

كلية العلوم الإقتصادية والعلوم التجارية
وعلوم التسيير

الرياضيات 1

دروس محاضرات
أمثلة وتمارين

جامعة وهران 2

محمد بن أحمد
Université d'Oran 2
Mohamed Ben Ahmed



الأستاذ: عبد القادر مخلوف

مطبوعة بيداغوجية

السنة الجامعية 2025/2026

المحتويات

1	مقدمة
5	1 التحليل التوفيقي
5	1.1 المفاهيم الأساسية في المجموعات
8	1.1.1 العمليات على المجموعات
11	2.1 المجموعات المنتهية
13	1.2.1 مبدأ الجمع
14	2.2.1 مبدأ الضم والإقصاء
17	3.2.1 مبدأ الجداء
18	3.1 الحساب التوفيقي
18	1.3.1 القوائم
20	2.3.1 الترتيبات والتبديلات
22	3.3.1 التوفيقات
24	4.3.1 دستور ثنائي الحد
28	5.3.1 المثلث العددي
29	4.1 التجزئات المرتبة
31	1.4.1 دستور متعدد الحدود
32	5.1 تمارين وتطبيقات

37	2	المتتاليات العددية
37	1.2	المفاهيم الأساسية حول المتتاليات العددية
37	1.1.2	مفهوم المتتالية العددية
38	2.1.2	المتتاليات المحدودة
39	3.1.2	نهاية متتالية والمتتاليات المتقاربة
44	4.1.2	إتجاه تغير متتالية عددية
46	2.2	المتتاليات الحسابية
47	1.2.2	مفهوم المتتالية الحسابية
49	2.2.2	إتجاه تغير وتقارب متتالية حسابية
50	3.2.2	خواص حدود متتالية حسابية
51	3.2	المتتاليات الهندسية
51	1.3.2	مفهوم المتتالية الهندسية
53	2.3.2	إتجاه تغير وتقارب متتالية هندسية
56	3.3.2	خواص حدود متتالية هندسية
59	4.2	المتتاليات الحسابية-الهندسية
59	1.4.2	مفهوم المتتالية الحسابية-الهندسية
59	2.4.2	الحالات الخاصة للمتتاليات الحسابية-الهندسية
61	3.4.2	الحد العام لمتتالية حسابية-هندسية
63	4.4.2	إتجاه تغير وتقارب متتالية حسابية-هندسية
65	5.2	تمارين وتطبيقات
65	1.5.2	المتتاليات العددية
66	2.5.2	المتتاليات الحسابية
67	3.5.2	المتتاليات الهندسية
68	4.5.2	المتتاليات الحسابية-الهندسية

71	الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية	3
71	الدوال العددية	1.3
71	المفاهيم الأولية	1.1.3
73	الدوال المألوفة ومجموعات تعريفها	2.1.3
83	الدوال الفردية والدوال الزوجية	3.1.3
84	إتجاه تغير الدوال العددية	4.1.3
86	الدوال العكسية	5.1.3
87	القيم الحدية والقيم الحدية المحلية	6.1.3
89	طبيعة إنحناء الدوال	7.1.3
90	النهايات والدوال المستمرة	2.3
90	النهايات	1.2.3
93	العمليات على النهايات	2.2.3
96	الإستمرارية	3.2.3
98	نتائج الإستمرارية	4.2.3
101	الدوال الأسية	3.3
101	الدالة الأسية في الأساس a	1.3.3
101	الخواص الجبرية للدالة الأسية	2.3.3
103	الدالة الأسية النيبيرية	3.3.3
107	الدوال اللوغاريتمية	4.3
107	الدالة اللوغاريتمية في الأساس a	1.4.3
108	الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتمية	2.4.3
110	الدالة اللوغاريتمية النيبيرية	3.4.3
114	تمارين وتطبيقات	5.3

117	المشتقات	4
-----	----------	---

117	مفهوم الإشتقاق	1.4
117	نسبة التزايد	1.1.4
118	العدد المشتق	2.1.4
121	الدالة المشتقة	3.1.4
122	حساب المشتقات	2.4
122	عمليات على الإشتقاق	1.2.4
126	مشتقات بعض الدوال الأساسية	2.2.4
129	المشتقات ذات الرتب العليا	3.2.4
132	نتائج الإشتقاق	3.4
132	قاعدة لوبيتال	1.3.4
135	مبرهنة التزايدات المنتهية	2.3.4
136	إتجاه تغير الدوال	3.3.4
137	القيم الحدية للدوال	4.3.4
140	طبيعة الإنحناء ونقط الإنعطاف	5.3.4
141	تمارين وتطبيقات	4.4
145	الدوال الأصلية وحساب التكامل	5
145	الدوال الأصلية	1.5
145	التكامل غير المحدد	1.1.5
150	حساب التكامل بالتجزئة	2.1.5
152	حساب التكامل بتبديل المتغير	3.1.5
154	الكسور البسيطة وحساب تكامل الدوال الناطقة	4.1.5
158	التكامل المحدد	2.5
159	خاصيات التكامل المحدد	1.2.5
162	حساب التكامل المحدد	2.2.5

164	التكامل المحدد وحساب المساحات	3.5
165	1.3.5 مساحة الحيز المحدد بمنحني	
167	2.3.5 مساحة الحيز المحدد بمنحنيين	
168	4.5 نماذج إقتصادية لاستعمال الدوال الأصلية والتكامل . . .	
168	1.4.5 الكلفة الإجمالية، الدخل الإجمالي والربح الإجمالي	
171	2.4.5 فائض المستهلك وفائض المنتج	
174	3.4.5 منحني لورنز ومعامل جيني	
176	4.4.5 قيمة عمر العميل <i>CLV</i>	
178	5.5 تمارين وتطبيقات	
178	1.5.5 الدوال الأصلية وحساب التكامل المحدد	
179	2.5.5 نماذج وتطبيقات إقتصادية	

قائمة الأشكال

9	نموذج فان لإتحاد مجموعتين $X \cup Y$	1.1
10	نموذج فان لتقاطع مجموعتين $X \cap Y$	2.1
11	نموذج فان لفرق مجموعتين $X \setminus Y$	3.1
28	المثلث العددي	4.1
74	منحنى دالة تألفية لما $a > 0$	1.3
74	منحنى دالة تألفية لما $a > 0$	2.3
74	منحنى قطع مكافئ لما $a > 0$	3.3
74	منحنى قطع مكافئ لما $a < 0$	4.3
75	منحنى كثير حدود من الدرجة الثالثة. الحالة الأولى	5.3
75	منحنى كثير حدود من الدرجة الثالثة. الحالة الثانية	6.3
75	منحنى كثير حدود من الدرجة الثالثة. الحالة الثالثة	7.3
75	منحنى كثير حدود من الدرجة الثالثة. الحالة الرابعة	8.3
76	منحنى دالة القيمة المطلقة	9.3
77	منحنى $x \mapsto x - 1$	10.3
77	منحنى $x \mapsto x - 1 $	11.3
77	منحنى $x \mapsto 0.5x^2 - 2$	12.3
77	منحنى $x \mapsto 0.5x^2 - 2 $	13.3
78	منحنى $x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 2x - 1$	14.3

78		$x \mapsto \left \frac{1}{2}x^3 - 2x - 1 \right $	منحنى	15.3
79		$x \mapsto \frac{1}{x}$	منحنى	16.3
79		$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	منحنى	17.3
80		$x \mapsto \frac{4x^2 - 2x + 1}{4x - 2}$	منحنى	18.3
81		$x \mapsto \sqrt{x}$	منحنى	19.3
83		$x \mapsto \sqrt[3]{x}$	منحنى	20.3
89		منحنى دالة محدبة		21.3
104		$\exp(x)$	منحنى الدالة الأسية النيبيرية	22.3
112		$\ln x$	منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية	23.3
118		نسبة التزايد		1.4
165		المساحة المحددة بمنحني		1.5
165		تقريب المساحة المحددة بمنحني		2.5
166		$f(x) = 2x - 1$	المساحة أسفل منحنى الدالة	3.5
167		المساحة المحددة بمنحنيين		4.5
172		فائض المستهلك وفائض المنتج		5.5
174		منحنى لورنز		6.5
175		معامل جيني		7.5
176		$L(x) = x^2$	منحنى لورنز الدالة	8.5

قائمة الجداول

73		إشارة $x^2 - 1$	1.3
104		إشارة $\exp(x) - 1$	2.3
112		إشارة $\ln x$	3.3
137		إشارة $\exp(2x) - 1$	1.4
137		إشارة $3x^2 - 18x + 15$	2.4
138		إشارة $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$	3.4
141		إشارة $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$	4.4

مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على المبعوث رحمة للعالمين، وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين.

نقدم لكم هذه المطبوعة الجامعية في مادة الرياضيات والتي توافق البرنامج الوزاري لطلبة السنة الأولى ليسانس من شعبة العلوم الإقتصادية والعلوم التجارية والعلوم المالية وعلوم التسيير. وقد تم تقسيمها حسب مقرر برنامج الفصل الأول من السنة الأولى ليسانس إلى خمسة أبواب.

في الباب الأول، الذي يحمل عنوان التحليل التوافقي، قدمنا مراجعة شاملة لمبادئ المجموعات والعمليات عليها، وذلك حتى يتمكن الطالب بعدها من التطرق إلى مبادئ العد والحساب التوافقي بسلاسة وبدون عناء، كما أننا حرصنا، عند القدرة واللزوم، على تريبض المفاهيم ودعمها بأمثلة ونماذج من إختصاصات الشعبة.

في الباب الثاني، الذي يحمل عنوان المتتاليات العددية، بدأنا بتقديم المفاهيم الأولية للمتتاليات العددية بصفة عامة، مروراً باتجاه تغيرها والمحدودة منها وغير المحدودة، والمتقاربة والمتباعدة وصولاً إلى النظرية المهمة التي تربط هذه المفاهيم ببعضها البعض. بعدها انتقلنا خصوصاً إلى دراسة ثلاثة أنواع من المتتاليات نظراً لأهميتها في ميدان الإقتصاد والعلوم المالية. بدأنا بالمتتاليات الحسابية التي تعطى نموذجاً رياضياتياً لمسائل الإدخار بفوائد

بسيطة، ثم انتقلنا إلى المتتاليات الهندسية والتي بدورها تعطي نموذجا رياضياتيا لمسائل الإدخار بفوائد مركبة، وانتهينا بالمتتاليات الحسابية-هندسية، والتي يمكن اعتبارها مزيجا من النوعين السابقين والتي يمكن استعمالها لترييض مسائل أكثر تعقيدا في الإدخار.

الباب الثالث، الذي عنوانه الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية، فيه نهتم بدراسة الدوال العددية حيث استهللناه بالمفاهيم الأساسية في نظرية الدوال من مجموعة التعريف والنهايات والاستمرارية بكل أنواعها وغيرها. وتم تقديم الدوال الأساسية ككثيرات الحدود والدوال الجذرية والناطقة كقاعدة للأمثلة والمسائل نظرا لبساطتها. بعدها انتقلنا إلى الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية في قسمين مستقلين نظرا لأهميتهما وحضورهما في الكثير من النماذج الاقتصادية.

الباب الرابع تطرقنا فيه إلى دراسة المشتقات. بالفعل فقد قدمنا فيه مفهوم الاشتقاق إنطلاقا من أبسط تعريف له ثم، تدريجيا، عرفنا مفهوم الدالة المشتقة مع القواعد الأساسية لحساب عبارتها. بعد ذلك تكلمنا عن النتائج التي يمكن استخلاصها من حساب ودراسة المشتقة الأولى والثانية لدالة عددية. كما في الأبواب السابقة، في هذا الباب أولينا أهمية بالغة لتقديم أمثلة ونماذج اقتصادية توضح فائدة الاشتقاق في استخلاص الكثير من النتائج.

في الباب الخامس والأخير، باب الدوال الأصلية وحساب التكامل، بدأنا بتقديم كل عنصر على حدة، قدمنا أولا مفهوم الدوال الأصلية مع مختلف الطرائق لحسابها، ثم انتقلنا إلى حساب التكاملات بخصائصه وأنواعه، ثم ربطنا بينهما عبر النظرية الأساسية في التحليل الرياضي. بعدها قدمنا عدة نماذج اقتصادية تحتاج إلى التكامل والدوال الأصلية في دراستها.

نود أن نقدم الشكر الجزيل لكل من كان له دور، سواء من قريب أو بعيد، في إنشاء هذا العمل المتواضع.

نرجو من القارئ الكريم أن ينبهنا عن كل خطأ، نسيناه أو لم نعلمه، وذلك
بمراسلتنا عبر البريد الإلكتروني: abdelkader.makhlouf@gmail.com.
تم تحرير هذه المطبوعة بالإعتماد على نظام $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ حيث استعلمنا حزمتي
 PGF و TikZ لإنشاء المنحنيات البيانية وعالجنا الملف المنبع باستعمال
 $\text{LuaL}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.
في الختام نسأل المولى عز وجل أن يعلمنا ما ينفعنا وأن ينفعنا بما علمنا
وأن يزيدنا علماً،

والحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات.

عبدالقادر مخلوف

27 سؤال 1446 الموافق 25 أبريل 2025

باب 1

التحليل التوافقي

1.1 المفاهيم الأساسية في المجموعات

هناك مفهومان أساسيان ومرتبطان جدا في الرياضيات هما **المجموعة** و **العنصر**. العلاقة التي يمكن أن تربط بين أي عنصر وأي مجموعة هي **الإنتماء**، فلو أخذنا أي مجموعة X وأي عنصر x فأمر واحد فقط من إثنين يجب أن يكون محققا:

- العنصر x ينتمي إلى المجموعة X ؛ نكتب عندئذ $x \in X$.
- العنصر x لا ينتمي إلى المجموعة X ؛ نكتب عندئذ $x \notin X$.

يمكن أن نعبر عن مجموعة معينة بطريقتين مختلفتين:

1. بذكر الصفات المشتركة بين عناصرها،

2. بذكر عناصرها الواحد تلو الآخر.

مثال 1.1

نعتبر المجموعتين $A = \{p \in \mathbb{N} : p \mid 12\}$ و $B = \{p \in \mathbb{N} : p \mid 18\}$. عناصر المجموعة A تشترك في أنها كلها أعداد طبيعية وتقسم العدد 12، بينما عناصر المجموعة B تشترك في أنها كلها أعداد طبيعية وتقسم العدد 18. يمكن في هاتين الحالتين أن نكتب المجموعتين A و B على شكل قائمتين وذلك بسرد كل عناصرهما كما يلي:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \quad B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

لتكن X و Y مجموعتين.

تعريف 1.1 الإحتواء

نقول إن المجموعة X **تحتوي** المجموعة Y ونكتب $Y \subset X$ إذا كان كل عنصر ينتمي إلى المجموعة Y ينتمي إلى المجموعة X . أي من أجل كل عنصر $y \in Y$ فإن $y \in X$.

مثال 2.1

نعتبر المجموعتين التاليتين:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}, \quad Y = \{2, 3, 4\}$$

من الواضح أن $Y \subset X$.

مثال 3.1

مجموعة المواد التي يتم تدريسها في السنة الأولى محتواة في مجموعة المواد التي يتم تدريسها في كامل المسار الجامعي.

ملحوظة 2.1

عندما تكون مجموعة X تحتوي مجموعة Y نقول أيضا أن Y هي **مجموعة جزئية** من X .

تعريف 3.1 المجموعة الخالية

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا ينتمي إليها أي عنصر. نرمز لها بـ $\emptyset$.

تعريف 4.1 تساوي مجموعتين

نقول إن مجموعتين **متساويتان** إذا كانت كل واحدة منهما مجموعة جزئية من الأخرى.

$$(X = Y) \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad (X \subset Y \text{ و } Y \subset X)$$

هذا التعريف مهم لأنه يوضح الطريقة التي تستعمل عادة لإثبات أن مجموعتين متساويتان، إذ يتم ذلك في مرحلتين، كل مرحلة يُثبت فيها أن إحدى المجموعتين محتواة في الأخرى.

مثال 4.1

لتكن المجموعتان

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x = 0\}, \quad B = \{-1, 0, 1\}$$

نريد أن نثبت أن $A = B$.

• المرحلة الأولى: نثبت أن $B \subset A$. لذلك يكفي تعويض عناصر المجموعة B في كثير الحدود $p(x) = x^3 - x$ للتحقق من أنها جذور له.

نكتب إذن: من أجل كل $x \in B$ لدينا $p(x) = 0$ ، وهذا يعني أن من أجل كل $x \in B$ فإن $x \in A$.

ومنه فإن المجموعة B محتواة في المجموعة A ، أي $B \subset A$.

• المرحلة الثانية: نثبت أن $A \subset B$. لذلك نثبت أن كل جذور $p(x) = x^3 - x$ تنتمي إلى المجموعة B . فعلاً، بتحليل كثير الحدود p إلى جداء عوامل، لدينا

$$x(x-1)(x+1) = 0 \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad p(x) = 0$$

إذن جذور p هي الأعداد -1 و 0 و 1 ، وكلها تنتمي إلى المجموعة B . ومنه نستنتج أن المجموعة A محتواة في المجموعة B ، أي $A \subset B$.

وبما أن $B \subset A$ و $A \subset B$ نستنتج إذن أن $A = B$.

تعريف 5.1 مجموعة القوة

من أجل كل مجموعة X يمكن تشكيل مجموعة جديدة تضم كل المجموعات الجزئية من X . تسمى هذه المجموعة **مجموعة قوة المجموعة X** ويرمز لها بـ $\mathcal{P}(X)$.

$$\mathcal{P}(X) = \{S : S \subset X\}$$

مثال 5.1

لتكن المجموعة $X = \{0, 1\}$.

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

ملحوظة 6.1

إذا كانت S مجموعة جزئية من X فإن العلاقة بين S و X هي علاقة بين مجموعتين، فنكتب $S \subset X$. أما العلاقة بين S و $\mathcal{P}(X)$ فهي علاقة بين عنصر ومجموعة، ونكتب $S \in \mathcal{P}(X)$.

تعريف 7.1 الجداء الديكارتي لمجموعتين

الجداء الديكارتي لمجموعتين X و Y بهذا الترتيب، يرمز له $X \times Y$ ، هو مجموعة كل الثنائيات المرتبة (x, y) حيث أن $x \in X$ و $y \in Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ و } y \in Y\}$$

مثال 6.1

من أجل $X = \{0, 1\}$ و $Y = \{a, b, c\}$ لدينا

$$X \times Y = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$$

ملحوظة 8.1

- يجب مراعاة الترتيب عند الحديث عن الجداء الديكارتي، فكما أن $(x, y) \neq (y, x)$ من أجل $x \neq y$ ، فإن $X \times Y \neq Y \times X$ من أجل $X \neq Y$.
- العبارة X^k ترمز إلى الجداء الديكارتي للمجموعة X في نفسها k مرة.

1.1.1 العمليات على المجموعات

عند التطرق إلى المسائل الرياضية يتم أولاً تحديد إطار المتغيرات والمجاهيل. هذا الإطار يمثل المجموعة الشاملة أو الكلية التي يجب البحث عن الحلول فيها. مثلاً إذا أردنا حل المعادلة $x^2 + 2x - 3 = 0$ ، نعلم مسبقاً أن المجهول x الذي نبحث عنه هو عدد حقيقي. في هذه الحالة، المجموعة الكلية هي $\mathbb{R}$. فيما يلي، وعندما لا يتم تحديد المجموعة صراحة، نرمز للمجموعة الكلية بـ E .

تعريف 9.1 متممة مجموعة جزئية

متممة المجموعة X في E ، نرمز لها $\bar{X}$ ، هي المجموعة التي تضم كل العناصر التي لا تنتمي إلى المجموعة X .

$$\bar{X} = \{x \in E : x \notin X\}$$

مثال 7.1

نعتبر

$$E = \{n \in \mathbb{N} : n < 10\}, \quad X = \{0, 2, 5, 6, 8, 9\}$$

في هذه الحالة، متممة المجموعة X هي $\bar{X} = \{1, 3, 4, 7\}$.

مثال 8.1

لتكن المجموعة $E = \mathbb{N}$ ، ولتكن المجموعة $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ فردي}\}$.
المجموعة A تمثل الأعداد الطبيعية الفردية.

$$A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

يكون عدد طبيعي لا ينتمي إلى المجموعة A إذا وفقط إذا لم يكن فرديا، وهذا يعني أن هذا العدد هو طبيعي زوجي. إذن:

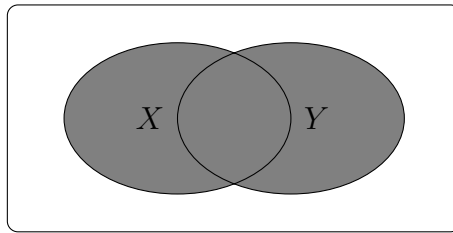
$$\bar{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ زوجي}\}$$

تعريف 10.1 إتحاد المجموعات

إتحاد مجموعتين X و Y ، نرمز له $X \cup Y$ ، هو المجموعة التي تضم عناصر المجموعتين X و Y معا.

$$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ أو } x \in Y\}$$

نموذج فان هو توضيح وتبسيط بياني لمختلف العمليات على المجموعات كالإتحاد والتقاطع والفرق بين مجموعتين. الشكل التالي يمثل عملية من العمليات المذكورة، عملية الإتحاد في هذه الحالة، والجزء المظلل من الشكل يمثل المجموعة حاصل العملية.



شكل 1.1: نموذج فان لإتحاد مجموعتين $X \cup Y$

مثال 9.1

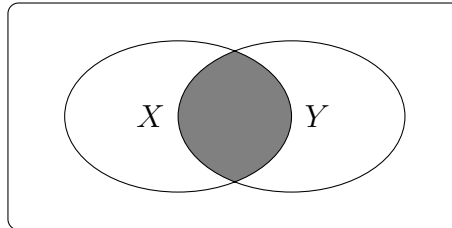
من أجل $X = \{1, 2, 3, 5\}$ و $Y = \{3, 4, 5\}$ لدينا:

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

تعريف 11.1 تقاطع المجموعات

تقاطع مجموعتين X و Y ، نرمز له $X \cap Y$ ، هو المجموعة التي تضم العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين X و Y معا.

$$X \cap Y = \{x : x \in X \text{ و } x \in Y\}$$



شكل 2.1: نموذج فان لتقاطع مجموعتين $X \cap Y$

مثال 10.1

من أجل $X = \{1, 2, 3, 5\}$ و $Y = \{3, 4, 5\}$ لدينا: $X \cap Y = \{3\}$.

قضية 12.1

لتكن X و Y و Z ثلاث مجموعات، إذن:

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \quad \text{و} \quad (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

تعريف 13.1 المجموعات المنفصلة

نقول إن المجموعتين X و Y **منفصلتان** إذا كان تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية، أي $X \cap Y = \emptyset$.

تعريف 14.1 فرق المجموعات

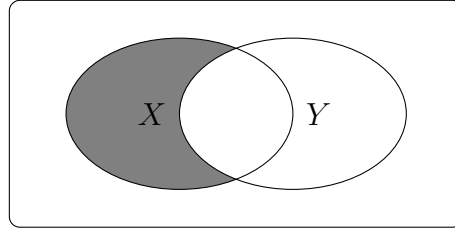
المجموعة التي تضم العناصر التي تنتمي إلى المجموعة X ولا تنتمي إلى المجموعة Y تسمى **فرق** المجموعة Y من المجموعة X ، ونرمز لها $X \setminus Y$.

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ و } x \notin Y\}$$

مثال 11.1

من أجل $X = \{1, 2, 3, 5\}$ و $Y = \{3, 4, 5\}$ لدينا:

$$X \setminus Y = \{1, 2\} \quad \text{و} \quad Y \setminus X = \{4\}$$

شكل 3.1: نموذج فان لفرق مجموعتين $X \setminus Y$

ملحوظة 15.1

نلاحظ أن $X \setminus Y \neq Y \setminus X$. نقول إن عملية الفرق بين المجموعات ليست **تبديلية**، خلافا لعملتي الإتحاد والتقاطع.

2.1 المجموعات المنتهية

تعريف 16.1 المجموعة المنتهية

كل مجموعة تحتوي عددا منتهيا من العناصر هي **مجموعة منتهية**.

مثال 12.1

مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقسم 36 هي مجموعة منتهية. فعلا، فقواسم العدد 36 يمكن حصرها كآتي:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

مثال 13.1

لو نعتبر أي مدينة في العالم فهي تحتوي عددا منتهيا من السكان، مهما كان هذا العدد كبيرا أو صغيرا. لذلك فإن كل مدينة في العالم هي مجموعة منتهية.

مثال 14.1

مجموعة المواد الأولية اللازمة في مصنع ما لكي ينتج هي مجموعة منتهية، إذ لا يمكن أن يحتاج عددا غير منته من المواد الأولية. كما أن مجموعة منتوجاته هي مجموعة منتهية كذلك.

تعريف 17.1 أصلي مجموعة منتهية

أصلي مجموعة منتهية هو عدد عناصرها. نرمز لأصلي المجموعة A بـ $|A|$.

مثال 15.1

عدد قواسم العدد 36 يساوي 9. لو رمزنا لمجموعة قواسم العدد 36 بـ D يمكن أن نكتب عندئذ:

$$|D| = 9$$

مثال 16.1

لتكن المجموعة A المعطاة كما يلي:

$$A = \{5, -1, 0, 6, 7, 3, \}$$

أصلي هذه المجموعة هو $|A| = 6$.

عند حساب أصلي أي مجموعة منتهية يجب الانتباه إلى العناصر المكررة ولا يجب عدّها إلا مرة واحدة.

مثال 17.1

مجموعة الولايات في الجزائر تحتوي 59 ولاية، لذلك فإن أصلها يساوي 59.

مثال 18.1

المجموعة الخالية $\emptyset$ هي المجموعة الوحيدة التي لا تحتوي أي عنصر، أي أن أصلي المجموعة الخالية يساوي الصفر. إذن: $|\emptyset| = 0$.

مبرهنة 18.1

إذا وجد تطبيق تقابلي بين مجموعتين منتهيتين A و B فإن $|A| = |B|$.

مثال 19.1

كل ولاية من ولايات الجزائر تحمل أحد الأرقام $\{1, 2, \dots, 69\}$. هذه العلاقة هي تطبيق تقابلي بين مجموعة الولايات ومجموعة الأعداد من 1 إلى 69. لذلك فإن أصلي مجموعة الولايات الجزائرية يساوي أصلي المجموعة $\{1, 2, \dots, 69\}$ ، أي 69.

قضية 19.1

إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين بحيث $B \subset A$ فإن $|B| < |A|$.

1.2.1 مبدأ الجمع

مبرهنة 20.1 مبدأ الجمع

إذا كانت A و B مجموعتين منفصلتين فإن أصلي إتحادهما يساوي مجموع أصلييهما.

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

مثال 20.1

نريد ان نشتري سيارة من إحدى العلامتين AudiTM أو BentleyTM. إذا كانت العلامة AudiTM تقدم 15 نموذجاً مختلفاً، والعلامة BentleyTM تقدم 13 نموذجاً مختلفاً، فلدينا بالضبط 28 نموذجاً مختلفاً للسيارات يمكننا أن نختار من بينها.

مثال 21.1

في حصة الرياضيات، تبين أن عدد الطلبة الحضور هو 25 بينما تم تسجيل 6 غيابات. من هذا نستنتج أن عدد طلبة قسم الرياضيات هو 31. الحالة العامة لمبدأ الجمع تلخص في اللازمة التالية. لهذا نحتاج التعريفين التاليين.

تعريف 21.1 الانفصال مثنى مثنى

نقول أن المجموعات $X_1, X_2, \dots, X_n$ منفصلة مثنى مثنى إذا كانت كل مجموعة منها منفصلة عن المجموعات الأخرى. معناه من أجل كل عددين طبيعيين i و j بحيث $1 \leq i < j \leq n$ فإن $X_i \cap X_j = \emptyset$.

تعريف 22.1 التجزئة

نقول أن المجموعات $X_1, X_2, \dots, X_n$ تشكل تجزئة للمجموعة X إذا حققت ما يلي:

1. كل مجموعة X_i هي غير خالية.
2. المجموعات $X_1, X_2, \dots, X_n$ منفصلة مثنى مثنى.
3. المجموعة X تساوي إتحاد المجموعات $X_1, X_2, \dots, X_n$.

$$X = \bigcup_{k=1}^n X_k$$

يمكننا الآن صياغة الحالة العامة لمبدأ الجمع.

لازمة 23.1 مبدأ الجمع

إذا كانت المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ تشكل تجزئة للمجموعة A فإن:

$$|A| = \sum_{k=1}^n |A_k|$$

مثال 22.1

نريد حساب عدد الطلبة المسجلين في طور اليسانس، لهذا نحسب عدد الطلبة المسجلين في كل سنة من سنوات اليسانس ثم نجمعها. لهذا الغرض نجزئ مجموعة الطلبة إلى مجموعات جزئية. المجموعة الأولى تضم الطلبة المسجلين فقط في السنة الأولى، والمجموعة الثانية تضم فقط الطلبة المسجلين في السنة الثانية، وهكذا إلى آخر سنة من طور اليسانس. هكذا نعلم أن:

- لا يمكن لنفس الطالب أن يتواجد في مجموعتين مختلفتين، وهذا يعني أن هذه المجموعات الجزئية منفصلة مثنى مثنى.

- كل طالب في طور اليسانس يجب أن يكون مسجلاً في أحد السنوات. هذا يعني أن اتحاد المجموعات هو مجموعة كل طلبة اليسانس.

بهذه الطريقة نكون قد شكلنا تجزئة لمجموعة طلبة اليسانس. ولحساب أصلي طلبة اليسانس يكفي، بتطبيق مبدأ الجمع، جمع أصلي الطلبة لكل سنة من السنوات.

مثال 23.1

لحساب عدد المدن الموجودة في العالم نأخذ عدد المدن في كل دولة ثم نجمعها.

ملحوظة 24.1

تكمن أهمية مبدأ الجمع في تبسيط وتوضيح العديد من المفاهيم والمسائل، كما أنه يقدم طريقة بسيطة لحساب أصليات الكثير من المجموعات المعقدة.

2.2.1 مبدأ الضم والإقصاء

نسعى فيما يلي إلى توضيح طريقة حساب أصلي اتحاد مجموعات، لما لا تكون هذه المجموعات بالضرورة منفصلة مثنى مثنى. لنأمل الوضعية التالية.

نفرض أننا نريد حساب عدد الوحدات التي تم بيعها من طرف مؤسسة معينة في إحدى السنوات. لدينا المعطيات التالية:

1. تم بيع 750 وحدة قبل الربع الأخير من السنة،
2. تم بيع 600 وحدة بعد الربع الأول من السنة،
3. تم بيع 450 وحدة أثناء الربعين الثاني والثالث من السنة.

لمناقشة المسألة، نتفق على الرموز التالية:

A : مجموعة الوحدات التي تم بيعها طوال السنة.

F : مجموعة الوحدات التي تم بيعها قبل الربع الأخير من السنة.

L : مجموعة الوحدات التي تم بيعها بعد الربع الأول من السنة.

M : مجموعة الوحدات التي تم بيعها أثناء الربعين الثاني والثالث من السنة.

لدينا إذن أصلي المجموعات التالية:

$$|F| = 750 \quad |M| = 450 \quad |L| = 600$$

والمطلوب هو حساب أصلي المجموعة A .

نعلم أن كل وحدة مبيعة هي على الأقل في إحدى المجموعتين F أو L . هذا يعني أن $A = F \cup L$.

هل يمكن أن نقول إذن $|A| = |F| + |L|$ ؟

الجواب هو 'لا'، لأن المجموعتين F و L لا تشكلان تجزئة لـ A ، فتقاطعهما يساوي المجموعة M ، و M ليست مجموعة خالية.

نعتبر المجموعتين التاليتين:

$$F' = F \setminus M \quad L' = L \setminus M$$

نستنتج من هذا أن

• المجموعتين F' و M تشكلان تجزئة للمجموعة F ، إذن $|F| = |F'| + |M|$.

• المجموعتين L' و M تشكلان تجزئة للمجموعة L ، إذن $|L| = |L'| + |M|$.

والمهم كذلك أن المجموعات F' و M و L' تشكل تجزئة للمجموعة A . إذن:

$$|A| = |F'| + |M| + |L'|$$

للتبسيط، نكتب العبارة الأخيرة كما يلي:

$$|A| = (|F'| + |M|) + (|L'| + |M|) - |M|$$

نستنتج أخيرا أن

$$|A| = |F| + |L| - |M| = 900$$

أي أن طوال كل السنة تم بيع 900 وحدة.

مبرهنة 25.1 مبدأ الضم والإقصاء

إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين فإن:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

مثال 24.1

نريد عد الأعداد الطبيعية الأصغر من 300 والتي هي من مضاعفات 2 أو من مضاعفات 3. نرمز لمجموعة مضاعفات 2 الأصغر من 300 بـ P . ونرمز لمجموعة مضاعفات 3 الأصغر من 300 بـ T .

عناصر المجموعة P تكتب على الشكل $2p$ بحيث: $p \in \{0, 1, \dots, 149\}$. نستنتج أن $|P| = 150$. عناصر المجموعة T تكتب على الشكل $3p$ بحيث: $p \in \{0, 1, \dots, 99\}$. نستنتج أن $|T| = 100$. المجموعتان P و T ليستا منفصلتين، إذ أن تقاطعهما $P \cap T$ يضم الأعداد الطبيعية الأصغر من 300 والتي هي من مضاعفات 2 و 3 في آن واحد. أي أن $P \cap T$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من 300 والتي هي من مضاعفات 6.

عناصر المجموعة $P \cap T$ تكتب إذن على الشكل $6p$ بحيث: $p \in \{0, 1, \dots, 49\}$. نستنتج أن $|P \cap T| = 50$.

بتطبيق مبدأ الضم والإقصاء نستنتج أن:

$$|P \cup T| = |P| + |T| - |P \cap T| = 200$$

إذن يوجد 200 عدد أصغر من 300 وهو مضاعف لـ 2 أو لـ 3.

باستعمال التراجع، يمكن تعميم مبدأ الضم والإقصاء لما يكون لدينا عدد كافي من المجموعات بدلا من مجموعتين فقط.

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعات منتهية.

نعتبر المجموعة $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي $k \in I$ ، نرمز بـ I_k إلى كل مجموعة جزئية من $\{1, 2, \dots, n\}$ والتي أصلها يساوي k . النظرية التالية تلخص مبدأ الضم والإقصاء في حالته العامة.

