)$$

$$Q' = t^2Q = 2^2Q$$

$$Q' = 2^2Q = 4Q$$

فهذا يعني أن المنتوج الجديد أصبح يساوي 4 مرات المنتوج الأصلي.

نسبة الزيادة في المنتوج هي:4Q− Q=3Q ، نجد التغير النسبي في المنتوج او في الكمية المنتجة كالتالي: $\frac{\mathbf{Q'-Q}}{\mathbf{Q}} = \frac{4Q-Q}{Q} \times 100 \times 100 = 3 \times 100$

نسبة الزيادة في الإنتاج = 300%

التمرين : 9

1. تحديد طبيعة غلة الحجم إذا كانت دوال الإنتاج على الشكل التالي:

- $\mathbf{Q=L^3K^2}$ ، $\mathbf{Q=L^2+K^2}$

2. ما هي نسبة التغير في الإنتاج إذا زادت عناصر الإنتاج بنسبة 10**.%** ؟

حل التمرين 9

- $Q=f(K,L)= L^3K^2$

الدالة متجانسة لأنها من نوع COBB-DOUGLAS و يمكننا أن نستنتج مباشرة درجة التجانس و مردود الحجم و ذلك بجمع المعاملين α و β.

$\alpha + \beta = 2 + 3 = 5 > 1$ **فان غلة الحجم متزايدة**

باستعمال طريقة التجانس:

$$f(tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$$

$$f(tK, tL) = (tK)^2 . (tL)^3 = t^2 K^2 t^3 L^3 = t^{2+3} L3K2$$

$$f(tK, tL) = t^5 f(K, L)$$

2. نسبة التغير في الإنتاج إذا زادت عناصر الإنتاج ب 10%

$$L_2 = L_1 + 0{,}1L_1 = 1{,}1L_1$$

$$K_2 = K_1 + 0{,}1K_1 = 1{,}1K_1$$

$$Q_2 = (1{,}1K)^2 . (1{,}1L)^3 = 1{,}1^5 Q_1 = 1{,}61\ Q_1$$

إذا زادت عناصر الإنتاج بـ 10 **%** فهذا يعني: **t= 1,1** ونسبة الزيادة في الإنتاج هي

$(1.61-1)\times 100 = 61.\ \%$

- $\mathbf{Q = f(K, L) = L^2 + K^2}$

$$f(tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$$

$$f(tK, tL) = (t\,L)^2 + (tK)^2 = (t^2\ L^2) + (t^2 K^2)$$

$$f(tK, tL) = t^2 (L^2 + K^2) \quad , \quad f(tK, tL) = t^2 f(K, L)$$

بما أن درجة التجانس α=2 اكبر من 1 فان غلة الحجم متزايدة

. نسبة التغير في الإنتاج إذا زادت عناصر الإنتاج ب 10%

$$f(tK, tL) = t^2 (L^2 + K^2)$$

$$L_2 = L_1 + 0{,}1L_1 = 1{,}1L_1$$

$$K_2 = K_1 + 0{,}1K_1 = 1{,}1K_1$$

$$Q_2 = (1{,}1K)^2 + . (1{,}1L)^2 = 1{,}1^2 Q_1 = 1{,}21\ Q_1$$

إذا زادت عناصر الإنتاج بـ 10 % فهذا يعني: t= 1,1 ونسبة الزيادة في الإنتاج هي :

$$1{,}21\ \ Q_1 - Q_1 = 0{,}21 = 21\%$$

تعظيم الإنتاج:

هدف المنتج هو البحث عن النقطة التي تمكنه من الإنتاج بأقل كلفة؛ فهو يتمتع بميزانية يجب أن ينفقها من أجل الحصول على عناصر الإنتاج ويجب ألا تتعدى ميزانيته كلفة عناصر الإنتاج **(K,L)**

فالمنتج سيختار التركيبة **(K,L)** التي تكلفه أقل استنادا إلى تكاليف كل من العمل**L** و رأس المال**K** .

فإذا رمزنا إلى كلفة أو سعر الوحدة من العمل $\boldsymbol{P_L}$ و رمزنا إلى كلفة أو سعر الوحدة من رأس المال بالرمز $\boldsymbol{P_K}$ فإن الكلفة الإجمالية التي سيدفعها المنتج باستعماله **L**وحدة من العمل و **K**وحدة من رأس المال هي: $\mathrm{CT} = \mathrm{KP_K} + \mathrm{LP_L}$

التمرين 10 :

لدينا الجدول التالي يوضح ما يلي:

	A	B	C	D	E	F	G	H
CT	360	200	150	130	120	125	150	255
Q	24	24	24	24	24	24	24	24
L	24	12	8	6	4	3	2	1
K	1	2	3	4	6	8	12	24

مع العلم ان : **Q** يمثل حجم الانتاج لكل مستوى ، **CT** تمثل التكلفة الكلية اللازمة لكل مستوى من الانتاج، **L** هو عنصر الانتاج العمل و **K** هو عنصر الانتاج رأس المال ولدينا اسعار عوامل الانتاج كالتالي:

P_K يساوي 10 وحدات نقدية

P_L **يساوي** 15 **وحدات نقدية**

المطلوب:

1. استنتج من خلال الجدول اعلاه التركيبة او التوليفة التي يفضلها المنتج للحصول على هذا المستوى من الانتاج الذي يقدر ب **24** وحدة
2. استنتج من الجدول دالة الانتاج بحيث تكون بالشكل التالي: **Q= f(L,K)** وتعبر عن مستوى الانتاج يقدر ب **24** وحدة

حل التمرين10

1. المنتج يختارالتركيبة او التوليفة من **L** و **k** التي تحقق منتوج يقدر ب **24** وحدة انتاجية بأقل كلفة ممكنة التي تقدر ب **120**و حدة نقدية، اذن هده التوليفة هي النقطة **E(4,6)**
2. من خلال الجدول يمكن كتابة دالة الانتاج التي تعبر عن العلاقة بين عاملي الانتاج العمل وراس المال كالتالي : $Q=f(L,K) = L.\ K = 24$

التمرين11

لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$Q = f(K,L) = K^{1/4}\, L^{3/4}$$

1-حدد الإنتاجية الحدية العينية لعنصري الإنتاج

2-إذا كان سعري عنصري الإنتاج هما على التوالي $P_K = 1$ و $P_L = 2$ و كان لدى المنتج ميزانية تساوي 200 وحدة نقدية، ما هي الكميات التي سيستعملها من عناصر الإنتاج لضمان الإنتاج الأعظم.

3-إذا ارتفع سعر رأس المال إلى مستوى وحدتين نقديتين، أحسب الإنتاج الأعظم في هذه الحالة

حل التمرين 10

$$Q'_L = \frac{3}{4}K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{1}{4}}$$

$$Q'_K = \frac{1}{4}K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}}$$

2-للبحث عن الكميات التي سيستعملها المنتج لضمان الإنتاج الأعظم يجب تعظيم الإنتاج؛ ويكون الإنتاج أعظم إذا تحقق شرط:

$$\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{1}$$

ومنه

$$L = \frac{3}{2}K$$

نعوض في معادلة التكلفة المتساوية

$$200 = K + 2L = K + 2\times\frac{3}{2}K = 4K$$

ونجد:

$$\begin{cases} K = 50 \\ L = 75 \end{cases}$$

2-عندما يرتفع سعر رأس المال إلى وحدتين نقديتين فإن شرط تعظيم النتاج يصبح: $L = 3K$

وعندما نعوض في معادلة خط التكاليف يكون لدينا:

$$200 = 8K \Rightarrow \begin{cases} K = 25 \\ L = 75 \end{cases}$$

ويكون الإنتاج الأعظم يساوي:

$$Q = 25^{\frac{1}{4}} \times 75^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} \times 25 = 32{,}90$$

التمرين11

لتكن دالة الإنتاج المعتمدة من طرف مؤسسة معينة كما يلي: $\boldsymbol{Q = 2\,K^{2/3}L^{5/2}}$

مع العلم أن أسعار عنصري الإنتاج هو على التوالي: **PK=6** و **PL=4**

المطلوب: ما هو مستوى الإنتاج الممكن تحقيقه إذا كانت كلفة الإنتاج هي 500 وحدة نقدية

حل التمرين 11:

$$Q = 2K^{2/3}L^{5/2}\,, \quad \text{PL=4,} \quad \text{PK =6}\,, \quad \text{CT=500}$$

باستعمال شرط التوازن

$$\mathrm{TMST_{L,K}} = -\frac{\mathrm{dk}}{\mathrm{dL}} = \frac{Q'_L}{Q'_k} = \frac{P_L}{P_k}$$

من :

$$\frac{Q'_L}{Q'_k} = \frac{P_L}{P_k} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{5\,K^{\frac{2}{3}}\,L^{\frac{3}{2}}}{\frac{4}{3}K^{-1/3}L^{5/2}} = \frac{2}{3} \;\rightarrow 8L = 45K \rightarrow K = \frac{8L}{45} = 0{,}17L \;\rightarrow (1)$$

$CT= 6K+4L=500$

نعوض $(\mathbf{1})$ في $\mathbf{CT}$ ،

$$6CT = 6K + 4L = 500 \rightarrow 6(0{,}17L) + 4L = 500$$

$$\rightarrow \begin{cases} L = 99 \\ K = 17 \end{cases}$$

مستوى الإنتاج الممكن تحقيقه إذا كانت كلفة الإنتاج 500 ون هو:

وحدة إنتاجية $Q = 2(17^{2/3})(99^{5/2}) = 1289488$

التمرين 12

لدينا دالة الإنتاج التالية

$$Q = f(K,L) = K^2 + K.L + L^2$$

المطلوب:

1 . اوجد الإنتاجيات الحدية لعوامل الإنتاج؟

2 . اكتب معادلة Euler لهده الدالة ؟

3. مساهمة كل عنصر في زيادة الإنتاج الكلي اذا ثم استعمال10 وحدات من العمل و5 وحدات من رأس المال؟

- **حل التمرين 12:**

1. الإنتاجية الحدية لعنصر الإنتاج العمل :

$$\boldsymbol{Q'_L = K + 2L}$$

- الإنتاجية الحدية لعنصر الإنتاج رأس المال : $Q'_K = 2K + L$

2 . كتابة معادلة **Euler** كالتالي:

$$= K.(2K + L) + L.(K + 2L) = k.(K^2 + KL + L^2)$$

$$2K^2 + KL + LK + 2L^2 = 2(K^2 + KL + L^2)$$

ومنه α **2** = يعبر هذا المعامل عن درجة تجانس الدالة ويعني أن حجم الإنتاج الكلي تضاعف نظرا لزيادة الإنتاجية الحدية لكل من **K** و **L**

3 . يمكن حساب مساهمة كل عنصر في زيادة الإنتاج الكلي باستعمال 10 وحدات من العمل و5 وحدات من رأس المال.

$$5\times[(2\times5)+10]+10[5+(2\times10)]=2[5^2+(5\times10)+10^2]$$

100+250=350

بمعنى أن رأس المال ساهم بـ 100 وحدة والعمل بـ 250 وحدة في الإنتاج الإجمالي الذي بلغ حجمه 350 وحدة.إذا يعتبر العمل أكثر إنتاجية من رأس المال وقد يكون هذا مفيدا بالنسبة لصاحب المشروع إذ ما أراد زيادة عناصر الإنتاج أو تعويض أحدها بالآخر.

التمرين 13.

كانت لدينا دالة الإنتاج:

$$Q = f(K,L) = K.L$$

أسعار رأس المال والعمل على التوالي 5 و 3وحدات نقدية ، و ميزانية تقدر ب60 وحدة نقدية

المطلوب :

1. ما هو شرط تعظيم الإنتاج ؟ اوجد نقطة توازن هذا المنتج؟
2. رفع المنتج من تكاليفه الكلية و أصبحت تقدر ب 90 وحدة نقدية مع بقاء أسعار عوامل الإنتاج ثابتة ، ما هو المستوى الجديد للإنتاج في هذه الحالة؟
3. حدد معادلة مسار توسع المؤسسة .

حل التمرين 13

1. شرط تعظيم الإنتاج و إيجاد نقطة توازن هذا المنتج

$$\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

فإذا كانت المنتج يتمتع بميزانية تساوي 60 وحدة نقدية فإن التكاليف تساوي:

$$60 = 5K + 3L \quad (2)$$

من المعادلتين يتضح أن المنتج يحقق التوازن التالي:

$$\begin{cases} E_1 = (10,6) \\ Q_1 = 60 \end{cases}$$

2. زيادة التكاليف الكلية وأن هذه الأخيرة هي 90 وحدة نقدية؛ مع بقاء أسعار عناصر الإنتاج ثابتة. يتعين إذا التوفيق بين شرط التوازن في المعادلة (1) و دالة التكاليف الجديدة:

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{3}{5} \\ 90 = 5K + 3L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_2(15,9) \\ Q_2 = 135 \end{cases}$$

فالمنتج يستعمل في هذه المرة 15 وحدة من العمل مع 9 وحدات من رأس المال ويحقق إنتاجا يساوي 135 وحدة.

وينتقل هكذا من نقطة توازن إلى نقطة توازن أخرى على منحنى مسار توسع المؤسسة.

فإن كل النقاط التي تستوفي الشرط الموضح بعلاقة التوازن $\mathbf{L}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\mathbf{K}$ هي نقاط $\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{L}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\rightarrow$ تعظيم الإنتاج شريطة تحقيق معادلة التكاليف. يكون مسار توسع المؤسسة هو المنحنى الذي يمر بكل هذه النقاط ومعادلته :

$$K = f(L) = \frac{3}{5}L$$

للتذكير :مسار توسع المؤسسة

توسع المؤسسة يشترط تحقيق التوازن في حجم إنتاج معين ثم بلوغ حجم إنتاج أكبر وتوسع المشروع. فلا يعقل أن تفكر مؤسسة في التوسع وزيادة حجم إنتاجها وهي لم تحقق بعد التوازن في حجمها الحالي.عندما نريد زيادة حجم الإنتاج فإننا نزيد من استعمال عناصر الإنتاج. نفترض أن تكاليف عناصرالإنتاج أي أسعارها ثابتةوأن التكاليف الكلية هي التي تتغير تبعا لتغير الكمية المستعملة من عناصر الإنتاج. سنحصل على مجموعة من خطوط التكاليف تكون متوازية لأن أسعار عناصر الإنتاج لم تتغير (أي أن الميل يبقى ثابتا). تتقاطع خطوط التكاليف بالضرورة مع مجموعة منحنيات الناتج المتساوي لتحدد مجموعة من نقاط لتوازن. العملية شبيهة بما رأيناه عند المستهلك عندما كانت تبقى أسعار المواد المستهلكة ثابتة ويتغير الدخل. المنحنى الذي يمر بنقاط التوازن المختلفة يسمى منحنى مسار توسع المؤسسة وهو شبيه بمنحنى استهلاك–الدخل عند المستهلك.وتعبر دالة مسار توسع المؤسسة عن كل النقاط التي تستوفي شرط تعظيم الإنتاج.

حل التمرين 14:

لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$Q = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

1-حدد الإنتاجية الحدية العينية لعنصري الإنتاج ***K*** و ***L***

2-إذا كان سعري عنصري الإنتاج هما على التوالي $P_K = 1$ و $P_L = 2$، و كان لدى المنتج ميزانية تساوي 200 وحدة نقدية، ما هي الكميات التي سيستعملها من عناصر الإنتاج لضمان الإنتاج الأعظم.

3-إذا ارتفع سعر رأس المال إلى مستوى وحدتين نقديتين، أحسب الإنتاج الأعظم في هذه الحالة

حل التمرين 14 :

1-نرمز للإنتاجية الحدية للعمل بـ Q'_L وللإنتاجية الحدية لرأس المال بـ Q'_K، ومنه:

$$Q'_L = \frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{1}{4}}$$

$$Q'_K = \frac{1}{4} K^{-\frac{3}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

2-للبحث عن الكميات التي سيستعملها المنتج لضمان الإنتاج الأعظم يجب تعظيم الإنتاج؛

ويكون الإنتاج أعظم إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4} K^{-\frac{3}{4}} L^{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{1}$$

وبالتالي: $K = \frac{2L}{3}$ **وهي علاقة التوازن (1)**

نعوض**(1)** في معادلة خط الكلفة المتساوية :

$$CT = KP_K + LP_L$$

$$\rightarrow 200 = \frac{2L}{3} + 2L \qquad \rightarrow 200 = \frac{8L}{3} \qquad 200 = K + 2L$$

L=75,K=50

2.-عندما يرتفع سعر رأس المال إلى وحدتين نقديتين فإن شرط تعظيم الإنتاج يصبح: **K= L/3**

وعندما نعوض في معادلة خط التكاليف يكون لدينا:

$$200 = \frac{8\mathrm{L}}{3} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{K} = 25 \\ \mathrm{L} = 75 \end{cases}$$

ويكون الإنتاج الأعظم يساوي: 32,90 وحدة انتاجية

$$Q = 25^{\frac{1}{4}} \times 75^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} \times 25 = 32{,}90$$

التمرين 15

لدينا دالة الإنتاج: $\mathrm{Q} = 2\mathrm{KL}$

1-إذا كان سعر رأس المال هو 10 وحدات نقدية وكان سعر العمل هو 20 وحدة نقدية وكان المنتج يتمتع بميزانية قدرها 200 وحدة نقدية، أحسب الإنتاج الأعظم الذي سيحققه هذا المنتج.

2-إذا ارتفع سعر رأس المال إلى 20 وحدة نقدية ما هو مستوى الإنتاج الذي سيحققه المنتج في هذه الحالة.

3-إذا لم يرض المنتج بهذا الحل وأراد ألا يتراجع عن مستوى إنتاجه الأصلي، ما هي الكلفة اللازم تحملها من أجل تحقيق هذا الهدف، هل يبقى المنتج في نفس نقطة التوازن.

4-أحسب المعدل الحدي للإحلال التقني بين نقطتي التوازن التي تمكنان من المستوى الأصلي للإنتاج.

5-لنفترض أن سعري رأس المال والعمل هما دائما على التوالي 10 و 20 وحدة نقدية وأن المنتج يزيد من ميزانيته من 200 إلى 400 ثم إلى 600 وحدة نقدية. حدد مسار توسع المؤسسة.