مبرهنة 26.1 مبدأ الضم والإقصاء

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I_k \subset I} (-1)^{k-1} \left| \bigcap_{i \in I_k} A_i \right|$$

مثال 25.1

في مجموعة من الطلبة، 75 طالبا يتقن اللغة العربية و 50 طالبا يتقن اللغة الإنجليزية و 60 طالبا يتقن اللغة الفرنسية. إذا كان عدد الطلبة الذين يتقنون لغتين على الأقل يساوي 55 بينما عدد الطلبة الذين يتقنون اللغات الثلاث معا يساوي 40 فإن العدد الكلي للطلبة يساوي $75 + 50 + 60 - 55 + 45 = 175$. يعتمد مبدأ الضم والإقصاء في عد اتحاد مجموعات على:

1. ضم كل العناصر التي تنتمي إلى كل المجموعات، ثم
2. إقصاء كل العناصر التي تنتمي إلى تقاطع مجموعتين مختلفتين بالضبط، ثم
3. ضم كل العناصر التي تنتمي إلى تقاطع ثلاث مجموعات بالضبط، ثم
4. إقصاء كل العناصر التي تنتمي إلى تقاطع أربع مجموعات مختلفة بالضبط،
5. وهكذا دواليك إلى أن تصبح كل التقاطعات مجموعة خالية.

3.2.1 مبدأ الجداء

نقرر في مايلي كيف يتم حساب أصلي جداء مجموعات منتهية.

مبرهنة 27.1 مبدأ الجداء

إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين فإن: $|A \times B| = |A| \times |B|$.

مثال 26.1

لتكن المجموعتان $A = \{a, b, c\}$, $X = \{x, y\}$ إذن:

$$A \times X = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

نلاحظ أن: $|A \times X| = 6 = |A| \times |X|$.

نستطيع، بالتراجع، أن نعمم مبدأ الجداء لما يكون لدينا أكثر من مجموعتين.

مبرهنة 28.1 مبدأ الجداء

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعات منتهية فإن:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|$$

3.1 الحساب التوافقي

نعتبر المجموعة المنتهية $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ أصلها إذن $|A| = n$.

نريد أن نشكل عناصر جديدة باستعمال سحب متكررة من المجموعة A . والهدف هو عد هذه العناصر الجديدة. لذلك علينا أن ننتبه لأمرين:

- هل التكرار مسموح؟ أي هل يمكن سحب نفس العنصر من المجموعة A عدة مرات؟
- هل الترتيب مهم؟ أي هل سحب نفس العناصر من المجموعة A ولكن بترتيب مختلف يؤدي إلى عناصر جديدة مختلفة؟

عدد المرات التي نقوم فيها بالسحب هو عدد طبيعي نرمز له p .

1.3.1 القوائم

تعريف 29.1 القائمة

نسمي **قائمة** ذات p عنصر من المجموعة A ذات n عنصر كل عنصر $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ من المجموعة A^p .

مثال 27.1

نسمي كلمة كل قائمة مؤلفة من الحروف الأبجدية. مثلاً "رياضيات" هي قائمة ذات 7 أحرف من مجموعة ذات 28 حرفاً (مجموعة حروف الهجاء).

مثال 28.1

لاستعمال الصراف الآلي تحتاج إلى البطاقة البنكية مرفقة بعدد التعريف الشخصي PIN. الرمز PIN هو عدد يتكون من أربعة أرقام. إذن كل رمز PIN هو قائمة ذات أربع عناصر من مجموعة ذات عشرة عناصر (مجموعة الأرقام من 0 إلى 9).

مبرهنة 30.1 عدد القوائم

عدد القوائم ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر يساوي n^p .

البرهان 30.1

بما أن القوائم تمثل عناصر الجداء الديكارتي A^p ، فإن عدد القوائم المختلفة هو أصلي هذه المجموعة. باستعمال مبدأ الجداء، المبرهنة 28.1، نستنتج أن عدد القوائم هو $|A^p| = |A|^p = n^p$.

مثال 29.1

عدد الكلمات المختلفة التي تتكون من ثلاث حروف لاتينية هو $26^3 = 17576$.

مثال 30.1

عدد الرموز المختلفة لكلمة سرية مؤلفة من أربعة أرقام هو $10^4 = 10000$.

ملحوظة 31.1

نحصل على القوائم ذات p عنصر من مجموعة A ذات n عنصر عند القيام بـ p عملية سحب لعناصر المجموعة A بحيث:

- يجب مراعاة ترتيب العنصر المسحوب في كل مرة،
- يجب إعادة كل عنصر بعد سحبه مباشرة حتى يمكن سحبه مرة أخرى في عمليات السحب المقبلة.

2.3.1 الترتيبات والتبديلات

تعريف 32.1 العاملي

من أجل كل عدد طبيعي $n > 0$ نعرف **عاملي** n ونرمز له بـ $n!$ بحاصل جداء كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى n .

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

إذا كان $n = 0$ فإن $0! = 1$.

قضية 33.1

من أجل كل عدد طبيعي $n > 0$ لدينا:

$$n! = n \times (n - 1)!$$

تعريف 34.1 الترتيبية

نسمي **ترتيبية** ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر كل قائمة ذات p عناصر مختلفة مثنى مثنى من مجموعة ذات n عنصر.

مفهومي الترتيبية والقائمة يختلفان في أن عناصر الترتيبية مختلفة مثنى مثنى، هذا يعني أن كل عنصر في الترتيبية لا يمكن أن يظهر إلا مرة واحدة.

مثال 31.1

يمكن أن نعتبر كل الأعداد المؤلفة من p رقم قوائم ذات p عنصر من مجموعة الأرقام ذات العشر عناصر. في حالة إذا ما كانت الأرقام مختلفة مثنى مثنى فإن العدد يكون بذلك ترتيبية ذات p عنصر من مجموعة ذات عشر عناصر.

ملحوظة 35.1

مع شرط اختلاف العناصر مثنى مثنى وحتى يكون للترتيبات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر مغزى يجب أن يكون $1 \leq p \leq n$.

تعريف 36.1 التبديلة

نسمي **تبديلة** لمجموعة ذات n عنصر كل ترتيبية ذات n عنصر من هذه المجموعة.

مثال 32.1

نفرض أن خمسة أشخاص يريدون الجلوس على خمسة مقاعد موضوعة في صف واحد.

كل طريقة لجلوس الأشخاص على المقاعد تعتبر تبديلة.

مبرهنة 37.1 عدد التباديلات

عدد التباديلات لمجموعة ذات n عنصر يساوي $n!$.

البرهان 37.1

للحصول على تبديلة من مجموعة ذات n عنصر نقوم بـ n عملية سحب بحيث:

- نهتم بترتيب كل عنصر مسحوب،
- لا نرجع العناصر المسحوبة.

إذن

- في عملية السحب الأولى يمكن الحصول على n نتيجة مختلفة،
 - في عملية السحب للعنصر الثاني يمكن الحصول على $n - 1$ نتيجة مختلفة،
 - في عملية السحب للعنصر الثالث يمكن الحصول على $n - 2$ نتيجة مختلفة،
 - وهكذا دواليك حتى عملية السحب الأخيرة رقم n أين لن يبقى إلا عنصرا واحدا لنختاره.
- لمعرفة عدد النتائج المختلفة نطبق مبدأ الجداء على عمليات السحب المتتالية لنجد:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 = n!$$

مثال 33.1

عدد الطرق المختلفة لجلوس خمسة أشخاص في صف واحد هو عدد التباديلات ذات خمسة عناصر ويساوي $5! = 120$.

مثال 34.1

يدخل ثلاثة أشخاص إلى القاعة الواحد تلو الآخر. عدد الطرق المختلفة لدخولهم هو عدد التباديلات ذات ثلاثة عناصر، أي $3! = 6$ طرق مختلفة.

مبرهنة 38.1 عدد الترتيبات

عدد الترتيبات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر يساوي $\frac{n!}{(n - p)!}$.

البرهان 38.1

نريد أن نختار p عنصر على التوالي من مجموعة تضم n عنصر بحيث لا يمكن اختيار أي عنصر أكثر من مرة واحدة. إذن:

- لاختيار العنصر الأول لدينا n نتيجة مختلفة،
- ثم لاختيار العنصر الثاني، وبعد إقصاء العنصر الأول، يصبح لدينا $n - 1$ نتيجة مختلفة،
- وهكذا حتى نصل إلى اختيار العنصر ذو الرتبة p أين سيكون لنا $n - p + 1$ نتيجة مختلفة.

بتطبيق مبدأ الجداء نجد أن عدد الحالات المختلفة لاختيار p عنصر على التوالي وبدون إرجاع من مجموعة ذات n عنصر يساوي:

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \cdots \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots \times 1}$$

بتبسيط البسط والمقام في العبارة الأخيرة نجد أن عدد الترتيبات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر يساوي $\frac{n!}{(n-p)!}$.

مثال 35.1

عدد الحالات المختلفة لاختيار رئيس ونائب رئيس وأمين في شركة تحتوي 29 عاملاً يساوي عدد الترتيبات ذات ثلاثة عناصر من مجموعة ذات 29 عنصراً، أي $29 \times 28 \times 17 = 21924$.

3.3.1 التوفيقات

تعريف 39.1 التوفيقية

نسمي **توفيقية** ذات p عنصر من مجموعة A ذات n عنصر كل مجموعة جزئية $S \subset A$ بحيث $|S| = p$.

بصيغة أخرى نرى أن التوفيقية ذات p عنصر هي ببساطة مجموعة جزئية أصليةا يساوي p . النظرية التالية تعطي عدد التوفيقات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر.

مبرهنة 40.1 عدد التوافقيات

عدد التوافقيات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر هو

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

الرمز $\binom{n}{p}$ يقرأ n اختيار p .

البرهان 40.1

نعلم أن عدد الترتيبات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر يساوي $\frac{n!}{(n-p)!}$. كل ترتيبية ذات p عنصر تمثل توفيقية ذات p عنصر، لكن هناك ترتيبات مختلفة تمثل نفس التوفيقية.

بالضبط، لو أخذنا كل التبديلات لنفس التوفيقية فإننا نحصل على كل الترتيبات التي لها نفس عناصر هذه التوفيقية.

إذن عدد الترتيبات التي تمثل التوفيقية الواحدة ذات p عنصر يساوي $p!$.

من هذا نستنتج أن $\frac{n!}{(n-p)!} = p! \times \binom{n}{p}$ ومنه

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثال 36.1

عدد الحالات المختلفة لتغيب ثلاثة أشخاص في لقاء لعشرة أشخاص هو عدد التوافقيات ذات ثلاثة عناصر من مجموعة ذات عشرة عناصر ويساوي

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

مثال 37.1

نسحب كرتين في آن واحد من كيس يحتوي سبع كريات متماثلة. عدد الحالات المختلفة هو عدد التوافقيات ذات عنصرين من مجموعة ذات سبعة عناصر، أي $\binom{7}{2} = 21$.

قضية 41.1

من أجل كل عددين طبيعيين $p < n$ لدينا:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

البرهان 41.1

إثبات هذه القضية سهل ومباشر من عبارة $\binom{n}{p}$.
 يمكن إثبات هذه العبارة كذلك باستعمال مفهوم التوفيقية. فاختيار p عنصر من مجموعة ذات n عنصر يؤدي إلى ترك $n - p$ عنصر، هو تماماً كاختيار $n - p$ عنصر من مجموعة ذات n عنصر وترك p عنصر.

ملحوظة 42.1

تتميز التوفيقات في عمليات السحب بما يلي:

- لا يتم إرجاع العناصر إلى المجموعة بعد سحبها،
 - لا يهم ترتيب العناصر أيها تم سحبه قبل الآخر.
- وهذا يتوافق تماماً مع سحب العناصر في آن واحد.

4.3.1 دستور ثنائي الحد

ليكن x و y عددين حقيقيين و n عدد طبيعي. نريد أن نتوصل إلى صيغة منشور العبارة $(x + y)^n$. نحتاج لذلك إلى التوطئة التالية.

قضية 43.1

من أجل كل عددين طبيعيين $p \leq n$ لدينا:

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$$

البرهان 43.1

نقدم فيما يلي طريقتين مختلفتين لإثبات هذه العبارة.
الطريقة الأولى: هي طريقة تقنية تعتمد على حساب العامل وتوحيد المقامات.
 بالتأكيد لدينا

$$\binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)!}{p! \times (n+1-p)!} = \frac{(n+1) \times n!}{p! \times (n+1-p)!}$$

نكتب $(n+1) = (n+1-p) + p$ نحصل على

$$\binom{n+1}{p} = \frac{(n+1-p) \times n!}{p! \times (n+1-p)!} + \frac{p \times n!}{p! \times (n+1-p)!}$$

نستعمل خاصية العامل في المقامين، أنظر القضية 3.1، مع الإختزال نحصل على

$$\binom{n+1}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)! \times (n+1-p)!}$$

وهو المطلوب.

الطريقة الثانية: تعتمد على العد في المجموعات.

بالتأكيد، $\binom{n+1}{p}$ يمثل عدد المجموعات التي أصلها يساوي p والتي هي مجموعات جزئية من مجموعة أصلها $n+1$.

نعتبر عنصرا x من بين كل العناصر. لتشكيل مجموعة جزئية أصلها p لدينا حالتين منفصلتين:

- العنصر x ينتمي إلى المجموعة الجزئية، في هذه الحالة ولإتمام هذه المجموعة يتعين علينا اختيار $p-1$ عنصر من بين n عنصر. عدد المجموعات المختلفة إذن $\binom{n}{p-1}$.
- العنصر x لا ينتمي إلى المجموعة الجزئية، وفي هذه الحالة يتعين علينا اختيار كل العناصر من ضمن n عنصر. عندها نحصل على $\binom{n}{p}$. مجموعة مختلفة.

باستعمال مبدأ الجمع نتوصل إلى المطلوب

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$$

مبرهنة 44.1 دستور ثنائي الحد

من أجل كل عددين حقيقيين x و y وكل عددين طبيعيين $p \leq n$ لدينا

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p$$

البرهان 44.1

نعرض فيما يلي طريقتين مختلفتين للبرهان.

الطريقة الأولى: باستعمال التراجع.

نعرف، من أجل كل عدد طبيعي n ، الخاصية

$$P(n) : (x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p$$

• البدء: نتحقق من صحة $P(0)$. فعلا لدينا

$$(x + y)^0 = \sum_{p=0}^0 \binom{0}{p} x^{0-p} \cdot y^p$$

$$\cdot \sum_{p=0}^0 \binom{0}{p} x^{0-p} \cdot y^p = \binom{0}{0} x^0 \cdot y^0 = 1 \text{ و } (x + y)^0 = 1$$

• الوراثة: نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ، أي

$$(x + y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p$$

ونبين أن $P(n+1)$ صحيحة، أي

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} x^{n+1-p} \cdot y^p$$

بما أن $(x + y)^{n+1} = (x + y) \times (x + y)^n = x \times (x + y)^n + y \times (x + y)^n$ وباستعمال

فرضية التراجع نكتب:

$$(x + y)^{n+1} = x \times \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p + y \times \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p$$

بالقيام بالنشر نجد:

$$(1) \quad (x + y)^{n+1} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n+1-p} \cdot y^p + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^{p+1}$$

الطرف الأيمن من هذه المعادلة يحتوي حدين نعالجهما كما يلي:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n+1-p} \cdot y^p &= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} x^{n+1-p} \cdot y^p \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} x^{n+1-p} \cdot y^p \end{aligned}$$

$$\cdot \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \text{ لأن}$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^{p+1} &= \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^{p+1} + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^{p+1} + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \end{aligned}$$

$$\cdot \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1} \text{ لأن}$$

باستعمال تبديل المتغير $q = p + 1$ نكتب المجموع الأخير كما يلي:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^{p+1} = \sum_{q=1}^n \binom{n}{q-1} x^{n+1-q} \cdot y^q$$

ومنه

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^{p+1} = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p-1} x^{n+1-p} \cdot y^p + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}$$

نعود إلى العبارة (1) ونكتب إذن:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} x^{n+1-p} \cdot y^p \\ &\quad + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p-1} x^{n+1-p} \cdot y^p + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \end{aligned}$$

بعد التبسيط وجمع الحدود المتشابهة نكتب:

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{p=1}^n \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right] x^{n+1-p} \cdot y^p + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}$$

باستعمال القضية 43.1 يمكن أن نكتب

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{p=1}^n \binom{n+1}{p} x^{n+1-p} \cdot y^p + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}$$

بعبارة مختصرة لقد وجدنا

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} x^{n+1-p} \cdot y^p$$

أي أن $P(n+1)$ صحيحة.

من هذا نستنتج إذن أن

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p$$

من أجل كل عدد طبيعي n .

الطريقة الثانية: باستعمال العد في المجموعات.

علما أن منشور $(x+y)^n$ هو عبارة عن مجموع الحدود من الشكل $x^q \cdot y^p$ حيث $p+q=n$ أي الحدود من الشكل $x^{n-p} \cdot y^p$ فيكفي أن نبين أن معامل الحد $x^{n-p} \cdot y^p$ في هذا المنشور هو $\binom{n}{p}$.

نعلم أن $(x + y)^n$ هو عبارة عن جداء n حد من الشكل $x + y$. عند نشر هذا الجداء فإن من كل حد يتم أخذ إما x وإما y . نشكل الحد $x^{n-p} \cdot y^p$ من هذا الجداء باختيار p حد نأخذ منها y وباقي الحدود يأخذ منها x . عندها يكون لدينا بالضبط $\binom{n}{p}$ إختيار مختلف. بعبارة أخرى نحصل على $\binom{n}{p}$ حد من الشكل $x^{n-p} \cdot y^p$ بعد نشر $(x + y)^n$. بعد جمع هذه الحدود المتشابهة نحصل على معاملها $\binom{n}{p}$.

مثال 38.1

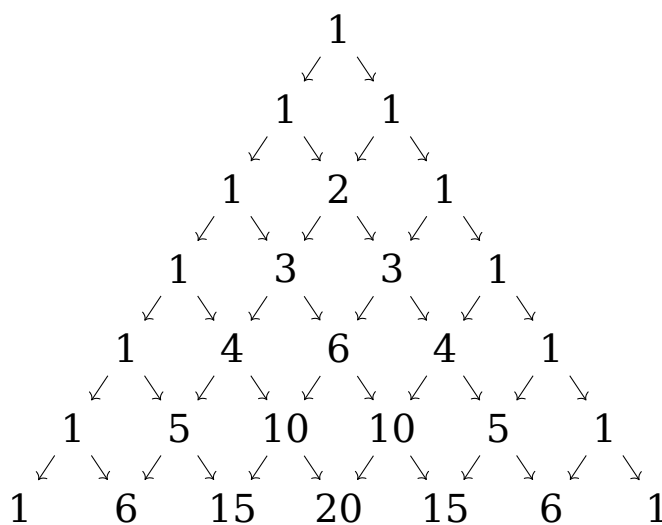
لدينا العبارة الشهيرة

$$(x + y)^2 = \binom{2}{0} x^{2-0} y^0 + \binom{2}{1} x^{2-1} \cdot y^1 + \binom{2}{2} x^{2-2} \cdot y^2 = x^2 + 2 \cdot xy + y^2$$

5.3.1 المثلث العددي

المثلث العددي هو طريقة بيانية تسمح باستنتاج معاملات ثنائي الحد بالاعتماد على عمليات بسيطة. كل سطر من المثلث العددي يمثل منشور ثنائي الحد إلى درجة معينة تتعلق بمرتبة السطر.

في السطر الأول نضع معاملات منشور العبارة $(x + y)^0$ ، لذلك فإن هذا السطر يتكون من عدد واحد هو 1. بينما في السطر الثاني نضع المعاملات التي نحصل عليها من منشور العبارة $(x + y)^1$ ، أي في السطر الثاني نضع 1 1.



شكل 4.1: المثلث العددي

يتم ملء المثلث العددي إلى الأسطر الأخرى بالإعتماد على نتيجة القضية 33.1. مثلا، لإنشاء المثلث العددي إلى السطر الثالث يجب إضافة معاملات منشور العبارة $(x+y)^2$ إلى المثلث العددي السابق. نستنتج هذه المعاملات باتباع الخطوات التالية:

1. يتم ملء معاملات طرفي السطر دائما بالعدد 1،
2. كل معامل يساوي مجموع المعاملين اللذين يقعان فوقه.

4.1 التجزئات المرتبة

لتكن A مجموعة وليكن أصلها $|A| = n$. ليكن p و q عددين طبيعيين بحيث $p + q = n$. نود عد كل التجزئات الممكنة $\{A_1, A_2\}$ للمجموعة A بحيث $|A_1| = p$ و $|A_2| = q$.

قضية 45.1

عدد تجزئات المجموعة A إلى $\{A_1, A_2\}$ بحيث $|A_1| = p$ و $|A_2| = q$ يساوي $\binom{n}{p}$.

البرهان 45.1

بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار المجموعة A_1 ؟ الجواب هو عدد التوفيقات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر، أي $\binom{n}{p}$. بعد اختيار عناصر المجموعة A_1 يبقى لنا $n - p$ عنصرا يجب أن نختار منها عناصر المجموعة A_2 . بنفس الطريقة لدينا $\binom{n-p}{q}$ طريقة مختلفة لاختيار المجموعة A_2 . باستعمال قاعدة الجداء نستنتج أن عدد التجزئات المختلفة للمجموعة A يساوي

$$\binom{n}{p} \times \binom{n-p}{q}$$

علما أن $p + q = n$ فإن $\binom{n-p}{q} = 1$. ومنه عدد التجزئات المختلفة للمجموعة A إلى مجموعتين A_1 و A_2 بحيث $|A_1| = p$ و $|A_2| = q$ يساوي $\binom{n}{p}$.

لتكن الأعداد الطبيعية $n_1, n_2, \dots, n_r$ بحيث $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$. نهتم الآن بعدد تجزئات المجموعة A من الشكل $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ والتي تحقق

$$|A_1| = n_1, |A_2| = n_2, \dots, |A_r| = n_r$$

قضية 46.1

عدد التجزئات المرتبة $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ للمجموعة A والتي تحقق

$$|A_1| = n_1, |A_2| = n_2, \dots, |A_r| = n_r$$

هو العدد $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ المعروف بالعلاقة:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!}$$

البرهان 46.1

نقوم بعد الطرق المختلفة لاختيار كل مجموعة جزئية.

- بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار عناصر المجموعة A_1 ؟ الجواب هو $\binom{n}{n_1}$.
- تبقى إذن $n - n_1$ عنصر. من هذه العناصر، ماهو عدد الطرق المختلفة لاختيار عناصر المجموعة A_2 ؟ الجواب هو $\binom{n-n_1}{n_2}$.
- بعد ذلك يتبقى $n - n_1 - n_2$ عنصر، من هذه العناصر المتبقية سنشكل المجموعة A_3 ، ولذلك لدينا $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ طريقة مختلفة.
- نكرر هذه العملية إلى أن نصل إلى اختيار عناصر المجموعة A_r من $n - n_1 - \dots - n_{r-1}$ عنصر متبقي.

باستعمال مبدأ الجداء نستنتج أن عدد التجزئات المرتبة يساوي

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \dots \times \binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}$$

بتبسيط حدود هذه العبارة نجد

$$\frac{n!}{n_1! \times (n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2! \times (n-n_1-n_2)!} \times \dots \times \frac{(n-n_1-\dots-n_{r-1})!}{n_r! \times (n-n_1-\dots-n_r)!}$$

نلاحظ أن هناك إختلالات متكررة يمكن القيام بها، وبما أن $0! = 1$ فإن

فإن العبارة الأخيرة تكتب ببساطة

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!}$$

هذه العبارة تكتب

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$$

ملحوظة 47.1

يمكن إثبات القضية 46.1 بطريقة أخرى أكثر صرامة وذلك باستعمال مبدأ التراجع على عدد عناصر التجزئة r .

1.4.1 دستور متعدد الحدود

مبرهنة 48.1 دستور متعدد الحدود

من أجل كل أعداد حقيقية $x_1, x_2, \dots, x_k$ وكل عدد طبيعي n لدينا

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{p_1+p_2+\dots+p_k=n} \binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_k} x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_k^{p_k}$$

لازمة 49.1 دستور ثلاثي الحدود

من أجل كل أعداد حقيقية x, y, z وكل عدد طبيعي n لدينا

$$(2) \quad (x + y + z)^n = \sum_{p+q+r=n} \binom{n}{p, q, r} x^p \cdot y^q \cdot z^r$$

مثال 39.1

نريد نشر العبارة $(x + y + z)^2$. بتطبيق الدستور (2) من أجل $n = 2$ نكتب

$$(x + y + z)^2 = \sum_{p+q+r=2} \binom{2}{p, q, r} x^p \cdot y^q \cdot z^r$$

لدينا المعاملات التالية:

$$\begin{aligned} \binom{2}{2, 0, 0} &= \binom{2}{0, 2, 0} = \binom{2}{0, 0, 2} = 1 \\ \binom{2}{1, 1, 0} &= \binom{2}{1, 0, 1} = \binom{2}{0, 1, 1} = 2 \end{aligned}$$

إذن

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

مثال 40.1

لنشر العبارة $(x + y + z)^3$ نطبق دستور ثلاثي الحدود ونكتب

$$(x + y + z)^3 = \sum_{p+q+r=3} \binom{3}{p, q, r} x^p y^q z^r$$

ولدينا معاملات متعدد الحدود التالية:

$$\begin{aligned} \binom{3}{3, 0, 0} &= \binom{3}{0, 3, 0} = \binom{3}{0, 0, 3} = 1 \\ \binom{3}{2, 1, 0} &= \binom{3}{2, 0, 1} = \binom{3}{1, 2, 0} = \binom{3}{1, 0, 2} = \binom{3}{0, 2, 1} = \binom{3}{0, 1, 2} = 3 \\ \binom{3}{1, 1, 1} &= 6 \end{aligned}$$

إذن

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2) + 6xyz$$

5.1 تمارين وتطبيقات

1.1 أثبت من أجل أي مجموعة X أن

$$\bullet X \cap \bar{X} = \emptyset \quad \bullet X \cup \bar{X} = E$$

2.1 لتكن X و Y مجموعتين، أثبت أن

$$X \setminus Y = X \cap \bar{Y}$$

3.1 لتكن X و Y مجموعتين، أثبت علاقتا دي مورغان التاليتين:

$$\bullet \overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y} \quad \bullet \overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}$$

4.1 بسط الحسابات التالية.

$$3. \frac{6! + 7!}{2! \times 3! \times 4!}$$

$$1. \frac{10!}{7! \times 5!}$$

$$4. \binom{10}{7} \times \binom{7}{5} \times \binom{5}{3}$$

$$2. \frac{9!}{4! \times 5!}$$

5.1

1. بسط العبارة التالية $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100$

2. إستنتج تبسيطا للعبارة $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 99$

6.1 حل في $\mathbb{N}$ المعادلات التالية

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{5n}{2} + 1 \quad 4. \quad \binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2} \quad 1.$$

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = 8n \quad 5. \quad \binom{10}{3n} = \binom{10}{n-2} \quad 2.$$

$$\binom{n}{n-2} = 45 \quad 6. \quad \binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + \binom{6}{2} \quad 3.$$

7.1. لاجتياز مسابقة يجب على المترشح أن ينجح في أحد إمتحانين.

نعلم أن 15 متسابقا نجح في الإمتحان الأول، و 18 متسابقا نجح في الإمتحان الثاني، و 10 متسابقين نجحوا في كلا الإمتحانين. فكم متسابقا نجح في اجتياز المسابقة؟

8.1. أثبت أن

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

9.1. تم إحصاء الحضور والغيابات لإحدى المدارس الإبتدائية في أحد الأيام. لدينا المعطيات التالية.

- نسبة الحضور في الفترة الصباحية هي 90%.
- نسبة الحضور في الفترة المسائية هي 80%.
- نسبة الحضور طوال ذلك اليوم هي 75%.
- عدد الغيابات طوال ذلك اليوم هو 30.

كم عدد الحضور لذلك اليوم؟

10.1. نريد تشكيل كلمة سرية تتكون من 5 رموز من المجموعة $S = \{A, B, C, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. الرمز الأول من الكلمة السرية يجب أن يكون حرفا، أما الرموز المتبقية فيجب أن تكون أرقاما.

1. ما هو تعداد كل الكلمات السرية الممكنة؟
2. ما هو تعداد الكلمات السرية التي يكون فيها الرمز الأول A أو B ؟
3. ما هو تعداد الكلمات السرية التي تختلف رموزها مثنى مثنى؟
4. ما هو تعداد الكلمات السرية التي فيها تكرارات للرموز؟

11.1. تحقق من العلاقات التالية:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad 3. \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad 1.$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2 \times \binom{n-2}{p-1} + \dots \quad 4. \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots \pm \binom{n}{n} = 0 \quad 2.$$

$$\binom{n-2}{p}$$

12.1.

1. أنشئ المثلث العددي إلى السطر العاشر.

2. إستنتج منشور ثنائي الحدين $(x+1)^9$.

3. أحسب مجموع المعاملات في كل سطر من المثلث العددي. ماذا تلاحظ؟

13.1. باستعمال البرهان بالتراجع، أثبت دستور ثنائي الحد.

14.1. نعتبر مجموعة كل الأعداد التي تكتب باستعمال ثلاثة أرقام من $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1. ما هو أصلي هذه المجموعة؟

2. ما هو أصلي هذه المجموعة:

(أ) إذا كانت الأرقام المستعملة متمایزة مثنى مثنى؟

(ب) إذا كانت الأعداد زوجية والأرقام المستعملة متمایزة مثنى مثنى؟

(ج) إذا كانت الأعداد لا تقبل القسمة على 7؟

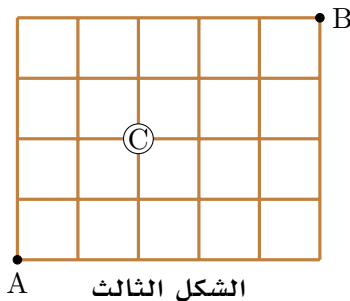
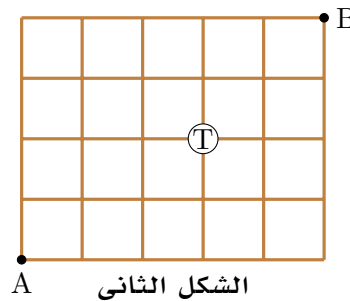
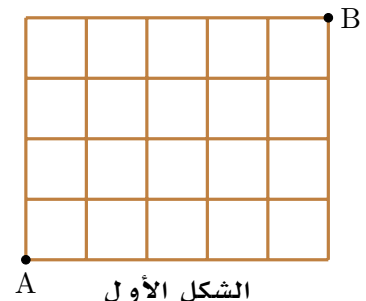
15.1. نسمي كلمة كل قائمة مؤلفة من الأحرف الأبجدية.

1. ما هو تعداد الكلمات ذات 7 أحرف في أبجدية فيها حرفان فقط؟

2. ما هو تعداد الكلمات التي يمكن تأليفها باستعمال أحرف الكلمة $\langle \text{INTERNET} \rangle$ ؟

16.1. في كل شكل من الأشكال الثلاثة أدناه، يريد شخص أن ينتقل من النقطة A إلى النقطة B

بالاعتماد على الشبكة الممثلة، حيث يمكنه التحرك خطوة خطوة إما يميناً وإما شمالاً في كل خطوة.



1. في الشكل الأول، ما هو تعداد الطرق المختلفة التي يمكنه من الانتقال من النقطة A إلى

النقطة B؟

2. في الشكل الثاني، ما هو تعداد الطرق المختلفة التي يمكنه من الانتقال من النقطة A إلى النقطة B مروراً بالنقطة T؟

3. في الشكل الثالث، ما هو تعداد الطرق المختلفة التي يمكنه من الانتقال من النقطة A إلى النقطة B والتي لا تمر بالنقطة C؟

17.1. يتكون قسم من 30 طالبا حيث 18 منهم ذكور. من أجل تمثيل هذا القسم يتم تشكيل لجنة مكونة من 3 طلبة.

1. ما هو تعداد اللجان المختلفة؟

2. ما هو تعداد اللجان التي بها كلا الجنسين؟

3. إستنتج تعداد اللجان المكونة من طلبة من نفس الجنس.

4. أحمد وبشرى طالبان من هذا القسم لا يمكنهما المشاركة معا في نفس اللجنة. ما هو تعداد اللجان في هذه الحالة؟

5. إذا كان في كل لجنة يوجد رئيس ونائب رئيس وأمين، ما هو تعداد اللجان المختلفة؟

باب 2

المتتاليات العددية

1.2 المفاهيم الأساسية حول المتتاليات العددية

1.1.2 مفهوم المتتالية العددية

تعريف 1.2 المتتالية العددية

نسمي **متتالية عددية** كل قائمة مرتبة وغير منتهية من الأعداد الحقيقية. كل عدد من هذه القائمة هو **حد** من حدود المتتالية. يرمز له عادة u_p ، حيث أن الدليل p هو عدد طبيعي يمثل مرتبة هذا الحد في القائمة. في هذه الحالة يرمز إلى المتتالية كليا بالرمز (u_n) .

مثال 1.2

الأعداد الطبيعية $1, 2, 3, \dots$ تشكل متتالية عددية.

إذا رمزنا إلى حدود هذه المتتالية بـ u_n فيمكن أن نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n = n$.

الأعداد $2, 2, 2, \dots$ كذلك تشكل متتالية عددية.

إذا رمزنا إلى حدود هذه المتتالية بـ v_n فيمكن أن نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n = 2$.

نقول إن (v_n) هي **متتالية ثابتة**.

يمكن أن تأتي المتتالية بإحدى الصيغتين التاليتين:

- عبارة الحد العام: تسمح بحساب كل حد من حدود المتتالية مباشرة بدلالة رتبته.
- علاقة تراجعية: تسمح بحساب كل حد من حدود المتتالية بدلالة وبعد حساب الحدود التي قبله.

مثال 2.2

- متتالية معطاه بواسطة عبارة الحد العام:

$$u_n = 2n - 4$$

نلاحظ أنه يمكن الحصول على قيمة أي حد من حدود المتتالية (u_n) مباشرة إذا عرفنا دليله.

$$\text{مثلا: } u_5 = 2 \cdot 5 - 4 = 6, \text{ و } u_{23} = 2 \cdot 23 - 4 = 42.$$

- متتالية معرفة بواسطة علاقة تراجعية:

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 1$$

$$\text{لدينا مثلا: } u_0 = 2, \quad u_1 = 2 \cdot u_0 - 1 = 3, \quad u_2 = 2 \cdot u_1 - 1 = 5$$

نلاحظ بالنسبة لهذه المتتالية أنه لحساب أي حد من حدودها يلزم حساب الحدود التي قبله أولا.

2.1.2 المتتاليات المحدودة

تعريف 3.2 المتتالية المحدودة من الأعلى

تكون متتالية (u_n) **محدودة من الأعلى** إذا وجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون لدينا $u_n < M$.

مثال 3.2

نأخذ المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بعبارة الحد العام

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

نتحقق بسهولة أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ 2، أي $u_n \leq 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.
فعلا، إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = 2$$

تعريف 4.2 المتتالية المحدودة من الأسفل

تكون متتالية (u_n) **محدودة من الأسفل** إذا وجد عدد حقيقي m بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون لدينا $u_n > m$.

مثال 4.2

نعتبر متتالية المثال السابق ذات الحد العام: $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.
نلاحظ أن حدود المتتالية (u_n) كلها موجبة، وذلك لأن البسط والمقام هما عدداً طبيعيين موجبان تماماً. إذن، من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n \geq 0$. أي أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بـ 0.

تعريف 5.2 المتتالية المحدودة

تكون متتالية (u_n) **محدودة** إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل في آن واحد.

مثال 5.2

أثبتنا في المثالين السابقين أن المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ هي محدودة من الأسفل بـ 0 ومن الأعلى بـ 2، لهذا نقول إن المتتالية (u_n) محدودة ولدينا من أجل كل عدد طبيعي

$$0 \leq u_n \leq 2$$

3.1.2 نهاية متتالية والمتتاليات المتقاربة

لتكن (u_n) متتالية عددية وليكن ℓ عدداً حقيقياً ($\ell \in \mathbb{R}$).

تعريف 6.2 نهاية متتالية عددية

نقول إن نهاية المتتالية (u_n) تساوي ℓ ، ونكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ أو $\lim u_n = \ell$ ، إذا كان من أجل كل مجال مفتوح I ، حيث $\ell \in I$ ، يوجد عدد طبيعي N حيث إذا كان $n \geq N$ فإن $u_n \in I$.

مثال 6.2

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بعلاقة حدها العام $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.
لإثبات أن نهاية المتتالية (u_n) تساوي $\ell = 2$ ، أي أن $\lim u_n = 2$ ، نأخذ مجالا مفتوحاً يحتوي العدد $\ell = 2$.

يمكننا أن نعتبر هذا المجال من الشكل $I_\varepsilon =]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$ ، حيث ε عدد حقيقي موجب تماما ($\varepsilon > 0$). هل يوجد عدد طبيعي N بحيث يكون الحد u_N ، وكل الحدود التي تليه، تنتمي إلى المجال I_ε ؟ للإجابة على هذا السؤال يجب حل المتراجحة التالية $u_n \in I_\varepsilon$ أي $u_n \in]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$.

نكتب إذن $2 - \varepsilon < u_n < 2 + \varepsilon$. علما أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

نستنتج أن

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

وبما أن $-\frac{1}{n+1}$ عدد سالب تماما نستنتج إذن

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n+1} < 0$$

نعكس إشارة طرفي المتراجحة ثم نقلب لنتحصل على

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

نستنتج أخيرا أن

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

يكفي إذن أن نأخذ N أصغر عدد طبيعي يكون أكبر أو يساوي $\frac{1}{\varepsilon}$ حتي يكون من أجل $n > N$

$$u_n \in I_\varepsilon$$

مثلا من أجل $\varepsilon = 0.01$ لدينا $I_\varepsilon =]1.99, 2.01[$ ويمكن أن نأخذ $N = \frac{1}{0.01} = 100$.

عندئذ لدينا، من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 100$ ، $u_n \in]1.99, 2.01[$.

تعريف 7.2 $\lim u_n = -\infty$

نقول إن نهاية المتتالية (u_n) تساوي $(-\infty)$ ، ونكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

أو $\lim u_n = -\infty$ ، إذا كان من أجل كل عدد حقيقي M يوجد عدد طبيعي N حيث إذا كان $n \geq N$ فإن $u_n < M$.

مثال 7.2

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بعبارة الحد العام كما يلي: $u_n = \sqrt{2n} - n$. نريد أن نبين باستعمال التعريف أن:

$$\lim u_n = -\infty$$

ليكن إذن M عددا حقيقيا. يجب تحديد رتبة N تكون الحدود التي بعدها كلها أصغر من M . أي من أجل $n \geq N$ يتحقق

$$u_n < M$$

نبحث إذن عن حلول المتراجحة $\sqrt{2n} - n < M$. لدينا $u_n < M$ يعني $\sqrt{2n} - n < M$. إذن

$$\sqrt{2n} < n + M$$

المتراجحة الأخيرة يؤول حلها إلى دراسة إشارة ثلاثي حدود. بالفعل، بعد تربيع طرفي المتراجحة نحصل على

$$n^2 + 2(M+1)n + M^2 > 0$$

ندرس إذن إشارة ثلاثي الحدود $P(X) = X^2 + 2(M-1)X + M^2$. نستعمل طريقة المميز

$$\Delta = 4(1 - 2M)$$

نناقش إشارة $P(X)$ حسب إشارة المميز Δ

1. إذا كان المميز سالبا، أي $2M > 1$ فإن $P(X)$ يكون دوما موجبا. إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n < M$.

2. إذا كان المميز معدوما، أي $2M = 1$ ، فإن $P(X)$ يكون دوما موجبا تماما ماعدا من أجل القيمة $X_0 = 1 - M$ أين يكون $P(X)$ معدوما.

في هذه الحالة يكفي أن نأخذ $N = 1 + (1 - M) = 2 - M$ فنجد أنه إذا كان $n \geq N$ فإن $u_n < M$.

3. إذا كان المميز موجبا تماما، أي $2M < 1$.

في هذه الحالة $P(X)$ يقبل حلين متمايزين $X_1 < X_2$ حيث

$$X_1 = 1 - M - \sqrt{1 - 2M}, \quad X_2 = 1 - M + \sqrt{1 - 2M}$$

يكفي هنا أن نأخذ N أصغر عدد طبيعي يكوم أكبر تماما من X_2 ، عندها يكون لدينا من أجل كل $n \geq N$: $u_n < M$.

بهذا فإننا قد أثبتنا أن من أجل كل عدد حقيقي M يوجد عدد طبيعي N بحيث إذا كان $n \geq N$ فإن $u_n < M$.

تعريف 8.2 $\lim u_n = +\infty$

نقول إن نهاية المتتالية (u_n) تساوي $(+\infty)$ ونكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ أو $\lim u_n = +\infty$ إذا كان من أجل كل عدد حقيقي M يوجد عدد طبيعي N حيث إذا كان $n \geq N$ فإن $u_n > M$.

مثال 8.2

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بعبارة الحد العام كما يلي $u_n = n^2 + 1$. نريد أن نبين باستعمال التعريف أن

$$\lim u_n = +\infty$$

ليكن إذن M عددا حقيقيا. يجب تحديد رتبة N بحيث تكون الحدود التي بعدها كلها أكبر من M . أي إذا كان $n \geq N$ فإن $u_n > M$. نبحث إذن عن حلول المتراجحة $n^2 + 1 > M$. إذن $u_n > M$ معناه $n^2 > M - 1$. وبما أن n عدد طبيعي فإن المتراجحة الأخيرة تكافئ $n^2 \geq M$ نميز هنا حالتين

1. إذا كان M سالبا فإن من المتراجحة $n^2 \geq M$ محققة دائما.

في هذه الحالة نأخذ $N = 0$ ونكتب من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n > M$.

2. إذا كان $M \geq 0$ عندها نأخذ N اصغر عدد طبيعي يحقق $N \geq \sqrt{M}$. يكون عندها من أجل كل عدد طبيعي $n \geq N$: $u_n > M$.

بهذا نكون قد أثبتنا أن من أجل كل عدد حقيقي M ، يوجد عدد طبيعي N ، بحيث إذا كان $n \geq N$ فإن $u_n > M$.

تعريف 9.2 المتتالية المتقاربة

تكون المتتالية (u_n) **متقاربة** إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim u_n = \ell$. إذا لم تكن المتتالية (u_n) متقاربة فنقول إنها **متباعدة**.

مثال 9.2

أثبتنا في المثال 6.2 أن المتتالية (u_n) المعطاة بعبارة حدها العام $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ تحقق

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

إذن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها تساوي 2.

مثال 10.2

في المثال 7.2 أثبتنا أن نهاية المتتالية (u_n) المعرفة بعبارة الحد العام $u_n = \sqrt{2n} - n$ تحقق:

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n} - n = -\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن المتتالية (u_n) في المثال 7.2 متباعدة.

مثال 11.2

في المثال 8.2 أثبتنا أن نهاية المتتالية (u_n) المعرفة بعلاقة الحد العام $u_n = n^2 + 1$ تحقق:

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن المتتالية (u_n) في المثال 8.2 متباعدة.

مبرهنة 10.2 وحدانية نهاية متتالية متقاربة

كل متتالية متقاربة لديها نهاية وحيدة.

مثال 12.2

لتكن المتتالية (a_n) المعرفة، من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، بحدها العام $a_n = (-1)^n$. يمكن بسهولة أن نكتب:

$$a_n = \begin{cases} -1, & \text{إذا كان } n \text{ فرديا} \\ +1, & \text{إذا كان } n \text{ زوجيا} \end{cases}$$

رغم أن المتتالية (a_n) محدودة إلا أن حدودها لا تقترب من قيمة حقيقية واحدة، بل قيمها تتناوب بين -1 و $+1$. إذن المتتالية (a_n) متباعدة لأن ليس لها نهاية وحيدة.

مبرهنة 11.2 العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين حيث $\lim u_n = \ell$ و $\lim v_n = \ell'$ وليكن λ عددا حقيقيا فإن

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim(\lambda \cdot u_n) &= \lambda \ell & 2) \quad \lim(u_n + v_n) &= \ell + \ell' \\ 3) \quad \lim(u_n \times v_n) &= \ell \times \ell' & 4) \quad \lim \frac{u_n}{v_n} &= \frac{\ell}{\ell'} \quad \text{بشرط } \ell' \neq 0 \end{aligned}$$

مثال 13.2

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي

$$u_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1}$$

يمكن أن نتحقق من أن $\lim u_n = 1$ و $\lim v_n = 2$ ، ولدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $2 \times u_n = \frac{2n}{n+1}$. إذن

$$\lim 2 \times u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 = 2 \times \lim u_n$$

كذلك، من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_n + v_n = \frac{3n^3 + 2n^2 + 2n + 1}{n^3 + n^2 + n + 1}$. إذن

$$\lim u_n + v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 + 2n^2 + 2n + 1}{n^3 + n^2 + n + 1} = 3 = \lim u_n + \lim v_n$$

ولدينا كذلك، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \times v_n = \frac{2n^3 + n}{n^3 + n^2 + n + 1}$ ، إذن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + n}{n^3 + n^2 + n + 1} = 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

ولدينا كذلك، من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^3 + n}{2n^3 + 2n^2 + n + 1}$ ، ومنه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + n}{2n^3 + 2n^2 + n + 1} = \frac{1}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n}$$

4.1.2 إتجاه تغير متتالية عددية

تعريف 12.2 المتتالية المتزايدة

نقول عن متتالية (u_n) أنها متزايدة تماما إذا تحقق، من أجل كل عدد طبيعي n ، ما يلي:

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

مثال 14.2

نعتبر المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بعبارة الحد العام كما يلي $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.
من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

تعريف 13.2 المتتالية المتناقصة

نقول عن متتالية (u_n) أنها متناقصة تماما إذا تحقق، من أجل كل عدد طبيعي n ، ما يلي:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

مثال 15.2

نعتبر المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بعبارة الحد العام كما يلي $u_n = \frac{n+2}{3n+2}$.
من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+2}{3(n+1)+2} - \frac{n+2}{3n+2} = \frac{-4}{(3n+5)(3n+2)} < 0$$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

تعريف 14.2 المتتالية الرتيبة

تكون متتالية رتيبة إذا كانت إما متزايدة وإما متناقصة.

مثال 16.2

- المتتالية (u_n) في المثال 14.2 متزايدة تماماً، فهي رتيبة.
- المتتالية (u_n) في المثال 15.2 متناقصة تماماً، فهي رتيبة.

مثال 17.2

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بعلاقة حدها العام $u_n = n^2 - 17n + 2$ ليست رتيبة. للتأكد من هذا يمكن أن نبرهن أن إشارة $u_{n+1} - u_n$ ليست ثابتة من أجل كل عدد طبيعي n . فعلاً، من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 16$$

نلاحظ ما يلي

- من أجل $n < 8$ لدينا $u_{n+1} - u_n < 0$.
- من أجل $n = 8$ لدينا $u_9 - u_8 = 0$.
- من أجل $n > 8$ لدينا $u_{n+1} - u_n > 0$.

النظرية التالية أساسية في الرياضيات وهي في جوهر العديد من النتائج المهمة في فروع الرياضيات.

مبرهنة 15.2 تقارب المتتاليات الرتيبة

- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متقاربة.
- كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل هي متقاربة.

مثال 18.2

نعتبر المتتالية (u_n) المعطاة بعلاقة الحد العام $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. في المثال 14.2 تم توضيح بأن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً. وفي المثال 3.2 تم توضيح بأن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2. نستنتج إذن أن (u_n) متتالية متقاربة وذلك دون اللجوء إلى حساب نهايتها.

مثال 19.2

لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = \frac{2n+3}{n+1}$. نلاحظ بسهولة أن المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0.

ندرس فيما يلي إتجاه تغير المتتالية (v_n) . إذن من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

أي أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

نستنتج أن (v_n) متتالية متقاربة.

تعريف 16.2 المتتاليات المتجاورة

نقول إن المتتاليتين (u_n) و (v_n) هما متجاورتان إذا تحقق ما يلي

1. إحدى المتتاليتين متناقصة والأخرى متزايدة.

2. المتتالية التي حدها العام $u_n - v_n$ متقاربة نحو الصفر، أي

$$\lim(u_n - v_n) = 0$$

مثال 20.2

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة في المثال 14.2 أين أثبتنا أنها متزايدة مع المتتالية (v_n) المعرفة في المثال 19.2 أين أثبتنا أنها متناقصة. لإثبات أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان يكفي أن نثبت أن $\lim(u_n - v_n) = 0$. بالتأكيد لدينا

$$\lim u_n - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n+1} = 0$$

قضية 17.2

إذا كانت المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين فهما متقاربتان نحو نفس النهاية.

مثال 21.2

نبين بسهولة أن متتاليتي المثال 20.2 المتجاورتين لديهما نفس النهاية. فعلا

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2 \quad \text{و} \quad \lim v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{n+1} = 2$$

2.2 المتتاليات الحسابية

المتتاليات الحسابية هي أولى المتتاليات العددية التي نصادفها نظرا لبساطتها، إذ يمكن تعريفها بعلاقة تراجعية أو بعبارة الحد العام، كذلك لاستعمالاتها الكثيرة خصوصا في ميدان الرياضيات المالية.

1.2.2 مفهوم المتتالية الحسابية

نقدم أولاً تعريف للمتتالية الحسابية بالعلاقة التراجعية الخاصة التي تحققها ثم نستنتج بعدها عبارة حدها العام.

تعريف 18.2 المتتالية الحسابية

نقول أن (u_n) هي متتالية **حسابية** إذا وجد عدد حقيقي r بحيث مهما كان العدد الطبيعي n يكون لدينا

$$u_{n+1} - u_n = r$$

يسمى العدد الحقيقي r **أساس** المتتالية الحسابية (u_n) .

مثال 22.2

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -3$ وبالعلاقة التراجعية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

هي متتالية حسابية أساسها $r = 2$. مثلاً لحساب الحد u_1

$$u_1 = u_0 + r = -3 + 2 = -1$$

مبرهنة 19.2 الحد العام لمتتالية حسابية

إذا كان u_p حد من حدود المتتالية الحسابية (u_n) فإنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = u_p + (n - p) \cdot r$$

البرهان 19.2

نثبت هذه النظرية في مرحلتين، في المرحلة الأولى نعتبر أن $p = 0$ ونبين أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

ثم في المرحلة الثانية نثبت النظرية من أجل كل عدد طبيعي p .

1. من أجل $p = 0$ نستعمل التراجع ونبين الخاصية P المعرفة من أجل $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$$P(n) : u_n = u_0 + n \cdot r$$

• **البدء:** بما أن $u_0 = u_0 + 0 \cdot r$ فإن $P(0)$ صحيحة.

- **الوراثة:** نفرض، من أجل عدد طبيعي n أن $P(n)$ صحيحة، أي $u_n = u_0 + n \cdot r$ ونبين أن $P(n+1)$ صحيحة، أي $u_{n+1} = u_0 + (n+1) \cdot r$.
بما أن (u_n) متتالية حسابية فإن $u_{n+1} = u_n + r$. نستعمل فرضية التراجع لنجد:

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + n \cdot r + r = u_0 + (n+1) \cdot r$$

أثبتنا إذن أن $P(n+1)$ صحيحة.

- **الإستنتاج:** نستنتج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2. ليكن p و n عددين طبيعيين، إذن:

$$u_n = u_0 + n \cdot r \quad \text{و} \quad u_p = u_0 + p \cdot r$$

بأخذ الفرق بين العبارتين طرفاً لطرف نجد:

$$u_n - u_p = (n - p) \cdot r$$

ومنه

$$u_n = u_p + (n - p) \cdot r$$

مثال 23.2

باستعمال هذه القاعدة فإن عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية المعرفة في المثال 22.2 هي

$$u_n = u_0 + n \cdot r = 2n - 3$$

مثال 24.2

لتكن (u_n) متتالية حسابية حيث $u_7 = 13$ و $u_{19} = 49$.

1. أحسب r أساس المتتالية (u_n) .

لدينا $u_{19} - u_7 = (19 - 7) \cdot r$. بالتعويض نجد $49 - 13 = 12 \cdot r$. أي $r = 3$.

2. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

من أجل أي عدد طبيعي n لدينا $u_n - u_7 = (n - 7) \cdot r$ ، ومنه نستنتج، من أجل كل عدد طبيعي n ، أن

$$u_n = 3 \cdot n - 8$$

كل عبارة خطية بدلالة n هي عبارة الحد العام لمتتالية حسابية.

2.2.2 إتجاه تغير وتقارب متتالية حسابية

إتجاه تغير أي متتالية حسابية هي خاصية تتعلق مباشرة بإشارة أساسها، وهذا ما تقررته النظرية التالية.

مبرهنة 21.2 إتجاه تغير متتالية حسابية

تكون متتالية حسابية (u_n)

- **متزايدة تماما** إذا وفقط إذا كان أساسها موجبا $(r > 0)$.
- **متناقصة تماما** إذا وفقط إذا كان أساسها سالبا $(r < 0)$.
- **ثابتة** إذا وفقط إذا كان أساسها معدوما $(r = 0)$.

البرهان 21.2

من العلاقة التراجعية للمتتالية الحسابية (u_n) ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = r$$

من هذا نستنتج مباشرة إتجاه تغيرها بدلالة إشارة الأساس r .

مثال 25.2

المتتالية (u_n) المعطاه بعبارة حدها العام

$$u_n = -5n + 9$$

هي حسابية، لأن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = (-5(n+1) + 9) - (-5n + 9) = -5$$

إذن أساسها $r = -5$ سالب، فهي إذن متناقصة تماما.

3.2.2 خواص حدود متتالية حسابية

قضية 22.2 الوسط الحسابي

تكون الأعداد الحقيقية a و b و c ، بهذا الترتيب، حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا تحقق:

$$\frac{a+c}{2} = b$$

البرهان 22.2

إذا كانت الأعداد الحقيقية a و b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن أساسها r يساوي $b-a$ ويساوي كذلك $c-b$. إذن $b-a = c-b$ مما يعني أن $\frac{a+c}{2} = b$.

مثال 26.2

تحقق من أن الأعداد -3 و 6 و 15 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية. ما هو أساسها؟

يكفي أن تحقق الأعداد -3 و 6 و 15 بهذا الترتيب قاعدة الوسط الحسابي حتى تكون حدودا متتابعة من متتالية حسابية. فعلا لدينا

$$\frac{-3+15}{2} = 6$$

أساس متتالية حسابية يساوي فرق أي حد من الحد الذي يليه. في هذا المثال نأخذ مثلا الحد الذي يساوي 6 ، إذن الحد الذي يليه يساوي 15 . نجد أن الأساس هو $15 - 6 = 9$.

مبرهنة 23.2 مجموع حدود متتابعة

ليكن $p \leq q$ عددين طبيعيين و (u_n) متتالية حسابية، إذن:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q = \frac{1}{2}(u_p + u_q)(q - p + 1)$$

البرهان 23.2

نرمز بـ S إلى المجموع ونكتب:

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q$$

$$S = u_q + u_{q-1} + \cdots + u_{p+1} + u_p$$

نلاحظ أولاً أن S هو عبارة عن مجموع لـ $q-p+1$ حداً من حدود المتتالية (u_n) ، ثم بجمع العبارتين طرفاً لطرف نحصل على:

$$2S = (u_p + u_q) + (u_{p+1} + u_{q-1}) + \cdots + (u_{q-1} + u_{p+1}) + (u_q + u_p)$$

نتأكد بسهولة من أن الطرف الأيمن من هذه العبارة هو مجموع لحدود متساوية، فعلا، فكل قوس من هذا الطرف هو من الشكل $u_{p+m} + u_{q-m}$ حيث m عدد طبيعي و $m \leq q - p$. نتأكد إذن من أن $u_{p+m} + u_{q-m}$ لا يتعلق بالعدد الطبيعي m إذ، باستعمال النظرية 19.2، نجد:

$$u_{p+m} + u_{q-m} = (u_p + m \cdot r) + (u_q - m \cdot r) = u_p + u_q$$

ومنه نستنتج

$$2S = (u_p + u_q) + (u_p + u_q) + \dots + (u_q + u_p) + (u_q + u_p) = (u_p + u_q)(q - p + 1)$$

ومنه نستخلص نتيجة النظرية.

مثال 27.2

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حيث $u_7 = -11$ و $u_{23} = 19$ فإن

$$u_7 + u_8 + \dots + u_{23} = \frac{1}{2}(-11 + 19)(23 - 7 + 1) = 68$$

ملحوظة 24.2

يمكن كتابة قانون مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية بصيغة لغوية أسهل للإستيعاب كما يلي:

$$S = \frac{(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}) \times (\text{عدد الحدود})}{2}$$

3.2 المتتاليات الهندسية

1.3.2 مفهوم المتتالية الهندسية

تعريف 25.2 المتتالية الهندسية

نقول أن (u_n) هي متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

يسمى العدد الحقيقي q أساس المتتالية الهندسية (u_n) .

مثال 28.2

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -3$ وبالعلاقة التراجعية المعطاة من أجل كل عدد طبيعي n بـ

$$u_{n+1} = 2 \cdot u_n$$

هي متتالية حسابية أساسها $q = 2$. مثلاً لحساب الحد u_1

$$u_1 = 2 \times u_0 = 2 \times (-3) = -6$$

مبرهنة 26.2 الحد العام لمتتالية هندسية

إذا كان u_p حد من حدود المتتالية الهندسية (u_n) فإن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

البرهان 26.2

نثبت هذه النظرية في مرحلتين، في الأولى نعتبر $p = 0$ ونبين أن من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = u_0 \times q^n$$

ثم في المرحلة الثانية نثبت النظرية من أجل كل عدد طبيعي p .

1. من أجل $p = 0$ نستعمل التراجع ونبين، من أجل كل عدد طبيعي n ، الخاصية التالية:

$$P(n) : u_n = u_0 \times q^n$$

- **البدء:** بما أن $u_0 = u_0 \times q^0$ فإن $P(0)$ صحيحة.
- **الوراثة:** نفرض، من أجل عدد طبيعي n أن $P(n)$ صحيحة، أي $u_n = u_0 \times q^n$ ونبين أن $P(n+1)$ صحيحة، أي $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$.

بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن $u_{n+1} = q \times u_n$. نستعمل فرضية التراجع لنجد:

$$u_{n+1} = q \times u_n = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$$

أثبتنا إذن أن $P(n+1)$ صحيحة.

- **الإستنتاج:** نستنتج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ، أي

$$u_n = u_0 \times q^n$$

2. ليكن p و n عددين طبيعيين، إذن:

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{و} \quad u_p = u_0 \times q^p$$

نلاحظ أن

$$u_n = u_0 \times q^{p+(n-p)} = u_0 \times q^p \times q^{n-p}$$

ومنه

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

مثال 29.2

باستعمال هذه القاعدة فإن عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية المعرفة في المثال 28.2 هي

$$u_n = u_0 \times q^n = -3 \cdot 2^n$$

مثال 30.2

لتكن (u_n) متتالية هندسية حيث $u_7 = -8748$ و $u_9 = -236196$.

1. أحسب q أساس المتتالية (u_n) .

$$\text{لدينا } \frac{u_{10}}{u_7} = q^{10-7} = q^3 \text{ بالتعويض نجد } \frac{-236196}{-8748} = q^3 \text{ أي } q = \sqrt[3]{27} = 3.$$

2. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

من أجل أي عدد طبيعي n لدينا $\frac{u_n}{u_7} = q^{n-7}$ ، ومنه

$$u_n = -8748 \times 3^{n-7} = -4 \times 3^n$$

ملحوظة 27.2

لما يكون الحد الأول من متتالية هندسية (u_n) معدوماً فإن المتتالية (u_n) معدومة مهما كانت قيمة الأساس، يعني مهما كانت قيمة العدد الطبيعي n لدينا $u_n = 0$. لهذا لن يكون ذو أهمية لموضوعنا دراسة متتالية هندسية حدودها معدومة، وإلا إذا تمت الإشارة إليه مباشرة، سنعتبر دائماً أن الحد الأول من متتالية هندسية غير معدوماً.

2.3.2 اتجاه تغير وتقارب متتالية هندسية

قضية 28.2

كل متتالية هندسية ذات أساس سالب ليست رتيبة.

البرهان 28.2

يكفي أن نأخذ الحدود الثلاثة الأولى u_0 و u_1 و u_2 ونبين أنه ليس لدينا

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \quad \text{أو} \quad u_0 \geq u_1 \geq u_2$$

بما أن $u_2 = u_0 \times q^2$ فإن u_0 و u_2 لهما نفس الإشارة. وبما أن $u_1 = u_0 \times q$ و $q < 0$ فإن إشارة u_1 تختلف عن إشارة u_0 و u_2 . إذن لا يمكن حصر u_1 بين u_0 و u_2 . إذن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

مثال 31.2

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) حدها الأول $v_0 = 3$ وأساسها $q = -\frac{1}{2}$. لدينا إذن

$$v_0 = +3, \quad v_1 = -\frac{3}{2}, \quad v_2 = +\frac{3}{4}, \quad v_3 = -\frac{3}{8}$$

وحدود المتتالية (v_n) ليست مرتبة من الأكبر إلى الأصغر أو العكس، فهي إذن ليست رتيبة.

مبرهنة 29.2 إتجاه تغير متتالية هندسية

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q > 0$ وليكن $u_p \neq 0$ حد من حدودها. تكون المتتالية (u_n)

- متناقصة تماما إذا وفقط إذا كان: $(q - 1) \cdot u_p < 0$.
- متزايدة تماما إذا وفقط إذا كان $(q - 1) \cdot u_p > 0$.
- ثابتة إذا وفقط إذا كان $q = 1$.

البرهان 29.2

يجب أن نحدد إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n . باستعمال عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) نكتب

$$u_{n+1} - u_n = u_p \times q^{n-p+1} - u_p \times q^{n-p} = (q - 1) \times u_p \times q^{n-p}$$

بما أن الأساس q موجب تماما فإن إشارة $u_{n+1} - u_n$ تحدد بإشارة $(q - 1) \times u_p$. إذن

- إذا كان $(q - 1) \cdot u_p < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
- إذا كان $(q - 1) \cdot u_p > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
- إذا كان $q - 1 = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة.

مثال 32.2

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = -3$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$.
لدينا $0 < \frac{3}{2} = (q-1)u_0$ ، نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.
فعلاً، حسب النظرية 26.2 لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
نستنتج أن من أجل كل قيم العدد الطبيعي n لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{-3}{2} + 3\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n = +3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

أي أن $u_{n+1} - u_n > 0$ ، مما يعني أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

مثال 33.2

لتكن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها $q = \frac{2}{3}$.
لدينا $0 < -\frac{2}{3} = (q-1)v_0$ ، نستنتج أن المتتالية (v_n) متناقصة تماماً.
فعلاً، حسب النظرية 26.2 لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
نستنتج إذن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3} - 2\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

أي أن $v_{n+1} - v_n < 0$ ، مما يعني أن المتتالية (v_n) متناقصة تماماً.

مبرهنة 30.2 تقارب متتالية هندسية

تكون متتالية هندسية (u_n) متقاربة إذا وفقط حقق أساسها $-1 < q \leq 1$ ، إضافة إلى ذلك

- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة.

البرهان 30.2

من عبارة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 \times q^n$.
إذن تكون المتتالية الهندسية (u_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ موجودة. هذه النهاية تكون موجودة إذا وفقط إذا كان $-1 < q \leq 1$ حيث

- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ ، ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = 0$.
- إذا كان $q = 1$ فإن من أجل كل قيم العدد الطبيعي n : $q^n = 1$ ، ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = u_0$.

مثال 34.2

لتكن المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساس $q = \frac{1}{2}$ والحد الأول $u_0 = -3$. بما أن $-1 < q < 1$ فإن

المتتالية الهندسية (u_n) متقاربة نحو 0. للتحقق من ذلك لدينا من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{-3}{2^n}$$

ومنه

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{2^n} = 0$$

أي أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0.

مثال 35.2

لتكن المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساس $q = 3$ والحد الأول $u_0 = 2$. بما أن $q > 1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة. فعلا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$u_n = 2 \times 3^n$$

ومنه

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times 3^n = +\infty$$

أي أن المتتالية الهندسية (u_n) متباعدة.

مثال 36.2

لتكن المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساس $q = -2$ والحد الأول $u_0 = 1$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n = (-2)^n$.

نلاحظ أنه إذا كان n زوجيا، أي أن $n = 2p$ ، حيث أن p عدد طبيعي، فإن $u_n = (-2)^{2p} = 4^p$ ، ومنه

$$\lim u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} 4^p = +\infty$$

وإذا كان n فرديا، أي $n = 2p + 1$ ، حيث p عدد طبيعي، فإن $u_n = (-2)^{2p+1} = -2 \times 4^p$ ، ومنه

$$\lim u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} -2 \times 4^p = -\infty$$

أي أن (u_n) ليس لها نهاية وحيدة، فهي إذن متباعدة.

3.3.2 خواص حدود متتالية هندسية

قضية 31.2 الوسط الهندسي

تكون الأعداد الحقيقية a و b و c ، بهذا الترتيب، حدودا متباعدة من متتالية هندسية إذا

تحقق:

$$a \times c = b^2$$

البرهان 31.2

إذا كانت الأعداد الحقيقية a و b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن أساسها يساوي $\frac{b}{a}$ ويساوي كذلك $\frac{c}{b}$. إذن $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ مما يعني أن $a \times c = b^2$.

مثال 37.2

تحقق من أن الأعداد 1 و -2 و 4 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية. ما هو أساسها؟ يكفي أن تحقق الأعداد 1 و -2 و 4 بهذا الترتيب قاعدة الوسط الهندسي حتى تكون حدودا متتابعة من متتالية هندسية. فعلا لدينا

$$1 \times 4 = (-2)^2$$

أساس متتالية هندسية يساوي حاصل القسمة بين حدين متتابعين. في هذا المثال نأخذ مثلا الحد الذي يساوي 1، إذن الحد الذي يليه يساوي -2. نجد أن الأساس هو $-\frac{2}{1}$.

مبرهنة 32.2 مجموع حدود متتابعة

ليكن $m \leq p$ عددين طبيعيين و (u_n) متتالية هندسية أساسها q ، $q \neq 1$ ، إذن:

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = \frac{q \cdot u_p - u_m}{q - 1}$$

البرهان 32.2

نرمز بـ S إلى المجموع ونكتب:

$$S = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{p-1} + u_p$$

إذن

$$q \times S = q \times u_m + q \times u_{m+1} + \cdots + q \times u_{p-1} + q \times u_p$$

باستعمال العلاقة التراجعية للمتتاليات الهندسية نجد

$$q \times S = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_p + u_{p+1}$$

إذن

$$q \times S = -u_m + u_m + (u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_p) + u_{p+1} = u_{p+1} - u_m + S$$

ومنه

$$S = \frac{u_{p+1} - u_m}{q - 1} = \frac{q \cdot u_p - u_m}{q - 1}$$

ملحوظة 33.2

لما يكون أساس المتتالية الهندسية يساوي الوحدة فإن هذه الأخيرة تكون متتالية ثابتة، وعليه فإن

$$u_m + u_{m+1} + \dots + u_p = (p - m + 1) \times u_m$$

مثال 38.2

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية حيث $u_7 = 3$ و $u_{16} = 1536$ فإن

$$u_7 + u_8 + \dots + u_{16} = \frac{q \cdot u_{16} - u_7}{q - 1} = \frac{1536 \cdot q - 3}{q - 1}$$

نحسب أساس متتالية هندسية بإستعمال حدين من حدودها كما يلي

$$\frac{u_{16}}{u_7} = q^{16-7}$$

وهذا يعني أن $q^9 = \frac{1536}{3} = 512$ أي $q = \sqrt[9]{512} = 2$. نعوض الآن قيمة q في عبارة المجموع فنجد

$$u_7 + u_8 + \dots + u_{16} = \frac{1536 \times 2 - 3}{2 - 1} = 3069$$

لازمة 34.2

ليكن $m \leq p$ عددين طبيعيين و (u_n) متتالية هندسية أساسها $q, q \neq 1$: إذن:

$$u_m + u_{m+1} + \dots + u_p = u_p \times \frac{q^{p-m+1} - 1}{q - 1}$$

مثال 39.2

نستعمل مرة أخرى المتتالية (u_n) المعرفة في المثال 38.2. بإستعمال اللازمة 34.2 نجد

$$u_7 + u_8 + \dots + u_{16} = u_7 \times \frac{q^{16-7+1} - 1}{q - 1} = 3 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 3069$$

ملحوظة 35.2

يمكن كتابة قانون مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية بصيغة لغوية أسهل للإستيعاب كما يلي:

$$S = \text{الحد الأول} \times \frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{(عدد الحدود)}}}{1 - \text{الأساس}}$$

4.2 المتتاليات الحسابية-الهندسية

1.4.2 مفهوم المتتالية الحسابية-الهندسية

حسب العلاقة التراجعية للمتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية يمكن إدراجهما ضمن صنف أكثر شمولاً للمتتاليات العددية يسمى المتتاليات الحسابية-الهندسية.

تعريف 36.2 المتتاليات الحسابية-الهندسية

نقول أن المتتالية العددية (u_n) هي متتالية **حسابية-هندسية** إذا وجد عدنان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = a \cdot u_n + b$$

مثال 40.2

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالحد الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$. هذه متتالية حسابية-هندسية قيمتها وسيطتها $a = 2$ و $b = 1$. نحسب مثلاً الحدود الثلاث الأولى:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2 \cdot u_0 + 1 = 1, \quad u_2 = 2 \cdot u_1 + 1 = 3, \quad u_3 = 2 \cdot u_2 + 1 = 7$$

2.4.2 الحالات الخاصة للمتتاليات الحسابية-الهندسية

بعض القيم الخاصة للوسيطين a و b تبسط المتتالية الحسابية-الهندسية إلى متتاليات تم العبور عليها ودراستها.