حل التمرين15

1- حساب الإنتاج الأعظم الذي سيحققه هذا المنتج: **باستعمال شرط التوازن**

$$\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{20}{10} = 2$$

ومنه: K=2L

نعوض هذه القيمة في معادلة التكاليف نجد:

$$200 = 10K + 20L = 20K \Rightarrow \begin{cases} K = 10 \\ L = 5 \end{cases}$$

و بالتالي يكون الإنتاج الأعظم. $\mathbf{Q = 2KL = 2(10)(.5) = 100}$

2-عندما يتغير سعر رأس المال ويصبح يساوي20 وحدة نقدية، يتغير شرط التعظيم الانتاج

ويصبح لدينا: $\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{20}} = \mathbf{1}$ و منه **L=k**

وبالتعويض في خط التكاليف: **CT= 20K+20L =200**

K=L= 200 /40 =5

الإنتاج الذي يتمكن المنتج من تحقيقه هو 50 وحدة فقط نظرا لارتفاع سعر رأس المال الشيء الذي يحد من استعمال هذا العنصر ويؤثر سلبا على الإنتاج.

3-إذا لم يرض المنتج بهذا الانخفاض في الإنتاج وأراد أن يبقى في مستوى إنتاجه الأول والذي يساوي100 وحدة لابد عليه من زيادة استعمال عناصر الإنتاج رغم ارتفاع سعر رأس المال

رياضيا يجب عليه أن يحقق كمية تساوي 50 وحدة تحت قيد الأسعار الجديدة لعناصر الإنتاج وهي 20 وحدة نقدية لكل من العمل ورأس المال.

$$\mathbf{Q= 2K.L=100,\ K=L}$$

$$\mathbf{100=2\ K^2}\ ,\qquad \boldsymbol{K=\sqrt{50}=7,07=L}\quad \boldsymbol{L\approx 7\rightarrow K\approx 7}$$

$$\mathbf{CT'(=7*20)+(7*20)=280}$$

للرجوع إلى مستواه الأصلي من الإنتاج، على المنتج ان يرفع من ميزانيته بحيث تصبح تقدر ب 280 وحدة نقدية حتى يغطي تكاليف هذه الكمية من الإنتاج بالأسعار المعمول بها لعناصر الإنتاج

إذن يضيف 80 وحدة نقدية لميزانيته

4-حساب المعدل الحدي للإحلال التقني:

$$tms_{K/L}=\frac{\Delta K}{\Delta L}=\frac{K_2-K_1}{L_2-L_1}=\frac{7-10}{7-5}=-\frac{3}{2}$$

5-عندما ينتقل المنتج من إنفاق ميزانية يساوي 200 وحدة نقدية إلى ميزانية تساوي 400 وحدة نقدية ثم 600 فإنه يزيد من استعمال عناصر الإنتاج ومن الإنتاج. إنه يوسع من حجم المؤسسة. ونقاط التوازن المختلفة تعبر عن مسار توسع المؤسسة. و بما أن منحنى مسار توسع المؤسسة يمر بنقاط التوازن

المختلفة فإنه يحقق دائما شرط التوازن و هو نسبة رأس المال إلى العمل –سعر العمل هو 20 وحدات نقدية و أن سعر رأس المال هو 10 وحدة نقدية كما جاء في الوضعية الأصلية للمؤسسة

$K = 2L$ معادلة مسار توسع المؤسسة

التمرين 16:

لدينا دالة الإنتاج التالية $\mathrm{Q} = 4\mathrm{K}^{3/4}\mathrm{L}^{1/4}$

1–إذا:ون $\boldsymbol{P_K = 3}$ ، ون $\boldsymbol{P_L = 1}$ و كان توازن المنتج يحدث عندما يكون الإنتاج 400 وحدة إنتاجية. ما هي الكميات التي سيستعملها المنتج من عنصري الإنتاج، وما هي الكلفة اللازمة لذلك؟

2–برهن أن هذه الدالة متجانسة.

3–إذا تمت مضاعفة الكميات المستعملة من عنصري الإنتاج مع ثبات سعريهما، أحسب حجم الإنتاج الناجم عن هذه العملية؛ ثم أحسب الكلفة اللازمة.؟

4–نفترض أن الكميات المستعملة من عنصري الإنتاج تتضاعف مرة أخرى وفي نفس الظروف، احسب حجم الإنتاج الجديد و ما هي الكلفة اللازمة في هذه الحالة ؟

5–حدد معادلة مسار توسع هذه المؤسسة؟

حل التمرين 16

1–شرط التوازن يكون دائما عندما تتحقق المعادلة:

$$\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{4\times\frac{1}{4}K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}}{4\times\frac{3}{4}K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3}$$

ومنه:

$$K = L$$

بما أن التوازن يحصل عند تحقيق إنتاج يساوي 400 وحدة، يجب أن نجد الحل للنموذج:

$$\begin{cases} Q = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} = 400 \\ K = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 100 \\ L = 100 \end{cases}$$

وتكون الكلفة هي:

$$CT = 3K + L = 4K = 4L = 400$$

2-لنبرهن أن الدالة $Q = f(K,L)$ **متجانسة يجب أن نبرهن على العلاقة التالية:**

$$f(tK,tL) = t^k . f(K,L)$$

أي أن:

$$4 \times (tK)^{\frac{3}{4}}.(tL)^{\frac{1}{4}} = 4 \times t^{\frac{3}{4}} \times K^{\frac{3}{4}} \times t^{\frac{1}{4}} \times L^{\frac{1}{4}} = 4.t.K^{\frac{3}{4}}.L^{\frac{1}{4}}$$

إن الدالة إذن متجانسة من الدرجة الأولى,

3-إذا تمت مضاعفة عناصر الإنتاج فإن حجم الإنتاج يصبح كالتالي:

$$4 \times (2 \times K)^{\frac{3}{4}}.(2.L)^{\frac{1}{4}} = 2 \times 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

حجم الإنتاج الذي كان 400 وحدة عند $K = L = 100$ **سيتضاعف كذلك ليصبح 800 وحدة، و تكون الكلفة هي:**

$$CT = (2 \times 100 \times 3) + (2 \times 100 \times 1) = 800$$

4-إذا تمت مضاعفة عناصر الإنتاج مرة أخرى **–** أو بالرجوع إلى البداية ضرب كمية عناصر الإنتاج في 4أي ضعف الضعف**–** فبنفس الطريقة نجد أن الإنتاج يصبح ضعف الإنتاج السابق و كذلك التكاليف، أي $Q = 1600$ و $CT = 1600$

5-مسار توسع المؤسسة هو المنحنى الذي يربط نقاط التوازن المختلفة. عندما كنا ننتقل من نقطة لأخرى بزيادة عناصر الإنتاج فإن أول نقطة انطلقنا منها كانت نقطة توازن، والنقاط التي كنا نحصل عليها كلها نقاط توازن. هذه النقاط هي:

$$\begin{cases} E_1(100,100) \Rightarrow Q_1 = 400 \\ E_2(200,200) \Rightarrow Q_2 = 800 \\ E_3(400,400) \Rightarrow Q_3 = 1600 \end{cases}$$

مسار أو مجال توسع المؤسسة يعبر عن المنحنى الذي يمر بهذه النقاط. إذا كان تباعد منحنيات الناتج المتساوي ثابتا كان مردود الحجم ثابتا، أما إذا كان تباعد منحنيات الناتج المتساوي متزايدا أو متناقصا كان مردود الحجم كذلك متزايدا أو متناقصا.

التمرين 17

لإنتاج منتوج Q تستعمل المنشأة عاملي الإنتاج :K و L حسب دالة الإنتاج التالية :

$$Q = L^{1/2} + K^{1/2}$$

المطلوب:

1. حدد غلة الحجم (مردود الحجم) لهذه الدالة.
2. احسب نسبة الزيادة في الإنتاج في حالة ارتفاع استعمال عوامل الإنتاج بـ .50%
3. حدد معادلة مسار توسع المؤسسة
4. ما هي كمية الإنتاج المثلى التي تناسب كلفة تساوي 24ون، مع العلم أن أسعار عوامل الإنتاج **K** و**L** هما على التوالي **2** ون و4 ون(وحدات نقدية)،عبر عنها بيانيا
5. حدد دالة الطلب على العمل$L = f(P_L , P_K)$

حل التمرين 17

$$Q = f(K,L) = L^{1/2} + K^{1/2}$$

1. تحديد غلة الحجم (مردود الحجم) لهذه الدالة

$$f(tK, tL) = t^{\alpha} f(K, L)$$

$$f(tK,tL) = (t\,L)^{1/2} + (tK)^{1/2} = (t^{1/2}\ L^{1/2}) + (t^{1/2} K^{1/2})$$

$$f(tK,tL) = t^{1/2} f(K,L) \quad f(tK,tL) = t^{1/2}\,(L^{1/2} + K^{1/2}) \ ,$$

بما أن درجة التجانس $\boldsymbol{\alpha = 1/2}$ اصغر من 1 فان غلة الحجم متناقصة

2. نسبة التغير في الإنتاج إذا زادت عناصر الإنتاج ب **50%**

$$L_2 = L_1 + 0{,}5L_1 = 1{,}5L_1$$

$$K_2 = K_1 + 0{,}5K_1 = 1{,}5K_1$$

$$Q_2 = (1{,}5K)^{1/22} + .\,(1{,}5L)^{1/2} = 1{,}5^{1/2} Q_1 = 1{,}225\ Q_1$$

إذا زادت عناصر الإنتاج بـ 50% فهذا يعني: t= 1,5 ونسبة الزيادة في الإنتاج هي :

$$1{,}225\ Q_1 - Q_1 = 0{,}225 = 22{,}5\%$$

3 تحديد معادلة مسار توسع المؤسسة

لكي تتوسع المؤسسة يجب أولا ان تحقق توازنها :

$$\frac{Q'_L}{Q'_k} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{4}{2} \qquad , \qquad \frac{k^{1/2}}{L^{1/2}} = 2 \qquad , \qquad \frac{L^{-1/2}}{k^{-1/2}} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{4}{2} \ ,$$

بتربيع الطرفين $\frac{K}{L} = 4$ **و منه** $K = 4L$ هي علاقة التوازن وتعبر عن معادلة مسار توسع المؤسسة

4. كمية الإنتاج المثلى التي تناسب كلفة تساوي 24ون

$$CT=24 \quad , \quad CT = 24 \; ; \; P_K = 2 \; ; \; P_L = 4$$

$$CT = 24 = 2\,K + 4L$$

نعوض علاقة التوازن في CT :

$$24 = 2\,(4L) + 4L$$

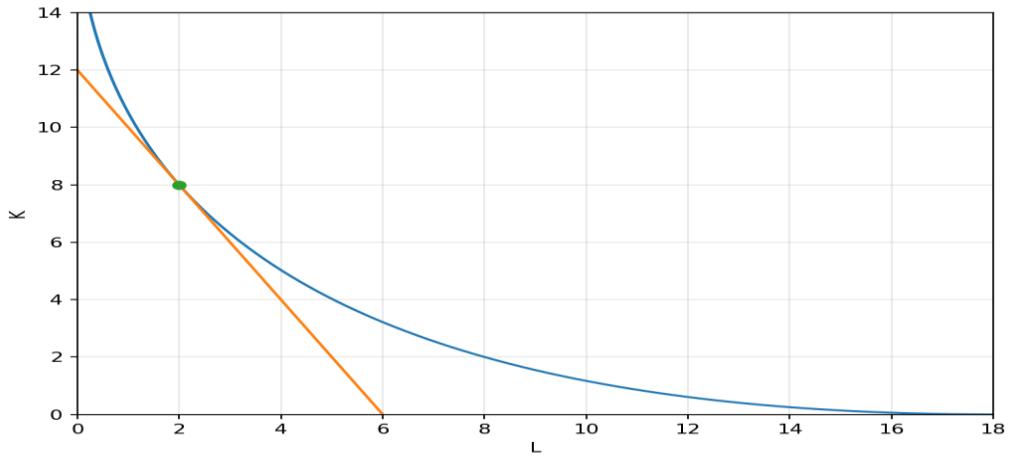
$$L=2 \; ; \; K=8$$

حجم الإنتاج هو :

$$Q = L^{1/2} + K^{1/2} = 2^{1/2} + 8^{1/2} = \quad 4{,}24$$

- التعبير البياني عن نقطة التوازن لهذا المنتج

منحنى الناتج المتساوي وخط الكلفة المتساوية (نقطة التوازن)



5.تحديد دالة الطلب على العمل $L = f(P_L , P_K)$

نتبع الخطوات التالية نأخذ من شرط التوازن : نسبة الإنتاجيات الحدية لعوامل الإنتاج تساوي نسبة أسعار هذه العوامل:

$$\frac{Q'_L}{Q'_k} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{L^{-1/2}}{k^{-1/2}} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \frac{P_L}{P_K} \rightarrow \sqrt{K}\ P_K\ = \sqrt{L}\ P_L$$

$$(\sqrt{K}\ P_K\ )^{\ 2} = (\sqrt{L}\ P_L)^2 \leftrightarrow K = \frac{L\ {P_L}^2}{{P_K}^2} \rightarrow (2)$$

نعوض (2) في CT :

$$CT = KP_K + LP_L = \ CT = \frac{L\ {P_L}^2}{{P_K}^2}(P_K) + LP_L$$

$$CT = \ L\left[\ \frac{{P_L}^2 + P_K P_L}{P_K}\right] \rightarrow L = \frac{CT\ P_K}{{P_L}^2 + P_K P_L} \rightarrow L = \frac{CT\ P_K}{PL(PL + P_K)}$$

$$L = \frac{24\ P_K}{PL(PL + P_K)} \rightarrow L = f(P_L\ , P_K)$$ دالةالطلب

تمارين مقترحة

التمرين 18:

تستعمل مؤسسة إنتاجية دالة الإنتاج التالية:

$$\boldsymbol{Q = 2K^{0,5}L^{0,5}}$$

المطلوب:

1. ما هي طبيعة مردود الحجم باستعمال طريقتين؟
2. تتمتع المؤسسة بميزانية تقدر بـ ***1500***ون ***(***وحدة نقدية**)**. نعتبر أن السعر الوحدوي للعمل هو ***PL = 12,5***و أن السعر الوحدوي لرأس المال هو ***PK = 50***

ما هو مستوى الإنتاج الأعظم إذا كانت التكلفة الثابتة هي ***375*** ون؟

3. ارسم مسار توسع هذه المؤسسة.

التمرين19 :

تتحصل منشأة على مستوى من الإنتاج ***Q=50*** باستعمال عاملي الإنتاج ***K*** و ***L*** حسب دالة دالة الإنتاج التالية: $\boldsymbol{K = \frac{50}{L}}$

أسعار عوامل الإنتاج ***K*** و ***L*** على التوالي هي ***10*** و20 وحدات نقدية.

1. عبر بيانيا عن هذه الدالة. ما هو المنحنى المحصل عليه؟
2. ما هي الميزانية اللازمة لهذه المنشأة حتى تتحصل على هذا المستوى من الإنتاج؟
1. حدد دالة الطلب على العمل $L = f(P_L, P_K)$

التمرين 20

لإنتاج منتوج Q **تستعمل المنشأة عاملي الإنتاج** :K **و** L **حسب دالة الإنتاج التالية :**

$$Q = 2L^3 + 4K^3$$

المطلوب:

1. حدد غلة الحجم (مردود الحجم) لهذه الدالة.
2. احسب نسبة الزيادة في الإنتاج في حالة ارتفاع استعمال عوامل الإنتاج بـ .**20%**
3. حدد معادلة مسار توسع المؤسسة

الفصل الثاني : تمارين موجهة (نضرية التكاليف)

تعتبر دوال التكاليف الوسيلة الثانية لشرح وتحليل تصرّف المنشأة، غير أنّ تحليل التكاليف ينقسم إلى فترتين أساسيتين: تكاليف في الفترة القصيرة، وتكاليف في الفترة الطويلة.

1-دالة التكاليف:

1.1- تكاليف الإنتاج في الفترة القصيرة:

تمثل الفترة القصيرة الفترة الزمنية التي تكون قصيرة بالحد الذي لا يسمح لجميع عناصر الإنتاج بالتغير، وبالتالي فإن عناصر الإنتاج يمكن تقسيمها إلى عناصر إنتاج ثابتة و عناصر إنتاج متغيرة. وهنا تصبح التكاليف الكلية مكونة من تكاليف ثابتة وتكاليف متغيرة. وتمثل دالة التكلفة العلاقة الرياضية بين حجم التكاليف وحجم الإنتاج المحقق عن طريق إنفاق هذه التكاليف

تعبر التكاليف عن نفقات الإنتاج، وتنقسم إلى تكاليف ثابتة وأخرى متغيرة.

- **التكاليف الثابتة:**

هي التي لا تتغير مع حجم الإنتاج مثل إيجار المباني التي تأوي المصنع، أجور العمال القائمين بالحراسة، أقساط التأمين... إلى غير ذلك. وتدفع هذه التكاليف حتى لو لم ينتج المصنع أي شيءوتمثل نفقات دائمة.

- **-التكاليف المتغيرة:**

هي التي تتغير مع حجم الإنتاج. فإذا قررنا زيادة الإنتاج فلا بد من زيادة استهلاك الطاقة والمواد الأوليةوزيادة عدد العمال المشتغلين مباشرة في الإنتاج...إلى غير ذلك. ويؤدي هذا إلى زيادة النفقات. هذه النفقات هي تكاليف متغيرة لأنها ترتبت عن زيادة في تغيير كمية الإنتاج.

هذا فيما يتعلق بطبيعة التكاليف.

من جانب التحليل الاقتصادي نصنف التكاليف إلى تكاليف كلية، حدية ومتوسطة:

التكاليف الكلية:

التكاليف الكلية عبارة عن مجموع التكليف الثابت منها والمتغير. ونكتب رياضيا:

$$CT = CV + CF$$

يمثل CTالتكاليف الكلية، CV التكاليف المتغيرة و CF التكاليف الثابتة.