لتكن (u_n) متتالية حسابية-هندسية بحيث $u_{n+1} = au_n + b$ من أجل كل عدد طبيعي n .

• $a = 0$: في هذه الحالة نتحصل، من أجل كل عدد طبيعي n ، على العلاقة التراجعية التالية للمتتالية (u_n)

$$u_{n+1} = b$$

هذا يعني أن (u_n) متتالية مستقرة، أي، إنطلاقاً من رتبة معينة، كل حدودها متساوية.

- $a = 1$ في هذه الحالة نتحصل، من أجل كل عدد طبيعي n ، على العلاقة التراجعية التالية للمتتالية (u_n) ،

$$u_{n+1} = u_n + b$$

هذا يعني أن (u_n) متتالية حسابية أساسها b .

- $b = 0$ في هذه الحالة نتحصل، من أجل كل عدد طبيعي n ، على العلاقة التراجعية التالية للمتتالية (u_n) ،

$$u_{n+1} = a \times u_n$$

هذا يعني أن (u_n) متتالية هندسية أساسها a .

قضية 37.2

تكون متتالية حسابية-هندسية ثابتة إذا وفقط إذا تساوى الحدان الأولان منها.

البرهان 37.2

ليكن a و b عددين حقيقيين ولتكن (u_n) المتتالية الحسابية-الهندسية التي حدها الأول u_0 وتحقق، من أجل كل عدد طبيعي n ، العلاقة التراجعية

$$u_{n+1} = a \cdot u_n + b$$

إذا كانت (u_n) متتالية ثابتة فالبتأكيد لدينا $u_0 = u_1$.

نفرض الآن أن المتتالية الحسابية-الهندسية (u_n) تحقق $u_0 = u_1$ ، نبين بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n الخاصية

$$P(n) : u_n = u_0$$

- **البداية:** نبدأ بالحالة $n = 1$ لأن الحالة $n = 0$ تافهة وقد تكون مضللة وتؤدي إلى أخطاء.

فعلاً لدينا من الشرط الأولي $u_0 = u_1$ ، إذن $P(1)$ صحيحة.

- **الوراثة:** ليكن n عدداً طبيعياً. نفرض أن $P(n)$ ، أي $u_n = u_0$ ، ونبين أن $P(n+1)$ صحيحة،

$$\text{أي } u_{n+1} = u_0.$$

من العلاقة التراجعية لدينا $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ ، ومن الفرضية نستنتج أن $u_{n+1} = a \cdot u_0 + b$

أي $u_{n+1} = u_1$ ، ثم بما أن $u_0 = u_1$ نستنتج أن $u_{n+1} = u_0$ ، ومنه فإن $P(n+1)$ صحيحة.

- **الإستنتاج:** لدينا إذن، من أجل كل عدد طبيعي n ، أي $u_n = u_0$ أن المتتالية الحسابية-الهندسية (u_n) ثابتة.

مثال 41.2

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ و، من أجل كل عدد طبيعي n ، بالعلاقة التراجعية

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$$

هذه المتتالية الحسابية-الهندسية هي ثابتة، وذلك لأن $u_0 = u_1$. فعلا لدينا

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{2}{3} \times 3 + 1 = 3 = u_0$$

3.4.2 الحد العام لمتتالية حسابية-هندسية

قضية 38.2

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية-هندسية فإن المتتالية (v_n) المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

هي متتالية هندسية.

البرهان 38.2

نفرض أن المتتالية العددية (u_n) تحقق، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = au_n + b$ حيث a و b عددان طبيعيان. ولتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{و} \quad v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$$

بما أن $u_{n+2} = au_{n+1} + b$ و $u_{n+1} = au_n + b$ فإن

$$v_{n+1} = (a \cdot u_{n+1} + b) - (a \cdot u_n + b) = a \cdot (u_{n+1} - u_n) = a \cdot v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها a .

مبرهنة 39.2

من أجل كل متتالية حسابية-هندسية (u_n) تحقق، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = au_n + b$ بحيث $a \neq 1$ لدينا، من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{u_0 - u_1}{1 - a} \times a^n + \frac{b}{1 - a}$$

البرهان 39.2

من جهة قد أثبتنا في القضية 38.2 أن المتتالية (v_n) المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ $v_n = u_{n+1} - u_n$ هي هندسية وأساسها يساوي a . إذن عبارة حدها العام $v_n = v_0 \times a^n$ ، مع $v_0 = u_1 - u_0$ ، من جهة أخرى، من العلاقة التراجعية للمتتالية (u_n) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n

$$(1) \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

بـ $v_n = u_{n+1} - au_n$ من المعادلة (2) طرفا لطرف نجد من أجل كل عدد طبيعي n

$$(2) \quad b = u_{n+1} - au_n$$

وبما أنه اشترط $a \neq 1$ أي أن المتتالية (u_n) ليست حسابية، فيمكن أن نكتب

$$(1 - a)u_n = b - v_n$$

حيث $n \in \mathbb{N}$. أخيرا، من عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n) نصل إلى

$$u_n = -\frac{1}{1 - a}v_n + \frac{b}{1 - a}$$

$$u_n = \frac{u_0 - u_1}{1 - a} \times a^n + \frac{b}{1 - a}$$

وهذا مهما كانت قيمة العدد الطبيعي n .

مثال 42.2

نعتبر المتتالية الحسابية الهندسية (u_n) التي تحقق من أجل $n \in \mathbb{N}$ العلاقة التراجعية

$$u_{n+1} = 0.95u_n - 1$$

والتي حدها الأول $u_0 = 1$. حسب النظرية 39.2 فإن حدها العام يكتب من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{u_0 - u_1}{1 - 0.95} \times (0.95)^n - \frac{1}{1 - 0.95}$$

بما أن $u_1 = 0.95 \times u_0 - 1 = -0.05$ نحصل، بعد تبسيط الحسابات، على عبارة u_n كما يلي

$$u_n = 21 \times (0.95)^n - 20$$

للتأكد من صحة العبارة الأخيرة يمكن استعمال الإستدلال بالتراجع.

ملحوظة 40.2

لما يكون $a = 1$ فإن المتتالية الحسابية-الهندسية (u_n) هي ببساطة متتالية حسابية أساسها b ، وعليه فإن عبارة حدها العام تكتب من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_0 + n \times b$$

4.4.2 إتجاه تغير وتقارب متتالية حسابية-هندسية

مبرهنة 41.2

لتكن (u_n) متتالية حسابية-هندسية غير ثابتة تحقق، من أجل كل عدد طبيعي n ، العلاقة التراجعية

$$u_{n+1} = au_n + b$$

تكون المتتالية (u_n) رتيبة إذا وفقط إذا كان $a > 0$ ، عندها يكون لدينا:

- إذا كان $u_1 < u_0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $u_1 > u_0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

البرهان 41.2

إتجاه تغير المتتالية الحسابية-الهندسية (u_n) يحدد بإشارة الحدود $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

من القضية 38.2 نعلم أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل $n \in \mathbb{N}$ بعبارة الحد العام

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

هي هندسية أساسها a . إذن لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = v_0 \times a^n = (u_1 - u_0) \times a^n$$

بما أن المتتالية (u_n) ليست ثابتة فإن $v_0 = u_1 - u_0 \neq 0$. وعليه فإنه يكون لحدود المتتالية (v_n) نفس الإشارة إذا وفقط إذا كان $a > 0$ ، عندئذ تكون إشارة $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

هي إشارة $v_0 = u_1 - u_0$. نكتب إذن

- إذا كان $u_1 - u_0 < 0$ فإن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

وعليه تكون المتتالية الحسابية-الهندسية (u_n) متناقصة.

- إذا كان $u_1 - u_0 > 0$ فإن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

وعليه تكون المتتالية الحسابية-الهندسية (u_n) متزايدة.

مثال 43.2

نتحقق من اتجاه تغير المتتالية الحسابية-الهندسية (u_n) المعرفة في المثال 40.2. بالتأكد لدينا $a = 2 > 0$ ، إذن بما أن $u_1 - u_0 = 1 > 0$ فإن (u_n) متزايدة.

مثال 44.2

ندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة في المثال 42.2. أولاً نلاحظ أن $a = 0.95 > 0$ ، إذن لا يمكن للمتتالية (u_n) إلا أن تكون ثابتة أو رتيبة. ثم نلاحظ أن $u_1 - u_0 = -1.05 < 0$ الذي نستنتج منه أن المتتالية الحسابية-الهندسية (u_n) متناقصة.

مبرهنة 42.2 تقارب متتالية حسابية-هندسية

ليكن a و b عددين حقيقيين ولتكن (u_n) متتالية حسابية-هندسية غير ثابتة تحقق من أجل

$$u_{n+1} = a \cdot u_n + b \quad n: \text{كل عدد طبيعي}$$

تكون (u_n) متتالية متقاربة إذا وفقط إذا كان $-1 < a < 1$ وعندها يكون

$$\lim u_n = \frac{b}{1-a}$$

البرهان 42.2

إذا كان $a = 1$ فإن (u_n) متتالية حسابية أساسها b . وبما أنها غير ثابتة فهذا يعني أن $b \neq 0$. في هذه الحالة لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = u_0 + b \times n \quad \text{و} \quad \lim u_n = \pm\infty$$

أي أن المتتالية (u_n) متباعدة من أجل $a = 1$.

إذا كان $a \neq 1$ فحسب النظرية 39.2 لدينا عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = \frac{u_0 - u_1}{1-a} \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

عندها تكون النهاية $\lim u_n$ موجودة في $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كانت النهاية $\lim \frac{u_0 - u_1}{1 - a} \times a^n$ موجودة في $\mathbb{R}$. يتحقق هذا فقط إذا كان $-1 < a < 1$.

من أجل $-1 < a < 1$ لدينا $\lim a^n = 0$ ، ومنه نستنتج

$$\lim u_n = \lim \frac{u_0 - u_1}{1 - a} \times a^n + \frac{b}{1 - a} = \frac{b}{1 - a}$$

ملحوظة 43.2

لما يكون لدينا $-1 < a < 1$ فإنه لا يهم إن كانت المتتالية الحسابية-الهندسية ثابتة أو لا، ففي كلتا الحالتين هي متقاربة ونهايتها تحقق

$$\lim u_n = \frac{b}{1 - a}$$

مثال 45.2

المتتالية الحسابية-الهندسية المعرفة في المثال 42.2 تحقق العلاقة التراجعية

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0.95u_n - 1$$

هي متقاربة لأن $a = 0.95$ و $-1 < 0.95 < 1$. نهايتها إذن تساوي

$$\lim u_n = \frac{b}{1 - a} = \frac{-1}{1 - 0.95} = -20$$

5.2 تمارين وتطبيقات

1.5.2 المتتاليات العددية

1.2. لتكن المتتالية (e_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n > 0$ بحدها العام

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. باستعمال دستور ثنائي الحدين أثبت من أجل كل عدد طبيعي $n > 0$ أن:

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

2. بين أن المتتالية (e_n) متزايدة تماماً.

3. بين أن المتتالية (e_n) محدودة من الأعلى. ماذا تستنتج؟

2.5.2 المتتاليات الحسابية

2.2. أكتب عبارة الحد العام لمتتالية حسابية (u_n) تحقق $u_{10} + u_{20} = 410$ و $u_{15} - u_5 = 170$.

3.2. بين أن مجموع متتاليتين حسابيتين هو متتالية حسابية وحدد أساسها.

4.2. لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 3$ وأساسها $r = 5$.

1. أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

2. من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (v_n) بالعلاقة $v_n = u_{2n+3}$.

• بين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول.

5.2. لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r ، وليكن p و q عددين طبيعيين.

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (v_n) بالعلاقة $v_n = u_{pn+q}$.

1. بين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول.

2. أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

6.2. قامت شركة صيدلة بتقديم 3 مليون جرعة من لقاح جديد، كما وعدت بتزويد السوق بـ

1.5 مليون جرعة كل شهر.

• كم جرعة تم تزويد السوق بها بعد سنة؟

7.2. يحتوي الصف الأول من قاعة محاضرات على 18 مقعد. مع كل عملية رجوع إلى الصف

الخلفي يزداد عدد المقاعد بمقعدين.

• إذا كان يوجد 12 صفا فما هو عدد مقاعد قاعة المحاضرات؟

8.2. للتحضير لسباق رياضي أعد متسابق برنامجا تدريبيا يمتد على مدة 15 يوم حيث يركض

في أول يوم مسافة 15 km ثم تزداد مسافة التدريب بـ 0.5 km كل يوم.

• أحسب المسافة التي تم ركضها طيلة مدة التدريب.

9.2. قام طفل بوضع 10 DZD في حصالته في اليوم الأول ثم 20 DZD في اليوم الثاني ثم 30 DZD

في اليوم الثالث وهكذا دواليك.

• في أي يوم يصل مجموع مدخرات الحصالة 1000 DZD؟

10.2. كافئت مدرسة تعليمية الطلبة الخمس الأوائل بمنحة إجمالية قدرها 300000 DZD حيث

تحصل صاحب المرتبة الأخيرة على مبلغ 30000 DZD.

• إذا كان الفارق بين كل مرتبتين متتاليتين ثابتا، ما هي مكافئة صاحب المرتبة الأولى؟

11.2. قام شخص باستثمار مبلغ 20000 DZD أين يعود عليه شهريا بفائدة ثابتة قدرها 5000 DZD.

• أحسب مبلغ الفائدة بعد سنة من الإستثمار.

12.2. تم تسديد قرض قدره 72000 DZD على 8 دفعات حيث يزيد المبلغ المدفوع لكل دفعة عن مبلغ الدفعة التي قبلها بـ 1000 DZD.

• كم تم التسديد في الدفعة الأولى؟

13.2. عند شراء سيارة جديدة فإن مصاريف الصيانة للسنة الأولى تقدر بـ 15000 DZD. إذا علمت أن مصاريف الصيانة تزداد سنويا بقيمة ثابتة قدرها 2500 DZD، أحسب كلفة الصيانة للسنوات العشر الأولى.

14.2. عند كراء سيارة، لمدة تتراوح بين أسبوع واحد وخمس أسابيع، تقترح وكالة الكراء صيغتين مختلفتين:

• **الصيغة A:** دفع 3000 DZD في اليوم الأول، ثم تزداد كلفة الكراء كل يوم بقيمة ثابتة قدرها 50 DZD.

• **الصيغة B:** دفع 4500 DZD في اليوم الأول، ثم تنقص كلفة الكراء كل يوم بقيمة ثابتة قدرها 100 DZD.

1. باستعمال المتتاليات، مثل السعر اليومي للكراء لكلتا الصيغتين.

2. إبتداء من أي يوم تتجاوز كلفة الكراء اليومية بالصيغة A كلفة الكراء اليومية بالصيغة B؟

3. أراد شخص أن يستأجر من الوكالة سيارة.

(أ) أي الصيغتين تنصحه أن يستعمل من أجل مدة 3 أسابيع؟ علل إجابتك.

(ب) أي الصيغتين تنصحه أن يختار من أجل مدة 4 أسابيع؟ علل إجابتك.

3.5.2 المتتاليات الهندسية

15.2. أكتب عبارة الحد العام لمتتالية هندسية متناقصة (u_n) حدودها تحقق $4u_7 - 4u_8 + u_9 = 0$ و $u_6 \times u_8 = 409600$

16.2. بين أن جداء متتاليتين هندسيتين هو متتالية هندسية. أحسب أساسها.

17.2. ما هي الشروط اللازم تحققها حتى يكون مجموع متتاليتين هندسيتين متتالية هندسية.

18.2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0 ، وليكن b عددا حقيقيا موجبا تماما.

- بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بعلاقة الحد العام $v_n = b^{u_n}$ هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

19.2. مهنة معينة تقدم أجرا قدره 600000 DZD في السنة الأولى.

في التسع سنوات التي تلي يزداد الأجر بنسبة 2.5% مركبة سنويا.

- أحسب قيمة الأجر المدفوع طوال العشر سنوات كاملة.

20.2. تم إيداع مبلغ 450000 DZD بحساب إيداع ذو نسبة فائدة مركبة سنويا قدرها 3%.

- أحسب مبلغ الحساب بعد 11 سنة من الإستثمار.

21.2. تم شراء سيارة جديدة بمبلغ قدره 3250000 DZD.

إذا علمت أن قيمة السيارة تنخفض بنسبة مركبة قدرها 18% سنويا، فبكم سيتم إعادة بيعها بعد 5 سنوات من الإستعمال؟

22.2. قام شخص A بوضع مبلغ 200000 DZD في حساب ذو نسبة فائدة مركبة قدرها 8%.

في نفس الوقت قام شخص B بوضع مبلغ 180000 DZD في حساب ذو نسبة فائدة مركبة قدرها 10%.

1. أكتب عبارتي a_n و b_n ، اللذين يمثلان القيمة المكتسبة لحسابي الشخص A والشخص B على التوالي، بعد n فترة.

2. بعد كم فترة من الزمن يفوق رصيد حساب الشخص B رصيد حساب الشخص A؟

4.5.2 المتتاليات الحسابية-الهندسية

23.2. أدرس إتجاه تغير المتتاليات التالية:

- | | |
|---|---|
| 1) $u_0 = 3, \quad u_{n+1} = -2u_n + 9$ | 2) $u_0 = 1, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$ |
| 3) $u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}$ | 4) $u_0 = 4, \quad u_{n+1} = -u_n + 3$ |
| 5) $u_0 = -2, \quad u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{5}{6}$ | 6) $u_0 = -3, \quad u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{5}{6}$ |
| 7) $u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 3u_n - 6$ | 8) $u_0 = -1, \quad u_{n+1} = 5u_n + 6$ |

24.2. أكتب عبارة الحد العام لكل متتالية حسابية-هندسية من التمرين 23.2. واحسب نهايتها.

25.2. بين أنه إذا كانت لدينا متتالية عددية (u_n) غير ثابتة تحقق من أجل كل عدد طبيعي n

العلاقة التراجعية $u_{n+1} = au_n + b$ فإن (u_n) رتيبة إذا وفقط إذا كان $a > 0$.

26.2. بتاريخ 01 جانفي 2017 بلغ عدد مشترك نادي رياضي 590 مشترك.

علما أن كل شهر يغادر 5% من المشتركين في حين ينظم إليه 20 مشترك جديد:

1. مثل عدد المشتركين في النادي بواسطة حدود متتالية (u_n) ، حيث n يمثل رتبة الشهر.

2. من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نضع: $u_n = v_n + 400$.

• بين أن (v_n) متتالية هندسية، ثم استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

3. هل يتزايد عدد المشتركين أم يتناقص كل شهر؟ علل إجابتك.

4. قرر مدير النادي أن يستقيل من منصبه إن انخفض عدد المشتركين أقل من 500 عضو.

• إعتماذا على نموذج المتتالية (u_n) ، هل سيستقيل المدير ومتى؟

5. يساهم كل مشترك وفي كل شهر بمبلغ ثابت قدره 1500 DZD.

(أ) ما مقدار مداخل النادي في سنة 2017؟

(ب) ما مقدار مداخل النادي في سنة 2018؟

6. قررت الإدارة أنها ستنتهي نشاط النادي إن انخفضت المداخل السنوية أقل من 7800000.00 DZD.

• ما هي آخر سنة يفتح فيها النادي الرياضي أبوابه؟

27.2

1. قام شخص بإيداع مبلغ مالي قيمته 150000 DZD في حسابه بصندوق التوفير والإحتياط. مقابل خدماته، يأخذ الصندوق نسبة شهرية من المبلغ تساوي $t=1\%$ ، كما أن صاحب الحساب يضيف إلى حسابه كل شهر مبلغا ثابتا قيمته 1000 DZD.

(أ) أحسب قيمة المبلغ المودع في الحساب بداية الشهر الثاني والثالث والرابع.

(ب) استنتج العلاقة بين قيمة المبلغ المودع في الحساب في أي شهر وبين قيمته في الشهر الموالي.

2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_1 = 150$ وبالعلاقة التراجعية

$$u_{n+1} = 0.99u_n + 1$$

(أ) أحسب الحدود u_2 ، u_3 و u_4 ثم استنتج العلاقة بين المتتالية (u_n) وبين قيمة الحساب المذكور في الجزء الأول.

(ب) أثبت، من أجل كل عدد طبيعي $n > 0$ ، أن $u_n > 100$.

(ج) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي $n > 0$ ، بالعلاقة:

$$v_n = u_n - 100$$

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية.

(ب) إستخرج عبارة الحد العام v_n ، ثم عبارة الحد العام u_n .

(ج) أحسب $\lim u_n$.

4. أحسب المبلغ الذي يتقاضاه صندوق التوفير والإحتياط في العام الأول مقابل خدماته.

5. أحسب نسبة المبلغ الذي أكتسبه الصندوق مقابل خدماته من مجمل المبلغ الذي وضعه في الشخص في حسابه في السنة الأولى.

باب 3

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

1.3 الدوال العددية

1.1.3 المفاهيم الأولية

التعريف التالي يعطي مفهوم الدالة العددية لمتغير حقيقي.

تعريف 1.3 الدالة العددية لمتغير حقيقي

الدالة العددية لمتغير حقيقي $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هي كل علاقة تربط بكل عدد حقيقي x عددا حقيقيا واحدا على الأكثر y ونكتب $y = f(x)$ أو $x \mapsto y = f(x)$.

مثال 1.3

الدالة $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2x$ هي دالة عددية لمتغير حقيقي ترفق كل عدد حقيقي بضعفه.

تعريف 2.3 السابقة والصورة

إذا كان x و y عددين حقيقين بحيث $y = f(x)$ فنقول إن

- y هو **صورة** x بواسطة الدالة f ، أو
- x هو **سابقة** y بواسطة الدالة f .

مثال 2.3

الدالة f المعرفة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x^2$ ترفق $x \mapsto f(x)$ مثلا، بالعدد 2 العدد $2^2 = 4$. نكتب

إذن $f(2) = 4$ أو نكتب باختصار $2 \mapsto 4$.

نقول إن العدد 4 هو صورة العدد 2 بواسطة الدالة f ، أو نقول بصيغة ثانية إن العدد 2 هو سابقة العدد 4 بواسطة الدالة f .

مثال 3.3

الدالة g المعرفة بالعلاقة $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ تسمى الدالة الجذرية. صورة العدد 9 بواسطة الدالة g هي العدد $g(9) = \sqrt{9} = 3$. العدد -1 لا يملك صورة بواسطة الدالة f لأنه لا يمكن حساب جذر عدد سالب في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 4.3

نعتبر الدالة h المعرفة كما يلي $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = \frac{1}{x}$. تسمى هذه الدالة بالدالة مقلوب. كل الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر تملك صورة بواسطة h , لأنه لا يمكن إعطاء قيمة لكسر مقامه معدوم. أما لو أخذنا مثلا العدد $x = 2$ فإن صورته بالدالة h نحسبها كما يلي: $h(2) = \frac{1}{2} = 0.5$.

تعريف 3.3 مجموعة التعريف

الأعداد الحقيقية التي لها صورة بواسطة الدالة العددية $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تشكل مجموعة $\mathcal{D}_f$ تسمى مجموعة تعريف f .

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

مثال 5.3

أحسب مجموعة تعريف الدالة $f(x) = 2x - 3$. الدالة f هي دالة تألفية، أو دالة كثير حدود من الدرجة الأولى. لو أخذنا أي عدد حقيقي x فإنه يمكننا حساب قيمة الدالة f عند x , أي حساب $f(x)$. إذن لدينا

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

مثال 6.3

أحسب مجموعة تعريف الدالة $g(x) = \frac{1}{x-2}$. من عبارة الدالة يمكننا أن نقول إنه لا توجد قيمة حقيقية لـ $g(x)$ لما يكون المقام $x-2$ معدوما. ولدينا

$$\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

أي أن مجموعة تعريف الدالة g هي كل الأعداد الحقيقية ماعدا 2، ومنه نكتب

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

مثال 7.3

أحسب مجموعة تعريف الدالة $x \mapsto h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

هذه الدالة جذرية، ونعلم أنه لا يمكن حساب جذر عدد إلا إذا كان هذا الأخير موجبا. نكتب إذن

$$\mathcal{D}_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\}$$

لهذا يجب أن ندرس إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية $x^2 - 1$. نستعمل لهذا طريقة المميز.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4; \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = +1$$

من هذا نستخلص جدول إشارة $x^2 - 1$

جدول 1.3: إشارة $x^2 - 1$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$		
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه نكتب $\mathcal{D}_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ أو } x \geq +1\}$. نستنتج إذن أن

$$\mathcal{D}_h =]-\infty; -1] \cup [+1; +\infty[$$

2.1.3 الدوال المألوفة ومجموعات تعريفها

كثيرات الحدود

تعريف 4.3 دالة كثير حدود

نقول إن الدالة العددية $x \mapsto f(x)$ هي **كثير حدود** إذا كانت لها عبارة من الشكل

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي يسمى **درجة** f و $a_0, a_1, \dots, a_n$ مع $a_n \neq 0$ ، أعداد حقيقية تسمى **معاملات** f .

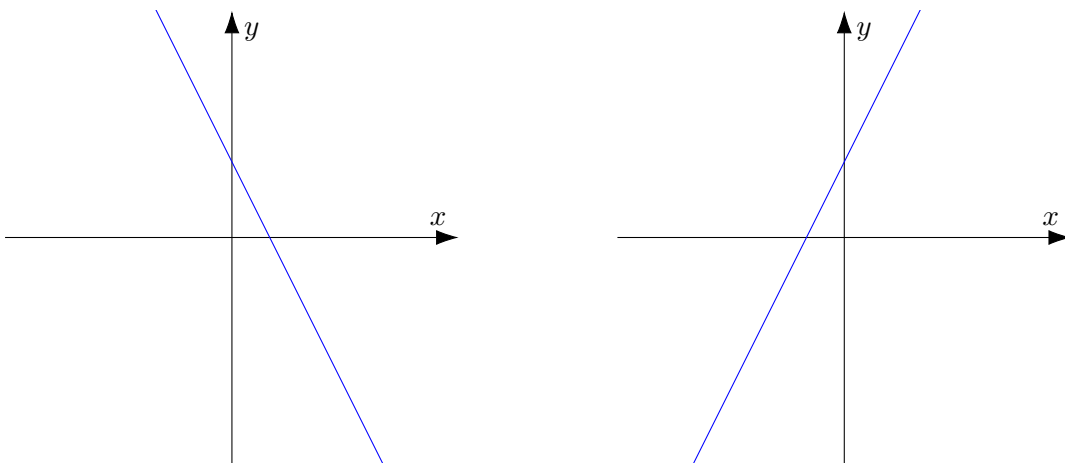
مثال 8.3

نعتبر الدالة التالية

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = 2x - 1$$

هذه الدالة هي كثير حدود من الدرجة الأولى أو تسمى كذلك دالة **تألفية**.

العلاقة العامة لدالة تألفية هي من الشكل $f(x) = ax + b$.
العدد a في عبارة الدالة التألفية يسمى **معامل التوجيه**، ومنحنائها البياني هو مستقيم.



شكل 2.3: منحنى دالة تألفية لما $a > 0$

شكل 1.3: منحنى دالة تألفية لما $a < 0$

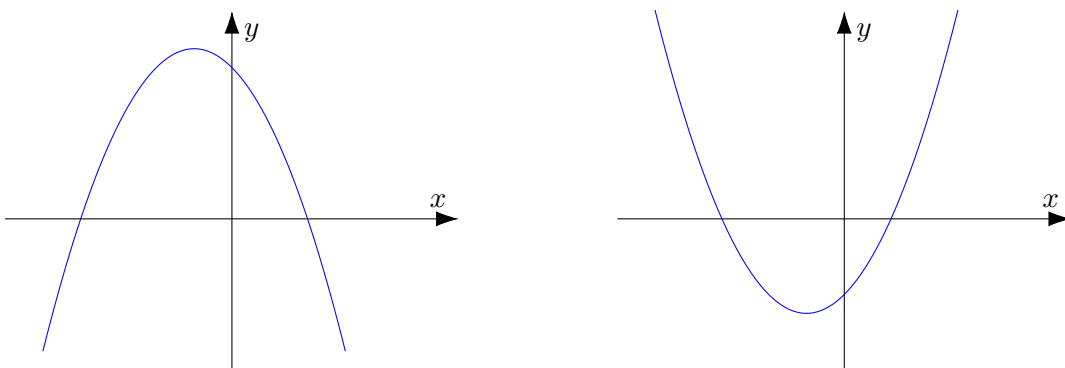
مثال 9.3

لتكن الدالة g التالية $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = x^2 + 2x - 5$.

هذه الدالة هي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية.

الكتابة العامة لدالة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية هي $g(x) = ax^2 + bx + c$.

المنحنى البياني للدوال كثيرات حدود من الدرجة الثانية يسمى **قطع مكافئ**.



شكل 4.3: منحنى قطع مكافئ لما $a < 0$

شكل 3.3: منحنى قطع مكافئ لما $a > 0$

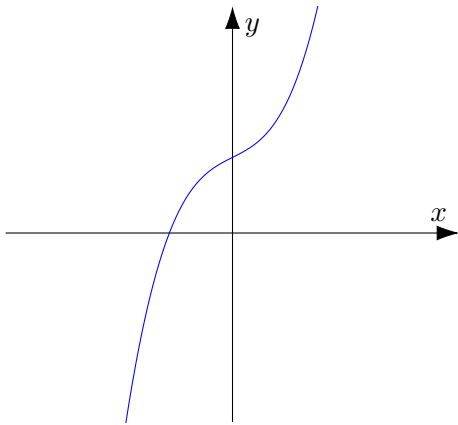
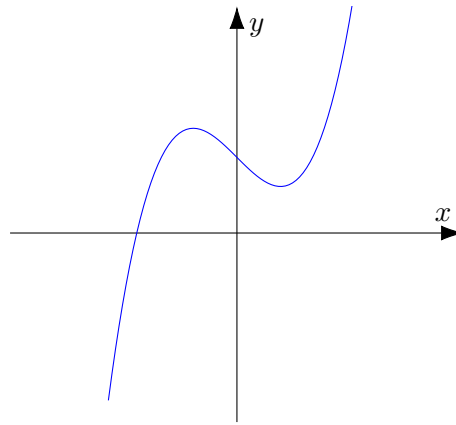
1. لتكن الدالة التالية:

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto h(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$$

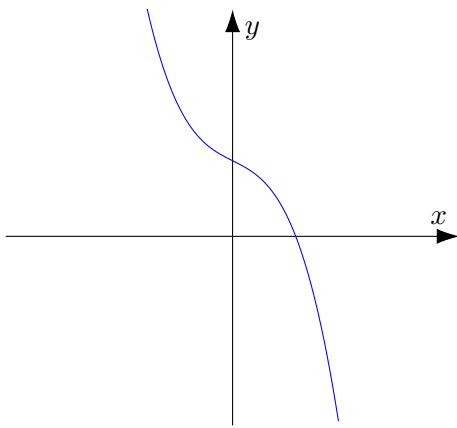
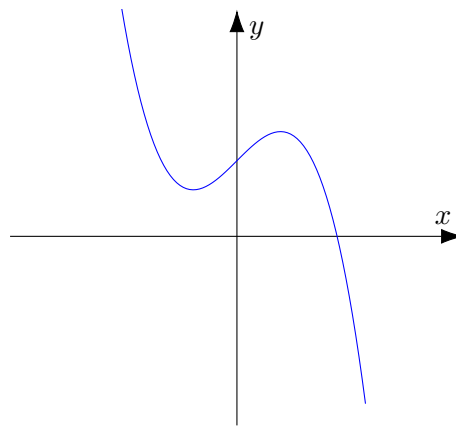
الدالة h هي دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة.

الكتابة العامة لدالة كثير حدود من الدرجة الثالثة هي: $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

يمكن لمنحنى دالة من الدرجة الثالثة أن يأخذ عدة أشكال نختصرها في الأربعة التالية:



شكل 5.3: منحنى كثير حدود من الدرجة الثالثة. الحالة الأولى
شكل 6.3: منحنى كثير حدود من الدرجة الثالثة. الحالة الثانية



شكل 7.3: منحنى كثير حدود من الدرجة الثالثة. الحالة الثالثة
شكل 8.3: منحنى كثير حدود من الدرجة الثالثة. الحالة الرابعة

القيمة المطلقة

تعريف 5.3 القيمة المطلقة لعدد حقيقي

القيمة المطلقة لعدد حقيقي a هي العدد الحقيقي الذي نرمز له $|a|$ والمعرف كما يلي

$$|a| = \begin{cases} -a; & \text{لما } a \leq 0 \\ +a; & \text{لما } a > 0 \end{cases}$$

مثال 10.3

1. العدد 2 هو عدد موجب، إذن: $|2| = +2$.

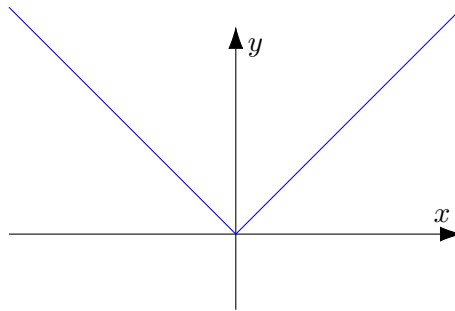
2. العدد -3 هو عدد سالب، إذن: $|-3| = -(-3) = +3$.

3. القيمة المطلقة للصفر هي الصفر ونكتب $|0| = 0$.

تعريف 6.3 دالة القيمة المطلقة

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $x \mapsto |x|$ تسمى دالة القيمة المطلقة.

المنحنى البياني للدالة $x \mapsto |x|$ هو الممثل أدناه



شكل 9.3: منحنى دالة القيمة المطلقة

ملحوظة 7.3

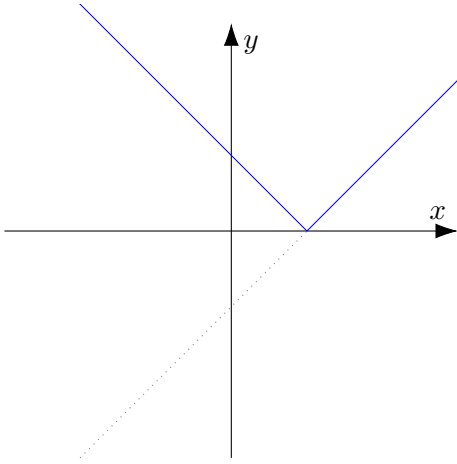
يمكن رسم المنحنى البياني للدالة $|f|$ إنطلاقاً من منحنى الدالة f باتباع الخطوات التالية

1. نحتفظ بأجزاء منحنى الدالة f التي تقع فوق محور الفواصل.