تتغير التكاليف الكلية بدلالة الكمية المنتجة أي: $CT = f(Q)$

التمرين الأول

يبين الجدول التالي تكاليف الإنتاج كما يلي :

CT	CV	CF	Q
40	0	40	0
59	19	40	1
70	30	40	2
76	36	40	3
81	41	40	4
84	44	40	5
88	48	40	6
93	53	40	7
103	63	40	8
118	78	40	9
160	120	40	10

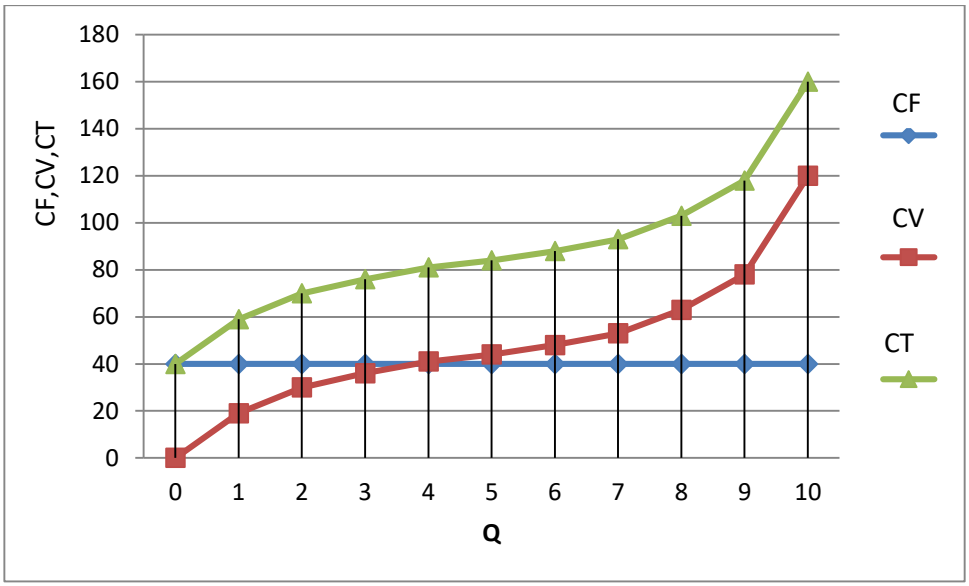
المطلوب:

1.مثل على نفس البيان هذه التكاليف(الثابتة، المتغيرة و الكلية)

2. اوجد كل من: التكاليف الحدية،التكاليف المتوسطة الكلية، التكاليف المتوسطة المتغيرة، التكاليف المتوسطة الثابتة و مثلها بيانيا

حل التمرين 1

شكل منحنيات التكاليف الثابتة، المتغيرة و الكلية



نلاحظ أن دالة التكاليف تمر بمرحلتين تفصل بينهما نقطة انعطاف ويرجع هذا إلى قانون تناقص مردود الحجم الذي رأيناه عندما درسنا دالة الإنتاج. تكون في البداية دالة التكاليف متزايدة لكن بوتيرة بطيئة نوعا ما و تتطابق هذه المرحلة مع مرحلة مردود الحجم المزايد في دالة الإنتاج، أما في المرحلة الثانية فإن التكاليف تتزايد بوتيرة كبيرة – على شكل دالة أسية- وتتطابق هذه المرحلة مع مردود الحجم المتناقص.

2 إيجاد: التكاليف الحدية،التكاليف المتوسطة الكلية، التكاليف المتوسطة المتغيرة، التكاليف المتوسطة الثابتة و تمثيلها بيانيا

-التكاليف الحدية:

هي عبارة عن تغيير التكاليف الكلية على الكمية المنتجة، وتكتب رياضيا:

$$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$$

وتعبر عن الكلفة الإضافية المتعلقة بزيادة إنتاج وحدة إضافية. عندما تكون لدينا دالة التكاليف معرفة ومستمرة نكتب التكاليف الحدية على الشكل التالي:

$$Cm = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{dCT}{dQ}$$

و يتضح أن التكاليف الحدية هي مشتقة دالة التكاليف الكلية بالنسبة للكمية المنتجة.

-التكاليف المتوسطة الكلية:

وهي عبارة عن حاصل قسمة التكاليف الكلية على الكمية المنتجة، وتكتب رياضايا:

$$CMT = \frac{CT}{Q}$$

تعبر التكاليف المتوسطة الكلية عن كلفة أي وحدة من الإنتاج، فهي لا تتعلق بوحدة معينة كما هو الحال بالنسبة للكلفة الحدية التي تعبر عن كلفة آخر وحدة منتجة.

-التكاليف المتوسطة المتغيرة:

هي حاصل قسمة التكاليف المتغيرة على الكمية المنتجة: $\mathrm{CMV} = \frac{\mathrm{CV}}{\mathrm{Q}}$

-التكاليف المتوسطة الثابتة: $CMF = \frac{CF}{Q}$

ملاحظة : لا توجد فائدة كبيرة من حساب التكاليف المتوسطة الثابتة لانعدام العلاقة بينها و بين حجم الإنتاج و لأنها تتضاءل كلما زاد حجم الإنتاج و بالتالي ليس لها منفعة كبيرة من ناحية التحليل الاقتصادي. التكاليف الثابتة تشكل عائقا عندما يكون حجم الإنتاج متواضعا وقد تؤدي إلى إفلاس المؤسسة، أما عندما يكون حجم الإنتاج كبير فإنها تتناقص نسبيا.

وتبقى التكاليف المتوسطة المتغيرة هي التي لها أهمية في التحليل الاقتصادي. لدينا:

$$CMT = \frac{CT}{Q} = \frac{CV}{Q} + \frac{CF}{Q}$$

***التمرين* الثاني**

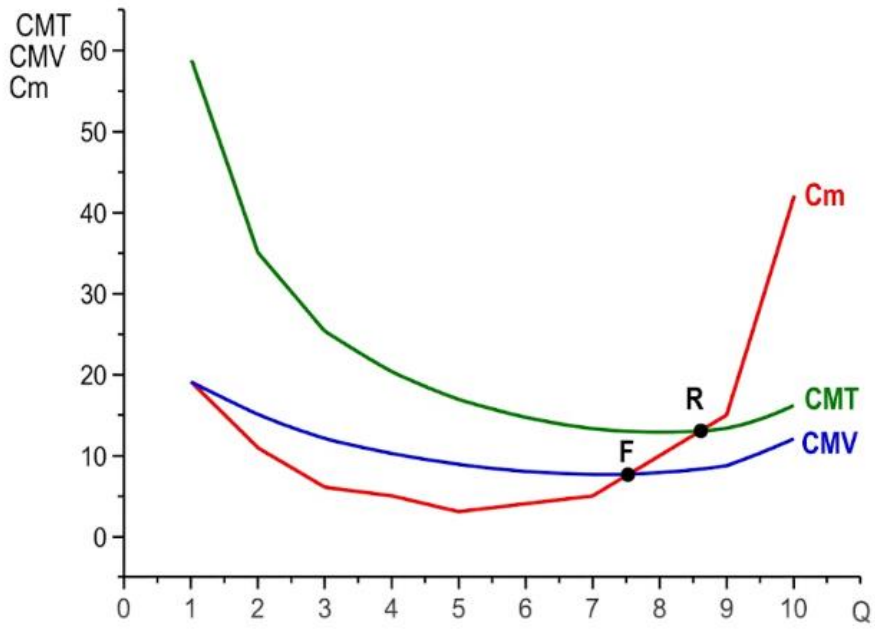
الجدول التالي يبين التكاليف الحدية والتكاليف المتوسطة الكلية، التكاليف المتوسطة المتغيرة والتكاليف المتوسطة الثابتة:

المطلوب :

مثل بيانيا هذه التكاليف مع الشرح

CMF	*CMV*	*CMT*	*Cm*	*CT*	Q
–	–	–	–	40	0
40,00	19,00	59,00	19	59	1
20,00	15,00	35,00	11	70	2
12,33	12,00	25,33	06	76	3
10,00	10,25	20,25	05	81	4
08,00	08,80	16,80	03	84	5
06,66	08,00	14,66	04	88	6
05,71	07,57	13,20	05	93	7
05,00	07,87	12,87	10	103	8
04,44	08,66	13 ,11	15	118	9
04,00	12,00	16,00	42	160	10

التمثيل لبياني لكل من : CMT,CMV , Cm



من خلال الرسم البياني نلاحظ أن:

- كل من التكاليف الحدية، التكاليف المتوسطة الكلية والتكاليف المتوسطة المتغيرة تأخذ شكلا منحنيات يكون متناقصة ثم تتزايد.
- التكاليف الحدية تقطع كل من التكاليف المتوسطة الكلية والتكاليف المتوسطة المتغيرة في النقاط الدنيا لهذه التكاليف. نبرهن على هذا:

$$MinCMT \Leftrightarrow \frac{dCMT}{dQ} = 0$$

نشتق العبارة $CMT = \frac{CT}{Q}$ على شكل مشتقة كسر و هو ما تعطينا:

$$\frac{CT'.Q - CT}{Q^2} = 0$$

ومنه: $Cm = C' = \frac{CT}{Q}$

أن الكلفة الحدية تساوي الكلفة المتوسطة الكلية عندما تكون هذه الأخيرة في حدها الأدنى.

بنفس الطريقة نبرهن على:

$$MinCMV \Leftrightarrow \frac{dCV}{dQ} = 0$$

يعطينا:

$$CV' = \frac{CV}{Q}$$

مع العلم أن $CV' = CT'$ لأنه لدينا:

$$CT = CV + CF$$

$$CT' = CV' + CF'$$

و يكون $CF' = 0$ لأن CF لا يتغير بدلالة **Q** ومنه:

$$CT' = CV'$$

ويكون عند الحدود الدنيا لكل من التكاليف المتوسطة الكلية والتكاليف المتوسطة المتغيرة:

$$CT' = \frac{CT}{Q} = \frac{CV}{Q}$$

تنتج عن هذا التقاطع نقطتان:

-النقطة ***R*** أي تقاطع Cm مع CMT وتسمى عتبة المردودية. في هذه النقطة لا تحقق المؤسسة أي ربح لأن سعر البيع الذي يساوي الكلفة الحدية يكون متساويا مع الكلفة المتوسطة. ابتداء من النقطة ***R*** تدخل المؤسسة مجال الربح.

-النقطة ***F*** وتسمى عتبة الإغلاق. في هذه النقطة يوجد جزء من التكاليف لم تتم تغطيته بعد ولهذا فإذا نزلت المؤسسة تحت هذا المستوى فإنها ستغلق؛ لأن الكلفة الحدية والتي تساوي سعر البيع تصبح أقل من الكلفة المتوسطة المتغيرة وبطبيعة الحال أقل من الكلفة المتوسطة الكلية. المنتوج لا يغطي تكاليف إنتاجه.

يبقى المجال الموجود بين العتبتين. في هذا المجال فإن المؤسسة لا تحقق أي ربح لكنها لا تغلق ويمكن لها أن تستغل وهذا نظرا لأنه ليس من السهل اتخاذ قرار الغلق زيادة على صعوبة إعادة تشغيل المؤسسة بعد إغلاقها إذا واتتها الفرصة من جديد؛وستكلفها إعادة التشغيل تكاليف معتبرة لا محالة؛ فيحبذ أن تبقى المؤسسة تشتغل وتغطي جانبا من تكاليفها وتترقب الفرصة المواتية لتستعيد مكانها في السوق والذي تكون قد فقدته لعدم منافسة الآخرين (لأن تكاليفها المتوسطة مثلا مرتفعة ولم تمكنها من المنافسة).

التمرين 3

لدينا دالة التكاليف التالية $CT = 5X^2 + 12X + 20$

المطلوب:

1. حدّد :الكلفة الحدّية، الكلفة المتوسطة الكلية ،الكلفة المتوسطة المتغيرة ،الكلفة المتوسطة الثابتة مع الشرح.
2. ارسم هذه التكاليف مع الشرح.

إيجاد قيمة مختلف التكاليف:

الكلفة الثابتة: $C_F = 20\,um$

الكلفة المتغيرة: $C_V = C(x) = 5x^2 + 12x$

الكلفة الحدية: $C' = C_m = \frac{dC_T}{dx} = 10x + 12$

الكلفة المتوسطة: $\overline{C} = C_M = 5x + 12 + \frac{20}{x}$

الكلفة الكلية: $C_T = C_V + C_F \Rightarrow C_T = 5x^2 + 12x + 20$

2الرسم البياني مع الشرح مبينا بيانيا عتبة المر دودية و عتبة الغلق

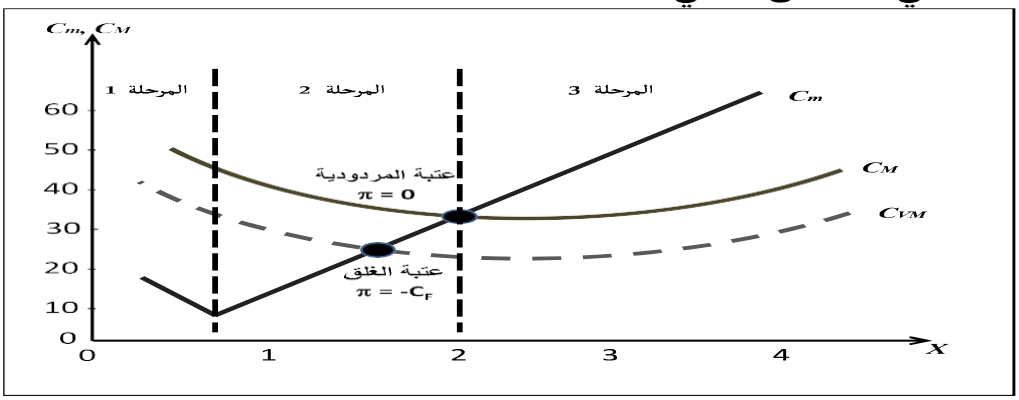
1) $C_m = C' = 10x + 12$

x	2	3	4
C'	32	42	52

2) $C_M = \overline{C} = 5x + 12 + 20/x$

x	1	2	3	4
$\overline{C}$	37	32	33,6	37

العلاقة بين التكلفة الحدية، التكلفة المتوسطة و التكلفة المتغيرة المتوسطة في المنحنى التالي:



التمرين 4:

لدينا دالة التكاليف التالية:

$$CT = 5x^2 + 12x + 20$$

1-حدد الكلفة الحدية، الكلفة المتوسطة الكلية، الكلفة المتوسطة المتغيرة، و الكلفة المتوسطة الثابتة.

2-ارسم بيانيا هذه التكاليف، مع الشرح.

لتكن دالة التكاليف التالية:

$$TC = \frac{1}{3}Q^3 - 6Q^2 + 40Q + 20$$

المطلوب: تحديد عتبة الغلق

الحل:

لدينا عتبة الغلق هي عبارة عن السعر المقابل للنقطة الدنيا لمتوسط التكاليف المتغيرة (P= Min CVM)

– التكاليف الكلية المتغيرة:

$$CTM = \frac{1}{3}Q^3 - 6Q^2 + 40Q$$

–متوسط التكاليف المتغيرة:

$$CVM = \frac{1}{3}Q^2 - 6Q + 40$$

التمرين 5

إذا علمت أن: $CFM = 60/Q$ **و** $CVM = Q^2 - 10Q + 40$

المطلوب:

أوجد معادلة CM **و** Cm.

عند أي كمية يكون **CVM** في أدنى مستوى له؟ ماذا تساوي ***Cm*** عند هذه الكمية؟ماذا تستنتج؟

الحل:

$$CM = Q^2 - 10Q + 40 + 60/Q$$

$$CV = Q \times CVM = Q^3 - 10Q^2 + 40Q \rightarrow Cm = 3Q^2 - 20Q + 40CVM$$

أدنى لما المشتقة = $\mathbf{0} \rightarrow Q = 5 \rightarrow Q - 10 = 0$ **عند** $Q = 5: CVM = 25 - 50 + 40 =$

$$Cm = 75 - 100 + 40 = 15$$

الاستنتاج: *Cm = CVM* **عند النقطة الدنيا لـ** *CVM*.

وهذه قاعدة عامة: منحنى التكلفة الحدية يقطع منحنى متوسط التكلفة المتغيرة في أدنى نقطة له.

التمرين 6

دالة التكلفة الكلية لمؤسسة هي: $CT = Q^3 + 12Q^2 + 60Q + 100$

المطلوب

1. اوجد CF، CV، CFM، CVM، CM، Cm

2.أحسب CM **و** Cm ***عندما*** Q = 10

3.ابتداءً من أي قيمة لـ *Q* **تصبح** *Cm* **أكبر من** *CM* **؟**

حل التمرين 6

CF = 100 **لأنه الجزء المستقل عن** CVM

$CV = Q^3 - 12Q^2 + 60Q$

$CFM = 100/Q$

$CVM = Q^2 - 12Q + 60 \quad CM = Q^2 - 12Q + 60 + 100/Q$

$Cm = dCT/dQ = 3Q^2 - 24Q + 60$

2.عند $Q = 10$

$CM = 100 - 120 + 60 + 10 = 50$

$Cm = 300 - 240 + 60 = 120$

تكون $Cm > CM$ ***بعد النقطة الدنيا لمنحنى*** CM.***نشتق*** CM ***ونساوي بالصفر:*** $CM' = 2Q - 12$

$100/Q^2 = 0$ -***النقطة الدنيا تقريبا عند*** $Q \approx 6.3$. ***إذن لما*** $Q > 6.3$ ***فإن*** $Cm > CM$.

التمرين7

دالة الإنتاج $Q=10\sqrt{L}$

الكلفة التابتة $CF= 200$ ،***سعر العمل*** $PL=20$

المطلوب :

1- عبر عن **L** *بدلالة* **Q** *ثم إستنتج الكلفة المتغيرة و الكلفة الكلية .*

2- أوجد دالة الكلفة الحدية **Cm** .

3- *ما هي العلاقة بين الكلفة الحدية و الإنتاجية الحدية لعنصر العمل .*

حل التمرين 7 :

1- $Q=10\sqrt{L}$ => $L = Q^2/100$

$CV = PL.\ L = 20\ .Q^2/100 = 0.2Q^2$

$CT = 0.2Q^2 + 200$

2- $Cm=dCT/dQ = 0.4Q$

3- $PmL=dQ/dL=10\ .\ 1/(2\sqrt{L}) = 5/\sqrt{L}$

$Cm=PL/PmL$

مع $PL/PmL=20/(5/\sqrt{L})=4\sqrt{L}$

$Q=10\sqrt{L} \rightarrow \sqrt{L} = Q/10 \rightarrow Cm = 4Q/10 = 0.4Q$

الاستنتاج: كلما تناقصت ***PmL*** بسبب قانون الغلة المتناقصة، ارتفعت ***Cm***.

التمرين 8:

تنتج منشأة المنتوج X طبقا لدالة التكاليف التالية:

$$CT = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + 10x$$

1- حدد عتبة المر دودية.
2-حدد عتبة الغلق.
3-حلل النتائج المحصل عليها.

حل التمرين 8:

1. تحديد عتبة المردودية:

$$\pi = 0 \rightarrow C_M = C_m = P_x \quad \text{أي}$$

$$C' = C_m = \frac{dC_T}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 10$$

$$\overline{C} = C_M = \frac{C_T}{x} = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$$

$$C_M = C_m \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + 2x + 10 = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{مرفوض} \end{cases}$$

$$P_x = C_m \Rightarrow P_x = \frac{3}{2}(0)^2 + 2(0) + 10 \Rightarrow P_x = 10\ um$$

2. تحديد عتبة الغلق:

$$\pi = -C_F \rightarrow C_{VM} = C_m = P_x \quad \text{أي}$$

$$C' = C_m = \frac{dC_T}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 10$$

$$\overline{CV} = C_{VM} = \frac{C_V}{x} = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$$

$$C_{VM} = C_m \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + 2x + 10 = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{مرفوض} \end{cases}$$

$$P_x = C_m \Rightarrow P_x = \frac{3}{2}(0)^2 + 2(0) + 10 \Rightarrow P_x = 10\ um$$

3. تحليل النتائج:

نلاحظ أن نقطة عتبة المردودية هي نفسها نقطة عتبة الغلق وهذا راجع لأن دالة التكاليف هي في المدى الطويل. أي أن التكاليف الثابتة تصبح تكاليف متغيرة $C_{TL} = CV$.

2-التكاليف في المدى الطويل:

في المدى الطويل عناصر الإنتاج تتغير و بالتالي يتغير حجم الإنتاج. الإنتاج يتغير؛ وقد نحصل على مردود حجم متزايد، ثابت أو متناقص. إذن في المدى الطويل لا بد على المنتج أن يراعي مردود الحجم وهو ينتقل من حجم إنتاج إلى حجم إنتاج أكبر بما يضمن له التوازن. إنه يتنقل على منحنى مسار توسع المؤسسة الذي يعبر عن نقاط التوازن المختلفة. توسع المؤسسة يجب أن يكون عند مردود الحجم المتزايد لأن زيادة الكمية المنتجة تكون معتبرة والإيراد الناجم عنها كفيل بتغطية التكاليف وزيادة؛ أما إذا كان مردود الحجم متناقص فإن الكمية المنتجة تكون متواضعة والإيراد الناتج عنها قد لا يغطي تكاليف الإنتاج.

في المدى الطويل فإن دراسة التكاليف لا تختلف عن دراستها في المدى القصير.إذا حاولنا تمثيل التكاليف في المدى الطويل بيانيا فإن التكاليف الحدية تحافظ على نفس الشكل أما التكاليف المتوسطة في المدى الطويل فإنها تمر بمجموع النقاط الدنيا للتكاليف المتوسطة قصيرة المدى و يمكننا أن نكتب رياضيا:

$$CMTL = \Sigma MinCMTC$$

يمثل- $CMTL$ الكلفة المتوسطة طويلة المدى.

- $CMTC$ الكلفة المتوسطة قصيرة المدى.

التمرين 9 :

الجدول التالي يبين التكاليف قصيرة المدى لخمسة مستويات من الإنتاج بحيث يعبر كل مستوى عن فترة.

المستوى 1		المستوى 2		المستوى 3		المستوى 4		المستوى 5	
Q	*CMTC*	*Q*	*CMTC*	*Q*	*CMTC*	*Q*	*CMTC*	*Q*	*CMTC*
1	15,50	2	15,50	5	10,00	8	10,00	9	12,00
2	13,00	3	12,00	6	8,50	9	9,50	10	11,00
3	12,00	4	11,00	7	8,00	10	10,50	11	11,50
4	11,75	5	9,50	8	8,50	11	12,00	12	13,00
5	13,00	6	11,00	9	10,00	12	15,00	13	16,00

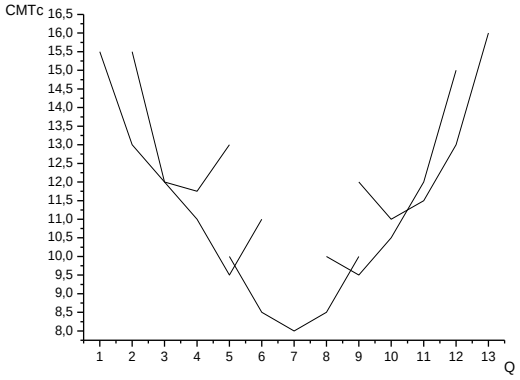
1–مثل بيانيا التكاليف المتوسطة الكلية في المدى القصير للمستويات الخمسة.

2–استنتج تكاليف المدى الطويل، الكلي والمتوسط والحدي منها.

3–مثل التكاليف المتوسطة الكلية والتكاليف الحدية في المدى الطويل وبين عتبة المردودية في المدى الطويل

حل التمرين 9:

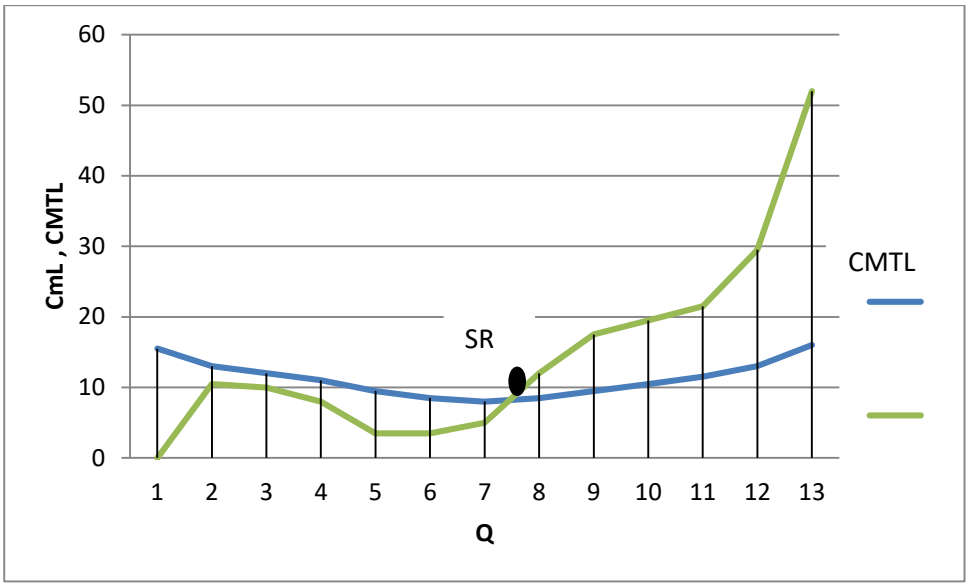
1الرسم البياني للتكاليف المتوسطة الكلية للمراحل الخمسة يعطينا:



2-لاستنتاج التكاليف في المدى الطويل نشكل جدولا لهذه التكاليف انطلاقا من التكاليف الكلية المتوسطة في المدى القصير لأنها نعرف أن التكاليف المتوسطة الكلية في المدى الطويل هي عبارة عن الحدود الدنيا للتكاليف المتوسطة في المدى القصير. نقارن الكميات المنتجة في المراحل المختلفة ثم نأخذ أقل كلفة متوسطة كلية في المدى القصير. فعلى سبيل المثال عندما يريد المنتج كمية تساوي 2 فله أن ينتجها بكلفة متوسطة كلية في المدى القصير تساوي 13 وحدة نقدية في المرحلة الأولى أو إنتاجها ب 15,50 وحدة نقدية في المرحلة الثانية. إنه سيختار أن ينتجها بأقل كلفة وهي 13 وحدة نقدية في المرحلة الأولى، وهكذا بالنسبة لباقي الكميات التي يريد إنتاجها. وهو ما يعطينا الجدول الموالي:

CmL	*CTL*	*CMTL*	*Q*
-	15,50	15,50	1
10,50	26,00	13,00	2
10,00	36,00	12,00	3
8,00	44,00	11,00	4
3,50	47,50	9,50	5
3,50	51,00	8,50	6
5,00	56,00	8,00	7
12,00	68,00	8,50	8
17,50	85,50	9,50	9
19,50	105	10,50	10
21,50	126,50	11,50	11
29,50	165,00	13,00	12
52,00	208,00	16,00	13

3-إذا رسمنا هذه المعطيات بيانيا نحصل على الشكل:



النقطة ***SR*** حيث يتقاطع منحنى الكلفة الحدية في المدى الطويل مع منحنى الكلفة المتوسطة الكلية في المدى الطويل يعبر عن عتبة المردودية في المدى الطويل

في المدى القصير

تعرض المؤسسة إنتاجها فقط إذا كان السعر أعلى من **عتبة الإغلاق** أي يغطي التكاليف المتغيرة. أما إذا كان السعر دون هذه العتبة فإنها تتوقف عن الإنتاج .

في المدى الطويل:

لا تستمر المؤسسة في السوق إلا إذا كان السعر يساوي أو يفوق **عتبة المردودية** أي يغطي التكاليف الكلية). وبالتالي فإن دالة العرض هي الجزء المتصاعد من الكلفة الحدية الواقع

التمرين 10:

لدينا دالة الإنتاج:

$$Q = (K-1)^{\frac{1}{3}} L^{\frac{1}{3}}$$

سعر رأس المال يساوي سعر العمل.

1-بين أن هذه الدالة متجانسة واستنتج مردود الحجم.

2-احسب الإنتاجية الحدية لكل من العمل ورأس المال.

3-حدد شرط تعظيم الإنتاج.

4-حدد دالة مسار توسع المؤسسة.

5-إذا كان سعر كل من العمل ورأس المال يساوي 1وأرادت المؤسسة إنتاج 9 وحدات، حدد الكمية اللازمة من العمل ومن رأس المال وحدد التكاليف الكلية.

6-إذا كان سعر البيع يساوي 9 وحدات نقدية، أحسب ربح المؤسسة بالطريقة المباشرة (الإيراد الكلي ناقص التكاليف الكلية).

حل التمرين 10 :

1-لنبرهن على أن الدالة متجانسة:

$$[t(K-1)]^{\frac{1}{3}}(tL)^{\frac{1}{3}} = t^{\frac{2}{3}}(K-1)^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$$

الدالة إذا متجانسة و مردود الحجم يساوي $\frac{2}{3}$ و هو متناقص.

2-الإنتاجية الحدية للعمل هي مشتقة الكمية بالنسبة للعمل وكذا الإنتاجية الحدية لرأس المال. ومنه:

$$Q'_L = \frac{1}{3}(K-1)^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$Q'_K = \frac{1}{3}(K-1)^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$$

3-شرط تعظيم الإنتاج هو:

$$\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}(K-1)^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}(K-1)^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}} = 1$$

أي:

$$K-1 = L$$

4-مسار توسع المؤسسة هو مجموع نقاط التوازن وهو مجموع النقاط التي تحقق شرط التوازن ونستنتج أن معادلة مسار توسع المؤسسة هي:

$$K = L+1$$

5-لدينا النموذج:

$$\begin{cases} Q = (K-1)^{\frac{1}{3}} L^{\frac{1}{3}} = 9 \\ K - 1 = L \end{cases}$$

بتعويض L بقيمته في المعادلة الأولى نجد أن:

$$L^{\frac{2}{3}} = 9 \Rightarrow \begin{cases} L = 27 \\ K = 28 \end{cases}$$

وتكون التكاليف الكلية هي:

$$CT = K + L = 55$$

6-حساب الربح بالطريقة المباشرة هو:

$$\Pi = RT - CT$$

ومنه:

$$\Pi = (9 \times 9) - 55 = 26$$

التمرين 11:

لدينا دالة الإنتاج:

$$Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$$

إذا كان: $\begin{cases} P_K = 5 \\ P_L = 3 \end{cases}$

المطلوب:

1. -حدد الكلفة الكلية، الكلفة المتوسطة الكلية والكلفة الحدية.
2. حدد دالة عرض المؤسسة في ظل المنافسة الحرة.
3. -حدد عتبة المردودية. ما تعليقك على النتيجة.

حل التمرين 11

1-التكاليف الكلية تعبر عن الدالة $CT = f(Q)$ فيجب أن نبحث عن صيغة حتى نكتب الكلفة بدلالة الكمية. ننطلق من شرط تعظيم الربح:

$$\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}$$

ومنه:

$$K^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow K = \frac{9}{25}L$$

نعوض K بقيمته في دالة الإنتاج:

$$Q = \frac{3}{5}\sqrt{L} + \sqrt{L} = \frac{8}{5}L^{\frac{1}{2}}$$

ومنه:

$$L^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{8}Q \Rightarrow L = \frac{25}{64}Q^2$$

نكتب التكاليف الكلية:

$$CT = K.P_K + L.P_L = 5K + 3L$$

نعوض K بدلالة L من علاقة شرط التوازن:

$$CT = 5 \times \frac{9}{25}L + 3L = \frac{24}{5}L$$

نعوض هذه المرة L بدلالة Q في التكاليف الكلية:

$$CT = \frac{24}{5} \times \frac{25}{64}Q^2 = \frac{15}{8}Q^2$$

وتكون التكاليف المتوسطة الكلية هي:

$$CMT = \frac{CT}{Q} = \frac{15}{8}Q^2 \times \frac{1}{Q} = \frac{15}{8}Q$$

والتكاليف الحدية:

$$Cm = \frac{dCT}{dQ} = \frac{15}{4}Q$$

2-دالة عرض المؤسسة هي الجزء المتصاعد من الكلية الحدية وهذه الأخيرة كلها متصاعدة:

$$P = Cm \Rightarrow P = \frac{15}{4}Q$$

نحصل على دالة عرض لأن هذه الدالة تعبر عن دالة علاقة الطردية بين الكمية والسعر.

3-نحصل على عتبة المردودية عند:

$$CMT = Cm \Rightarrow \frac{15}{8}Q = \frac{15}{4}Q \Leftrightarrow Q = 0$$

هذه المؤسسة تكون دائما في حالة ربح إذا؛ وهذا لا يوجد في الواقع.

هذه الوضعية التي حصلنا عليها تبين أن الحلول الرياضة (أي المعادلات فقط) قد لا تعطي تفسيرا اقتصاديا.

تمارين مقترحة :

التمرين 12

لدينا الجدول التالي يبين مختلف تكاليف الإنتاج لمنتج ما في المدى القصير كالتالي:

Q	CF	CV	CT	CFM	CVM	CMT	Cm
1	190	100	290	190	100	290	-
2	190	130	320	95	65	160	30
3	190	150	340	63.3	50	113.3	20
4	190	200	390	47.5	50	97.5	50
5	190	260	450	38	52	90	60
6	190	360	550	31.6	60	91.6	100

المطلوب :

1. عبر في رسم بياني عن التكاليف الكلية، التكاليف الثابتة و التكاليف المتغيرة

2. ارسم بيانيا التكاليف المتغيرة المتوسطة، التكاليف الكلية المتوسطة والتكاليف الحدية

3. حدد عتبة المردودية وعتبة الغلق في هذه الفترة

التمرين 13

تنتج مؤسسة حسب دالة التكاليف التالية:

$$CT = 3Q^2 + 2Q + 10$$

Q هو حجم الإنتاج لهذه المؤسسة

المطلوب:

1. احسب التكاليف التالية: التكلفة المتوسطة الكلية ، التكلفة الحدية، التكلفة الثابتة المتوسطة، والتكلفة المتغيرة المتوسطة.
2. حدد عتبة المردودية و عتبة الغلق

2 .احسب مستوى السعر الذي تتحقق عنده مردودية هذه المؤسسة •

.(احسب مستوى السعر الذي يدفع هذه المؤسسة إلى مغادرة السوق (سعر الإغلاق •

• بافتراض أن التكلفة المتغيرة قد تضاعفت لأسباب خارجية، مع بقاء باقي العوامل ثابتة، ما هو مستوى الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح لهذه المؤسسة؟

الفصل الثالث:تمارين توازن السوق وتعظيم الربح

يعتبر السوق حلقة وصل بين المستهلكين و المنتجين، نصنف الأسواق حسب عدد المشترين وعدد البائعين لأن عدد هؤلاء هو الذي يضبط آليات تسيير الأسواق وتوازنها. فكلما كان عدد البائعين والمشترين كبيرا كلما استحال على أي منهم فرض سيطرته على السوق على عكس وجود بائع واحد أو مشتر واحد.

1. توازن السوق وتعظيم الربح في ظل المنافسة التامة

تعتبر **المنافسة التامة** النموذج المثالي لاقتصاد السوق، حيث تقوم على مبدأ عدم قدرة أي متعامل (بائع أو مشتري) على التأثير في الأسعار أو التحكم في السوق. ويتحقق هذا النموذج من خلال مجموعة من الشروط الأساسية:

.1تعدد البائعين والمشترين

وجود عدد كبير من المتعاملين بحيث يكون كل واحد منهم صغير الحجم ولا يمتلك قوة سوقية.

.2حرية الدخول والخروج من السوق

إمكانية دخول أو انسحاب المنتجين والمستهلكين من السوق دون قيود، مما يعكس مبدأ الحرية الاقتصادية.

.3حرية تنقل عناصر الإنتاج

سهولة انتقال رؤوس الأموال واليد العاملة بين القطاعات والمناطق وفقًا لمعيار الربح.

.4حرية تنقل السلع

إمكانية انتقال السلع داخل السوق دون عوائق، بما يضمن تكافؤ الفرص بين المتعاملين.