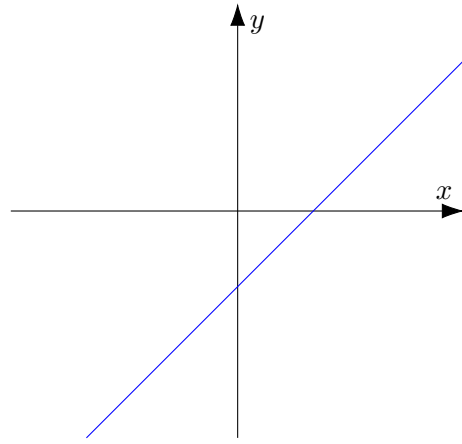
2. نحذف أجزاء منحنى الدالة f التي تقع تحت محور الفواصل ونعوضها بنظيراتها بالنسبة لحامل محور الفواصل.

مثال 11.3

منحنى الدالة $x \mapsto x - 1$ مع منحنى الدالة $x \mapsto |x - 1|$



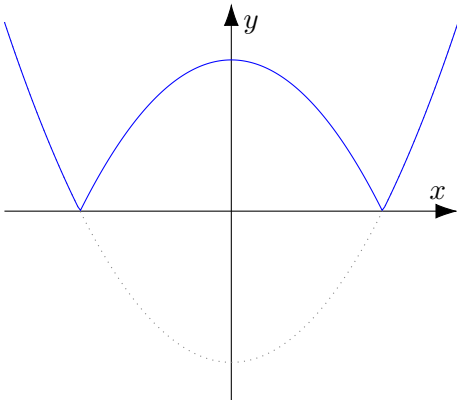
شكل 11.3: منحنى $x \mapsto |x - 1|$



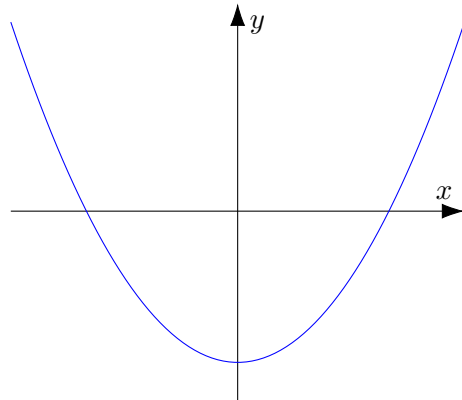
شكل 10.3: منحنى $x \mapsto x - 1$

مثال 12.3

منحنى الدالة $x \mapsto 0.5x^2 - 2$ مع منحنى الدالة $x \mapsto |0.5x^2 - 2|$.



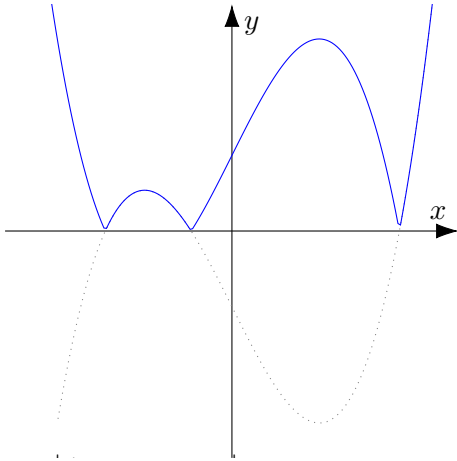
شكل 13.3: منحنى $x \mapsto |0.5x^2 - 2|$



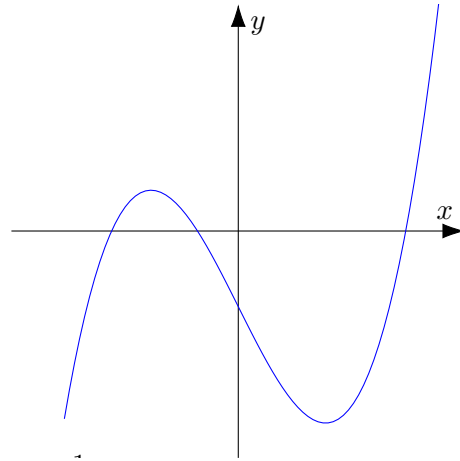
شكل 12.3: منحنى $x \mapsto 0.5x^2 - 2$

مثال 13.3

منحنى الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 2x - 1$ مع منحنى الدالة $x \mapsto |\frac{1}{2}x^3 - 2x - 1|$.



شكل 15.3: منحنى $x \mapsto \left| \frac{1}{2}x^3 - 2x - 1 \right|$



شكل 14.3: منحنى $x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 2x - 1$

الدوال الناطقة

تعريف 8.3 الدالة الناطقة

إذا كانت P و Q دالتي كثير حدود فإن الدالة $x \mapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ تسمى **دالة ناطقة**.
الدوال الناطقة معرفة عند كل عدد حقيقي لا يعدم مقامها.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$$

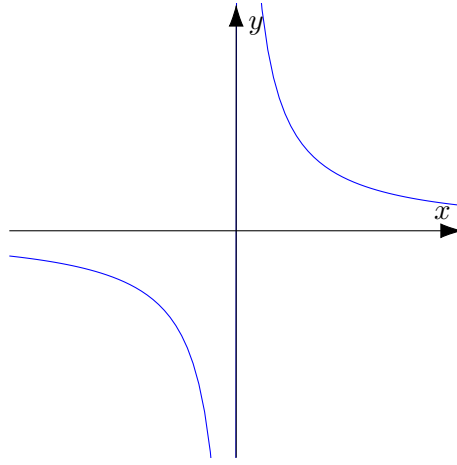
مثال 14.3

أبسط الدوال الكسرية هي الدالة $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$

تسمى عادة بالدالة **مقلوب**.

مجموعة تعريفها تعطى كما يلي $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

المنحنى البياني الممثل لها يسمى قطعاً زائداً.



شكل 16.3: منحنى $x \mapsto \frac{1}{x}$

مثال 15.3

المثال الثاني لدالة كسرية هو الدالة g التالية:

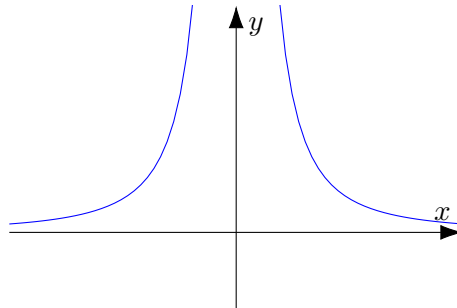
$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{x^2}$$

مجموعة تعريفها هي $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

نلاحظ أن هذه الدالة موجبة تماماً، لذلك فإن مجموعة قيمها هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماماً، ونكتب

$$g :]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[; \quad x \mapsto g(x) = \frac{1}{x^2}$$

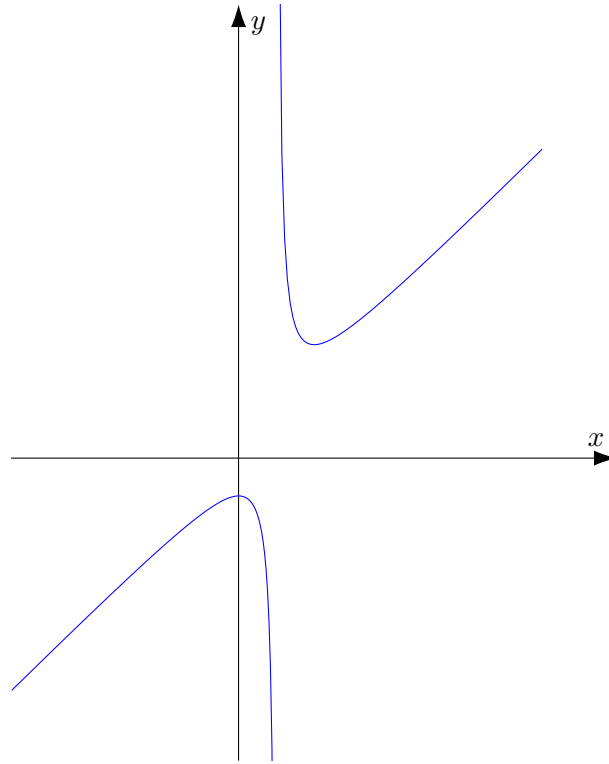
الشكل التالي هو المنحنى البياني للدالة g .



شكل 17.3: منحنى $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

مثال 16.3

لتكن الدالة h التي عبارتها $h(x) = \frac{4x^2 - 2x + 1}{4x - 2}$



شكل 18.3: منحنى $x \mapsto \frac{4x^2 - 2x + 1}{4x - 2}$

دالة الجذر التربيعي

الجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب a هو العدد الحقيقي الموجب b الذي يحقق $b^2 = a$.

نكتب b بدلالة a كما يلي $b = a^{1/2}$ أو $b = \sqrt{a}$.

مثلاً، جذر العدد 25 هو $\sqrt{25} = +5$ ، لأن $5 \times 5 = 25$.

تعريف 9.3 دالة الجذر التربيعي

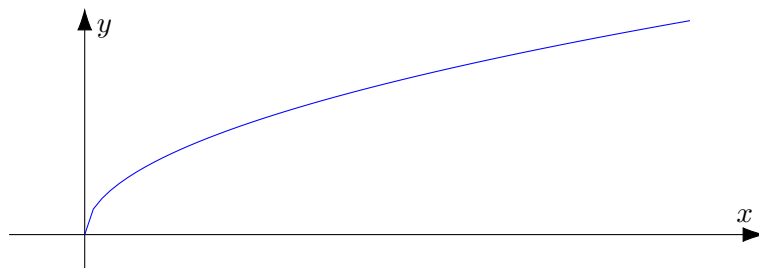
الدالة المعرفة من $[0; +\infty[$ إلى $[0; +\infty[$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي موجب x العدد الحقيقي

الموجب $\sqrt{x}$ تسمى دالة **الجذر التربيعي**، ونكتب

$$\sqrt{\cdot} : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[; \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

مثال 17.3

منحنى الدالة الجذر التربيعي هو في الشكل التالي:



شكل 19.3: منحنى $x \mapsto \sqrt{x}$

مثال 18.3

أحسب مجموعة تعريف الدالة $x \mapsto f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 5}$.

تكون الدالة f معرفة لما يكون ما بداخل الجذر موجبا، إذن نكتب:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 \geq 0\}$$

يلزمنا إذن دراسة إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية : $2x^2 + 3x - 5$.

باستعمال طريقة المميز نجد ما يلي:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49; \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{5}{2}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$

وإشارة كثير الحدود تُلخص في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-5/2$	1	$+\infty$
$2x^2 + 3x - 5$		+	-	+

نستنتج أخيرا أن:

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5/2 \text{ أو } x \geq 1\} \\ &= \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right] \cup \left[1; +\infty \right[\end{aligned}$$

يجب أن نتذكر دائماً أن

$$1. \sqrt{x^2} = |x| \text{ لذلك فإنه من الخطأ أن نقول إن: } \sqrt{(-5)^2} = -5, \text{ لأن}$$

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = +5$$

$$2. \sqrt{a \times b} = \sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|} \text{ لذلك فإنه من الخطأ أن نكتب: } \sqrt{6} = \sqrt{(-2) \times (-3)} = \sqrt{-2} \times \sqrt{-3} \text{ ولكن نكتب:}$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{(-2) \times (-3)} = \sqrt{|-2|} \times \sqrt{|-3|} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

دالة الجذر التكعيبي

الجذر التكعيبي للعدد الحقيقي a هو العدد الحقيقي b الذي يحقق المعادلة $b^3 = a$.
نكتب $a = b^{1/3}$ أو $a = \sqrt[3]{b}$.

مثال 19.3

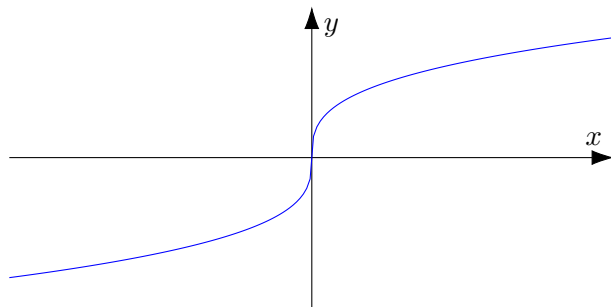
- الجذر التكعيبي للعدد 125 هو العدد $\sqrt[3]{125} = 5$ لأن $5 \times 5 \times 5 = 125$.
- الجذر التكعيبي للعدد -8 هو العدد $\sqrt[3]{-8} = -2$ لأن $(-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.

تعريف 11.3 دالة الجذر التكعيبي

الدالة المعرفة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الحقيقي $\sqrt[3]{x}$ تسمى دالة **الجذر التكعيبي**، ونكتب

$$\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

الشكل التالي يمثل المنحنى البياني للدالة الجذر التكعيبي.



شكل 20.3: منحنى $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

مثال 20.3

أحسب مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

بما أن الجذر التكعيبي معرف من أجل كل عدد حقيقي فإن

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \in \mathbb{R}\}$$

أي أن مجموعة تعريف دالة الجذر التكعيبي هي مجموعة تعريف ما تحت الجذر التكعيبي.

بما أن ما تحت جذر الدالة f هو كثير حدود فنستنتج أن $D_f = \mathbb{R}$.

3.1.3 الدوال الفردية والدوال الزوجية

تعريف 12.3 الدالة الفردية

نقول عن الدالة f أنها **فردية** إذا تحقق

• إذا كان x ينتمي إلى D_f فإن $-x$ كذلك ينتمي إلى D_f .

• إذا كان x ينتمي إلى D_f فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال 21.3

الدالة مقلوب، أي الدالة المعرفة بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{x}$ هي دالة فردية لأن $D_f = \mathbb{R}^*$ و

• من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$ ،

• من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$ لدينا

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

مثال 22.3

دالة الجذر التكعيبي هي دالة فردية. نترك إثبات ذلك كتطبيق مباشر.

قضية 13.3

النقطة $\mathcal{O}(0,0)$ هي مركز تناظر لمنحنى كل دالة فردية.

مثال 23.3

من المثال 14.3 نلاحظ هنا أن منحنى الدالة الفردية الدالة مقلوب متناظر بالنسبة للنقطة $\mathcal{O}(0,0)$

مبدأ المعلم.

مثال 24.3

نقوم بنفس الملاحظة بالنسبة لدالة الجذر التكعيبي المعرفة سابقا مع الشكل 3.20.

4.1.3 إتجاه تغير الدوال العددية

تعريف 14.3 الدالة المتزايدة

نقول إن الدالة f متزايدة على D إذا تحقق، من أجل كل عددين حقيقيين a و b من D بحيث $a > b$ ، ما يلي

$$f(a) > f(b)$$

مثال 25.3

نعتبر الدالة $f(x) = 2x - 3$ المعرفة على $\mathbb{R}$. هذه الدالة متزايدة لأن، من أجل كل عددين حقيقيين $a > b$ لدينا $2a > 2b$ ، إذن $2a + 1 > 2b + 1$ ومنه $f(a) > f(b)$.

مثال 26.3

الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = x^2$ متزايدة، لأن من أجل كل عددين حقيقيين $a > b \geq 0$ لدينا $a^2 > b^2$ ، ومنه $g(a) > g(b)$.

مثال 27.3

الدالة $h(x) = x^2$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ليست متزايدة لأن من أجل $a = 1$ و $b = -2$ لدينا $a > b$ ومع ذلك نلاحظ أن $h(a) = 1^2 = 1 < h(b) = (-2)^2 = 4$. أي $f(a) < f(b)$.

تعريف 15.3 الدالة المتناقصة

نقول إن الدالة f متناقصة على D إذا تحقق، من أجل كل عددين حقيقيين a و b من D بحيث $a > b$ ، ما يلي

$$f(a) < f(b)$$

مثال 28.3

نعتبر الدالة $f(x) = -3x + 1$ المعرفة على $\mathbb{R}$. هذه الدالة متناقصة لأن، من أجل كل عددين حقيقيين $a > b$ لدينا $-3a < -3b$ ، إذن $-3a + 1 < -3b + 1$ ومنه $f(a) < f(b)$.

مثال 29.3

لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{1}{x}$.
الدالة g متناقصة لأن من أجل كل عددين حقيقيين $a > b > 0$ لدينا $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ومنه $g(a) < g(b)$.

ملحوظة 16.3

يمكن اختصار التعريفين السابقين بما يلي:

- إذا أدخلنا دالة متزايدة على طرفي متراجحة فإننا نحتفظ باتجاه المتراجحة.
- إذا أدخلنا دالة متناقصة على طرفي متراجحة فإننا نعكس اتجاه المتراجحة.

تعريف 17.3 الدالة الرتيبة

نقول إن الدالة f رتيبة على D إذا كانت إما متزايدة وإما متناقصة على D .

مثال 30.3

الدالة $x \mapsto x^2$ المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ هي رتيبة لأنها متزايدة كما تم توضيح ذلك في المثال 26.3.

يمكن بنفس الطريقة أن نثبت أن الدالة $x \mapsto x^2$ المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ متناقصة. إذن هي رتيبة.

لكن الدالة $x \mapsto x^2$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ليست رتيبة، فلا هي متزايدة ولا هي متناقصة.

تعريف 18.3 الدوال الزوجية

نقول عن الدالة f أنها زوجية إذا تحقق

- إذا كان x ينتمي إلى D_f فإن $-x$ كذلك ينتمي إلى D_f .
- إذا كان x ينتمي إلى D_f فإن $f(-x) = f(x)$.

مثال 31.3

دالة القيمة المطلقة المعرفة سابقا هي دالة زوجية إذ أنها معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا

• من أجل كل عدد $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$ ،

• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $|-x| = |x|$.

مثال 32.3

الدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ المعرفة في المثال 15.3 هي كذلك دالة زوجية لأنها معرفة على $\mathbb{R}^*$ ولدينا

• من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$ ،

• من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$ لدينا

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$$

المستقيم حامل محور الترتيب هو محور تناظر لمنحنى كل دالة زوجية في معلم متعامد.

مثال 33.3

أثبتنا سابقا أن دالة القيمة المطلقة هي دالة زوجية، وفعلا نلاحظ أن منحنيا البياني يقبل حامل محور الترتيب كمحور تناظر كما هو واضح في الشكل 3.9.

مثال 34.3

المنحنى البياني للدالة ذات العبارة $\frac{1}{x^2}$ هو متناظر بالنسبة للمستقيم حامل محور الترتيب كما يظهر في الشكل 3.17.

5.1.3 الدوال العكسية

الهدف من هذا الجزء هو تقديم المفاهيم الرئيسية في الدوال العكسية التي يمكن أن تساعدنا مستقبلا في الكثير من النتائج، ولا نريد هنا إنشاء نظرية الدوال العكسية بأدق تفاصيلها.

تعريف 20.3 الدالة العكسية

لتكن الدالتان العديتان $f : A \rightarrow B$ و $g : B \rightarrow A$.

نقول إن f و g دالتان متعاكستان، أو إن g هي الدالة العكسية للدالة f ، إذا تحقق، من أجل كل $x \in A$ و $y \in B$

$$f(x) = y \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad g(y) = x$$

اختصارا نرمز للدالة العكسية للدالة f بـ f^{-1} .

مثال 35.3

الدالتان $f : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ و $g : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ المعرفتان بالعبارتين

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$$

متعاكستان.

بالفعل، إذا كان $x \in [0, +\infty[$ و $y = f(x)$ معناه أن $y = x^2 + 1$ أي $x = \pm\sqrt{y - 1}$.

وبما أن $x > 0$ (لأن $x \in D_f$) إذن $x = \sqrt{y - 1} = g(y)$.

ومن جهة أخرى، إذا كان $y \in [1, +\infty[$ و $x = g(y)$ فهذا يعني أن $x = \sqrt{y - 1}$ ، ومنه $y = x^2 + 1 = f(x)$.

مبرهنة 21.3

إذا كانت f و g دالتين متعاكستين فإن لهما نفس إتجاه التغير.

البرهان 21.3

لتكن الدالة $f : A \rightarrow B$ ودالتها العكسية $g : B \rightarrow A$.

ليكن $x_1, x_2 \in A$ و $y_1, y_2 \in B$ بحيث $x_1 < x_2$ و $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$.

• إذا كانت الدالة f متزايدة فإن $y_1 < y_2$ و

$$g(y_1) = x_1 < x_2 = g(y_2)$$

أي أن الدالة g متزايدة.

• إذا كانت الدالة f متناقصة فإن $y_1 > y_2$ و

$$g(y_1) = x_1 < x_2 = g(y_2)$$

أي أن الدالة g متناقصة، تماما مثل دالتها العكسية f .

6.1.3 القيم الحدية والقيم الحدية المحلية

البحث عن أكبر أو أصغر قيمة يمكن لدالة عددية أن تحققها على مجموعة تعريفها أو على جزء منها هو أحد الفروع المهمة في الرياضيات نظرا لكثرة استعمالها في شتى الميادين، منها العلوم الإقتصادية، كما أن الكثير من المسائل المطروحة فيه لا تزال مفتوحة لحد الساعة.

تعريف 22.3 القيمة الحدية الصغرى

نقول إن الدالة f المعرفة على $\mathcal{D}$ تقبل **قيمة حدية صغرى** عند $\alpha \in \mathcal{D}$ إذا تحقق من أجل كل $x \in \mathcal{D}$

$$f(x) \geq f(\alpha)$$

مثال 36.3

الدالة $f(x) = x^2$ المعرفة على $\mathbb{R}$ تقبل عند 0 قيمة حدية صغرى لأن من أجل كل عدد حقيقي x

$$f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$$

تعريف 23.3 القيمة الحدية المحلية الصغرى

نقول إن الدالة f المعرفة على $\mathcal{D}$ تقبل **قيمة حدية محلية صغرى** عند $\alpha \in \mathcal{D}$ إذا وُجد مجال مفتوح I بحيث $\alpha \in I$ ومن أجل كل $x \in \mathcal{D} \cap I$

$$f(x) \geq f(\alpha)$$

مثال 37.3

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي عبارتها $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند 0. فعلا، من أجل $x \in]-1, 1[$ لدينا

$$f(x) = x^2(3 - 2x) \geq x^2 \geq 0 = f(0)$$

لكن $f(0)$ ليست قيمة حدية صغرى، أي من أجل كل $x \in \mathcal{D}_f$ لأن $f(2) = -4 < f(0)$.

تعريف 24.3 القيمة الحدية الكبرى

نقول إن الدالة f المعرفة على $\mathcal{D}$ تقبل **قيمة حدية كبرى** عند $\alpha \in \mathcal{D}$ إذا تحقق من أجل كل $x \in \mathcal{D}$

$$f(x) \leq f(\alpha)$$

مثال 38.3

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ تقبل قيمة حدية كبرى عند 0. فعلا، من أجل كل عدد طبيعي x لدينا $1+x^2 \geq 1$ إذن بتطبيق الدالة مقلوب، المتناقضة على المجال $\mathbb{R}_+$ ، على طرفي هذه المتراجحة نستنتج أن

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1 = f(0)$$

تعريف 25.3 القيمة الحدية المحلية الكبرى

نقول إن الدالة f المعرفة على $\mathcal{D}$ تقبل **قيمة حدية محلية كبرى** عند $\alpha \in \mathcal{D}$ إذا وُجد مجال مفتوح I بحيث $\alpha \in I$ ومن أجل كل $x \in \mathcal{D} \cap I$

$$f(x) \leq f(\alpha)$$

مثال 39.3

نعود إلى دالة المثال 37.3 ونبين أنها تقبل قيمة حدية محلية كبرى عند 1. نلاحظ أولا أن من أجل كل عدد حقيقي x الدالة f يمكن أن تأخذ العبارة

$$f(x) = 1 - (x-1)^2(2x+1)$$

إذن من أجل $x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ لدينا $2x+1 > 0$ ، ومنه

$$f(x) = 1 - (x-1)^2(2x+1) \geq 1 = f(1)$$

لكن عند $x = 1$ القيمة $f(1) = 1$ ليست قيمة حدية كبرى على كل مجموعة التعريف لأن $f(-1) = 5 > f(1)$.

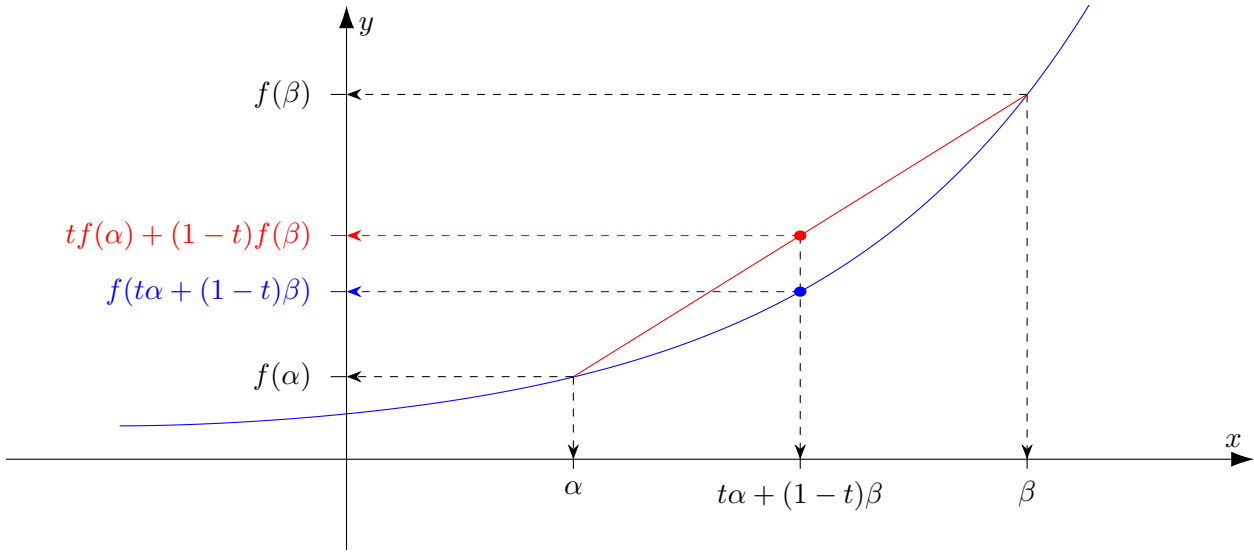
7.1.3 طبيعة إنحناء الدوال

تعريف 26.3 الدالة المحدبة

نقول عن الدالة العددية f المعرفة على D أنها **دالة محدبة** إذا تحقق، من أجل كل $\alpha, \beta \in D$ ومن أجل كل عدد حقيقي $t \in [0, 1]$ ما يلي

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta)$$

بصفة بيانية، تكون الدالة f محدبة على مجموعة D إذا كانت أي قطعة من منحناها البياني تقع أسفل قطعة المستقيم التي تربط بين طرفيها (أنظر الشكل 21.3). مفهوم التحدب يتعلق بميزة دالة على مجموعة، في هذه الحالة، عموماً، تكون هذه المجموعة مجالاً. يمكن تمديد هذا المفهوم ليعطي خاصية للدالة عند نقطة بدلاً من مجال، لكن لهذا يجب توفر شروط إضافية على الدالة سيتم تقديمها ودراستها لاحقاً.



شكل 21.3: منحنى دالة محدبة

تعريف 27.3 الدالة المقعرة

نقول إن الدالة f **مقعرة** على D إذا كانت الدالة $-f$ محدبة على D .

مثال 40.3

الدالة $x \mapsto f(x) = x^2$ المعرفة على $\mathbb{R}$ محدبة.

فعلاً، ليكن α و β عددين حقيقيين، وليكن $t \in [0, 1]$. إذن

$$f(\alpha) = \alpha^2, \quad f(\beta) = \beta^2, \quad t \cdot f(\alpha) + (1-t) \cdot f(\beta) = (\alpha^2 - \beta^2)t + \beta^2$$

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) = (\alpha - \beta)^2 t^2 + 2(b^2 - ab)t$$

ومنه

$$(t \cdot f(\alpha) + (1-t) \cdot f(\beta)) - f(t\alpha + (1-t)\beta) = (a-b)^2(t-t^2)$$

وبما أن $0 \leq t \leq 1$ فإن

$$(t \cdot f(\alpha) + (1-t) \cdot f(\beta)) - f(t\alpha + (1-t)\beta) \geq 0$$

أي

$$t \cdot f(\alpha) + (1-t) \cdot f(\beta) \geq f(t\alpha + (1-t)\beta)$$

من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\beta \in \mathbb{R}$ و $t \in [0, 1]$.

2.3 النهايات والدوال المستمرة

نستعمل النهايات لما نريد أن نحكم على حالة ما دون الإضطراب إلى دراستها بذاتها. مثلاً كيف تتصرف الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ من أجل القيمة 0 للمتغير x ؟ في هذه الحالة لا يمكن دراسة الدالة f عند الصفر بحساب $f(0)$ مباشرة، لأنها غير معرفة عندها.

للإجابة على السؤال نختار عشوائياً قيماً مختلفة تقترب من القيمة 0، مثلاً نأخذ $x_1 = 0.1$ ، $x_2 = 0.01$ ، $x_3 = 0.001$... ونلاحظ سلوك القيم $y_1 = f(x_1)$ ، $y_2 = f(x_2)$ ، $y_3 = f(x_3)$

$$f(0.1) = \frac{1}{0.01} = 100, \quad f(0.01) = \frac{1}{0.0001} = 10000, \quad f(0.001) = \frac{1}{0.000001} = 1000000$$

نلاحظ إذن أن اقتراب قيم المتغير x من الصفر تؤدي إلى تزايد قيم الدالة $y = f(x)$ نحو $+\infty$. مثل هذه الحالة تُلخص في الكتابة الرياضية التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

سندرس أكثر مثل هذه الحالات مع تنوعها ونرى كيف نستعملها لتعريف إستمرارية الدوال.

1.2.3 النهايات

ليكن a و b عنصرين من $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ، يعني أنهما عدداً حقيقيين أو هما أو أحدهما مساو لـ $+\infty$ أو $-\infty$.

تعريف 28.3 نهاية دالة

نقول إن نهاية الدالة f لما x يقترب من a تساوي b إذا كان من أجل كل متتالية (x_n) نهايتها تساوي a فإن نهاية المتتالية (y_n) المعرفة بـ $y_n = f(x_n)$ تساوي b ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

مثال 41.3

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = 3x - 1$. نود معرفة نهاية الدالة f لما المتغير x يقترب من 1، أي نريد حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
لتكن إذن (x_n) متتالية عددية متقاربة نحو 1، أي $\lim x_n = 1$.
المتتالية (y_n) المعرفة بـ $y_n = f(x_n) = 3x_n - 1$ تحقق

$$\lim y_n = \lim 3x_n - 1 = 3 \cdot \lim x_n - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ ومنه}$$

مبرهنة 29.3

إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ إذا وفقط إذا تحقق من أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث إذا كان $|x - a| < \delta$ فإن $|f(x) - b| < \varepsilon$.

لقد قدمنا تعريفا مختصرا لمفهوم النهاية باستعمال النهايات، وهذه النظرية تقدم تعريفا مكافئا لمفهوم نهاية دالة باستعمال المجالات المفتوحة.
يمكن استخلاص هذه النظرية باستعمال تعريف نهاية متتالية، أنظر التعريف 6.2، مع تعريف نهاية دالة، التعريف 28.3.
يمكن كذلك بنفس الطريقة إستخلاص مفهوم النهاية باستعمال المجالات المفتوحة لما كلا a و b أو أحدهما يساوي ∞ .

مثال 42.3

نعتبر الدالة $f(x) = 2x - 1$.

نهاية الدالة $f(x)$ لما x يقترب من العدد 2 تساوي 3، ونكتب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.
نأخذ مثلا العدد الحقيقي الموجب تماما $\varepsilon = 0.01$. إذن $|f(x) - 3| < \varepsilon$ يعني أن $|2x - 1 - 3| < 0.01$ ، ومن هذا نستنتج أن $|2x - 4| < 0.01$. إذن $|x - 2| < 0.01$ وبقسمة طرفي المتراجحة على 2 نستنتج أن $|x - 2| < 0.005$.
إذن من أجل $\varepsilon = 0.01$ يكفي أن نأخذ $\delta = 0.005$.

مثال 43.3

نهاية الدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ لما x يقترب من العدد 8 تساوي 3 ونكتب $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$.

فمثلا لو أخذنا $\varepsilon = 0.12$ فإن $|f(x) - 3| < \varepsilon$ معناه أن $| \sqrt{x+1} - 3 | < 0.12$. بضرب طرفي المتراجحة بالكمية الموجبة $\sqrt{x+1} + 3$ وبعد التبسيط يمكن أن نكتب

$$|x - 8| < 0.12(\sqrt{x+1} + 3)$$

وبما أن $-0.12 < \sqrt{x+1} - 3 < +0.12$ فإن $-0.12 < \sqrt{x+1} - 3 < +0.12$ نأخذ إذن

$$\delta = 0.12 \times 5.88 = 0.7056$$

نتحقق عندها بسهولة أنه إذا كان $|x - 8| < 0.7056$ فإن $|f(x) - 3| < 0.12$.

بالفعل، إذا كان $|x - 8| < 0.7056$ فإن $7.2944 < x < 8.7056$.

ومنه $8.2944 < x + 1 < 9.7056$.

بما أن دالة الجذر التربيعي متزايدة فإن $\sqrt{8.2944} < \sqrt{x+1} < \sqrt{9.7056}$.

ومنه

$$-0.12 < \sqrt{x+1} - 3 < 0.12$$

إذن يكفي أن يحقق المتغير x المتراجحة $|x - 8| < 0.7056$ حتى يكون $|f(x) - 3| < 0.12$.

تعريف 30.3 النهاية بقيم صغيرة

نقول إن نهاية الدالة f لما x يقترب من a من اليسار أو بقيم صغيرة تساوي b إذا كان من أجل كل متتالية عددية (x_n) ، بحيث $x_n < a$ من أجل كل عدد طبيعي n و $\lim x_n = a$ ، فإن المتتالية (y_n) المعرفة بـ $y_n = f(x_n)$ متقاربة نحو b . ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

مثال 44.3

نأخذ الدالة التالية $f: \mathbb{R}^* \Rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

نريد حساب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

لتكن إذن (x_n) متتالية عددية حدودها سالبة وتحقق $\lim x_n = 0$. بما أن حدود المتتالية (x_n) هي أعداد سالبة تماما فإن $|x_n| = -x_n$. نستنتج أن

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim f(x_n) = \lim \frac{x_n}{-x_n} = -1$$

تعريف 31.3 النهاية بقيم كبرى

نقول إن نهاية الدالة f لما x يقترب من a من اليمين أو بقيم كبرى تساوي b إذا كان من أجل كل متتالية عددية (x_n) ، بحيث $x_n > a$ من أجل كل عدد طبيعي n و $\lim x_n = a$ ، فإن

المتتالية (y_n) المعرفة بـ $y_n = f(x_n)$ متقاربة نحو b . ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

مثال 45.3

نأخذ الدالة السابقة $f: \mathbb{R}^* \Rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

نريد حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

لتكن إذن (x_n) متتالية عددية ذات حدود موجبة تماما وتحقق $\lim x_n = 0$.