.5تجانس المنتوج

تشابه السلع بحيث يكون السعر هو العامل الوحيد في اختيار المستهلك .

.6شفافية المعلومات او حرية انتقال المعلومات

توفر المعلومات بشكل كامل ومتساوٍ لجميع المتعاملين، مما يسمح باتخاذ قرارات عقلانية.

رغم أن المنافسة التامة تمثل نموذجا نظريا مثاليا يساعد على فهم آليات السوق، إلا أن تحقق جميع شروطها في الواقع نادر جدا، مما يجعلها إطارا تحليليا أكثر من كونها واقعا عمليا.

التمرين 1

إذا كانت لدينا مؤسسة إنتاجية، تنتج وفق دالة التكاليف الكلية التالية :

$$CT = 3Q^2 + 2Q + 48$$

المطلوب:

1. ما هي الكمية التي تدخل بها هذه المؤسسة السوق ؟

2. *ما* هي الكمية التي تعظم ربحها علما أن سعر السوق يساوي 44 وحدة نقدية؟

3. أوجد دالة العرض لهذه المؤسسة ومثلها بيانيا ؟

حل التمرين 1 :

شرط تعظيم الربح في ظل المنافسة الحرة أو التامة هو:

$$P_Q = Cm$$

1 إيجاد الكمية التي تدخل بها هذه المؤسسة السوق

تتحقق هذه الكمية عند عتبة مردودية المؤسسة عندما يكون ***Cm=CMT***

لدينا:

$$Cm = \frac{dCT}{dQ} = 6Q + 2$$

$$CMT = \frac{CT}{Q} = \frac{3Q^2 + 2Q + 48}{Q}$$

في هذه العتبة المؤسسة لا تحقق أي ربح. يكون إذا لدينا $\pi_Q = 0$

$$\frac{3Q^2 + 2Q + 48}{Q} = 6Q + 2$$

$$\frac{3Q^2 + 2Q + 48}{Q} = 6Q + 2$$

$$3Q^2 + 2Q + 48 = (6Q + 2)Q$$

$$3Q^2 + 2Q + 48 - 6Q^2 - 2Q = 0$$

$$Q = 4$$

الكمية **Q =4** تناسب عتبة المردودية وتناسب السعر 26 وحدة نقدية وهي قيمة ***Cm*** عندما تكون **Q=4**. وفي هذه النقطة فإن الربح يساوي الصفر. فإذا أرادت المؤسسة تحقيق أي ربح فعليها أن تبيع بسعر يفوق 26 وحدة نقدية.

2 .الكمية التي تدخل بها هذه المؤسسة السوق لتعظم ربحها علما أن سعر السوق يساوي 44

$Cm= P_{Q_}$

$$6Q+2 =44 \rightarrow Q=7$$

الكمية التي تمكنها من تحقيق ربح هي ***Q=7*** فإن الربح الذي تحققه المؤسسة هو:

الربح هو الفرق بين الإرادات والتكاليف للمؤسسة

$$\pi = R - CT \ = QP_Q - CT$$

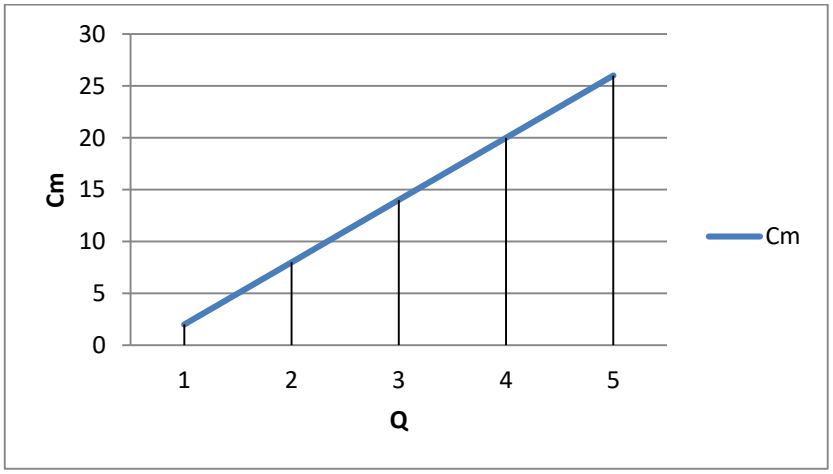
$$\pi = 7(44) - (3(49) + 2(7) + 48 \ = 99$$

عند ارتفاع سعر المنتوج 44 وحدة نقدية حققت المؤسسة ربح يقدر ب99 وحدة نقدية

3. دالة العرض هي الجزء المتصاعد أو المتزايد من الكلفة الحدية.

لدينا الكلفة الحدية: Cm = 6Q+2

Q	Cm
0	2
1	8
2	14
3	20
4	26



ملاحظة :

في الفترة القصيرة، وفي ظل سوق المنافسة الكاملة، تسعى المنشأة إلى تحقيق أقصى ربح ممكن من خلال تحديد مستوى الإنتاج الأمثل، وذلك لأن السعر يكون معطى خارجا ولا تستطيع المنشأة التأثير فيه. ومن بين شروط تعظيم الربح ما يلي:

$$\begin{cases} \pi' = 0 \\ \pi'' < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\pi}{\delta Q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta(Q \cdot P - CT)}{\delta Q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta(QP)}{\delta Q} - \frac{\delta CT}{\delta Q} = 0 \Rightarrow P - Cm = 0 \Leftrightarrow P = Cm$$

P = Cm

$$\Rightarrow \frac{\delta\pi'_{Q}}{\delta Q} \prec 0 \Leftrightarrow \frac{\delta(P - Cm)}{\delta Q} \prec 0 \Leftrightarrow \frac{\delta P}{\delta Q} - \frac{\delta Cm}{\delta Q} \prec 0 \Rightarrow 0 - C'm \prec 0 \Leftrightarrow C'm \succ 0$$

C'm > 0

أما في المدى الطويل، المنشآت التي تعمل في سوق المنافسة التامة والتي تحقق خسائر تغادر السوق، بينما دخول منشآت جديدة يحدث في حالة وجود أرباح. يؤدي هذا الدخول والخروج إلى زيادة العرض الكلي للسلعة، مما يسبب انخفاض الأسعار. ومع استمرار هذا التعديل، تتلاشى الأرباح والخسائر تدريجيا إلى أن تصل جميع المنشآت إلى نقطة التعادل.

عند هذه النقطة، يصبح الإيراد الكلي مساويًا للتكاليف الكلية، ويكون السعر مساويًا للتكلفة المتوسطة، أي: P=CMT

وبذلك يتحقق توازن السوق في المدى الطويل، حيث لا توجد حوافز لدخول أو خروج المنشآت.

التمرين 2:

لدينا 100 مستهلك متشابهين؛ و يتمتع كل منهم بدالة الطلب التالية:

$$P = -2Q + 200$$

ولدينا 1000 منتج متشابهين كذلك؛ و ينتج كل منهم حسب دالة التكاليف التالية:

$$Q = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

إذا كان $(P_K, P_L) = (10,15)$ و كانت الكلفة الكلية التي يتحملها المنتج الواحد هي 180 وحدة نقدية.

1-حدد الإنتاج الأعظم لمنتج الواحد.

2-إذا افترضنا أن كل المنتجين يعظمون إنتاجهم. حدد توازن السوق في هذه الحالة.

3-يسعى كل منتج إلى توسيع حجم إنتاجه. حدد التكاليف الكلية في المدى الطويل لكل منتج.

4-حدد الكمية التي يدخل بها منتج السوق من أجل تعظيم الربح. ماذا تلاحظ.

5-حدد العرض الفردي لكل منتج ثم العرض الكلي.

6-حدد توازن السوق من جديد. ما هي حصة كل منتج من السوق. ما هي الكمية التي تعظم الربح.

هل يعظم المنتج الربح. حدد السعر الذي يمكن المنتج من تعظيم الربح.

حل التمرين 2

1 -تعظيم الإنتاج:

$$\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{15}{10}$$

ولدينا:

$$CT = 10K + 15L$$

ومنه:

$$K = 9$$
$$L = 6$$
$$Q \approx 7,4$$

2-إذا افترضنا أن كل المنتجين يعظمون إنتاجهم فإن الإنتاج الذي يعرض في السوق يكون:

$$Q_{OG} = 1000 \times 7,4 = 7400$$

لكي يحصل التوازن في السوق يجب أن يساوي هذا العرض الكلي الطلب الكلي. أي:

$$100\left(\frac{-P+200}{2}\right) = 7400$$

وهو ما يعطينا سعر التوازن $P = 52$

3-عندما يسعى المنتج إلى توسيع حجم الإنتاج فإنه ينطلق من نقطة توازن إلى نقطة توازن أخرى ونحسب التكاليف الكلية في المدى الطويل كما فعلنا سابقا انطلاقا من هذه النقطة.

$$\begin{cases} Q = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q = 2,22L^{\frac{1}{2}} \\ K = 1,5L \end{cases}$$

نستخرج قيمة L من هذه المعادلة و نعوضها في CT بعد أن نكتب هذه بدلالة L فقط كما فعلنا سابقا. نحصل على:

$$CT = 19.92Q^2$$

4-تعظيم الربح يستدعي $P = Cm$:

$$P = Cm \Rightarrow 52 = 39,84Q$$

و تكون الكمية التي تعظم الربح هي $Q = 1,30$.

5-نعرف أن دالة العرض هي الجزء المتصاعد من الكلفة الحدية وفي هذه الحالة فإن الكلفة الكلية كلها متصاعدة. العرض الفردي هو:

$$P = 39,84Q \Rightarrow Q = \frac{P}{39,84}$$

ويكون العرض الكلي هو:

$$Q_{OG} = 1000 \times \frac{P}{39,84}$$

6-توازن السوق هو:

$$Q_{OG} = Q_{DG} \Rightarrow 1000 \times \frac{P}{39,84} = -50P + 10000$$

ونجد أن:

$$P = 133,15$$
$$Q = 3342,50$$

وهذا هو توازن السوق اللازم؛ أما في السؤال السابق فإننا افترضنا أن كل المنتجين يقدمون الإنتاج الأعظم للسوق فتم تحديد العرض بهذه الكمية وأردنا مطابقة الطلب الكلي للعرض ورأينا أن الكمية التي تعظم الربح كانت أقل بكثير من كمية الإنتاج الأعظم.

في ظل هذه المعطيات فإن حصة كل منتج من السوق هي:

$$Q_i = \frac{3342,50}{1000} = 3,34$$

لحساب الكمية التي تعظم الربح يجب أن يكون:

$$P = Cm \Rightarrow 190,43 = 39,84Q \Rightarrow Q = 3,34$$

هذه الكمية اصغر من كمية التوازن اذن المنتج لا يستطيع ذخول السوق لانه لا يمتثل لشروط ذللك

التمرين 3

يمتاز سوق السلعة X بالمنافسة التامة، وتنشط فيه 10 منشآت متشابهة.

دالة التكاليف الكلية لكل منشأة هي على الشكل التالي:

$$C_I = \frac{1}{4}X_i^2 + 5X_i + 9$$

طلب المستهلكين يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$X_D = -10P_X + 320$$

المطلوب:

1. احسب سعر وكمية التوازن في الفترة القصيرة .
2. عبّر بيانياً عن حالة التوازن .
3. احسب فائض المنتج .
4. هل سوق السلعة X مستقرة في المدى الطويل؟
5. استنتج عدد المنشآت الجديدة التي سوف تدخل إلى سوق المنافسة في الفترة الطويلة.

حل التمرين 3

1- ايجاد سعر و كمية التوازن في الفترة القصيرة :

-تحديد دالة العرض لكل منشأة

عرض المنشأة = سعر المنتوج $\Leftrightarrow C_{\mathrm{m}} = P_x$

$$C_{\mathrm{m}} = \frac{dC_T}{dx} \Longrightarrow C_{\mathrm{m}} = \frac{2}{4}x_i + 5 \Longrightarrow C_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4}x_i + 5$$

$$C_{\mathrm{m}} = P_x \Longrightarrow \frac{1}{4}x_i + 5 = P_x \Longrightarrow x_{O_i} = (P_x - 5) * 4$$

$$\Longrightarrow x_{O_i} = 4P_x - 20$$

تحديد دالة عرض السوق على السلعة X

$$x_O = \sum_{i=1}^{n} x_{O_i}$$

دالة العرض الكلي : $x_O = (4P_x - 20) * 10 \Rightarrow x_O = 40P_x - 200$

العرض = الطلب $\Leftrightarrow x_O = x_D$

$$x_O = x_D \Rightarrow 40P_x - 200 = 320 - 10P_x$$

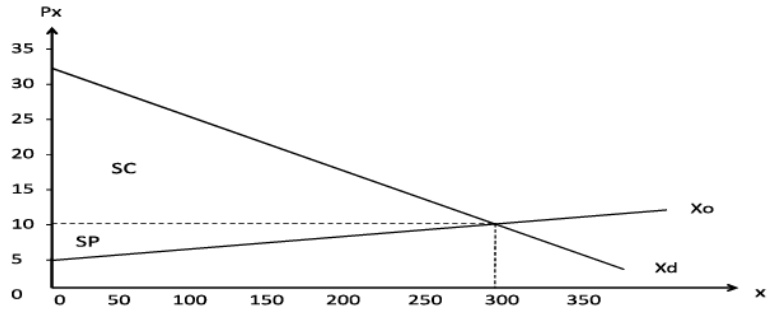
$$\Rightarrow 50P_x = 520 \Leftrightarrow \boldsymbol{P_x \approx 10}$$

$$x_{tot} = x_O = x_D \Rightarrow x_{tot} = -10(10) + 320$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_{tot} = 300}$$

2. التمثيل البياني لحالة التوازن:

$(1): x_O = 40P_x - 200$	$(2): x_D = 320 - 10\,P_x$
$x = 0 \longrightarrow P_x = 5\ u.m$	$x = 0 \longrightarrow P_x = 32\ u.m$
$x = 300 \longrightarrow P_x = 10\ u.m$	$x = 300 \longrightarrow P_x = 10\ u.m$



3. حساب فائض المنتج:

$$\text{فائض المنتج } (R_P) = \frac{\text{(سعر التوازن – أدنى سعر بيع) × كمية التوازن}}{2}$$

$$\text{فائض المنتج } (R_P) = \frac{300*(5-10)}{2} = \mathbf{750}$$

4. استقرار السوق في المدى الطويل:

في المدى الطويل الربح = 0 أي الكلفة الحدية = الكلفة المتوسطة = سعر السوق

$$\pi = 0 \longrightarrow C_m = C_M = P_x \quad \text{ou} \quad C' = \bar{C} = P_x$$

خلافا عن المدى القصير في المدى الطويل التوازن يمر بمرحلتين:

المرحلة 1: العرض = الطلب أي $x_O = x_D$

المرحلة 2: ربح المنشآت الحدية = 0.

$$\pi = 0 \longrightarrow C_M = C_m = P_x$$

$$C_M = \frac{C_T}{x} \Longrightarrow C_M = \frac{\frac{1}{4}x^2 + 5x + 9}{x} \Longrightarrow C_M = \frac{1}{4}x + 5 + \frac{9}{x}$$

$$C_m = C_M \Longrightarrow \frac{1}{2}x + 5 = \frac{1}{4}x + 5 + \frac{9}{x}$$

$$\Longrightarrow x^2 = 36$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{مقبول} \\ x = -6 & \text{مرفوض} \end{cases}$$

$$C_m = P_x \Longrightarrow P_x = \frac{1}{2}\,x + 5 \Longrightarrow P_x = \frac{1}{2}(6) + 5$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{P_x = 8}$$

$$x_{tot} = x_O = x_D \Longrightarrow x_{tot} = 320 - 10(8)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x_{tot} = 240}$$

في الفترة الطويلة المنشآت تنتج 240 وحدة من المنتوج x التي تعرضها في السوق بسعر قيمته 8ون للوحدة الواحدة.

5. استنتاج عدد المنشآت الجديدة التي سوف تدخل السوق:

$$\mathrm{n} = \frac{x_{\mathrm{tot}}}{x_{\mathrm{i}}} \Longrightarrow \mathrm{n} = \frac{240}{6} \Longrightarrow \boldsymbol{n = 40}$$

يوجد في السوق 40 منشأة تنتج نفس المنتوج x وذلك بعرض كل منشأة لـ 6 وحدات من هذا المنتوج.

التمرين 4:

لدينا دالتي العرض و الطلب على التوالي :

$\mathrm{P_X} = 20 - 2\mathrm{X}_D$ $\qquad$ $P_X = 4 + 2X_O$

مع افتراض أن السوق في حالة منافسة تامة و المطلوب إيجاد :

- كل من السعر و الكمية في حالة توازن
- حساب كل من فائض المنتج و المستهلك
- مثل دلك بيانيا

حل التمرين 4:

حساب كمية و سعر التوازن : $\mathrm{X_D}=\mathrm{X_O}$

$20 - 2\mathrm{X} = 4+2\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{X}=4$

و بتعويض قيمة X في إحدى الدالتين (العرض أو الطلب) نحصل على: $4+2(4) \Rightarrow P_X = 12um$

حساب كل من فائض المنتج والمستهلك :باستعمال المساحات المثلثية، وتستعمل هذه الطريقة فقط في حالة كون دالتي الطلب والعرض تابعان خطيان.

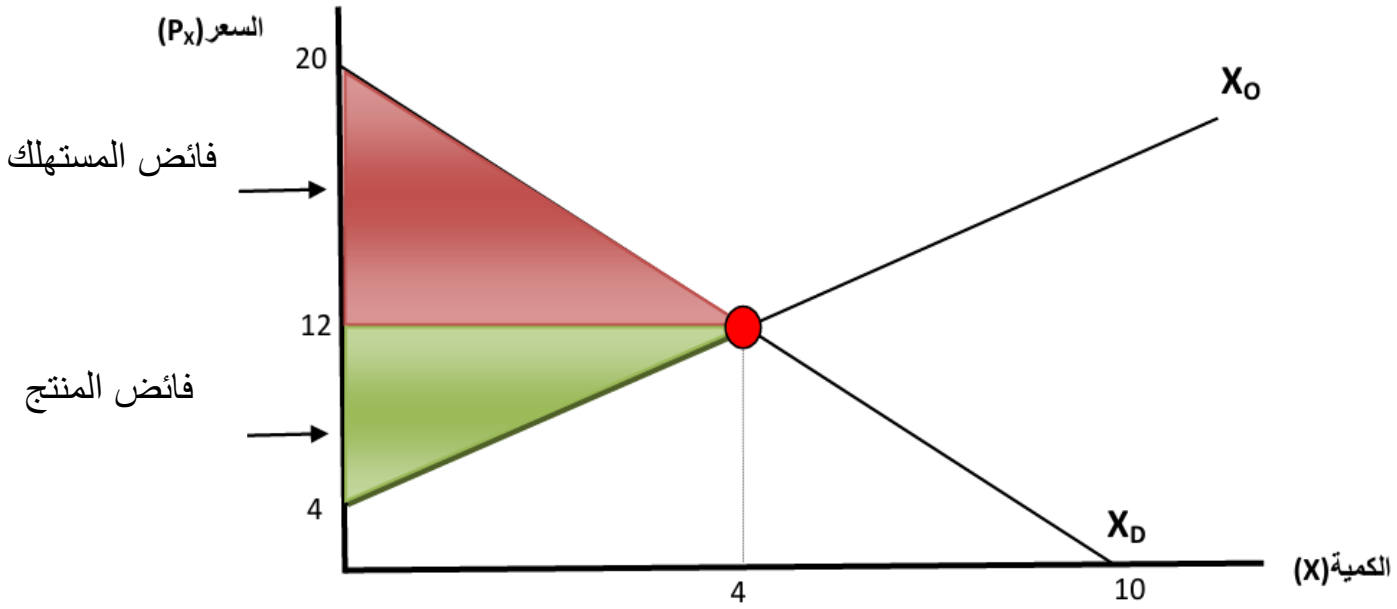
✓ فائض المنتج : مساحة المثلث السفلي، .

$$S_P = \frac{X_*.(P_* - P_{\min})}{2} \Leftrightarrow S_P = \frac{4.(12-4)}{2} \; S_P = 16$$

✓ فائض المستهلك :مساحة المثلث العلوي،

$$S_C = \frac{X_*.(P_{\max} - P_*)}{2} \Leftrightarrow S_C = \frac{4.(20-12)}{2} \; S_C = 16$$

التمثيل البياني:



التمرين 5:

***I*-لدينا 1000 مستهلك و 1000 منتج يتمتعون بدوال الطلب و العرض الفردية التالية:**

$$P = -2Q + 15$$

$$P = Q + 10$$

1-حدد كل من الطلب الكلي والعرض الكلي.

2-حدد توازن السوق.

***II*-**يريد منتجان أن يدخلان السوق و لديهما دالتي التكاليف الكلية التالية:

$$CT_A = Q_A{}^2 + Q_A + 25$$
$$CT_B = Q_B{}^2 + 4Q_B + 25$$

1-حدد شروط دخول كل منتج السوق.

2-حدد عتبة مردودية كل منتج.

3-حدد ربح كل منتج.

4-نفترض أنه تحت ظرف من الظروف(انخفاض الدخل مثلا) انخفض الطلب قبل أن يتخذ المنتج الأول قراره دخول السوق. إذا كان الطلب الجديد يساوي:

$$Q = -500P + 5000$$

هل تنصح المنتج دخول السوق. و لماذا.

حل التمرين 5

1 -لتحديد العرض الكلي و الطلب الكلي نحدد أولا العرض الفردي والطلب الفردي ثم نضرب كل منها في العدد اللازم من المنتجين أو المستهلكين.

بالنسبة للطلب لدينا:

$$P = -2Q + 15 \Rightarrow Q = \frac{-P + 15}{2}$$

و منه:

$$Q_{DG} = \frac{-P + 15}{2} \times 1000 = -500P + 7500$$

بالنسبة للعرض لدينا:

$$P = Q + 10 \Rightarrow Q = P - 10$$

و منه العرض الكلي يساوي:

$$Q_{OG} = (P - 10) \times 1000 = 1000P - 10000$$

2-توازن السوق يكون عند:

$$Q_{DG} = Q_{OG} \Rightarrow -500P + 7500 = 1000P - 10000$$

و منه سعر التوازن:

$$P = \frac{35}{3}$$

$$Q = 10000$$

أ- الشرط الذي يجب أن يدخل به المنتج A السوق هو:

$$Cm_A = P \Rightarrow 2Q_A + 1 = \frac{35}{3} \Rightarrow Q_A = 5{,}33$$

فالمنتج الأول يدخل السوق بإنتاج 5,33 وحدة.

ب- الشرط الذي يجب أن يدخل به المنتج B السوق هو:

$$Cm_B = P \Rightarrow 2Q_B + 4 = \frac{35}{3} \Rightarrow Q_B = 3{,}83$$

المنتج الثاني يجب أن يدخل السوق بكمية تساوي 3,83 وحدة.

2-عتبة مردودية كل منتج:

أ- بالنسبة للمنتج الأول:

$$Cm_A = CMT_A \Rightarrow 2Q_A + 1 = \frac{Q^2{}_A + Q_A + 25}{Q_A} \Rightarrow Q_A = 5$$

ب- بالنسبة للمنتج الثاني لا بد من:

$$Cm_B = CMT_B \Rightarrow 2Q_B - 1 = \frac{Q^2{}_B - Q_B + 25}{Q_B} \Rightarrow Q_B = 5$$

نلاحظ أن المنتجين لهما نفس عتبة المردودية.

3-المنتج B لن يحقق أي ربح لأن الكمية التي يجب أن يدخل بها السوق أقل من عتبة مردوديته. أما المنتج A فإنه سيحقق الربح.

المنتج يبيع بالسعر الذي يساوي الكلفة الحدية. يحدد كلفة المنتوج بالكلفة المتوسطة الكلية.يكون الربح الوحدوي هو الفرق بين الكلفة الحدية (أي سعر البيع) و الكلفة المتوسطة الكلية. الكلفة المتوسطة الكلية للوحدة التي يدخل بها المنتج السوق (و هي 5,33 وحدة منتجة) تساوي 11,01 وحدة نقدية. يحقق المنتج ربحا وحدويا يقدر بالفرق بين سعر البيع و الكلفة أي:

$$\Pi_u = 11,66 - 11,01 = 0,56$$

يكون الربح الإجمالي يساوي الربح الوحدوي في عدد الوحدات المباعة أي

$$\Pi = 0,65 \times 5,33 = 3,46$$

4- عندما يتغير الطلب فإن توازن السوق يتغير كذلك و يصبح لدينا:

$$(-500P + 5000 = 1000P - 10000) \Rightarrow P = 10$$

فإذا أراد أصر المنتج على دخول السوق فيجب أن يساوي دائما الكلفة الحدية بالسعر:

$$Cm_A = P \Rightarrow 2Q_A + 1 = 10 \Rightarrow Q_A = 4{,}5$$

و نلاحظ أن المنتج استقر تحت عتبة مردوديته و لن يحقق ربحا في هذه الحالة؛ فلا ننصحه بدخول السوق.

التمرين 6:

لدينا عدد من المؤسسات المتشابهة في السوق. تنتج هذه المؤسسات نفس المنتوج حسب دالة التكاليف الفردية التالية:

$$CT = 5Q^2 + 2Q + 180$$

1-حدد عتبة المردودية بالنسبة لهذه المؤسسات.

2-إذا تبين في السوق أن سعر التوازن هو 70 وحدة نقدية و أن كمية التوازن هي 7000 وحدة. ما هو عدد المؤسسات اللازم لتغطية الطلب، و ما هو ربح كل مؤسسة.

3-إذا بقيت كل الأشياء على حالها و قررت الحكومة فرض ضريبة ثابتة على كل المؤسسات العاملة في السوق؛ ما هو أثر هذه الضريبة على المؤسسات و على السوق. ما هو مستوى هذه الضريبة الذي يجعل الربح يساوي 0.

حل التمرين 6

-تحديد عتبة المردودية:

$$Cm = CMT \Rightarrow 10Q + 2 = \frac{5Q^2 + 2Q + 180}{Q}$$

$$Q = 6$$

2-لتحديد عدد المؤسسات اللازم لتغطية طلب السوق ننطلق من مسلمة أن كل مؤسسة لن تدخل السوق إلا لتعظيم الربح. تعظيم الربح يكون:

$$P = Cm \Rightarrow 10Q + 2 = 70$$

$$Q = 6{,}8$$

للتنبيه ما دمنا لا نعرف ما هي السلعة المنتجة يمكننا أن نأخذ $Q = 6,8$ بافتراض أن كميات السلعة تأخذ قيما جزئيا (إنتاج بالأمتار، اللتر...) أو نأخذ $Q = 7$ بافتراض أن السلعة المنتجة لا تأخذ إلا قيما كاملة (كراسي، طاولات، سيارات...) و منه نجد أن عدد المؤسسات هو:

$$Nbre = \frac{7000}{6,8} = 1029,41 \approx 1029$$

أو:

$$Nbre = \frac{7000}{7} = 1000$$

في بقية التمرين نأخذ $Q = 7$ لتسهيل عملية الحساب، و يكون الربح يساوي:

$$\begin{cases} \Pi = 70Q - 5Q^2 - 2Q - 180 = 51 \\ Q = 7 \end{cases}$$

3-الضريبة الثابتة تضاف إلى التكاليف الثابتة فتصبح التكاليف الكلية هي:

$$CT = 5Q^2 + 2Q + (180 + I)$$

يمثل الحرف I الضريبة الثابتة.

هذه الضريبة سترفع مستوى عتبة المردودية الذي يصبح:

$$Cm = CMT \Rightarrow 10Q + 2 = \frac{5Q^2 + 2Q + (180 + I)}{Q}$$

$$Q = \sqrt{\frac{180 + I}{5}}$$

فيتقلص هامش الربح لأن السعر لم يتغير و يتقلص كذلك ربح المؤسسة. أما إذا أردنا مستوى الضريبة الذي يجعل ربح المؤسسة يساوي 0 فيجب أن نساوي بين الكمية التي تطابق عتبة المردودية (في الحالة الثانية) مع الكمية التي تمكن من تعظيم الربح، أي:

$$\sqrt{\frac{180 + I}{5}} = 7$$

و نستنتج أن $I = 65$ ؛ و هذا هو مستوى الضريبة الذي يجعل ربح المؤسسة يساوي 0 و بالتالي فلن تتمكن من دفع الضريبة لهذا يجب مراعاة سياسة الضرائب على أداء المؤسسات

التمرين 7

لدينا اقتصاد يتكون من نوعين من المؤسسات: **A** و **B**. تنتج هذه المؤسسات نفس المنتوج حسب التكاليف الفردية التالية:

$$CT_A = Q_A^{\,2} - 10Q_A + 25$$

$$CT_B = 3Q_B^{\,2} - 5Q_B + 27$$

1-حدد عتبة مردودية مؤسسة من كل نوع.

2-حدد دالة عرض مؤسسة من كل نوع.

3-حدد العرض الإجمالي للنوعين معا بافتراض أنهما يدخلان السوق معا و أن عدد المؤسسات من النوع الأول هو 50 مؤسسة و أن عدد مؤسسات النوع الثاني يساوي 48 مؤسسة فقط (لنفترض شروط المنافسة الحرة)

4-إذا كان الطلب الإجمالي في السوق هو:

$$Q = -30P + 340$$

حدد سعر و كمية التوازن. بما تنصح كل نوع من المؤسسات. ما هو عدد المؤسسات التي تدخل السوق من كل نوع. علل إجابتك.

حل التمرين 7

-لتحديد عتبة المردودية نبحث عن تقاطع الكلفة الحدية مع الكلفة المتوسطة الكلية و يكون لدينا:

$$Cm_A = CMT_A \Rightarrow 2Q_A - 10 = \frac{Q_A^{\,2} - 10Q_A + 25}{Q} \Rightarrow Q_A = 5$$

$$Cm_B = CMT_B \Rightarrow 6Q_B - 5 = \frac{3Q_B^{\,2} - 5Q_B + 27}{Q_B} \Rightarrow Q_B = 3$$

2-دالة العرض هي الجزء المتصاعد من الكلفة الحدية. و لنعرف الجزء المتصاعد من الكلفة الحدية نبحث عن المشتقة الأولى حتى نحدد النقطة الدنيا و تكون هذه النقطة بداية لدالة العرض. بالنسبة للأمثلة التي بين يدينا نلاحظ أن المشتقة الأولى للكلفة الحدية في الحالتين لا تساوي 0 و بالتالي فأن دالة العرض للمؤسسة الواحدة من كل نوع هي الكلفة الحدية كلها و منه نكتب:

$$P = 2Q_A - 10 \Rightarrow Q_A = \frac{P+10}{2}$$

$$P = 6Q_B - 5 \Rightarrow Q_B = \frac{P+5}{6}$$

3-العرض الكلي بالنسبة لكل نوع من المؤسسات يساوي الكمية المعروضة من طرف المؤسسة الواحدة -و هي ما وجدناه في السؤال السابق- مضروب في عدد المؤسسات من كل نوع و هو ما يعطينا:

$$Q_{GA} = \frac{P+10}{2} \times 25 = 12{,}5P + 125$$

$$Q_{GB} = \frac{P+5}{6} \times 18 = 3P + 15$$

و يكون العرض الكلي يساوي عرض النوعين معا و هو:

$$Q = 15{,}5P + 140$$

4-التوازن معناه تساوي العرض بالطلب:

$$15{,}5P + 140 = -33P + 340$$

$$\begin{cases} P = \dfrac{200}{45{,}5} = 4{,}39 \\ Q = 208{,}3 \end{cases}$$

المؤسسات لا يمكن أن تدخل السوق إلا بشرط تساوي الكلفة الحدية لكل منها مع سعر السوق وهو ما يعطينا بالنسبة للنوعين:

$$Cm_A = P \Rightarrow 2Q - 10 = 4{,}39 \Rightarrow Q_A = 7{,}19$$

$$Cm_B = P \Rightarrow 6Q_B - 5 = 4{,}39 \Rightarrow Q_B = 1{,}56$$

و نلاحظ أن المؤسسات من النوع **A** تدخل كل منها بكمية أكبر من الكمية التي تناسب عتبة المردودية فهذه المؤسسات ستحقق ربحا مؤكدا لأن تكون قد دخلت مرحلة المردودية. أما بالنسبة للمؤسسات من النوع **B** فإننا نلاحظ أن المكية التي ستدخل بها إلى السوق هي أقل من الكمية من الكمية التي تمكنها من عتبة المردودية و بالتالي فإنها لن تحقق أي ربح و هذا كذلك أكيد ما دامت لم تدخل مجال المردودية. فالمؤسسات من النوع الثاني ننصحها ألا تدخل السوق.

من ناحية أخرى نلاحظ أننا لو قسمنا الكمية اللازمة لتوازن السوق على الكمية التي تدخل بها كل مؤسسة من النوع الأول فإننا نحتاج إلى 28 مؤسسة لتغطية السوق و لا يوجد إلا 25 مؤسسة و يكون لدينا عجز يقدر بما يعادل إنتاج 3 مؤسسات؛ و سيجلب هذا العجز بالضرورة دخول مؤسسات أخرى.

تمارين : توازن السوق في حالة الاحتكار

التمرين 8

لدينا محتكر ينتج حسب دالة التكاليف الكلية التالية:

$$CT = Q^2 - 14Q + 100$$

و يواجه طلبا في السوق يقدر:

$$P = -2Q + 10$$

1-حدد شروط تعظيم ربح هذا المحتكر. حدد الكمية التي يعرضها في السوق و سعر البيع.

2-يريد هذا المحتكر أن يغير سعر البيع. ما هي الشروط التي يجب أن يتقيد بها. حدد المجال يمكن للمحتكر أن يغير فيه سعر البيع.

3-أحسب مرونة الطلب في النقطة $P = 5$ و في النقطة $P = 10$. ماذا تلاحظ.

4-في نظرك بهذه المعطيات هل يتمكن هذا المنتج فعلا من تحقيق أي ربح.علل إجابتك.

حل التمرين 8

-شروط تعظيم الربح هي:

$$Rm = Cm$$

لدينا:

$$RT = (-2Q + 10)Q \Rightarrow Rm = -4Q + 10$$

$$CT = Q^2 - 14Q + 100 \Rightarrow Cm = 2Q - 14$$

و منه:

$$-4Q + 10 = 2Q + 14 \Rightarrow Q = 4$$

و يكون سعر البيع هو:

$$P = -(2 \times 4) + 10 = 2$$

2-الشرط الذي يجب أن يراعيه المنتج عندما يريد تغيير السعر هو أن يقع في المجال المناسب و الذي يحده من الأسفل $Rm = 0$ و كحد أقصى $Rm = P$:

$$Rm = -4Q + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q = 2{,}5 \\ P = 5 \end{cases}$$

$$Rm = P \Rightarrow \begin{cases} Q = 0 \\ P = 10 \end{cases}$$

فالسعر يجب أن يكون محصورا بين 5 و 10 وحدات نقدية.

3-حساب مرونة الطلب:

أ-عند $P = 5$:

$$Ed = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -0{,}5 \times \frac{5}{2.5} = -1$$

ب-عند $P = 10$ نأخذ $P = 9{,}99$ لأن المرونة لن تكون معرفة في الحد الأعلى للسعر الذي هو 10:

$$Ed = -0{,}5 \times \frac{9.99}{0.005} = -999$$

ما يجب أن نلاحظه هو أنه في المجال الذي يتحدد فيه العسر تكون المرونة أكبر من 1 إذا أخذناه بالقيمة المطلقة.

4-لمعرفة هل هي الوضعية تمكن المنتج بالدخول إلى السوق نحسب عتبة مردوديته، فيكون:

$$CMT = Cm \Rightarrow Q^2 - 14Q + 100 = 2Q^2 - 14Q \Rightarrow Q = 10$$

و نلاحظ أنه حتى لو تم تحديد السعر في المجال اللازم و هو ما بين 5 و 10 وحدات نقدية فإن المنتج لن يحقق ربحا لأن عتبة المردودية مرتفعة جدا. فلا يوجد تطابق بين معطيات السوق و ظروف إنتاج المحتكر و قد يرجع هذا لأحد السببين:

أ-تكون تكاليف المنتج باهضة و يجب أن يخفض منها حتى تتطابق ظروف الإنتاج مع السوق.