بما أن حدود المتتالية (x_n) هي أعداد موجبة تماما فإن $|x_n| = +x_n$. نستنتج إذن

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_n}{+x_n} = +1$$

2.2.3 العمليات على النهايات

نقدم في ما يلي قواعد حساب النهايات وما هي الحالات الخاصة المرافقة لها.

لتكن f و g دالتين عدديتين وليكن λ عددا حقيقيا.

خاصية نهاية جداء دالة بعدد حقيقي

نهاية جداء دالة بعدد حقيقي تساوي جداء العدد الحقيقي بنهاية الدالة.

$$\lim_{x \rightarrow a} \lambda \cdot f(x) = \lambda \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

مثال 46.3

من أجل الدالة $f(x) = 3x^2$ لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} 3 \cdot x^2 = 3 \times \lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 3 \times 25 = 75$$

خاصية نهاية مجموع دالتين

نهاية مجموع دالتين تساوي مجموع نهايتي الدالتين.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

مثال 47.3

من أجل الدالتين $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x + 3}$ لدينا من جهة

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x + 3} = 2$$

ومن جهة ثانية

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1 + \sqrt{x+3}) = 2 \cdot 1 + 1 + \sqrt{1+3} = 5$$

نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

خاصية حالة عدم تعيين

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ حالة عدم تعيين.

نقصد بحالات عدم التعيين تلك النهايات التي تؤدي إلى الأشكال الممنوعة في الحساب. حساب النهايات في حالات عدم التعيين قد تؤدي إلى نتائج مختلفة باختلاف عبارة الدالة.

مثال 48.3

نعتبر الدالتين $x \mapsto f(x) = x^2$ و $x \mapsto g(x) = x^4$. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x)$ هي حالة عدم تعيين. لإزالتها، أي حسابها بدقة، نتبع الخطوات التالية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = -\infty$$

نعتبر، في سبيل تغيير عبارة الدالتين دون تغيير حالة عدم التعيين، الدالتين $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^4}$ و $x \mapsto g(x) = \frac{1}{x^2}$. لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$. إذن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - g(x)$ حالة عدم تعيين. لإزالتها نقوم بتوحيد المقام.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{x^4} = +\infty$$

نلاحظ أن نتيجة النهاية اختلفت رغم أن لدينا نفس حالة عدم التعيين.

خاصية نهاية جداء دالتين

نهاية جداء دالتين تساوي جداء نهايتي الدالتين.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

مثال 49.3

نعتبر الدالتين $x \mapsto f(x) = 2x - 1$ و $x \mapsto g(x) = 2x + 1$. من جهة لدينا $f(x) \times g(x) = (2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$. إذن

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \times g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 4x^2 - 1 = 35$$

ومن جهة أخرى لدينا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 1 = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 2x + 1 = 7$. نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \times g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

خاصية حالة عدم تعيين

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$ حالة عدم تعيين.

مثال 50.3

نعتبر الدالتين $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^3}$ و $x \mapsto g(x) = x$. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x))$ هي حالة عدم تعيين. إزالتها باتباع الحساب التالي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

خاصية نهاية نسبة دالتين

نهاية نسبة دالتين تساوي نسبة نهايتي الدالتين.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

يجب أن ننوه هنا أن نهاية الدالة في المقام يجب أن تكون مختلفة عن الصفر حتى يمكن حساب نهاية الكسر باستعمال القاعدة.

مثال 51.3

نعتبر دالتي المثال السابق $x \mapsto f(x) = 2x - 1$ و $x \mapsto g(x) = 2x + 1$. إذن لدينا

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x - 1}{2x + 1} = \frac{-9}{-3} = 3$$

نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} 2x - 1 = -9$ و $\lim_{x \rightarrow -4} g(x) = \lim_{x \rightarrow -4} 2x + 1 = -3$. أي

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -4} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -4} g(x)} = 3$$

خاصية حالة عدم تعيين

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ حالة عدم تعيين.

مثال 52.3

نعتبر الدالتين $x \mapsto f(x) = x^2 - 1$ و $x \mapsto g(x) = x - 1$. لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$.

إذن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ هي حالة عدم تعيين. نزيلها كما يلي

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

خاصية حالة عدم تعيين

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ حالة عدم تعيين.

مثال 53.3

لتكن الدالتين $x \mapsto f(x) = 2x^2 - 1$ و $x \mapsto g(x) = -3x^2 + 1$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 1 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 + 1 = -\infty$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ هي حالة عدم تعيين. نزيلها كما يلي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{-3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \times (2 - \frac{1}{x^2})}{x^2 \times (-3 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - \frac{1}{x^2})}{(-3 + \frac{1}{x^2})} = -\frac{2}{3}$$

3.2.3 الإستمرارية

تعريف 40.3 الإستمرارية من اليسار

إذا كانت f معرفة عند a بحيث $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ فنقول إن الدالة f مستمرة من اليسار عند النقطة $(a, f(a))$.

مثال 54.3

لتكن الدالة المعرفة على $]-\infty, 1]$ والتي عبارتها $f(x) = \sqrt{1-x}$.

الدالة f مستمرة من اليسار عند 1. بالتأكد لدينا

• الدالة $f(x) = \sqrt{1-x}$ معرفة عند 1 وقيمتها $f(1) = 0$.

• نهايتها من يسار 1 تساوي

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0$$

أي $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

تعريف 41.3 الإستمرارية من اليمين

إذا كانت f معرفة عند a بحيث $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ فنقول إن الدالة f مستمرة من اليمين عند النقطة $(a, f(a))$.

مثال 55.3

نعتبر الدالة المعرفة على $[0, +1]$ والتي عبارتها $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.
الدالة f مستمرة من يمين 0 وذلك لأن

$$\bullet f \text{ معرفة عند } 0 \text{ وقيمتها } f(0) = 0,$$

• نهايتها من يمين 0 تساوي

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x - x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ أي}$$

لكن الدالة f غير مستمرة من يسار 0 لأنها ليست معرفة من أجل القيم السالبة للمتغير x .

تعريف 42.3 الإستمرارية عند نقطة

إذا كانت f معرفة عند a بحيث $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ فنقول إن الدالة f مستمرة عند النقطة $(a, f(a))$.

مثال 56.3

الدالة f المعرفة على $[-1, +1]$ بالعلاقة $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ مستمرة عند 0 لأن

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} = f(0) = 1$$

مبرهنة 43.3

تكون الدالة f مستمرة عند النقطة $(a, f(a))$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة من اليسار ومن اليمين في آن واحد.

مثال 57.3

يمكن، لإثبات أن الدالة f المعرفة في المثال 56.3 مستمرة عند 0، حساب نهايتي f من يسار ومن يمين 0. فعلا

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} = 0$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

تعريف 44.3 الإستمرارية على مجال

نقول إن الدالة f مستمرة على المجال I إذا كانت مستمرة عند كل نقطة a تنتمي إلى I .

مثال 58.3

الدالة f المعرفة في المثال 56.3 مستمرة على المجال $[-1, 1]$.

ملحوظة 45.3

إذا كان المجال I مفتوحا فإن تعريف الإستمرارية على I طبيعي وبدون إلتباس. أما إذا كان I مجالا نصف مفتوح أو مجالا مغلقا، مثلا $I = [\alpha, \beta]$ ، فإن الإستمرارية عند طرف المجال α يقصد بها الإستمرارية من اليمين، والإستمرارية عند الطرف الثاني β يقصد بها الإستمرارية من اليسار.

4.2.3 نتائج الإستمرارية

مبرهنة 46.3

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال المغلق والمحدود $[\alpha, \beta]$ فإنه يوجد $c \in [\alpha, \beta]$ بحيث

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) = f(c)$$

نستخلص من هذه النظرية عدة أمور منها أن كل دالة مستمرة على مجال مغلق ومحدود لها قيمة صغرى شاملة في هذا المجال. وهذه القيمة محدودة، أي لا تساوي $-\infty$ ، كما أن هذه الدالة تبلغ قيمتها الصغرى، أي أن القيمة الصغرى تساوي $f(c)$ من أجل عدد حقيقي c تكون الدالة معرفة ومستمرة عنده. أي $\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) = \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$. بلوغ الدالة لقيماتها الصغرى يكون إما عند أطراف المجال، يعني $\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) = f(\alpha)$ أو $\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) = f(\beta)$ ، أو يكون عند نقطة داخل المجال، أي أن $c \in]\alpha, \beta[$.

مثال 59.3

لتكن الدالة $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ والتي عبارتها $f(x) = -\frac{1}{x}$. الدالة f مستمرة على المجال $[1, 2]$.

يمكن أن نبين أن $\inf_{x \in [1, 2]} f(x) = -1$. فعلا عندما يكون $x \in [1, 2]$ فهذا يعني أن $x \geq 1$ ، ومن هذا نستنتج أن

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{1} = 1$$

ومنه

$$f(x) = -\frac{1}{x} \geq -1$$

إذن $\inf_{x \in [1,2]} f(x) \geq -1$. وبما أن $f(1) = -1$ نكتب

$$\inf_{x \in [1,2]} f(x) = \min_{x \in [1,2]} f(x) = -1$$

نلاحظ هنا أن الدالة f تبلغ أصغر قيمة لها عند النقطة $c = 1$ ، أي عند طرف مجال إستمراريتها.

مثال 60.3

نعتبر الدالة $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ والتي عبارتها $f(x) = x^2 + 1$.

الدالة f مستمرة على المجال $[-1, 1]$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \in [-1, 1]$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \geq 1$$

نستنتج من هذا أن $\inf_{x \in [-1,1]} f(x) \geq 1$. ونلاحظ أن $f(0) = 1$. إذن

$$\inf_{x \in [-1,1]} f(x) = \min_{x \in [-1,1]} f(x) = f(0) = 1$$

وفي هذه الحالة تبلغ الدالة f قيمتها الصغرى في نقطة داخل مجال إستمراريتها وليس عند طرفيه.

لازمة 47.3

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال المغلق والمحدود $[\alpha, \beta]$ فإنه يوجد $c \in [\alpha, \beta]$ بحيث

$$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) = f(c)$$

البرهان 47.3

يمكن استخلاص هذه اللازمة من نتيجة النظرية 46.3 وذلك بأخذ الدالة $-f$ مكان f واستعمال القاعدة العامة

$$-\sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) = \inf_{x \in [\alpha, \beta]} (-f)(x)$$

مبرهنة 48.3 القيم المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[\alpha, \beta]$ بحيث $(\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)) \times (\lim_{x \rightarrow \beta} f(x)) < 0$ فإنه

يوجد $c \in]\alpha, \beta[$ بحيث $f(c) = 0$.

إضافة إلى ذلك، إذا كانت الدالة f رتيبة على المجال $[\alpha, \beta]$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.

هذه نتيجة مهمة جدا تتميز بها الدوال المستمرة عن باقي الدوال. فالكثير من المشاكل يتم تبسيطها في نماذج رياضية على شكل معادلات، ومبرهنة القيم المتوسطة تضمن لنا وجود حل

لهذه المشاكل، إضافة إلى هذا فإنها تقدم طريقة تراجعية للإقتراب من هذا الحل كما تسمى خوارزمية التنصيف.

مثال 61.3

نريد معرفة إن كانت المعادلة $x^3 + x - 1 = 0$ تقبل حلا في المجال $[0, 1]$.
بما أن الدالة $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة $f(x) = x^3 + x - 1$ مستمرة، ونهايتها تحقق

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 < 0$$

فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا في المجال $]0, 1[$.
المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا لأن الدالة f رتيبة على المجال $]0, 1[$. فعلا، لدينا من أجل $0 \leq a < b \leq 1$

$$a^3 < b^3 \Rightarrow a^3 + a < b^3 + b \Rightarrow f(a) = a^3 + a - 1 < f(b) = b^3 + b - 1$$

أي أن الدالة f متزايدة على المجال $[0, 1]$.

لازمة 49.3 القيم المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[\alpha, \beta]$ بحيث $(\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) - b) \times (\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) - b) < 0$ فإنه يوجد $c \in]\alpha, \beta[$ بحيث $f(c) = b$.
إضافة إلى ذلك، إذا كانت الدالة f رتيبة على المجال $[\alpha, \beta]$ فإن المعادلة $f(x) = b$ تقبل حلا وحيدا.

البرهان 49.3

يكفي تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة، المبرهنة 48.3، على الدالة $f(x) - b$ المعرفة والمستمرة على المجال $[\alpha, \beta]$.

مثال 62.3

لتكن الدالة المعرفة على $]1, 2[$ والتي عبارتها $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$.
نريد، باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة، أن نثبت وجود حل للمعادلة $f(x) = 2$ في المجال $]1, 2[$.
لهذا الغرض نعتبر الدالة $f(x) - 2$ على المجال $]1, 2[$. إذن

$$\bullet \text{ الدالة } f(x) - 2 = x^2 - \frac{2}{x} - 2 \text{ مستمرة على المجال }]1, 2[$$

$$\bullet \text{ ولدينا } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 2 = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - 2 = +1 \text{ ، أي}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 2 \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - 2 \right) < 0$$

إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) - 2 = 0$ تقبل حلاً في المجال $]1, 2[$.
ومنه، المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلاً في المجال $]1, 2[$.

مبرهنة 50.3 النقطة الصامدة

إذا كانت $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ دالة مستمرة فإنه يوجد $c \in [a, b]$ بحيث $f(c) = c$.

مثال 63.3

نعتبر الدالة المستمرة والمعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

إذن، من أجل $x \in [0, 1]$ لدينا

$$1 \leq 1 + x^2 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

ومنه نستنتج أن $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$.

إذن حسب مبرهنة النقطة الصامدة نستنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلاً في المجال $[0, 1]$.

3.3 الدوال الأسية

1.3.3 الدالة الأسية في الأساس a

تعريف 51.3 الدالة الأسية في الأساس a

من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ يوجد دالة وحيدة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وتحقق

- $f(1) = a$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}; \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$

تسمى f **الدالة الأسية في الأساس a** ويرمز إليها $\exp_a(x)$.

عموماً نستعمل الكتابة a^x بدلاً عن $\exp_a(x)$ للحديث عن الدالة الأسية في الأساس a .

مثال 64.3

الدالة $x \mapsto 2^x$ هي الدالة الأسية في الأساس 2 والتي يرمز إليها كذلك بـ $\exp_2(x)$.

الدالة $x \mapsto 10^x$ هي الدالة الأسية في الأساس 10 والتي يرمز إليها كذلك بـ $\exp_{10}(x)$.

2.3.3 الخواص الجبرية للدالة الأسية

من التعريف السابق نستنتج الخواص التالية

خاصية

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\exp_a(x) > 0$.

نحصل على هذه المتراجحة بكتابة $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$. من هذا نستنتج

$$\exp_a(x) = \exp_a\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

نستعمل الآن خاصية الدوال الأسية

$$\exp_a(x) = \exp_a\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp_a\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

ومنه نحصل على المتراجحة المرجوة.

خاصية

صورة 0 بأي دالة أسية تساوي 1، أي $\forall a > 0, \exp_a(0) = 1$.

هذه كذلك نتيجة بسيطة من مميزات الدوال الأسية. فبما أن $\exp_a(1) = a$ و

$$\exp_a(1) = \exp_a(0 + 1) = \exp_a(0) \times \exp_a(1)$$

ينتج عن هذا أن $a = \exp_a(0) \times a$ ومنه $\exp_a(0) = 1$.

خاصية

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$

ليكن x عددا حقيقيا، لدينا

$$1 = \exp_a(0) = \exp_a(-x + x) = \exp_a(-x) \times \exp_a(x)$$

ومنه $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$

خاصية

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\exp_a(n) = a^n$.

يمكن إثبات هذه الخاصية باستعمال مبدأ التراجع على العدد الطبيعي n .

يمكن كذلك رؤية هذه الخاصية باستعمال الكتابة

$$\exp_a(n) = \exp_a\left(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n\right) = \underbrace{\exp_a(1) \times \exp_a(1) \times \dots \times \exp_a(1)}_n$$

يمكن أن تمتد هذه الخاصية لتشمل كل الأعداد الكسرية ($\mathbb{Q}$)، باستعمال إستمرارية الدالة الأسية، كل الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x$$

خاصية

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين تماما فإن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) \times \exp_b(x) = \exp_{a \times b}(x)$$

هذا يعني أن جداء دالتين أسيتين، مهما كان واختلف أساسهما، ينتج عنه دالة أسية أساسها يساوي جداء الأساسين.

لتوضيح ذلك دعنا نعتبر الدالتين الأسيتين $\exp_a$ و $\exp_b$.

و لتكن كذلك الدالة $f(x) = \exp_a(x) \times \exp_b(x)$.

من جهة لدينا من أجل كل عددين حقيقيين x و y

$$f(x+y) = \exp_a(x+y) \times \exp_b(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y) \times \exp_b(x) \times \exp_b(y)$$

أي

$$f(x+y) = (\exp_a(x) \times \exp_b(x)) \times (\exp_a(y) \times \exp_b(y)) = f(x) \times f(y)$$

إذن فعلا f دالة أسية.

و من جهة أخرى لدينا

$$f(1) = \exp_a(1) \times \exp_b(1) = ab$$

و هذا يعني أن أساس الدالة الأسية f يساوي ab .

3.3.3 الدالة الأسية النيبيرية

تعريف 57.3

المتتالية ذات الحد العام $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ متقاربة. نرمز إلى نهايتها بـ e .
يسمى e ثابت نيبير.

$$e \simeq 2.718281828$$

تعريف 58.3 الدالة الأسية النيبيرية

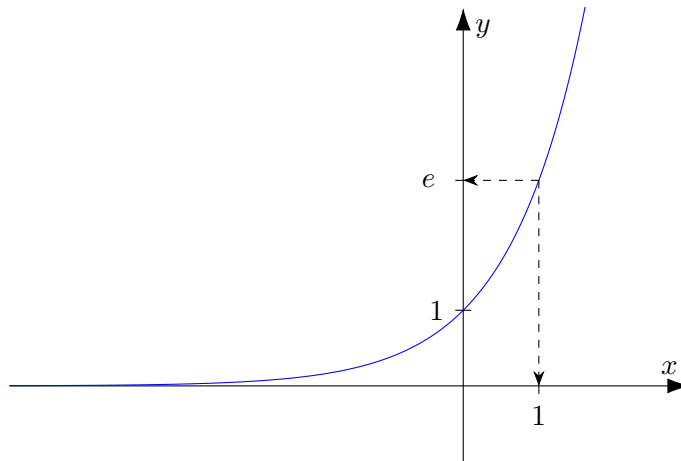
تسمى الدالة الأسية في الأساس e الدالة الأسية النيبيرية أو الدالة الأسية الطبيعية. نرمز إليها بـ $\exp(x)$ أو e^x .

تعتبر الدالة الأسية النيبيرية مرجع الدوال الأسية والتي من خصائصها نستنتج خصائص باقي الدوال الأسية مهما تغير أساسها.

مبرهنة 59.3

الدالة الأسية النيبيرية متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



شكل 22.3: منحنى الدالة الأسية النيبيرية $\exp(x)$

يتضح من هذا المنحنى عدة نتائج مهمة منها:

قضية 60.3

من أجل كل عدد حقيقي $x < 0$ لدينا $e^x - 1 < 0$.
من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ لدينا $e^x - 1 > 0$.

يمكن تلخيص هذه القضية في الجدول التالي.

جدول 2.3: إشارة $\exp(x) - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$

قضية 61.3

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما γ يوجد عدد حقيقي وحيد c بحيث $e^c = \gamma$.

البرهان 61.3

لإثبات هذه القضية يكفي تطبيق نظرية القيم المتوسطة على المعادلة $e^x - \gamma = 0$ من أجل $x \in]-\infty, +\infty[$.

مبرهنة 62.3

ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ($a > 0$) وليكن c حل المعادلة $e^c = a$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$\exp_a(x) = \exp(cx)$$

البرهان 62.3

بصيغة ثانية هذا يعطي كتابة أخرى للدالة الأسية في الأساس a باستعمال الدالة الأسية النيبيرية،

$$\exp_a(x) = e^{cx}$$

للتأكد من هذا يكفي أن نتحقق من أن $x \mapsto \exp(cx)$ هي دالة أسية أساسها a . فعلا لدينا من أجل كل عددين حقيقيين x و y

$$\exp(c(x+y)) = \exp(cx+cy) = e^{cx+cy} = e^{cx} \times e^{cy} = \exp(cx) \times \exp(cy)$$

ثم إن صورة $x = 1$ بواسطة الدالة $x \mapsto \exp(cx)$ تساوي

$$\exp(c \cdot 1) = \exp(c) = a$$

و هذا ما يجب إثباته.

قضية 63.3

الدالة الأسية في الأساس a ، $x \mapsto \exp_a(x)$ هي

- متناقصة إذا كان $0 < a < 1$ ،
- متزايدة إذا كان $a > 1$.

البرهان 63.3

لإثبات هذا يكفي كتابة الدالة الأسية في الأساس a باستعمال الدالة الأسية النيبيرية ثم دراسة إتجاه تغيرها.

قضية 64.3 التزايد المقارن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \exp(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

البرهان 64.3

هذه النتيجة المهمة يمكن استنتاجها من خواص المتتاليات الهندسية، لأن

$$\forall n > 4, \quad e^n > 2^n > n^2$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

من هذه النهاية نستنتج كذلك أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

و باستعمال خواص الدالة الأسية يمكن أن نكتب هذه النهاية كما يلي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} = 0$$

ثم بتبديل المتغير x بـ $-y$ في النهاية الأخيرة نستنتج

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} y \cdot e^y = 0$$

لازمة 65.3

من أجل كل عدد حقيقي موجب α لدينا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^\alpha \cdot \exp(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$$

البرهان 65.3

يمكن إستنتاج النهايتين باستعمال المتغير الجديد $y = \frac{1}{\alpha} \cdot x$ ثم استعمال القضية 64.3.

فعلا، لدينا $x = \alpha \cdot y$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ إذن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^\alpha \cdot e^x = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-\alpha y)^\alpha \cdot e^{\alpha y}$$

بتطبيق الحساب على الأسس نكتب

$$(-\alpha y)^\alpha \cdot e^{\alpha y} = \alpha^\alpha (-y)^\alpha \cdot (e^y)^\alpha = \alpha^\alpha \cdot (-y \cdot e^y)^\alpha$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^\alpha \cdot e^x = \lim_{y \rightarrow -\infty} \alpha^\alpha \cdot (-y \cdot e^y)^\alpha$$

بما أن $\lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = 0$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^\alpha \cdot e^x = \lim_{y \rightarrow -\infty} \alpha^\alpha \cdot (-y \cdot e^y)^\alpha = 0$$

بالنسبة للنهاية الثانية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ فإن تبديل المتغير $x = \alpha y$ يؤدي إلى

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha y}}{(\alpha y)^\alpha} = \frac{1}{\alpha^\alpha} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y} \right)^\alpha = +\infty$$

مبرهنة 66.3

الدالة الأسية النيرية محدبة على $\mathbb{R}$.

4.3 الدوال اللوغاريتمية

1.4.3 الدالة اللوغاريتمية في الأساس a

تعريف 67.3 الدالة اللوغاريتمية في الأساس a

من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ يوجد دالة عددية وحيدة f معرفة ومستمرة على $]0, +\infty[$ وتحقق

- $f(a) = 1$
- $\forall x, y \in]0, +\infty[, \quad f(x \times y) = f(x) + f(y)$

تسمى هذه الدالة **الدالة اللوغاريتمية في الأساس a** ويرمز إليها $\log_a(x)$.

2.4.3 الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتمية

من التعريف السابق نستنتج الخواص التالية

خاصية

صورة 1 بأي دالة لوغاريتمية تساوي 0.

$$\forall a > 0, \quad \log_a(1) = 0$$

نستنتج هذه الخاصية مباشرة من تعريف الدالة اللوغاريتمية، إذ أن

$$\log_a(1) = \log_a(1 \times 1) = \log_a(1) + \log_a(1)$$

وهذا يعني أن $\log_a(1) = 0$.

خاصية

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ لدينا $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.

إذا كان $x > 0$ فإن $1 = x \times \frac{1}{x}$. بتطبيق الدالة اللوغاريتمية على طرفي المعادلة واستعمال الخاصية 68.3 نستخلص أن

$$0 = \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$$

ومنه تأتي نتيجة الخاصية.

خاصية

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\log_a(a^n) = n$.

تثبت هذه الخاصية باستعمال الإستدلال بالتراجع، أو يمكن ملاحظة أن

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_n$$

وبتطبيق الدالة اللوغاريتمية في الأساس a على طرفي المعادلة واستعمال تعريفها نجد

$$\log_a(a^n) = \underbrace{\log_a(a) + \log_a(a) + \cdots + \log_a(a)}_{n \text{ مرة}}$$

مرة أخرى باستعمال تعريف الدالة اللوغاريتمية في الأساس a نجد من العبارة السابقة

$$\log_a(a^n) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ مرة}} = n$$

يمكن أن تمتد هذه الخاصية، جبريا، لتشمل كل الأعداد الكسرية ($\mathbb{Q}$) ثم باستعمال الإستمرارية لتشمل كل الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a(a^x) = x$$

خاصية

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا $\log_a x^n = n \log_a x$.

لإظهار هذه الخاصية يمكن إتباع نفس الخطوات في الخاصية السابقة.

يمكن تمديد هذه الخاصية من أجل n عدد نسبي، لكن يجب استعمال إستمرارية الدالة اللوغاريتمية لتحقيق هذه الخاصية لما يكون n عددا حقيقيا.

خاصية

مجموعة الدالتين لوغاريتميتين هي دالة لوغاريتمية.

لتوضيح هذا نعتبر الدالتين اللوغاريتميتين $\log_a$ و $\log_b$

ولتكن الدالة $f(x) = \log_a(x) + \log_b(x)$.

ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين تماما. إذن

$$f(x \times y) = \log_a(x \times y) + \log_b(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y) + \log_b(x) + \log_b(y) =$$

من هذا نكتب إذن

$$f(x \times y) = (\log_a(x) + \log_b(x)) + (\log_a(y) + \log_b(y)) = f(x) + f(y)$$

إذن f دالة لوغاريتمية.

3.4.3 الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

تعريف 73.3 الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

تسمى الدالة اللوغاريتمية في الأساس e الدالة اللوغاريتمية النيبيرية أو الدالة اللوغاريتمية الطبيعية ويرمز إليها بـ $\ln x$ أو $\exp(x)$.

مثل الدالة الأسية النيبيرية، الدالة اللوغاريتمية النيبيرية تعتبر مرجع الدوال اللوغاريتمية في مختلف الأسس.

النظرية التالية تعطي الرابط بين الدالة الأسية النيبيرية والدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

مبرهنة 74.3

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية هي الدالة العكسية للدالة الأسية النيبيرية.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad e^{\ln x} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln e^x = x$$

البرهان 74.3

يمكن التحقق من صحة العلاقة الثانية ونستنتج منها مباشرة العلاقة الأولى.

نثبت صحة العلاقة الثانية $\ln e^x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

• أولاً: جبرياً لما يكون x عدداً طبيعياً ثم عدداً صحيحاً.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln e^n = n$$

يمكن لذلك إستعمال البرهان بالتراجع، أو ببساطة يمكن كتابة

$$\ln e^n = \ln(\underbrace{e \times e \times \cdots \times e}_n) = \underbrace{\ln e + \ln e + \cdots + \ln e}_n = n$$

• ثانياً: جبرياً لما يكون x عدداً نسبياً، أي $x = \frac{n}{m}$ بحيث $n \in \mathbb{Z}$ و $m \in \mathbb{N}^*$

نثبت في هذه الحالة أن

$$\ln e^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}$$

لهذا نكتب

$$m \ln e^{\frac{n}{m}} = \ln \left(e^{\frac{n}{m}} \right)^m = \ln e^n = n$$

و منه نستنتج العلاقة المطلوبة.

• ثالثاً: باستعمال الإستمرارية، من أجل كل عدد حقيقي x .

إذن بما أن $\ln x$ هي الدالة العكسية للدالة $\exp x$ فيمكن بسهولة القيام بعدة إستنتاجات.

مبرهنة 75.3

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة على $]0, +\infty[$ ولدينا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

البرهان 75.3

بما أن الدالة الأسية النيبيرية $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ متزايدة فإن دالتها العكسية، الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ، متزايدة كذلك (أنظر النظرية 21.3).

يمكن استخلاص هاتين النهايتين من نهايتي الدالة الأسية النيبيرية واستعمال تعاكس الدالتين الأسية النيبيرية واللوغاريتمية النيبيرية.

يمكن إثبات هاتين النهايتين كذلك كما يلي.

نعتبر المتتالية $x_n = e^n$. لدينا $\lim x_n = +\infty$.

إذن

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \ln x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln e^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

باستعمال إستمرارية الدالة اللوغاريتمية وتزايدها نجد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

كذلك بالنسبة للنهاية الثانية نعتبر مثلاً المتتالية $x_n = e^{-n} = \frac{1}{e^n}$

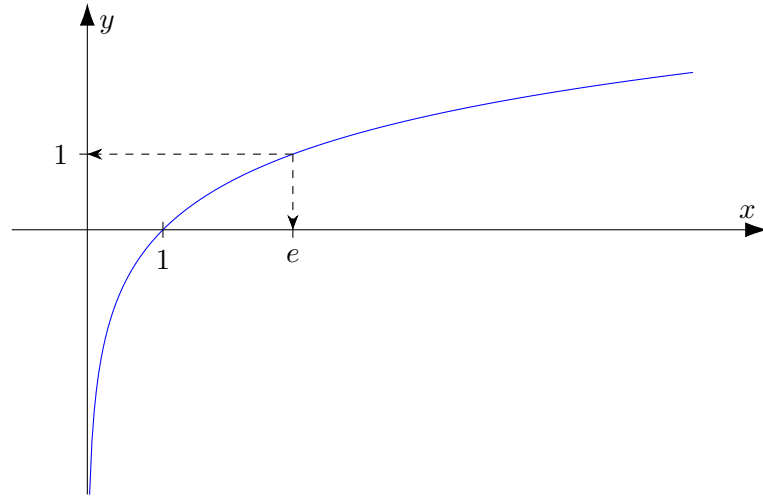
نلاحظ أن $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$ ، إذن $x_n \xrightarrow{>} 0$ لما $n \rightarrow +\infty$.

ومنه

$$\lim_{x_n \xrightarrow{>} 0} \ln x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$$

باستعمال إستمرارية الدالة اللوغاريتمية ورتابتها نجد

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$$



شكل 23.3: منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln x$

قضية 76.3

من أجل كل عدد حقيقي $0 < x < 1$ لدينا $\ln x < 0$.

من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ لدينا $\ln x > 0$.

يمكن تلخيص هذه القضية في الجدول التالي.

جدول 3.3: إشارة $\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

قضية 77.3

من أجل كل عدد حقيقي γ يوجد عدد حقيقي موجب تماماً ووحيد c بحيث $\ln c = \gamma$. إضافة إلى ذلك لدينا $c = e^\gamma$.

البرهان 77.3

لإثبات ذلك نستعمل نظرية القيم المتوسطة على الدالة المستمرة والتمتزايدة $x \mapsto \ln x$.

مبرهنة 78.3

من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = e^{x \cdot \ln a}$$

هذه النظرية هي تنمة للنظرية 62.3 وتعطي صراحة عبارة الدالة الأسية ذات أي أساس $a > 0$ بدلالة الدالة الأسية النيبيرية.

مبرهنة 79.3

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $a \neq 1$ لدينا

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

البرهان 79.3

بما أن الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a هي عكسية الدالة الأسية ذات الأساس a فهذا يعني أن

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = \exp_a(y)$$

ثم باستعمال نتيجة النظرية 78.3 نكتب

$$x = \exp_a(y) \Rightarrow x = e^{y \cdot \ln a} \Rightarrow \ln x = y \cdot \ln a \Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

ومنه من أجل كل $x > 0$ لدينا

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

لازمة 80.3

- إذا حقق الأساس: $0 < a < 1$ فإن الدالة اللوغاريتمية $\log_a$ متناقصة.
- إذا حقق الأساس: $a > 1$ فإن الدالة اللوغاريتمية $\log_a$ متزايدة.

البرهان 80.3

باستعمال الكتابة

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

مع العلم أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة وأن $\ln a < 0$ من أجل $0 < a < 1$ ، وكذلك $\ln a > 0$ من أجل $a > 1$ نستنتج مباشرة النتيجة المطلوبة.

5.3 تمارين وتطبيقات

1.3 حل المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} \bullet 2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{2n} &= 2016 & \bullet x^{\sqrt{x}} - (\sqrt{x})^x &= 0 & \bullet \log_x 7 = 3 & \bullet \log_x 7 = \log_7 x \\ \bullet e^{2x+\ln 2} + e^{\ln 3} &= e^{x+\ln 5} & \bullet 2^{5x-3} &= 5^{2x-3} & \bullet (e^x)^2 - e^{x+1} &= 0 \end{aligned}$$

2.3 حل المتراجحات التالية:

$$\bullet \frac{e^{-x} - 1}{\ln x - 1} < 0 \quad \bullet (\log_2 x^2)^2 > 4 \quad \bullet 3^x > 7^x \quad \bullet x + \sqrt{x-2} > 0 \quad \bullet e^x + e^{1-x} \geq e + 1$$

3.3 أحسب نهايات الدوال التالية عند أطراف مجموعات تعريفها وادرس اتجاهات تغيراتها:

$$\bullet f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \quad \bullet g(x) = \ln \frac{x^2}{4-x} \quad \bullet h(x) = \sqrt{1-e^{2x}} \quad \bullet u(x) = \frac{9}{(3+x^2)^2} \quad \bullet v(x) = \log_x e$$

4.3 أحسب النهايات التالية:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 7x - 4}{4x^2 + 4x - 3} & \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x - 1} & \bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt[3]{x^3 - x^2}} & \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+9} - \sqrt{x+4} & \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{\sqrt{x-1}} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - 1}{\sqrt{3x+3} - 3} & \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^{x^2-4} & \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

5.3 أدرس إستمرارية الدوال التالية على مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet f(x) &= \begin{cases} e^{x-1} - 1 & \text{لما } x \leq 1 \\ \ln x & \text{لما } x > 1 \end{cases} & \bullet g(x) &= \begin{cases} 1 / \left(1 + \exp\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{لما } x \neq 0 \\ 1 & \text{لما } x = 0 \end{cases} \\ \bullet h(x) &= \begin{cases} \frac{|x|}{x} + 1 & \text{لما } x \neq 0 \\ 0 & \text{لما } x = 0 \end{cases} & \bullet t(x) &= \begin{cases} 1 - |x| & \text{لما } x \in [-1; +1[\\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{لما } x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

6.3 أحسب، في كل مما يلي، قيم الوسيط الحقيقي a التي تجعل الدالة المرافقة مستمرة على $\mathbb{R}$

ثم مثل الدالة بيانياً.

$$\begin{aligned} \bullet f(x) &= \begin{cases} 2x - 1 & \text{لما } x < a \\ x^2 - x + 1 & \text{لما } x \geq a \end{cases} & \bullet g(x) &= \begin{cases} ae^{x-2} + 1 & \text{لما } x < 2 \\ \exp(x^2 - 2x - 2) & \text{لما } x \geq 2 \end{cases} \\ \bullet h(x) &= \begin{cases} ax + 1 & \text{لما } x < a \\ 2ae^{(x-a)} & \text{لما } x \geq a \end{cases} & \bullet t(x) &= \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{لما } x \leq a \\ -x^2 - 3x + 1 & \text{لما } x > a \end{cases} \end{aligned}$$

7.3

8.3. باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة بين أن المعادلة $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ تقبل حلا على $\mathbb{R}$.9.3. باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة بين أن المعادلة $x\sqrt{1+x^2} - 1 = 0$ تقبل حلا على المجال. $[-1, 1]$ 10.3. بين بطريقتين مختلفتين أن المعادلة $\frac{1+x}{1+2x^2} = x$ تقبل حلا على المجال $[-1, 1]$.11.3. لتكن f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ بحيث $f(a) > a$ و $f(b) < b$.• بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا.12.3. باستعمال مبرهنة النقطة الصامدة بين أن المعادلة $x - e^{-x} = 0$ تقبل حلا في المجال $[0, 1]$.13.3. لتكن f و g دالتين مستمرتين على المجال $[a, b]$ بحيث $f(a) > g(a)$ و $f(b) < g(b)$.• بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا.14.3. تعطى دالتي العرض والطلب $p = S(q)$ و $p = D(q)$ بالعبارتين

$$S(q) = 0.01x^2 + 0.11x + 2.5, \quad D(q) = -0.01x^2 - 0.2x + 8$$

حيث المتغير $4 \leq q \leq 16$ يمثل كمية المنتج التجاري المتوفرة في السوق، والمتغير p يمثل ثمن وحدة المنتج التجاري.