ب-إن الطلب في هذا السوق ضعيف بالنسبة لهذا المنتج

التمريـن 9:

لدينا محتكر ينتج حسب دالة التكاليف الكلية التالية:

$$CT = Q^2 + 3Q + 36$$

كلف خبيرا بدراسة السوق وتبين أن الطلب على منتوج المحتكر يكون حسب دالة الطلب:

$$P = -2Q + 15$$

1-حدد عتبة مردودية هذا المنتج.

2-حدد ربح المنتج.

3-بعد أن حسب المنتج الربح المتوقع وجده سالبا فطلب من الخبير التأكد من نتائج دراسته، فوجد هذا الأخير أن هناك خطأ مطبعي في التقرير الذي سلمه للمنتج و صلحه فأصبح دالة الطلب هي:

$P = -2Q + 51$ فهل هذا صحيح؟

حل التمرين 9

$$CT = Q^2 + 3Q + 36$$

-عتبة المردودية هي:

$$Cm = CMT \Rightarrow Q^2 + 3Q + 36 = 2Q^2 + 3Q \Rightarrow Q = 6$$

2-لتحديد ربح المنتج نبحث عن شروط تعظيم الربح وهي:

$$Rm = Cm$$

لدينا:

$$RT = PQ = (-2Q + 15)Q = -2Q^2 + 15Q$$

و منه:

$$Rm = -4Q + 15$$

و بالتالي: الارادات الحدية تساوي التكاليف الحدية

$$Rm = Cm \Rightarrow -4Q + 15 = 2Q + 3 \Rightarrow Q = 2$$

نلاحظ أن هذه الكمية التي سيدخل بها المنتج إلى السوق أقل من الكمية التي تناسب عتبة المردودية و بالتالي فإن المنتج لن يحقق ربحا و إنما خسارة.

3-لحساب ربح المحتكر للمرة الثانية بعدما أن راجع الخبير نتائج دراسته ترجع كذلك إلى شروط دخول السوق، فتكتب:

$$Rm = Cm \Rightarrow -4Q + 51 = 2Q + 3 \Rightarrow Q = 8$$

و نلاحظ أن الكمية التي سيدخل بها المنتج إلى السوق أكبر من الكمية التي تناسب عتبة المردودية؛ و يكون السعر الذي يبيع به المنتج هو:

$$P = (-2 \times 8) + 51 = 35$$

فيحقق ربحا وحدويا يساوي الفرق بين هذا السعر و الكلفة المتوسطة الكلية للوحدة 8 و هي:

$$CMT(Q = 8) = \frac{8^2 + (3 \times 8) + 36}{8} = 15{,}5$$

و يكون الربح الإجمالي يساوي:

$$\Pi = (35 - 15{,}5) \times 8 = 156$$

التمرين 10:

لدينا مؤسسة تنتج السلعة X حسب دالة الإنتاج التالية:

$$Q = 4K^{\frac{3}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

1-إذا كان $P_K = 1$ و $P_L = 9$ و كان توازن المنتج يحدث عندما يكون الإنتاج يساوي 2245 وحدة منتجة و يدفع المنتج ضريبة ثابتة على الإنتاج تساوي 10 وحدات نقدية، ما هي الكميات التي سيستعملها المنتج من عنصري الإنتاج؛ و ما هي الكلفة اللازمة.

2-احسب كل من الكلفة المتوسط الكلية و الكلفة الحدية و بين عتبة المردودية.

3-إذا تمت مضاعفة الكميات المستعملة من عنصري الإنتاج مع ثبات سعريهما؛ استنتج حجم الإنتاج الذي يحصل عليه المنتج.

4-حدد مسار توسع هذه المؤسسة.

التمرين 10:

شركة احتكارية تنتج حسب دالة التكاليف المتوسطة الكلية التالية:

$$CMT = 3Q + 10 + \frac{81}{Q}$$

قامت هذه الشركة بدراسة السوق و تبين أن الطلب على منتوجها يتبع الدالة:

$$Q = \frac{-P + 16}{2}$$

1-حدد شرط تعظيم ربح هذه المؤسسة.

2-حدد ربحها الكلي حسابيا و بيانيا.

3-بين المجال الذي يمكنها فيه تحديد السعر. ماذا تلاحظ. لماذا حقق هذا المحتكر ربحا سالبا.

حل التمرين 10:

-نحسب أولا التكاليف الكلية:

$$CT = CMT \times Q \Rightarrow CT = 3Q^2 + 10Q + 81$$

شرط تعظيم الربح في حالة الاحتكار هو $Rm = Cm$. نحسب RT ثم Rm و Cm.

$$RT = PQ \Rightarrow RT = -2Q^2 + 16Q$$

$$Rm = -4Q + 16$$

$$Cm = 6Q + 10$$

$$Rm = Cm \Rightarrow -4Q + 16 = 6Q + 10$$

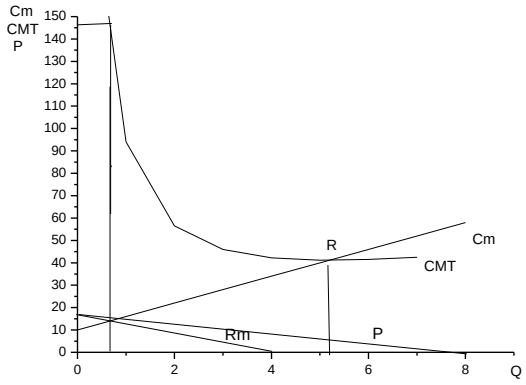
$$Q = 0,6$$
$$P = 14,8$$

2- الربح حسابيا:

$$\Pi = RT - CT$$

$$\begin{cases} \Pi = PQ - 3Q^2 - 10Q - 81 = -79,2 \\ P = 14,8 \\ Q = 0,6 \end{cases}$$

الربح بيانيا:



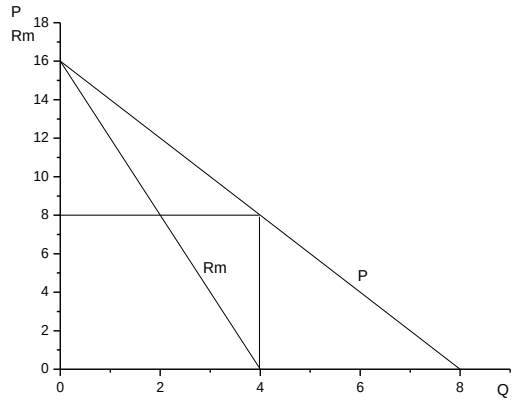
نلاحظ أن الكمية التي يشترط أنها تعظم الربح أقل من الكمية التي تناسب عتبة المردودية مما يدل على أن المؤسسة في حالة خسارة و ليس في حالة ربح كما نلاحظ أنه عند الكمية التي يشترط أنها تعظم الربح أي $Q = 0,6$ الكلفة تساوي ما يقارب 146,8 (نقرأها على منحنى CMT) و أن سعر البيع يساوي 14,8 (نقرأه على المستقيم P عندما يكون $Cm = Rm$) وتكون الخسارة على الوحدة هي الفرق بين سعر البيع والكلفة أي:

$$14,8 - 146,8 = -132$$

و نعمم الخسارة الوحدوية على باقي الوحدات فتكون الخسارة هي:

$$-132 \times 0,6 = -79,2$$

3-المجال الذي يمكن فيه تحديد السعر نبينه على الرسم التالي:



المجال الذي يمكن فيه تحديد السعر هو من 8 وحدات نقدية (كحد أدنى و يحقق المنتج إيرادا حديا يساوي 0) إلى 16 وحدة نقدية (كحد أقصى وبيع المنتج كمية تساوي 0). نلاحظ أن السعر الذي حدده المحتكر ب 14,8 ينتمي إلى المجال المقبول لكن يجب على المنتج أن يتأكد من أن سعر البيع أكبر من الكلفة المتوسطة الكلية. يجب أن يراعي الشرطين معا

التمرين 11:

محتكر ينتج حسب دالة التكاليف الكلية التالية:

$$CT = Q^2 + 2Q + 25$$

يريد هذا المحتكر أن يطبق سياسة أسعار تفاضلية بتقسيم السوق إلى مساحتين سوقيتين هما $M1$ و $M2$ شريطة أن يبيع في المساحة الأولى ثلث الإنتاج الكلي. قام بدراسة هذه المساحة و تبين أن الطلب على منتوجة هو:

$$P_1 = -2Q_1 + 32$$

1-حدد الكمية و السعر في السوق الأول.

2-حدد الكمية الكلية التي يبيعها المحتكر في السوقين و استنتج الكمية التي يبيعها في السوق الثاني.

3-ما هو الحد الأدنى للسعر في السوق الثاني حتى يضمن المنتج حدا أدنى من الربح.

حل التمرين 11 :

-لتحديد الكمية التي يبيعها في كل مساحة أو سوق نرجع إلى توازن المنتج في السوقين. لدينا:

$$Rm_1 = Rm_2$$

نحسب أولا الإيراد في كل سوق:

$$RT_1 = P_1 Q_1$$

و نعلم أن الكمية التي يريد المحتكر أن يبيعها في السوق الأول هي ثلث الكمية الكلية. نأخذ إذا $Q_1 = \frac{1}{3}Q$ و نبحث عن شرط تعظيم الربح في السوق الأول. لدينا $Rm_1 = Cm$:

$$RT_1 = P_1 Q_1 = (-2Q_1 + 32)Q_1$$

$$RT_1 = -2Q_1^{\,2} + 32Q_1 \Rightarrow Rm_1 = -4Q_1 + 32$$

$$CT = Q^2 + 2Q + 25 \Rightarrow Cm = 2Q + 2$$

$$Rm_1 = Cm \Rightarrow -4Q_1 + 32 = 2Q + 2$$

نعوض $Q = 3Q_1$ (أو $Q_1 = \frac{1}{3}Q$):

$$-4Q_1 + 32 = 6Q_1 + 2 \Rightarrow Q_1 = 3$$

ومنه نستنتج قيمة P_1 :

$$P_1 = (-2)\times 3 + 32 = 26$$

2-الكمية الكلية التي يبيعها المنتج في السوقين هي: $Q = 3Q_1 = 9$

و نستنتج أن الكمية التي يبعها في السوق الثانية هي 6 وحدات أي $\frac{2}{3}$ الكمية الكلية.

3-لمعرفة الحد الأدنى للسعر في السوق الثاني الذي يضمن حدا أدنى من الربح نحسب الربح الكلي:

$$\Pi = RT_1 + RT_2 - CT$$

نحسب CT و RT_1 لأننا نعرف قيم Q، Q_1 و P_1 :

$$CT = 9^2 + (2\times 9) + 25 = 124$$

$$RT_1 = 26\times 3 = 78$$

بالنسبة ل RT_2 بما أننا لا نعرف إلا Q_2 يكون لدينا:

$$RT_2 = 6P_2$$

يصبح الربح الكلي يساوي:

$$\Pi = 78 + 6P_2 - 124$$

لكي يضمن المنتج حدا أدنى من الربح يجب أن يكون $\Pi \succ 0$ أي:

$$78 + 6P_2 - 124 \succ 0 \Rightarrow P_2 \succ \frac{46}{6}$$

التمرين 12:

لدينا محتكر يواجه دالة الطلب الكلي التالية: $P=-2Q+10$. حسب مرونة الطلب السعرية و وجدها $E_d=-1,5$.

1-حدد السعر و الكمية المناسبين لهذه المرونة. تأكد من أن هذا السعر ينتمي إلى المجال المقبول.

2-إذا كانت دالة التكاليف الكلية لهذا المحتكر هي: $CT=3Q^2-10Q+2$ ، ما هي الكمية التي تعظم الربح. أحسب الربح.

التمرين 12

-نكتب دالة الطلب المباشرة:

$$P=-2Q+10 \Rightarrow Q=-0,5P+5$$

و لدينا المرونة:

$$E_d=\frac{dQ}{dP}\times\frac{P}{Q}=-1,5$$

أي:

$$E_d=-0,5\times\frac{P}{Q}=-1,5$$

و نجد:

$$P=3Q$$

نشكل جملة معادلتين و نجد:

$$\begin{cases}P=-2Q+10\\P=3Q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q=2\\P=6\end{cases}$$

المجال المقبول لتحديد السعر لدى المحتكر، في هذه الحالة، يكون كالتالي: $5 \prec P \prec 10$ و قيمة السعر التي وجدناها تنتمي لهذا المجال و المنتج سيحقق الربح (شريطة مراعاة عتبة المردودية).

2- شرط تعظيم الربح هو تساوي الكلفة الحدية مع الإيراد الحدي لأننا في حالة احتكار.

نبحث عن الإيراد الحدي:

$$RT = (-2Q + 10)Q \Rightarrow Rm = -4Q + 10$$

نبحث عن الكلفة الحدية:

$$CT = 3Q^2 - 10Q + 2 \Rightarrow Cm = 6Q - 10$$

و منه:

$$Rm = Cm \Rightarrow -4Q + 10 = 6Q + 10$$

و نجد:

$$\begin{cases} Q = 2 \\ P = 6 \end{cases}$$

و يكون الربح:

$$\Pi = (6 \times 2) - \left[(3 \times 2^2) - (10 \times 2) + 2\right] = 18$$

التمرين:12

تنتج نفس السلعة حسب دوال التكاليف الكلية التالية:**C** و **B**، **A**لدينا ثلاثة مؤسسات

$$CT_A = Q_A{}^2 + 2Q_A + 25$$

$$CT_B = 2Q_B{}^2 + 10Q_B + 72$$

$$CT_C = Q_C{}^2 + 12Q_C + 98$$

1-حدد عتبة مردودية كل مؤسسة.

2-حدد العرض الكلي إذا دخل السوق 10 مؤسسات من كل نوع.

3-إذا كان الطلب الكلي يساوي:

$$Q = -2P + 36$$

حدد ربح كل مؤسسة. ماذا نلاحظ.

4-نفترض أن الدولة تتدخل على شكل تحويلات[1] للمواطنين من أجل تدعيم الاستهلاك؛ فيرتفع الطلب حسب الدالة:

$$Q = \frac{-P + 5565}{60}$$

أحسب التوازن الجديد للسوق و حدد الربح الذي تحققه كل مؤسسة. هل يستوعب السوق كل المؤسسات. ما هي المؤسسات التي تبقى في السوق. ما هو تقيم سياسة الدعم الحكومي للاستهلاك.

حل التمرين 12 :

-حساب عتبات المردودية للمؤسسات الثلاثة:

$$CMT_A = Cm_A \Rightarrow \frac{{Q_A}^2 + 2Q_A + 25}{Q_A} = Q_A + 2 \quad (1)$$
$$CMT_B = Cm_B \Rightarrow \frac{2{Q_B}^2 + 10Q_B + 72}{Q_B} = 4Q_B + 10 \quad (2)$$
$$CMT_C = Cm_C \Rightarrow \frac{{Q_C}^2 + 12Q_C + 98}{Q_C} = 2Q_C + 12 \quad (3)$$

ومنه:

$$(1) \Rightarrow Q_A = 5$$
$$(2) \Rightarrow Q_B = 6$$
$$(3) \Rightarrow Q_C = 7$$

2-نبحث أولا عن العرض الفردي لكل مؤسسة ثم عن عرض كل نوع و أخيرا عن العرض الكلي للأنواع الثلاث معا.

$$Cm_A = P = 2Q_A + 2 \Rightarrow Q_A = \frac{P-2}{2}$$
$$Cm_B = P = 4Q_B + 10 \Rightarrow Q_B = \frac{P-10}{4}$$
$$Cm_C = P = 2Q_C + 12 \Rightarrow Q_C = \frac{P-12}{2}$$

العرض الكلي هو:

$$Q_{OG} = 10Q_A + 10Q_B + 10Q_C$$
$$= 10\left(\frac{P-2}{2} + \frac{P-10}{4} + \frac{P-12}{2}\right)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على:

$$Q_{OG} = 5 \times \frac{5P-38}{2}$$

3-لحساب الربح يجب أن نعرف سعر البيع و الكمية التي تبيعها كل مؤسسة. بما أنه لدينا 30 مؤسسة عاملة في السوق نعتبر أننا في حالة منافسة حرة؛ و يتعين أولا البحث عن توازن السوق حتى تمتثل كل المؤسسات لقواعد السوق.

$$Q_{OG} = Q_{DG} \Rightarrow \frac{25P-190}{2} = -2P + 36$$

و نجد أن:

$$P \approx 9$$
$$Q \approx 18$$

لحساب ربح مؤسسة من كل نوع يجب أن نساوي بين الكلفة الحدية لكل منها و سعر السوق حتى نحدد الكمية التي تدخل بها كل مؤسسة السوق من أجل تعظيم الربح.

$$Cm_A = P \Rightarrow 2Q_A + 2 = 9(1)$$
$$Cm_B = P \Rightarrow 4Q_B + 10 = 9(2)$$
$$Cm_C = P \Rightarrow 2Q_C + 12 = 9(3)$$

و نستنتج أن:

$$(1) \Rightarrow Q_A = 3,5$$
$$(2) \Rightarrow Q_B = -0,25$$
$$(3) \Rightarrow Q_C = -1,5$$

إذا قارننا هذه الكميات بعتبات المردودية للمؤسسات المختلفة نلاحظ أنه ما من مؤسسة تحقق الربح لأن الطلب ضعيف. فالمؤسسات ستعرض 80 وحدة لكن الطلب الكلى لا يتعدى 18 وحدات.

4- نحدد توازن السوق من جديد. العرض الكلي لم يتغير وتغير الطلب الكلي:

$$\frac{25P - 190}{2} = -\frac{1}{60}P + 5$$

نجد أن:

$$P = 15$$
$$Q = 92,5$$

نعيد حساب تعظيم الربح للمؤسسات من الأنواع الثلاثة:

$$Cm_A = P \Rightarrow 2Q_A + 2 = 15$$
$$Cm_B = P \Rightarrow 4Q_B + 10 = 15$$
$$Cm_c = P \Rightarrow 2Q_c + 12 = 15$$

ونجد أن:

$$Q_A = 6,5$$
$$Q_B = 1,25$$
$$Q_C = 1,5$$

نلاحظ أن الكمية التي تمكن من تعظيم الربح بالنسبة للمؤسسات من نوع **A** أكبر من الكمية التي تناسب عتبة مردوديتها. هذه المؤسسات ستحقق ربحا و تدخل كلها السوق. أما فيما يخص النوعين**B** و**C** فإنهما لا يدخلان السوق لكون الكمية التي تمكن من تعظيم الربح أقل من الكمية التي تطابق عتبة المردودية؛ و يمكننا أن نسمح لهما بدخول السوق ما لم يبلغا عتبة الإغلاق. و في الختام نلاحظ أن العدم الحكومي للاستهلاك أنقذ المؤسسات من النوع الأول لكن لم يكن له أي أثر على النوعين الآخرين ربما لأن وضعيتهما سيئة جدا.

نماذج احتكار القلة:

هناك عدة نماذج للاحتكار الثنائي حسب السياسات المختلفة للمحتكرين و التي تتراوح بين التجاهل و التصادم من جهة و محاولة التفاهم من جهة أخرى.

نموذج COURNOT يعبر عن سياسة التجاهل و التصادم. كل محتكر يتصرف كأنه وحدة في السوق و لا يأخذ بعين الاعتبار المحتكر الآخر؛ ويسعى إلى تعظيم ربحه مما يؤدي بالضرورة إلى تصادم المصالح.

نموذجSWEEZY هو المثل لسياسة تفاهم المحتكرين فيها يتعلق بتقسيم السوق. و قد تحدث سياسة التفاهم بعد التصادم.

هناك نموذج آخر للتفاهم هو نموذج STACKELGREG. في هذا النموذج يكون أحد المحتكرتين هو المحور الأساسي و يتصرف الآخر تبعا له. يحدد المحور الكمية التي يعرضها في السوق من أجل تعظيم

ربحه ويقوم الثاني بتغطية الباقي. يتشكل المحور على أساس المحتكر الأسبق لأنه أدرى بحال السوق مثلا و يكون المحتكر الهادف في السوق هو التابع. و قد يتشكل المحور على أساس المحتكر الهادف في السوق لأنه قد يدخل بقوة كأن يدخل بطريقة إنتاج أحسن، و بتكنولوجيا متطورا أو تنظيم

محكم... فلن يسع المحتكر الأسبق إلا أن يكون تابعا و إلا سيقصيه المحتكر الهادف في السوق لأنه أقوى منه و أكثر منافسة.

1-نموذج COURNOT.

نموذج كورنو يعتمد على سياسة التجاهل. كل محتكر يبحث عن تعظيم ربحه دون أن يلقي بالا للآخر. يواجه المحتكرتان سوقا واحدا؛ فيكون الطلب واحد في السوق ويلبي كل منهما جزءا من الطلب الكلي للسوق. إذا كانت لدينا دالة الطلب الكلى في السوق التالية:

$$P = aQ + b$$

فالكمية Q يجب أن تتوزع بين الشركتين الاحتكاريتين بحيث تسوق الأولى الكمية Q_1 و تسوق الثانية الكمية Q_2. وكل منهما تبحث عن تعظيم ربحها. فكيف يتم إذا اقتسام السوق؛ هذا هو السؤال المطروح.

نموذج COURNOT كما جاء في صيغته الأصلية سنة 1838 لم يأخذ بعين الاعتبار التكاليف.لهذا عندما نحسب الربح فإننا لن نطرح التكاليف من الإيرادات (CT=0) و يكون ربح الشركة الاحتكارية الأولى هو:

$$\Pi_1 = PQ_1$$

ربح الشركة الاحتكارية الثانية هو:

$$\Pi_2 = PQ_2$$

تنبيه:المحتكران يبيعان نفس المنتوج بنفس السعر P.

نعوض السعر P بقيمته و نحسب ربح كل محتكر:

$$\Pi_1 = (aQ + b)Q_1$$

نعوض: $Q = Q_1 + Q_2$

$$\Pi_1 = [a(Q_1 + Q_2) + b]Q_1$$

$$\Pi_1 = aQ_1^{\,2} + aQ_1Q_2 + bQ_1$$

نبحث عن تعظيم الربح:

$$Max\Pi_1 \Leftrightarrow \frac{d\Pi_1}{dQ_1} = 2aQ_1 + aQ_2 + b = 0(1)$$

و يكون ربح المحتكر الثاني هو:

$$\Pi_2 = PQ_2$$

$$\Pi_{.2} = [a(Q_1 + Q_2) + b]Q_2$$

$$\Pi_2 = aQ_1Q_2 + aQ_2^{\,2} + bQ_2$$

$$Max\Pi_2 \Leftrightarrow \frac{d\Pi_2}{dQ_2} = 2aQ_2 + aQ_1 + b = 0(2)$$

نبحث عن حل مجموعة معادلتين:

$$2aQ_1 + aQ_2 + b = 0(1)$$

$$aQ_1 + 2aQ_2 + b = 0(2)$$

نجد أن:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{b}{3a}$$

$$Q = \frac{2b}{3a}$$

$$P = \frac{b}{3}$$

تمرين 13:

لدينا شركتان محتكرتان تواجهان طلبا في السوق بقدر ب: $P = -2Q + 50$

كيف يتم اقتسام السوق بين الشركتين حسب نموذج COURNOT الأصلي:

حل التمرين 13:

$$\Pi_1 = PQ_1 = (-2Q + 50)Q_1$$

$$\Pi_1 = [-2(Q_1 + Q_2) + 50]Q_1$$

$$\Pi_1 = -2Q_1^{\,2} - 2Q_1Q_2 + 50Q_1$$

$$Max\Pi_1 = \frac{dPQ_1}{dQ_1} = -4Q_1 - 2Q_2 + 50$$

$$4Q_1 + 2Q_2 = 50(1)$$

نبحث عن تعظيم ربح المحتكر الثاني و بنفس الطريقة نجد:

$$4Q_2 + 2Q_1 = 50(2)$$

نبحث عن حل جملة المعادلتين و نجد:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{50}{6}$$

$$Q = \frac{50}{3}$$

$$P = \frac{50}{3}$$

نلاحظ أن سعر السوق هو $\frac{50}{3}$ وحدة نقدية و الكمية الإجمالية المباعة في السوق هي $\frac{50}{3}$ وحدة و يقتسم المحتكران السوق بالتساوي فتكون حصة كل واحد منهما هي $\frac{50}{6}$ وحدة .

هذا هو النموذج الأصلي؛ و يمكننا أن ندمج التكاليف و يكون الحل الرياضي بنفس الطريقة لكن النتائج بطبيعة الحال ستختلف. سنرى هذا في التطبيقات.

2-نموذجSTACKELBERG:

في هذا النموذج لدينا مؤسستان محتكرتين إحداهما تكون محورا والأخرى تابعة. المؤسسة المحورية هي التي تحدد الكمية التي تدخل بها السوق من أجل تعظيم ربحها و التابعة تدخل السوق حسب الحصة التي تترك لها. نفترض في هذا النموذج أن المؤسسة المحورية تعرف تصرف المؤسسة التابعة و أن المؤسسة التابعة تعرف كذلك تصرف المؤسسة المحورية. نكتب دالة الطلب بدلالة الكمية التي سيعرضها المحور فقط. يتم تحديد حصته من السوق ثم تحدد حصة التابع.

التمرين 14:

لدينا مؤسستان A و B تحتكران سوقا ما و تنتجان حسب التكاليف الكلية التالية:

$$CT_A = 2Q_A^{\ 2} + 3Q_A + 25$$

$$CT_B = Q_B^{\ 2} + 5Q_B + 16$$

و أن الطلب في السوق هو:

$$P = -2Q + 10$$

الكمية الكلية التي تعرض في السوق هي:

$$Q = Q_A + Q_B$$

حل التمرين 14:

كل مؤسسة تدخل السوق من أجل تعظيم ربحها؛ و بما أن المؤسستين محتكرتين فإن شرط تعظيم ربح كل منهما هو على التوالي:

$$Cm_A = Rm_A$$

$$Cm_B = Rm_B$$

يكون لدينا بالنسبة للمحتكر A :

$$RT_A = P.Q_A = \left|-2\left(Q_A + Q_B\right) + 10\right|Q_A$$

$$Rm_A = -4Q_A - 2Q_B + 10$$

$$Rm_A = Cm_A \Rightarrow -4Q_A - 2Q_B + 10 = 4Q_A + 3$$

$$Q_A = \frac{-2Q_B + 7}{8}$$

و تسمى هذه المعادلة معادلة تصرف المحتكر A.

أما فيما يتعلق بالمحتكر B يكون عندنا:

$$RT_B = P.Q_B = \left[-2(Q_A + Q_B) + 10\right]Q_B$$

$$Rm_B = -4Q_B - 2Q_A + 10$$

$$Rm_B = Cm_B \Rightarrow -4Q_B - 2Q_A + 10 = 2Q_B + 5$$

$$Q_B = \frac{-2Q_A + 5}{6}$$

و تعبر هذه المعادلة عن تصرف المحتكر B.

نفترض أن المؤسسة A هي المحور:

هذا يعني أن المحتكر A يعرف معادلة تصرف المحتكر B. فالمحتكر A سيأخذ بالحسبان تصرف المحتكر B في إستراتيجيته. نكتب دالة الطلب بالنسبة للكمية Q_A فقط و ذلك بتعويض Q_B بقيمتها:

$$P = -2(Q_A + Q_B) + 10 = 2 - \left(Q_A + \frac{-2Q_A + 5}{6}\right)$$

$$P = \frac{-4Q_A + 25}{3}$$

بعد ذلك نبحث عن شرط تعظيم ربح المؤسسة A و هو تساوي الإيراد الحدي للمؤسسة A مع كلفتها الحدية. و يكون لدينا:

$$RT_A = P.Q_A = \frac{-4Q_A + 25}{3} \times Q_A$$

$$Rm_A = \frac{-8Q_A + 25}{3}$$

$$Rm_A = Cm_A \Rightarrow \frac{-8Q_A + 25}{3} = 4Q_A + 3$$

$$Q_A = 0{,}80$$

و هكذا تحدد المؤسسة A الكمية التي تدخل بها إلى السوق لأنها المحور و يبقى على المؤسسة B أن تحدد الكمية التي ستدخل بها تبعا لما حددته A و تكون، بعد أن نعوض Q_A بقيمة:

$$Q_B = \frac{3{,}4}{6} \approx 0{,}56$$

و تكون الكمية الإجمالية التي تدخل بها المؤسستان السوق هي:

$$Q = Q_A + Q_B = 0{,}80 + 0{,}56 = 1{,}36$$

و يتحدد سعر السوق:

$$P = -2 \times 1{,}36 + 10 = 7{,}28$$

ملاحظة:

يمكننا أن نفترض أن المؤسسة B هي المحور، و تكون النتائج بطبيعة الحال مختلفة. و هناك نموذج يشتق من نموذج STACKELBERG و هو نموذج BOWLY و يكمن في أن كل مؤسسة تفترض نفسها هي المحور وتكون الكمية الإجمالية هي الكمية التي تدخل بها المؤسستان السوق بافتراض كل منها محورا و يتحدد سعر السوق تبعا لهذه الكمية.

3-نموذج SWEEZY:

النموذج الذي وضعه الاقتصادي الأمريكي SWEEZY سنة 1939 ينطلق من المنافسة بين المحتكرين اثنين ليخلص في النهاية إلى التفاهم. ننطلق من دالة طلب تقليدية، و من وضعية معينة للمحتكرين بحيث يبيعان سلعة ما بنفس السعر. نفترض أن أحد المحتكرين -لغرض ما- يزيد في السعر الذي يبيع به. تؤدي هذه الزيادة في السعر إلى فقدان هذا المحتكر لجزء من الطلب الذي كان موجه إليه؛ و يتوجه هذا الجزء ليزيد في الطلب الذي كان موجه للمحتكر الآخر. تتغير دالة الطلب من دالة خطية تقليدية إلى دالة طلب منكسرة. وتكون النتيجة أن المحتكر الذي بادر برفع السعر يكون هو الخاسر. أما المحتكر الآخر فإنه سيبيع كمية أكبر من التي كان يبيعها من قبل و يرى وضعيته تتحسن.

هذه المرة نفترض أن هذا المحتكر عوض أن يرفع سعر البيع يخفض السعر على أمل زيادة الطلب الموجه إليه، فإنه يغامر كذلك لأنه من الممكن- إذ لم نقل من المؤكد- أن المحتكر الآخر يحذو حذوه لئلا يفقد حصته في السوق ويخفض سعر الذي يبيع به كذلك. تكون النتيجة أن المحتكر الذي بادر بانخفاض السعر لمنافسة غيره لن تتحسن وضعيته.

لهذا فإن المنافسة في حالة احتكار القلة ستؤدي بالضرورة إلى خسارة الجميع و يكون إلزاما على المحتكرين اللجوء إلى التفاهم؛فعدد المتنافسين أقل مما يضر بمصلحة الجميع و لا بد من التفاهم حتى يحافظ الكل على مصلحته.

تمارين مقترحة :

التمرين 15:

طلب السلعة X في السوق يخضع لدالة الطلب التالية:

$$P = -3Q + 15$$

هذا السوق محتكر من طرف منتجين اثنين A و B . يتم الإنتاج حسب دالتي التكاليف الكلية التاليتين:

$$CT_A = 3Q_A^{\ 2} + 2Q_A + 25$$

$$CT_B = Q_B^{\ 2} + 3Q_B + 49$$

حدد الربح الذي حققه كل منتج في ظل:

1-سياسة التجاهل.

2-سياسة التفاهم.

التمرين 16

تمرين: دوال التكاليف في الفترة الطويلة

تُعطى دالة التكلفة الكلية طويلة الأجل لمؤسسة إنتاجية كما يلي:

$$CT = 0{,}5Q^2 + 18Q$$

حيث Qتمثل كمية الإنتاج.

المطلوب:

1. احسب دالة التكلفة المتوسطة طويلة الأجل .
2. احسب دالة التكلفة الحدية طويلة الأجل .

3. أوجد مستوى الإنتاج الذي يحقق أدنى تكلفة متوسطة .

4. بيّن العلاقة بين التكلفة الحدية والتكلفة المتوسطة عند هذه النقطة .

5. إذا كان سعر السوق يقدر ب 30 وحدة نقدية ،حدّد مستوى الإنتاج الذي يعظّم الربح لهذا المنتج

المراجع

- **الليثي، محمد علي (2005)، النظرية الاقتصادية الجزئية، قسم الاقتصاد، الإسكندرية .**
- **السريتي، سيد محمد أحمد، ونجا، علي عبد الوهاب (2006)، مبادئ الاقتصاد الجزئي، الدار الجامعية .**
- **الوادي، محمود حسين، والعيساوي، كاظم جاسم (2006)، الاقتصاد الجزئي: تحليل نظري وتطبيقي، دار المسيرة، عمان .**
- **رويسات، عبد الناصر (2007)، مبادئ الاقتصاد الجزئي، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران .**
- **سقني، نجاة جمان، وبولنوار، بشير (2012)، محاضرات وتمارين في الاقتصاد الجزئي، منشورات دار الأديب، وهران .**
- **صخري، عمر (2006)، مبادئ الاقتصاد الجزئي الوحدوي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر .**
- **جيد، ضياء (1999)، النظرية الاقتصادية: التحليل الاقتصادي الجزئي، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية .**
- **عطية، ناصف محمد (2008)، النظرية الاقتصادية الجزئية، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية .**

- **تلون، فريدريك (2009)، مدخل إلى الاقتصاد الجزئي، ترجمة وردية واشد، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، ومؤسسة بن راشد آل مكتوم .**
- **كساب، علي (2006)، النظرية الاقتصادية: التحليل الجزئي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر .**

Références en langue étrangère

- Bendid, R. (2007). Microéconomie. Annaba : Office des publications universitaires.
- Bergstrom, T. C., & Varian, H. R. Exercices de microéconomie. Éditions Prémisses.
- Bernier, B., & Vedic, H.-L. (1995). Initiation à la microéconomie. Paris : Dunod.
- Cohen, A.-J., King, H.-B., & Chapleau, P. (2005). Introduction à la microéconomie moderne (3e éd.). Québec : ERPI.
- Ferrari, J.-B. (2006). Microéconomie approfondie. France : Bréal.
- Glais, M. (1994). Microéconomie : DEUG de sciences économiques. Paris : Dunod.
- Guérinien, B., & Parel, V. (1998). Microéconomie. Paris : Dunod.
- Hamilton, J., & Suslow, V. (2006). Guide de l'étudiant en microéconomie (6e éd.). Pearson Education.
- Hirshleifer, J., Glazer, A., & Hirshleifer, D. (2009). Microéconomie : Théories et applications. De Boeck.
- Malabou, D. (1999). L'essentiel de la microéconomie. Paris : Gualino.
- Malinvaud, E. (2005). Leçons de théorie microéconomique (4e éd.). Paris : Dunod.

- Medan, P. (2006). Microéconomie : Travaux dirigés (3e éd.). Paris : Dunod.
- Montoussé, M., & Waquet, I. (2008). Microéconomie (2e éd.). France : Bréal.
- Gravel, N. (2003). Notes de cours de microéconomie (2e année DEUG).
- Percheron, S. (1999). Exercices de microéconomie (6e éd.). Paris : Armand Colin.
- Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2005). Microéconomie (6e éd.). Pearson Education.
- Salvatore, D. (1998). Microéconomie (2e éd.). Paris : Louis Jean.
- Varian, H. R. (2001). Introduction à la microéconomie. Bruxelles : De Boeck.

Références électroniques

- ***http://zonecours.hec.ca***
- ***https://excerpts.numilog.com/books/282009649.pdf***
- ***http://www.bankexam.fr***
- ***http://neumann.hec.ca/sites/cours/3-851-84/examens.htm***
- ***http://selod.ensae.net/m1/doc/exam2003_2004.pdf***