• بين أن المعادلة $S(q) = D(q)$ تقبل حلا $q^* \in]4, 16[$.يمثل $D(q^*)$ سعر توازن السوق.

باب 4

المشتقات

في الكثير من مسائل الإقتصاد يكون مهما معرفة كيف يمكن أن يؤثر التغيير الطفيف في متغير أو كمية ما مستقلة على متغير أو كمية أخرى مرتبطة بها. مثلا: ما تأثير الزيادة في أجره العمال على المصاريف اليومية لهم، أو كيف ستتغير كمية مبيعات منتج ما إذا ما ارتفع سعر بيع الوحدة بمقدار معين.

للإجابة على هذا النوع من الأسئلة وغيرها يأتي دور المشتقة التي تمنحنا تفسيراً سهلاً ونموذجاً واضحاً لها. نتطرق في هذا الباب إلى مفهوم الاشتقاقية والدالة المشتقة والمشتقات من الرتب العليا مع نماذج تطبيقية لأستعمالاتها في مختلف ميادين علوم الإقتصاد.

1.4 مفهوم الاشتقاق

1.1.4 نسبة التزايد

تعريف 1.4 نسبة التزايد

لتكن f دالة عددية معرفة عند النقطتين x_1 و x_2 حيث:

$$f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2$$

نسبة تزايد الدالة f بين النقطتين x_1 و x_2 هو العدد الحقيقي المعروف كما يلي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 1.4

بالنسبة للدوال التآلفية، فإن نسبة تزايدها هي قيمة ثابتة تساوي الميل أو معامل توجيهها.

نأخذ العبارة العامة لدالة تآلفية $f(x) = ax + b$ وليكن $x_1 \neq x_2$ عددين حقيقيين. إذن

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

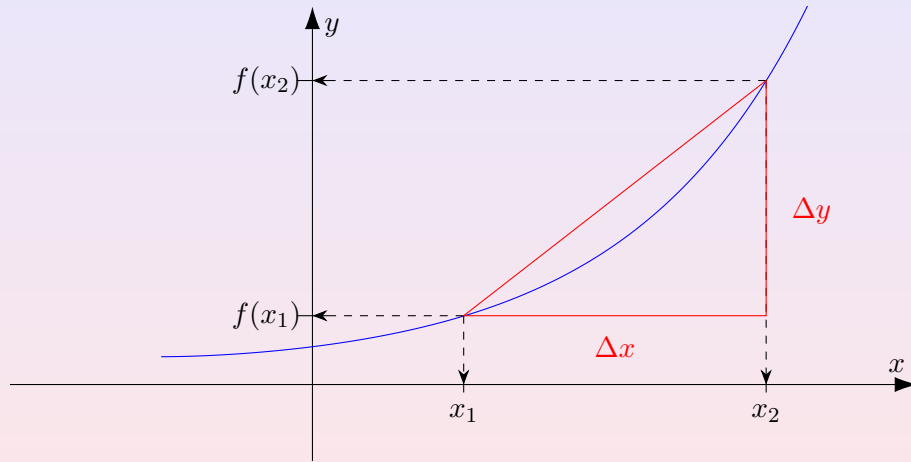
مثال 2.4

نسبة تزايد الدالة $f(x) = x^2$ بين النقطتين $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ هي

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

ملحوظة 2.4

نسبة تزايد الدالة f بين النقطتين x_1 و x_2 يمثل ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(x_1; f(x_1))$ و $(x_2; f(x_2))$.



شكل 1.4: نسبة التزايد

2.1.4 العدد المشتق

تعريف 3.4 قابلية الاشتقاق

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على مجال مفتوح I وليكن $a \in I$. نقول إن الدالة f **قابلة للاشتقاق** عند a إذا كانت النهاية $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجودة.

مثال 3.4

الدالة $f(x) = x^2$ المعرفة على $\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $a = 1$ لأن

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

نلاحظ أنه لا يمكن حساب هذه النهاية مباشرة لأنها حالة عدم تعيين. لكن بتطبيق الجداء الشهير في البسط فيمكن أن نقوم بالتبسيط التالي

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

ومنه نستنتج ما يلي

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

ملحوظة 4.4

نظرا لإستمرارية الدالة فإن دراسة قابلية اشتقاقها تؤدي إلى حالة عدم التعيين لما ينعدم البسط والمقام في آن واحد. وإزالة حالة عدم التعيين وحساب النهاية هو الذي يحدد ما إذا كانت هذه الدالة تقبل الاشتقاق أو لا.

تعريف 5.4 العدد المشتق

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a فإن القيمة $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ تسمى **العدد المشتق** للدالة f عند a ويرمز له بـ $f'(a)$.

مثال 4.4

لقد أثبتنا في المثال 3.4 أن الدالة $f(x) = x^2$ قابلة للاشتقاق عند $a = 1$ وبعد الحساب وجدنا

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

إذن العدد المشتق عند الفاصلة 1 يساوي 2 فنكتب $f'(1) = 2$.

تعريف 6.4 قابلية الاشتقاق من اليسار

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق من يسار a إذا كانت النهاية $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجودة. قيمة هذه النهاية تسمى **العدد المشتق من اليسار** للدالة f عند a ويرمز له بـ $f'_g(a)$.

مثال 5.4

الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ التي عبارتها $f(x) = 1 + \sqrt{-x^3}$ تقبل الاشتقاق من اليسار عند $a = 0$ لأنها معرفة، ولدينا $f(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 + \sqrt{-x^3}) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$$

ومنه نكتب $f'_g(0) = 0$.

تعريف 7.4 قابلية الاشتقاق من اليمين

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق من يمين a إذا كانت النهاية التالية موجودة.

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال 6.4

الدالة $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ التي عبارتها $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ تقبل الاشتقاق من اليسار عند $a = 1$ لأنها معرفة، ولدينا $f(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 + \sqrt{x}) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

النهاية الأخيرة تؤول إلى حالة عدم تعيين، ولإزالتها نضرب الكسر في مرافق البسط ونقسم عليه لنحصل على

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$$

نستعمل المتطابقات الشهيرة لنبسطة النهاية إلى

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

ومنه نكتب $f'_d(1) = \frac{1}{2}$.

قضية 8.4

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند a إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق من اليسار ومن اليمين عند a وكان $f'_g(a) = f'_d(a)$.

مثال 7.4

أثبتنا في المثال 3.4 أن الدالة $f(x) = x^2$ تقبل الاشتقاق عند $x = 1$ مع $f'(1) = 2$ وذلك لأن

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

خصوصا إذا كان $x \rightarrow 1^+$ و $x \rightarrow 1^-$ عندها نكتب

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'_g(1), \quad 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'_d(1)$$

3.1.4 الدالة المشتقة

تعريف 9.4 قابلية الاشتقاق على مجال مفتوح

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$ إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من $]a, b[$.

مثال 8.4

نعتبر الدالة التآلفية $f(x) = 2x + 1$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي a لدينا

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x + 1) - (2a + 1)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x - 2a}{x - a} = 2$$

بعد القيام بتبسيط عبارة البسط نجد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x - a)}{x - a} = 2$$

وهذا يعني أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي a مع $f'(a) = 2$.

ملحوظة 10.4

يمكن تمديد هذا التعريف ليشمل المجالات المغلقة $[a, b]$. في هذه الحالة، قابلية الاشتقاق عند النقطتين a و b ، على الترتيب، يقصد بها قابلية الاشتقاق من اليمين وقابلية الاشتقاق من اليسار، على الترتيب.

تعريف 11.4 الدالة المشتقة

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$ فإن الدالة $x \mapsto f'(x)$ تسمى **مشتقة الدالة f** ويرمز لها f' .

مثال 9.4

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = x^2$. ليكن $a \in \mathbb{R}$.

حسب تعريف العدد المشتق عند a فإن: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. إذن:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x + a = 2a$$

نستنتج أن مشتقة الدالة f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي عبارتها $f'(x) = 2x$.

2.4 حساب المشتقات

1.2.4 عمليات على الاشتقاق

مبرهنة 12.4 مشتقة مجموع دالتين

إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للاشتقاق على المجال I فإن الدالة $f + g$ قابلة للاشتقاق على المجال I وتحقق من أجل كل $x \in I$:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

البرهان 12.4

لتكن $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I .

من أجل $a \in I$ لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

نستنتج أن الدالة $f + g$ قابلة للاشتقاق على المجال I مع $(f + g)' = f' + g'$.

مثال 10.4

لتكن الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بالعبارتين

$$f(x) = 3x^2, \quad g(x) = 2x - 1$$

إذن f و g قابلتين للاشتقاق عند $x = 1$ مع $f'(1) = 6$ و $g'(1) = 2$.

نستخلص إذن أن

$$(f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 8$$

مبرهنة 13.4 مشتقة جداء دالتين

إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للاشتقاق على المجال I فإن الدالة $f \times g$ قابلة للاشتقاق على المجال I وتحقق من أجل كل $x \in I$:

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

البرهان 13.4

لتكن $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال I .

من أجل $a \in I$ لدينا

$$f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) = f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \cdot (f(x) - f(a)) + f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{x - a}$$

نفصل الكسر إلى مقامين فنجد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

وبما أن f و g قابلتان للإشتقاق عند a فإن الدالة $f \cdot g$ قابلة للإشتقاق عند a ولدينا

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

أي $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.

مثال 11.4

الدالتان $f(x) = x^2$ و $g(x) = 3x + 1$ قابلتان للإشتقاق عند 1 مع

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 2 \quad \text{و} \quad g(1) = 4, \quad g'(1) = 3$$

إذن الدالة $f \cdot g$ تقبل الإشتقاق عند 1 مع

$$(fg)'(1) = f'(1) \cdot g(1) + f(1) \cdot g'(1) = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 11$$

عموماً، مشتقتا الدالتين f و g على $\mathbb{R}$ هما الدالتان $f'(x) = 2x$ و $g'(x) = 3$ ، لهذا فمن أجل كل عدد حقيقي x

$$(f \cdot g)'(x) = 2x \cdot (3x + 1) + x^2 \cdot 3 = 9x^3 + 2x$$

لازمة 14.4 مشتقة جداء دالة بعدد حقيقي

من أجل كل عدد حقيقي λ ودالة f قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة λf قابلة للإشتقاق على I مع

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

مثال 12.4

مشتقة الدالة $f(x) = 3x^2$ هي $f'(x) = 3 \times (x^2)' = 6x$.

مبرهنة 15.4 مشتقة مركب دالتين

إذا كانت الدالتان $f : I \rightarrow J$ و $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ قابلتين للإشتقاق على المجالين I و J على الترتيب فإن الدالة $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على المجال I وتحقق

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

أو بعبارة أخرى، من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$ لدينا

$$(g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x))$$

البرهان 15.4

ليكن a عددا حقيقيا ينتمي إلى I حيث $b = f(a)$ ينتمي إلى J . إذن

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

الآن نحسب كل نهاية على حدة. فمن جهة لدينا

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

لأن الدالة f تقبل الإشتقاق عند a ، ومن جهة أخرى ونظرا لأن الدالة f مستمرة فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$$

حيث بدلنا المتغير x بالمتغير الجديد $y = f(x)$ ، أي

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(b) = g'(f(a))$$

نستنتج في الأخير أن

$$(g(f(a)))' = f'(a) \times g'(f(a))$$

مثال 13.4

نعتبر الدالتين $f(x) = 2x^2$ و $g(x) = 3x + 1$ المعرفتين والقابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$. إذن

$$g(f(x)) = 3f(x) + 1 = 6x^2 + 1$$

نتحقق من صحة القاعدة من أجل $a = 1$ مثلاً. لدينا

$$a = 1, \quad b = f(a) = 2, \quad f'(a) = f'(1) = 4, \quad g'(b) = g'(2) = 3$$

$$\text{إذن } (g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'(f(1)) = 4 \times 3 = 12$$

عند اشتقاق عبارة الدالة $g \circ f$ نجد $(6x^2 + 1)' = 12x$ ، ومن أجل $x = 1$ نحصل على

$$(g \circ f)'(1) = 12 \cdot 1 = 12$$

مبرهنة 16.4 مشتقة مقلوب دالة

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق ولا تنعدم على المجال I فإن الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للإشتقاق على I وتحقق من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

البرهان 16.4

من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$ لدينا الدالة $h(x) = f(x) \times \frac{1}{f(x)}$ قابلة للإشتقاق. وبما أن h دالة ثابتة فإن من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$ لدينا $h'(x) = 0$ من هذا وباستعمال قاعدة مشتق الجداء نجد

$$f'(x) \times \frac{1}{f(x)} + f(x) \times \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = 0$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

مبرهنة 17.4 مشتقة دالة كسرية

إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للإشتقاق على المجال I بحيث $g(x) \neq 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$ ، فإن الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للإشتقاق على المجال I وتحقق من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

البرهان 17.4

نستعمل قاعدة مشتق الجداء على الدالة $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ فنجد

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \times \frac{1}{g} + f \times \left(\frac{1}{g}\right)'$$

ثم نستعمل قاعدة مشتق المقلوب، أنظر النظرية 16.4، فنجد

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \times \frac{-g'}{g^2}$$

بعد توحيد المقامين نصل إلى النتيجة المطلوبة.

2.2.4 مشتقات بعض الدوال الأساسية

قضية 18.4 مشتقة وحيدات الحدود

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x^n$ قابلة للاشتقاق على كل مجال من $\mathbb{R}$. عبارة دالتها المشتقة

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

البرهان 18.4

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات هذه العبارة. لأجل هذا نعتبر، من أجل كل عدد طبيعي n ، الخاصية

$$P(n) : (f_n(x))' = nx^{n-1}$$

حيث f_n هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_n(x) = x^n$.

• هل $P(0)$ صحيحة؟

بما أن f_0 هي الدالة الثابتة 1، فإن $f_0'(x) = (1)' = 0$

من جهة أخرى لدينا، من أجل $n = 0$ ، $n \times x^{n-1} = 0$

نستنتج إذن أن $P(0)$ صحيحة.

• نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ، أي

$$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

ونبين أن $P(n+1)$ صحيحة، أي

$$f_{n+1}'(x) = (n+1) \cdot x^n$$

باستعمال العلاقة $f_{n+1}(x) = x \times f_n(x)$ مع قاعدة مشتق الجداء، أنظر النظرية 13.4، نكتب:

$$(f_{n+1}(x))' = (x \cdot f_n(x))' = (x)' \times f_n(x) + x \times (f_n(x))'$$

نستعمل في العبارة الأخيرة فرضية التراجع لنحصل على

$$(f_{n+1}(x))' = (x \cdot f_n(x))' = 1 \times f_n(x) + x \times n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n$$

إذن $P(n+1)$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي $n+1$.

نستنتج أن الخاصية P صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . أي:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

قضية 19.4 مشتق المقلوب

الدالة $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ قابلة للإشتقاق على كل مجال من $\mathbb{R}^*$. عبارة دالتها المشتقة:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

البرهان 19.4

يكفي أن نطبق مباشر النظرية 16.4 من أجل الدالة $f(x) = x$. فعلا لدينا:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

قضية 20.4 مشتق الجذر التربيعي

الدالة $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق على كل مجال من $\mathbb{R}_+$. عبارة دالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

البرهان 20.4

لدينا $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ ، ولتكن الدالة $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^2$.

من القضية 18.4 نعلم أن الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 2 \cdot x$$

ولدينا، من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

نستنتج إذن، من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، أن

$$(g \circ f)'(x) = (x)' = 1$$

باستعمال قاعدة مشتق مركب دالتين، النظرية 15.4، نجد، من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، أن

$$f'(x) \times g'(f(x)) = f'(x) \times 2 \cdot f(x) = 1$$

ومنه نستنتج أن

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضية 21.4 مشتقة الجذر التكعيبي

الدالة $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$ قابلة للاشتقاق على كل مجال من $\mathbb{R}^*$. عبارة دالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

البرهان 21.4

لدينا $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$ ولتكن الدالة $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x^3$

من القضية 18.4 نعلم أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق $g'(x) = 3 \cdot x^2$.

ولدينا، من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

نستنتج، من أجل كل $x \neq 0$ ، إذن

$$(g \circ f)'(x) = (x)' = 1$$

باستعمال قاعدة مشتق مركب دالتين، النظرية 15.4، نجد، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، أن

$$f'(x) \times g'(f(x)) = f'(x) \times 3 \cdot (f(x))^2 = 1$$

ومنه نستنتج

$$f'(x) = \frac{1}{3 \cdot (f(x))^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

قضية 22.4 مشتق الدالة الأسية

الدالة $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على كل مجال من $\mathbb{R}$. عبارة دالتها المشتقة

$$(\exp x)' = \exp(x)$$

قضية 23.4 مشتق الدالة اللوغاريتمية

الدالة $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على كل مجال من $\mathbb{R}_+$. عبارة دالتها المشتقة

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

3.2.4 المشتقات ذات الرتب العليا

نعتبر الدالة f معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$.

تعريف 24.4 الصنف C^0

إذا كانت الدالة f مستمرة على I فنقول أنها من **الصنف C^0** على المجال I ونكتب

$$f \in C^0(I)$$

مثال 14.4

الدالة $f(x) = 2x + 3$ هي مستمرة على $]0, 1[$ لذلك نكتب $f \in C^0(]0, 1[)$.

مثال 15.4

الدالة $f(x) = |x|$ هي مستمرة على $] - 1, 1[$ لذلك نكتب $f \in C^0(] - 1, 1[)$.

تعريف 25.4 الصنف C^1

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على I بحيث مشتقتها f' هي دالة مستمرة على I فنقول

إن f هي من **الصنف C^1** على المجال I ونكتب

$$f \in C^1(I)$$

مثال 16.4

الدالة $f(x) = 2x + 3$ هي كثير حدود، فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومشتقتها كذلك دالة كثير حدود،

إذن f' دالة مستمرة على $\mathbb{R}$. نستنتج من ذلك أن $f \in C^1(\mathbb{R})$.

مثال 17.4

الدالة المعرفة على $] - 1, 1[$ بالعبارة $f(x) = |x|$ مستمرة، بذلك فهي من الصنف C^0 على المجال

$] - 1, 1[$ ، لكنها لا تقبل الإشتقاق عند كل نقطة من $] - 1, 1[$. بالتحديد f لا تقبل الإشتقاق عند

$x = 0$. من هذا نستنتج أن $f \notin C^1(] - 1, 1[)$.

تعريف 26.4 المشتقة الثانية

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I وكانت دالتها المشتقة f' بدورها قابلة للإشتقاق على المجال I فإننا نرمز لمشتقة الدالة f' بـ f'' ونسميها **المشتقة الثانية** للدالة f .

مثال 18.4

الدالة كثير الحدود $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ مع $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ وبدورها المشتقة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. إذن

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 2x + 1)' = 6x - 2$$

مثال 19.4

الدالة $f(x) = \sqrt{2x+1}$ قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ مع $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. نلاحظ أن الدالة f' بدورها قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ مع

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$$

تعريف 27.4 المشتقة ذات الرتبة n

من أجل كل عدد طبيعي n ، نحصل على **المشتقة ذات الرتبة n** للدالة f بحساب الدالة المشتقة لمشتقتها ذات الرتبة $n-1$ لها. نرمز إليها بـ $f^{(n)}$.

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

يجب التنبيه أن هذا التعريف مرتبط بقابلية الإشتقاق للدوال المشتقات ذات الرتب الأقل من n . فمثلاً حتى يمكن حساب $f^{(2)}$ ، والتي نقصد بها المشتقة الثانية للدالة f ، يجب أن تكون الدوال المشتقة ذات الرتب أقل من 2، أي $f^{(0)}$ التي نقصد بها f و $f^{(1)}$ التي نقصد بها f' ، كلها قابلة للإشتقاق.

مثال 20.4

نقدم في هذا المثال المشتقات المتتالية حتى الرتبة الخامسة للدالة

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 2x - 2$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = 24x^2 - 18x + 2$$

$$f^{(3)}(x) = (f^{(2)}(x))' = 48x - 18$$

$$f^{(4)}(x) = (f^{(3)}(x))' = 48$$

$$f^{(5)}(x) = (f^{(4)}(x))' = 0$$

مثال 21.4

أحسب المشتقات المتتالية حتى الرتبة الثالثة للدالة $g(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2} \\ g'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ g''(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \\ g^{(3)}(x) &= -\frac{3}{2} \times \frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ملحوظة 28.4

إذا كان $P(x)$ كثير حدود من الدرجة n فإن مشتقاته ذات الرتبة $n+1$ هي الدالة المعدومة.

$$P^{(n+1)} = 0$$

مثال 22.4

أحسب المشتقات المتتالية حتى الرتبة الثانية للدالة $h(x) = \exp(x)$.

$$h(x) = e^x, \quad h'(x) = e^x, \quad h''(x) = e^x$$

ملحوظة 29.4

نلاحظ أن الاشتقاق لا يغير من عبارة الدالة الأسية. أي من أجل كل عدد طبيعي n

$$\exp^{(n)} = \exp$$

تعريف 30.4 الصنف C^n

نقول إن الدالة f هي من الصنف C^n على المجال I إذا كانت تقبل مشتقة ذات رتبة k ، من أجل كل $n \geq k$ ، وكانت الدالة $f^{(n)}$ مستمرة على المجال I ، ونكتب $f \in C^n(I)$.
إذا كانت f من الصنف C^n من أجل كل عدد طبيعي n فنقول أنها من الصنف C^∞ .

مثال 23.4

من الأمثلة السابقة يمكن أن نلاحظ ما يلي:

1. الدالة كثير الحدود $f(x)$ تنتمي إلى الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$.

2. الدالة الجذرية $g(x) = \sqrt{x}$ تنتمي إلى الصنف $C^3(]0; +\infty[)$.

3.4 نتائج الاشتقاق

1.3.4 قاعدة لوبيتال

قاعدة لوبيتال هي طريقة فعالة تسمح، في الكثير من الحالات، بإزالة حالات عدم التعيين المتعلقة بنهاية نسبة بين دالتين لما تكون هذه النهاية موجودة. نقدم فيما يلي نص القاعدة لكل حالة عدم التعيين وندعمه بأمثلة.

قضية 31.4 قاعدة لوبيتال (الحالة الأولى)

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للإشتقاق عند $x = a$ و $f(a) = g(a) = 0$ ، وكانت النهاية

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

موجودة، فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال 24.4

أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

نلاحظ أن البسط والمقام في العبارة السابقة هما دالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ويحققان

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 1 = \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$$

إذن لحساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ يجب إزالة حالة عدم تعيين من الشكل $0/0$.

في هذه الحالة يمكن أن نستعمل قاعدة لوبيتال ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 = 3$$

يمكن أن نتحقق من هذه النتيجة بطريقة أخرى.

بالفعل، نلاحظ أن $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ من هذا نستنتج أن

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 3$$

مثال 25.4

أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$.

نلاحظ أن البسط والمقام في هذه العبارة هما دالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ تحققان

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

إذن لحساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ يجب إزالة حالة عدم تعيين من الشكل $0/0$.
في هذه الحالة يمكن أن نستعمل قاعدة لوبيتال ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{2x} = 2$$

يمكن أن نتحقق من هذه النتيجة بطريقة أخرى.

بالفعل، نستعمل المتغير $t = 2x$. عندئذ يمكن أن نكتب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{e^t - 1}{t}$$

نعلم، من تعريف العدد المشتق للدالة الأسية عند 0 ، أن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يساوي

$$\lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{e^t - 1}{t} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 2e^0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \text{ إذن}$$

ملحوظة 32.4

قاعدة لوبيتال تبقى فعالة عندما يكون $a = \pm\infty$ ، بشرط أن تكون دالتي البسط والمقام قابليتي للاشتقاق بجوار $\pm\infty$.

مثال 26.4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+3}{x}}{\ln \frac{x-3}{x}} \text{ أحسب النهاية}$$

الدالتان $\ln \frac{x+3}{x}$ و $\ln \frac{x-3}{x}$ قابلتان للاشتقاق على المجال $[3, +\infty[$ مع

$$\left(\ln \frac{x+3}{x} \right)' = \frac{-3}{x(x+3)} \quad \text{و} \quad \left(\ln \frac{x-3}{x} \right)' = \frac{3}{x(x-3)}$$

بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-3}{x} = 0$$

فإن حساب النهاية المطلوبة يؤول إلى إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $0/0$ ، ويمكن أن نستعمل لذلك قاعدة لوبتال. إذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+3}{x}}{\ln \frac{x-3}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-3}{x(x+3)}}{\frac{3}{x(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x-3}{x+3} = -1$$

قضية 33.4 قاعدة لوبتال (الحالة الثانية)

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للإشتقاق و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ وكانت النهاية

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

موجودة، فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال 27.4

أحسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x - 11}$.

الحساب المباشر لهذه النهاية يعطينا حالة عدم تعيين من الشكل ∞/∞ .

إذن حسب قاعدة لوبتال لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x - 11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6x^2 - 2x + 1)'}{(2x^2 - 7x - 11)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x - 2}{4x - 7}$$

النهاية الأخيرة هي كذلك حالة عدم تعيين من الشكل ∞/∞ .

نطبق إذن قاعدة لوبتال مرة أخرى فنجد ما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x - 11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(12x - 2)'}{(4x - 7)'} = \frac{12}{4} = 3$$

ملحوظة 34.4

بعض حالات عدم التعيين تتطلب تطبيق قاعدة لوبتال عدة مرات للوصول إلى إزالة تامة لها.

مثال 28.4

أحسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x - \ln(1+x)}$.

من الواضح أنه لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $0/0$. وبما أن دالتي البسط والمقام قابلتان

للإشتقاق عند $x = 0$ فحسب قاعدة لوبتال لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(x - \ln(1+x))'}$$

أي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1 - \frac{1}{1+x}}$$

لكن عند حساب النهاية في الطرف الأيمن من هذه المساواة نصل مرة أخرى إلى حالة عدم التعيين

من الشكل $0/0$.

يمكن أن نستعمل قاعدة لوبيتال مرة أخرى، حيث أن كل الشروط متوفرة لذلك، ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(1 - \frac{1}{1+x})'}$$

أي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{1}{(1+x)^2}} = 1$$

2.3.4 مبرهنة التزايديات المنتهية

مبرهنة 35.4 التزايديات المنتهية

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$ فإنه توجد على الأقل نقطة $c \in]a, b[$ تحقق:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال 29.4

لتكن الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = x^2 - \sqrt{2x}$.

• أثبت أنه يوجد عدد حقيقي $\alpha \in]0, 2[$ بحيث: $f'(\alpha) = 1$.

الدالة $f(x) = x^2 - \sqrt{2x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0, 2]$ مع $f(0) = 0$ و $f(2) = 2$. إذن حسب مبرهنة التزايديات المنتهية، المبرهنة 35.4، يوجد عدد حقيقي α حيث $0 < \alpha < 2$ و

$$f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1$$

مثال 30.4

لتكن الدالة المعرفة على $]-\infty, +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = e^{x^2-1} + 2x$.

• أثبت أنه يوجد عدد حقيقي $\alpha \in]-1, 1[$ بحيث: $g'(\alpha) = 2$.

الدالة $g(x) = e^{x^2-1} + 2x$ قابلة للاشتقاق على المجال $[-1, 1]$ مع $g(-1) = -1$ و $g(1) = 3$. إذن حسب مبرهنة التزايديات المنتهية، المبرهنة 35.4، يوجد عدد حقيقي α ينتمي إلى المجال $]-1, 1[$ حيث

$$g'(\alpha) = \frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)} = 2$$

لازمة 36.4 رول

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$ بحيث:

$$f(a) = f(b)$$

فإنه توجد على الأقل نقطة $c \in]a, b[$ هي فاصلة قيمة حدية محلية وتحقق:

$$f'(c) = 0$$

مثال 31.4

أثبت أن الدالة $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ تملك قيمة حدية محلية في المجال $[-1, 1]$.
فعلا، الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال وتحقق $f(-1) = f(1) = \frac{e^1 + e^{-1}}{2}$.
بتطبيق مبرهنة رول، أنظر اللازمة 36.4، نستنتج أنه يوجد عدد حقيقي $c \in]-1, 1[$ بحيث $f'(c) = 0$.
إضافة إلى هذا، c هي فاصلة لقيمة حدية.

مثال 32.4

أثبت أن الدالة $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x - 2$ تملك قيمة حدية محلية في المجال $[0; 3]$.
نترك هذا المثال للطالب.

3.3.4 إتجاه تغير الدوال

مبرهنة 37.4 إتجاه تغير دالة قابلة للاشتقاق

لتكن f دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال $I =]a; b[$.

- تكون الدالة f متناقصة على $I =]a; b[$ إذا وفقط إذا تحقق، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f'(x) < 0$.
- تكون الدالة f متزايدة على $I =]a; b[$ إذا وفقط إذا تحقق، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f'(x) > 0$.

ملحوظة 38.4

المبرهنة السابقة تفيد أنه يمكن استنتاج إتجاه تغير أي دالة قابلة للاشتقاق بدراسة إشارة دالتها المشتقة.

مثال 33.4

أدرس إتجاه تغير الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
بما أن الدالة $\cosh$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، نكتب إذن عبارة دالتها المشتقة

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ولدراسة إشارة $\cosh'$ نكتب عبارتها كما يلي:

$$\cosh'(x) = \frac{e^{-x}}{2}(e^{2x} - 1)$$

نلاحظ أن إشارة $\cosh'(x)$ هي إشارة $e^{2x} - 1$ لأن $e^{-x} > 0$. ومنه نستنتج

جدول 1.4: إشارة $\exp(2x) - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{2x} - 1$	-	0	+
$\cosh'(x)$	-	0	+

إذن الدالة $\cosh$ متناقصة على المجال $]-\infty, 0[$ و متزايدة على المجال $]0, +\infty[$.

مثال 34.4

أدرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$.
الدالة f هي كثير حدود من الدرجة الثالثة، إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. لدينا الدالة المشتقة $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$ هي ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، ندرس إشارتها باستعمال المميز.

$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c = 144, \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 5$$

جدول 2.4: إشارة $3x^2 - 18x + 15$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

نستنتج أن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty, 1[$ و $]5, +\infty[$ ، ومتناقصة على المجال $]1, 5[$.

4.3.4 القيم الحدية للدوال

تفيد المشتقة في معرفة ما إذا كانت دالة معينة تقبل قيما حدية أو لا. لدينا المبرهنة التالية.

تعريف 39.4 النقطة الحرجة

إذا كانت f دالة من الصنف C^1 فإن النقطة التي تنعدم عندها الدالة المشتقة، أي التي تحقق $f'(x) = 0$ ، تسمى **النقطة الحرجة** للدالة f .

مثال 35.4

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = xe^{-x}$ تملك نقطة حرجة عند الفاصلة $x = 1$. بالفعل لدينا $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ والمعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا عند الفاصلة $x = 1$. إذن الدالة f تملك نقطة حرجة وحيدة فاصلتها 1.

مبرهنة 40.4 القيم الحدية المحلية (الشروط اللازمة)

إذا كانت دالة f ، قابلة للإشتقاق على مجال $]a, b[$ ، تملك قيمة حدية محلية عند الفاصلة c ، حيث $c \in]a, b[$ ، فإن

$$f'(c) = 0$$

ملحوظة 41.4

يجب الإنتباه ورفع الإلتباس عن أمرين عند استعمال المبرهنة السابقة

- وجود قيمة حدية محلية يترتب عنه بالضرورة إنعدام المشتقة، معناه أن دائما عند القيم الحدية المحلية توجد نقط حرجة.
 - إنعدام المشتقة عند نقطة معينة لا يعني بالضرورة وجود قيمة حدية محلية عندها، وهذا معناه أن ليس كل نقطة حرجة تمثل قيمة حدية محلية.
- من هذا نفهم أن حلول المعادلة $f'(x) = 0$ تمثل القيم الوحيدة التي **يمكن** عندها وجود قيمة حدية محلية.

مثال 36.4

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$. عند حساب مشتقتها نحصل على الدالة $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$. لدراسة إشارتها نحلل عبارتها إلى جداء عاملين ونكتب $f'(x) = 12x^2(x - 1)$. نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي

جدول 3.4: إشارة $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$

من هذا الجدول نلاحظ أن الدالة المشتقة f' تنعدم مرتين، عند الفاصلة 0 وعند الفاصلة 1. هذا يعني أنه إذا كانت الدالة تقبل قيمة حدية محلية فلا يمكن البحث عنها إلا عند هاتين الفاصلتين. نلاحظ كذلك من نفس الجدول أن الدالة المشتقة تنعدم عند $x = 0$ ولكن دون أن تغير إشارتها، إذن هي لا تمثل فاصلة لقيمة حدية محلية، بينما الدالة المشتقة تنعدم عند الفاصلة $x = 1$ مع تغيير الإشارة وهذا يعني أن f تملك قيمة حدية محلية عند هذه الفاصلة.

مبرهنة 42.4 القيم الحدية المحلية (الشروط الكافية)

لتكن f دالة من الصنف C^2 على المجال $]a, b[$ وتملك نقطة حرجة عند الفاصلة c .

- إذا كان $f''(c) < 0$ فإن عند الفاصلة c توجد قيمة حدية محلية كبرى.
- إذا كان $f''(c) > 0$ فإن عند الفاصلة c توجد قيمة حدية محلية صغرى.

مثال 37.4

نعتبر الدالة المعطاه في المثال 36.4. بينا سابقا أن الدالة $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ تملك نقطتين مرشحتين أن تكونا حديتين، فاصلتهما $x = 0$ و $x = 1$. لمعرفة طبيعة هاتين النقطتين نحسب أولا عبارة الدالة المشتقة الثانية.

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

بتطبيق المبرهنة 42.4 نستنتج ما يلي:

- $f''(0) = 0$ وهنا لا يمكن معرفة طبيعة النقطة الحرجة.
- $f''(1) = 12 > 0$ وهذا يعني أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$.

وهذا ما نلاحظه جليا من الجدول 4.4، جدول إشارة المشتقة f' .

مثال 38.4

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$. جد النقط الحرجة للدالة f وادرس طبيعتها.

للبحث عن النقط الحرجة للدالة f نبحث عن جذور الدالة المشتقة $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$.
يمكن بسهولة التحقق من أن f' تملك ثلاثة جذور هي $-1, 0, 1$. إذن الدالة f تملك ثلاث نقط حرجة هي $(-1, 3)$ ، $(0, 1)$ و $(1, -1)$.

لمعرفة طبيعتها نستعمل المشتقة الثانية $f''(x) = 60x^3 - 30x$. لدينا إذن:

$$\bullet \quad f''(-1) = -30 < 0 \quad \text{إذن } f \text{ تقبل قيمة حدية محلية كبرى عند } x = -1.$$

$$\bullet \quad f''(0) = 0, \text{ في هذه الحالة، المبرهنة 42.4 لا تسمح باستنتاج طبيعة النقطة الحرجة } (0, 1).$$

$$\bullet \quad f''(1) = 30 > 0 \quad \text{ومنه الدالة } f \text{ تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند } x = 1.$$

5.3.4 طبيعة الإنحناء ونقط الإنعطاف

تكلمنا سابقا عن تحذب وتقعير الدوال وعرفنا نقطة الإنعطاف على أنها تمثل محل تغير طبيعة إنحناء المنحني البياني من التحذب إلى التقعير أو العكس.
فيما يلي سنشرح كيف يمكن إستنتاج طبيعة الإنحناء أو نقط الإنعطاف باستعمال الإشتقاق.

مبرهنة 43.4 طبيعة الإنحناء

لتكن f دالة من الصنف C^2 على المجال $]a, b[$.

• إذا كان $f''(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in]a, b[$ فإن الدالة f مقعرة على $]a, b[$.

• إذا كان $f''(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in]a, b[$ فإن الدالة f محدبة على $]a, b[$.

مثال 39.4

الدالة الأسية $\exp$ هي من الصنف C^2 على $\mathbb{R}$ وتحقق، من أجل كل عدد حقيقي x ,

$$(\exp x)'' = e^x > 0$$

ومنه نستنتج أن الدالة الأسية النيبيرية دالة محدبة.

مثال 40.4

مما سبق نعلم أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ هي من الصنف C^2 على المجال $]0, +\infty[$. ولدينا، من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$,

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

إذن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية دالة مقعرة.

مبرهنة 44.4 نقطة الإنعطاف

لتكن f دالة من الصنف C^2 على المجال $]a, b[$ وليكن العدد الحقيقي $\alpha \in]a, b[$ بحيث:

• المشتقة الثانية f'' تنعدم عند الفاصلة α ، أي $f''(\alpha) = 0$.

• المشتقة الثانية تغير إشارتها عند الفاصلة α .

إذن $(\alpha, f(\alpha))$ تمثل نقطة إنعطاف للدالة f .

مثال 41.4

لنبحث عن نقط إنعطاف الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = e^{-x^2}$.

• أولاً نبحث عن حلول المعادلة $f''(x) = 0$.

بما أن $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ فإن $f''(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $4x^2 - 2 = 0$.

باستعمال طريقة المميز نجد أن دالة المشتقة الثانية تنعدم عند الفاصلتين $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$. ولكن هذا لا يكفي لكي نستنتج أنهما تمثلان فاصلتين لنقطتي إنعطاف.

• ثانياً يجب أن ندرس إشارة المشتقة الثانية f'' . من عبارة f'' نلاحظ أن إشارتها هي إشارة العامل $4x^2 - 2$.

جدول 4.4: إشارة $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
$4x^2 - 2$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+

من هذا الجدول نلاحظ أن المشتقة الثانية تنعدم عند الفاصلتين $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $+\frac{\sqrt{2}}{2}$ مع تغيير إشارتها. إذن للدالة f نقطتا إنعطاف هما $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \exp(-\frac{1}{2}))$ و $(+\frac{\sqrt{2}}{2}, \exp(-\frac{1}{2}))$.

4.4 تمارين وتطبيقات

1.4. أحسب مشتقات الدوال التالية.

- $(x^3 - 1)(x^2 + x - 2)$
- $\frac{2}{1 + x^2}$
- $x\sqrt{x^2 - x}$
- $\frac{2x - 1}{3x + 2}$
- $\frac{x}{\sqrt{x + 1}}$
- $\frac{-2x^2 + x + 3}{x - 1}$

2.4. أحسب مشتقات الدوال التالية.

- $(x^3 + x^2 + 1)^5$
- $\frac{2}{(1 + x^2)^4}$
- $\sqrt{(-x^2 + x)^3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{x} + 1}$
- $\ln(x^2 + 1)$
- $\exp(x \ln x - x)$

3.4. باستعمال قاعدة لوبتال، أزل حالات عدم التعيين التالية:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{3e^x - x^3 - 3x - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x\sqrt{x}} - 1}{1 - \ln(e - x^2)}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x^2} - e^{-x}}{\sqrt{1 - x} - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} - \frac{2}{e^x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{\sqrt{x} - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} - \frac{2}{e^x - 1}$

4.4. حسب كل حالة من الحالتين التاليتين، أحسب قيم العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة المرافقة مستمرة على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{\sqrt{x} - 1} & \text{لما } x < 1 \\ \ln(x + a) & \text{لما } x \geq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} ae^{-x} & \text{لما } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1 + 2x)}{4x} & \text{لما } x > 0 \end{cases}$$

5.4. تقدر التكلفة الإجمالية C_T عند إنتاج q وحدة، من أجل $100 \leq q \leq 1000$ ، بالعلاقة:

$$C_T(q) = 729 + 20q + 0.0081q^2$$

تعرف التكلفة الهامشية $C_M(q)$ بالزيادة اللازمة في التكلفة الإجمالية لإنتاج الوحدة $q + 1$ بعد إنتاج q وحدة.

1. أكتب عبارة $C_M(q)$ بدلالة q ثم احسب كلا من $C_M(200)$ و $C_M(600)$.
2. أحسب الخطأ النسبي عندما نعوض $C_M(200)$ بـ $C'_T(200)$ وعندما نعوض $C_M(600)$ بـ $C'_T(600)$.
3. نرمز بـ $E(q)$ إلى الخطأ النسبي عند تعويض $C_M(q)$ بـ $C'_T(q)$.
- أكتب عبارة E بدلالة q ثم بين أن $E(q) < 0.04\%$.

نعتبر فيما يلي أن $C_M = C'_T$. نرمز بـ $M(q)$ إلى متوسط التكلفة الإجمالية عندما يتم إنتاج q وحدة.

4. أكتب عبارة $M(q)$ ثم بين أن M تقبل قيمة حدية عند q^* يطلب تعيينها وتحديد طبيعتها.
5. تحقق من أن $C_M(q^*) = M(q^*)$. فسر هذه المساواة رياضياً.

6.4. لدينا مؤسسة تقوم بتصنيع أجهزة. نفرض أن عند بيع الوحدة من هذه الأجهزة بالسعر x

وحدة نقدية، فإن عدد الأجهزة المطلوبة $f(x)$ ، بالآلاف، يعطى بالعلاقة: $f(x) = 200e^{-0.1x}$.
الدالة f (دالة الطلب)، معرفة على المجال $[15; 40]$.

1. أرسم المنحني البياني للدالة f في المجال $[15; 40]$.
2. عين بيانيا قيمة الطلب إذا عرضت المؤسسة كل جهاز بـ 23 وحدة نقدية.
3. في أي مجال يجب أن يكون ثمن وحدة الجهاز إذا أرادت المؤسسة بيع أكثر من 9000 وحدة؟
4. أكتب عبارة الدالة $f'(x)$ ، مشتقة الدالة f ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .
5. نسمي دالة العرض الدالة g المعرفة على المجال $[15; 40]$ بالعبارة: $g(x) = 4x - 60$.
العدد $g(x)$ يمثل عدد الأجهزة، بالآلاف، التي تستطيع المؤسسة إنتاجها وبيعها بالثمن x للجهاز الواحد.
- أرسم في نفس الشكل السابق التمثيل البياني للدالة g .
6. نسمي ثمن التوازن ثمن الجهاز x الذي من أجله يتساوى العرض والطلب.
- (أ) عين بيانيا ثمن التوازن.
- (ب) عين بيانيا كم من جهاز يمكن للمؤسسة أن تبيع بثمان التوازن للجهاز الواحد.
- (ج) أثبت أن ثمن التوازن ينتمي للمجال $[21.00; 21.10]$.

7.4. إذا كانت مؤسسة تتميز بدالتى التكلفة الإجمالية والإيراد الإجمالى التاليتين:

$$C_T(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 16 \quad R_T(x) = 12x$$

1. أحسب التكلفة الهامشية والإيراد الهامشي من أجل $x = 4$ وفسر النتيجة حسابيا.
2. ما هو مستوى الإنتاج $\bar{x}$ الذي يحقق أقصى ربح لهذه المؤسسة؟ أحسب قيمة هذا الربح.
3. هل تنصح هذه المؤسسة بإنتاج هذا المستوى من الإنتاج؟ لماذا؟

باب 5

الدوال الأصلية وحساب التكامل

1.5 الدوال الأصلية

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]a, b[$. نعلم أنه إذا كانت f قابلة للإشتقاق فيمكن معرفة سرعة تغيرها عند كل نقطة من المجال $]a, b[$ بحساب دالتها المشتقة $f'(x)$.
مثلا، سرعة تغير الدالة $f(x) = x - \frac{1}{x+1}$ المعرفة على المجال $]0, 1[$ تعطى بعبارة دالتها المشتقة $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$.
فيما يلي نهتم بالعملية العكسية للإشتقاق، أي بحساب عبارة الدالة $f(x)$ إنطلاقا من عبارة مشتقتها $f'(x)$. مثلا، إذا كانت لدينا عبارة الدالة المشتقة $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$ فكيف يمكن إيجاد عبارة الدالة $f(x)$ ؟

1.1.5 التكامل غير المحدد

تعريف 1.5 الدالة الأصلية

نقول إن الدالة F ، القابلة للإشتقاق على المجال $]a, b[$ ، هي دالة أصلية للدالة f إذا تحقق،
من أجل كل $x \in]a, b[$ ، ما يلي:

$$F'(x) = f(x)$$

مثال 1.5

نستنتج مما ورد سابقا أن الدالة $F(x) = x - \frac{1}{x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$.

مثال 2.5

الدالة $F(x) = \ln(1 + e^x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$. للتحقق من ذلك يكفي حساب عبارة المشتقة $F'(x)$ إنطلاقاً من عبارة $F(x)$.
هل كل دالة عددية f معرفة على مجال $]a, b[$ تقبل دالة أصلية F ؟ النظرية التالية تحدد إطاراً حيث يمكن الإجابة على هذا السؤال بالإيجاب.

مبرهنة 2.5 وجود دالة أصلية

إذا كانت الدالة f المعرفة على المجال $]a, b[$ مستمرة فإنه يوجد دالة أصلية لها.
أو بعبارة أخرى، إذا كانت $f \in C^0([a, b])$ فإنه يوجد دالة $F \in C^1([a, b])$ بحيث:

$$F' = f$$

خلافاً لعملية الاشتقاق، البحث عن دالة أصلية لدالة f لا يؤدي إلى عبارة وحيدة. لنأمل المثال التالي.

مثال 3.5

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بـ $f(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$. نتحقق بسهولة أن الدالتين $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ و $G(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ هما أصليتان للدالة f رغم أن $F \neq G$.

كون الدالتين F و G أصليتان لنفس الدالة f يربط عبارتيهما ويحدد كل واحدة بدلالة الأخرى.

قضية 3.5

إذا كان $F, G \in C^1([a, b])$ بحيث $F' = G'$ فإنه يوجد عدد حقيقي C بحيث $F = G + C$ ، أي من أجل كل $x \in]a, b[$:

$$F(x) = G(x) + C$$

البرهان 3.5

نعتبر الدالة $H = F - G$. إذن الدالة H تنتمي إلى $C^1([a, b])$. لدينا، من أجل كل عدد حقيقي $x \in]a, b[$ ، $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$. هذا يعني أن مشتقة الدالة H هي الدالة المعدومة. نستنتج من هذا أن H دالة ثابتة، أي أن هناك عدد حقيقي C بحيث $H(x) = C$ من أجل كل $x \in]a, b[$. ومنه نستنتج أن من أجل كل $x \in]a, b[$:

$$F(x) = G(x) + C$$

مثال 4.5

لاحظنا في المثال 3.5 أن الدالتين $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ و $G(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ المعرّفتين على $\mathbb{R}_+$ تحققان $F' = G'$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ لدينا

$$F(x) - G(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1} - \frac{x^2 - 2}{x + 1} = \frac{x + 1}{x + 1} = 1$$

أي أن $F = G + 1$.

تعريف 4.5 التكامل الغير محدد

التكامل الغير محدد للدالة f بالنسبة للمتغير x يرمز له بـ $\int f(x)dx$ ويعرف بالعلاقة

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

حيث F تمثل أي دالة أصلية للدالة f و C عدد حقيقي كافي.

العلاقة $\int f(x)dx$ تقرأ «تكامل $f(x)$ تفاضل x » أو «مجموع $f(x)$ تفاضل x ».

إن الكتابة $\int f(x)dx$ تعبر على مجموع الدوال الأصلية للدالة f ، ولفظ **غير محدد** إنما يدل على أنه لم يتم تحديد الثابت C الذي يميز كل دالة أصلية عن أخرى.

مثال 5.5

من التعريف 4.5 ومن المثال 3.5 نستنتج أن

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln(1 + e^x) + C$$

حيث C عدد حقيقي كافي.

ومن المثال 2.5 نستنتج أن

$$\int \left(1 + \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = \frac{x^2 - 2}{x + 1} + C$$

أو

$$\int \left(1 + \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1} + C$$

حيث في كلتا العبارتين C عدد حقيقي غير محدد.

قضية 5.5 تكامل الدوال المألوفة

من أجل كل عدد حقيقي $\alpha \neq -1$ لدينا $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C$

ومن أجل $\alpha = -1$ لدينا $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

لدينا كذلك $\int e^x dx = e^x + C$

حيث، في كل حالة، C يمثل عدد حقيقي كافي.

البرهان 5.5

نستنتج هذه العبارات من مشتقات الدوال المألوفة.

ملحوظة 6.5

يجب الإنتباه أن عبارة الدالة الأصلية معرفة على قيم تعريف دالة التكامل، لذلك فإن مجموعة تعريف $\int x^\alpha dx$ تختلف حسب قيم العدد الحقيقي α .

مثال 6.5

أحسب التكامل الغير محدد $\int \sqrt{x} dx$.
الدالة $\sqrt{x}$ معرفة من أجل القيم الموجبة لـ x ، إذن كل دالة أصلية لها تكون معرفة من أجل القيم الموجبة للمتغير x .

باستعمال الكتابة $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ يمكن تطبيق القضية 5.5 من أجل $\alpha = \frac{1}{2}$. نكتب عندئذ

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} x^{1 + \frac{1}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ومنه

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

باستعمال خواص الأسس فإن هذه الدالة تقبل الكتابة التالية

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

مثال 7.5

أحسب التكامل الغير محدد $\int \sqrt[3]{x} dx$.
الدالة $\sqrt[3]{x}$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، إذن كل دالة أصلية لها تكون معرفة على $\mathbb{R}$.
باستعمال الكتابة $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ يمكن تطبيق القضية 5.5 من أجل $\alpha = \frac{1}{3}$. نكتب عندئذ

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} x^{1 + \frac{1}{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ومنه

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

قضية 7.5 خطية التكامل الغير محدد

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a, b]$ و λ عدد حقيقي فإن:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \quad \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

البرهان 7.5

التحقق من هاتين العبارتين يتم باشتقاق طرفي كل واحدة منهما. بالفعل، تعريف التكامل الغير محدد يعطي

$$\left(\int (f(x) + g(x))dx \right)' = f(x) + g(x)$$

وباستعمال خطية المشتقة نحصل كذلك على

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx \right)' = \left(\int f(x)dx \right)' + \left(\int g(x)dx \right)' = f(x) + g(x)$$

ومنه نستنتج أن

$$\left(\int (f(x) + g(x))dx \right)' = \left(\int f(x)dx + \int g(x)dx \right)'$$

أي أن

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

بنفس الطريقة لدينا من تعريف التكامل الغير محدد

$$(\lambda f(x)dx)' = \lambda f(x)$$

ثم من خاصية مشتق الجداء بعدد حقيقي لدينا

$$\left(\lambda \int f(x)dx \right)' = \lambda \left(\int f(x)dx \right)' = \lambda f(x)$$

ومنه

$$(\lambda f(x)dx)' = \left(\lambda \int f(x)dx \right)'$$

وهذا يعني أن

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

مثال 8.5

أبسط تطبيق لهاته الخاصيتين هو تكامل الدوال كثيرات الحدود. بالفعل، لو نأخذ مثلاً الدالة

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1 \text{ فإن}$$

$$\int f(x)dx = \int (3x^2 - 4x + 1)dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + \int 1 dx$$

باستعمال قواعد المكاملة من أجل الدوال المألوفة، قضية 5.5، نصل إلى العبارة التالية

$$\int f(x)dx = x^3 - 2x^2 + x + C$$

حيث C عدد حقيقي كافي.

عند البحث عن تكامل أو دالة أصلية لدالة معينة فإن هناك طريقتان شهيرتان مستخلصتان من قاعدتي اشتقاق جداء دالتين وإشتقاق مركب دالتين. الأولى تسمى المكاملة بالتجزئة والثانية تسمى المكاملة بتبديل المتغير.

2.1.5 حساب التكامل بالتجزئة

مبرهنة 8.5 المكاملة بالتجزئة

إذا كانت u و v دالتين من $C^1([a, b])$ فإن:

$$(1) \quad \int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

البرهان 8.5

حسب قاعدة مشتق الجداء لدينا $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. إذن باستعمال خطية التكامل الغير محدد

$$\int (u(x) \cdot v(x))' dx = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

أي

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

ومنه نستنتج قاعدة التكامل بالتجزئة.

مثال 9.5

نريد حساب $\int x e^x dx$. لذلك نستعمل المكاملة بالتجزئة ونضع $u'(x) \cdot v(x) = x e^x$ حيث

$$u'(x) = e^x, \quad v(x) = x$$

لذلك يكون لدينا

$$u(x) = e^x, \quad v'(x) = 1$$

نطبق القاعدة لنحصل على

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

مثال 10.5

نريد حساب دالة أصلية للدالة $\ln x$. نستعمل طريقة التكامل بالتجزئة ونضع $u'(x) \cdot v(x) = 1 \cdot \ln x$ حيث

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = \ln x$$

لذلك يكون لدينا

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

حسب قاعدة التجزئة نكتب

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx$$

ومنه نحصل على العبارة التالية

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ملحوظة 9.5

أهم خطوة في التكامل بالتجزئة هي اختيار الجزئين $u'(x)$ و $v(x)$. في هذه الخطوة يجب مراعاة أمرين مهمين، الأول هو معرفة مسبقة لأصلية للدالة $u'(x)$ والثاني هو معرفة أو إمكانية الوصول إلى دالة أصلية للجداء $u(x) \cdot v'(x)$. عملية التجزئة ليست وحيدة، معناه يمكن الوصول إلى عبارة الدالة الأصلية إنطلاقاً من خيارين مختلفين للدالتين $u'(x)$ و $v(x)$.

مثال 11.5

أحسب باستعمال التجزئة التكامل $\int (\ln x)^2 dx$.
لتكن u و v دالتين بحيث $u'(x) \cdot v(x) = (\ln x)^2$.

• لو أخذنا

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = (\ln x)^2$$

أي

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

فطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة يؤدي إلى

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x dx$$

من المثال 10.5 نعلم أن $x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln x$. ومنه

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

• لو نعتبر الآن أن

$$u'(x) = \ln x, \quad v(x) = \ln x$$

أي

$$u(x) = x \ln x - x, \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

فإن المكاملة بالتجزئة تعطي

$$\int (\ln x)^2 dx = (x \ln x - x) \cdot \ln x - \int (\ln x - 1) dx$$

يعني

$$\int (\ln x)^2 dx = (x \ln x - x) \cdot \ln x - (x \ln x - x - x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

بعد القيام بالحسابات البسيطة نحصل على

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

3.1.5 حساب التكامل بتبديل المتغير

مبرهنة 10.5 المكاملة بتبديل المتغير

إذا كانت u و v دالتين قابلتين للإشتقاق فإن

$$(2) \quad \int v'(x) \cdot u'(v(x)) dx = u(v(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

البرهان 10.5

باشتقاق الطرف الأيمن من العبارة (2) فإن $(u(v(x)) + C)' = (u(v(x)))'$. ثم باستعمال مشتق مركب

دالتين، المبرهنة 15.4، نحصل على

$$(u(v(x)) + C)' = v'(x) \cdot u'(v(x))$$

ومنه نستنتج أن

$$\int v'(x) \cdot u'(v(x)) dx = u(v(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

مثال 12.5

أحسب تكامل الدالة $f(x) = 2xe^{x^2}$.

باستعمال المتغير $t = x^2$ فإن $dt = 2x dx$ ومنه

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^t dt = e^t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

أي

$$\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

مثال 13.5

أحسب أصلية الدالة $\frac{\ln x}{x}$.

لدينا

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x}$$

نستعمل المتغير $t = \ln x$ الذي يحقق $dt = \frac{dx}{x}$ إذن

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

بالعودة إلى المتغير x في الطرف الأيمن من العبارة السابقة نحصل على

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

قضية 11.5 التبديل التآلفي للمتغير

ليكن $\alpha \neq 0$ و β عددين حقيقيين. إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن $\frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$ هي دالة أصلية للدالة $f(\alpha x + \beta)$.

البرهان 11.5

نريد حساب $\int f(\alpha x + \beta) dx$. ليكن المتغير $t = \alpha x + \beta$. نلاحظ أن عبارة t بدلالة x هي تآلفية. إذن $dt = \alpha dx$ ومنه

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \int f(t) \frac{dt}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int f(t) dt.$$

وباستعمال أصلية الدالة f نحصل على

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ثم بالرجوع إلى المتغير الأصلي x نجد

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

نستنتج أن $\frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$ هي دالة أصلية للدالة $f(\alpha x + \beta)$.

مثال 14.5

لحساب التكامل الغير محدد $\int (2x - 1)^4 dx$ يمكن أن نستعمل طريقتين. الأولى تعتمد على حساب منشور ثنائي الحد $(2x - 1)^4$ وبعدها استعمال خطية التكامل الغير محدد. أو الطريقة الثانية التي تعتمد على استعمال المتغير الخطي $t = 2x - 1$ وعبارة أصلية الدالة t^4 . بالفعل، من القضية السابقة لدينا

$$\int (2x - 1)^4 dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} (2x - 1)^5 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

أي

$$\int (2x - 1)^4 dx = \frac{1}{10} (2x - 1)^5 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

4.1.5 الكسور البسيطة وحساب تكامل الدوال الناطقة

لتكن f دالة عددية عبارتها $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q كثيرات حدود درجتهم $n = \deg(P)$ و $m = \deg(Q) \geq 1$.

إن عملية البحث عن دالة أصلية للدالة ناطقة من الشكل f يمكن دوما إرجاعها إلى البحث عن دالة أصلية لدالة ناطقة من الشكل f ولكن مع $\deg(P) < \deg(Q)$. فعلا، عندما يكون $n \geq m$ يكفي استعمال القسمة الإقليدية بين كثيري الحدود P و Q حتى يتسنى لنا كتابة الدالة f بعبارة من الشكل

$$f = P' + \frac{R}{Q}$$

حيث P' كثير حدود ذو درجة $n - m$ و R كثير حدود درجته أقل تماما من درجة Q ، m . سنركز اهتمامنا في ما يلي على الحالات التي يمكن فيها تحليل كثير حدود المقام Q إلى جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى، بعبارة أخرى، الحالات التي يكون فيها

$$(3) \quad Q(X) = a(X - r_1)^{m_1} \cdot (X - r_2)^{m_2} \cdots (X - r_k)^{m_k}$$

حيث $a \neq 0$ يمثل معامل الحد الأعلى درجة في Q ، $r_1, r_2, \dots, r_k$ تمثل جذور كثير الحدود Q ، أي أنه لدينا $Q(r_i) = 0$ من أجل $1 \leq i \leq k$ و $m_1, m_2, \dots, m_k$ هي أعداد طبيعية غير معدومة تمثل على الترتيب رتبة تضاعف الجذور $r_1, r_2, \dots, r_k$.
 إن السبيل إلى حساب الدوال الأصلية للدالة الكسرية f يمر بتفكيكها إلى كسور بسيطة، أي كتابتها على شكل مجموع كسور عبارتها

$$\frac{\alpha}{(X - r)^m}$$

لهذا نقدم توطئتين تسمحان بتبسيط وتوضيح عملية التفكيك.

توطئة 12.5

إذا كان P, Q_1, Q_2 ثلاث كثيرات حدود حيث

$$\deg(P) < \deg(Q_1) + \deg(Q_2)$$

فإنه يوجد كثيرا حدود وحيدين P_1 و P_2 حيث

$$\deg(P_1) < \deg(Q_1) \quad \text{و} \quad \deg(P_2) < \deg(Q_2)$$

ويحققان

$$(4) \quad \frac{P}{Q_1 \times Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

ملحوظة 13.5

من هذه التوطئة نستخلص فائدتين:

1. إذا كان مقام دالة ناطقة عبارة عن جداء كثيري حدود، عندها يمكن تفكيك هذه الدالة إلى مجموع دالتين ناطقتين مقام كل واحدة منهما أحد كثيري الحدود.
2. إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام بدالة ناطقة فإن هذه الخاصية تنتقل إلى دالتي المجموع، معناه أن كل كسر من المجموع يكون درجة بسطه أقل من درجة مقامه.

مثال 15.5

نريد تفكيك الدالة

$$f(X) = \frac{4X - 1}{(X - 1)(X^2 + X + 1)}$$

حسب التوطئة 12.5 يمكن كتابة

$$f(X) = \frac{a}{X - 1} + \frac{bX + c}{X^2 + X + 1}$$

مع a, b, c أعداد حقيقية.

بتوحيد مقامي العبارة الأخيرة نجد

$$f(X) = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)X + (a-c)}{(X-1)(X^2+X+1)}$$

هذا يعني أن من أجل كل قيم X لدينا:

$$\frac{4X-1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)X + (a-c)}{(X-1)(X^2+X+1)}$$

يمكن هنا أن نستعمل المطابقة لنحصل على الجملة

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c=4 \\ a-c=-1 \end{cases}$$

وهذه الجملة تقبل حلا وحيدا حيث $a=1$ و $b=-1$ و $c=2$. ومنه نجد

$$f(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+2}{X^2+X+1}$$

توطئة 14.5 التفكير إلى كسور بسيطة

ليكن P كثير حدود حيث $\deg(P) < m$ و

$$f(X) = \frac{P(X)}{(X-r)^m}$$

إذن توجد أعداد حقيقية $a_m, \dots, a_1$ حيث

$$(5) \quad f(x) = \frac{a_1}{X-r} + \frac{a_2}{(X-r)^2} + \dots + \frac{a_m}{(X-r)^m}$$

مثال 16.5

الدالة الكسرية $f(x) = \frac{X^2+1}{(X-1)^3}$ يمكن أن تأخذ عبارة من الشكل

$$\frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3}$$

بالفعل، لو نكتب

$$f(X) = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3}$$

وبعد توحيد المقامات نصل إلى

$$f(X) = \frac{a_1X^2 + (-2a_1 + a_2)X + (a_1 - a_2 + a_3)}{(X-1)^3}$$

يمكن الآن أن نستعمل المطابقة للحصول على العلاقات التالية

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ -2a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 1 \end{cases}$$

نحل هذه الجملة لنجد أنها تقبل حلا وحيدا هو $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ و $a_3 = 2$ وهذا يعني أن

$$f(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3}$$

التوطنتان 14.5 و 12.5 تسمحان بتفكيك كل دالة كسرية، ذات مقام من الشكل (3)، إلى مجموع كسور بسيطة.

قضية 15.5

لتكن الدالة الكسرية $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ حيث $\deg(P) < \deg(Q)$ و

$$Q(X) = (X - r_1)^{m_1} \cdot (X - r_2)^{m_2} \cdots (X - r_k)^{m_k}$$

إذن توجد أعداد حقيقية a_i^j ، من أجل $1 \leq i \leq k$ و $1 \leq j \leq m_i$ ، بحيث

$$(6) \quad f(X) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_i^j}{(X - r_i)^j}$$

مثال 17.5

نريد تفكيك الدالة التالية

$$f(X) = \frac{18X^2 + 9X}{(X-2)(X+1)^2}$$

حسب القضية 15.5 نكتب

$$f(X) = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$$

نوحد المقامات في العبارة الأخيرة لنجد

$$f(X) = \frac{(a+b)X^2 + (2a-b+c)X + (a-2b-2c)}{(X-2)(X+1)^2}$$

هذا يعني

$$2X^2 + X = (a+b)X^2 + (2a-b+c)X + (a-2b-2c)$$

بالمطابقة نحصل على الجملة الخطية التالية

$$\begin{cases} a+b=18 \\ 2a-b+c=9 \\ a-2b-2c=0 \end{cases}$$

هذه الجملة تقبل حلا وحيدا حيث $a = 10$ و $b = 8$ و $c = -3$. ومنه

$$f(X) = \frac{10}{X-2} + \frac{8}{X+1} + \frac{-3}{(X+1)^2}$$

إن تفكيك الدوال الكسرية إلى مجموع كسور بسيطة هي وسيلة فعالة لحساب الدوال الأصلية لها، لأنه لدينا العبارة التحليلية لأصلية دوال الكسور البسيطة.

قضية 16.5

ليكن m عدد طبيعي غير معدوم. لدينا

$$(7) \quad \int \frac{dx}{(x-r)^m} = \begin{cases} \ln|x-r|, & m = 1 \text{ من أجل} \\ \frac{-1}{(m-1)} \times \frac{1}{(x-r)^{m-1}}, & m > 1 \text{ من أجل} \end{cases}$$

مثال 18.5

أكتب عبارة الدال الأصلية للدالة

$$f(x) = \frac{18x^2 + 9x}{(x-2)(x+1)^2}$$

رأينا في المثال 17.5 أن عبارة الدالة f يمكن كتابتها باستعمال الكسور البسيطة كما يلي

$$f(x) = \frac{10}{x-2} + \frac{8}{x+1} + \frac{-3}{(x+1)^2}$$

إذن

$$\int f(x)dx = 10 \int \frac{dx}{x-2} + 8 \int \frac{dx}{x+1} - 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

باستعمال القضية 16.5 نستنتج أن

$$\int f(x)dx = 10 \ln|x-2| + 8 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$$

حيث c عدد حقيقي كافي.

2.5 التكامل المحدد

تعريف 17.5 التكامل المحدد

التكامل المحدد للدالة المستمرة f على المجال $[a, b]$ هو العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f . نكتب

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

مثال 19.5

أحسب تكامل الدالة $f(x) = x^2 - x$ على المجال $[0, 1]$.

باستعمال التعاريف السابقة لدينا

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x)dx$$

وبما أن $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[0, 1]$ فإن

$$\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2}\right) = -\frac{1}{6}$$

1.2.5 خاصيات التكامل المحدد

لتكن f و g دالتين مستمرتين على المجال $[a, b]$ ، و F و G دالتين أصليتين لهما على الترتيب.

قضية 18.5 خطية التكامل المحدد

من أجل كل عدد حقيقي λ لدينا

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

البرهان 18.5

هذه الخاصية تستخلص مباشرة من تعريف التكامل المحدد. بالفعل لدينا

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = (\lambda F(x) + G(x))\Big|_a^b = (\lambda F(b) + G(b)) - (\lambda F(a) + G(a))$$

ومنه

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda(F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \lambda F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b$$

ومنه نستنتج أن

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

قضية 19.5

من أجل كل عدد حقيقي c من المجال $[a, b]$ لدينا

$$\int_c^c f(x)dx = 0$$

البرهان 19.5

يكفي استعمال تعريف التكامل المحدد للدالة f على المجال $[c, c]$. نكتب إذن

$$\int_c^c f(x)dx = F(c) - F(c) = 0$$

قضية 20.5 علاقة شال

من أجل كل عدد حقيقي c من المجال $[a, b]$ لدينا

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

البرهان 20.5

نكتب الطرف الأيمن باستعمال الدالة الأصلية F

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b$$

نلاحظ أن $F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a)$ إذن

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

قضية 21.5

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

البرهان 21.5

يمكن إثبات هذه العبارة بطريقتين مختلفتين.

أولاً، باستعمال تعريف التكامل المحدد. بالفعل لدينا

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x)dx$$

ثانياً، باستعمال علاقة شال. بالفعل لدينا

$$0 = \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$$

ومنه

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

قضية 22.5 تكامل دالة موجبة

إذا كانت الدالة f موجبة تماما على المجال $[a, b]$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

البرهان 22.5

بما أن $F'(x) = f(x)$ موجبة تماما على المجال $[a, b]$ فهذا يعني أن الدالة F متزايدة تماما على المجال $[a, b]$. نستنتج من هذا أن $F(a) < F(b)$. ومنه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) > 0$$

لازمة 23.5

إذا تحقق $f(x) < g(x)$ من أجل $x \in [a, b]$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

البرهان 23.5

نعتبر الدالة $h(x) = g(x) - f(x)$. الدالة h إذن موجبة تماما على المجال $[a, b]$. حسب القضية 22.5 نستنتج أن

$$\int_a^b h(x)dx > 0$$

هذا يعني أن

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx > 0$$

ثم باستعمال خطية التكامل المحدد نجد

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx > 0$$

ومنه

$$\int_a^b g(x)dx > \int_a^b f(x)dx$$

قضية 24.5

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

البرهان 24.5

من أجل كل عدد حقيقي $x \in [a, b]$ لدينا

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

باستعمال اللازمة 23.5 نحصل على المتراجحة المضاعفة التالية

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

ومنه

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

2.2.5 حساب التكامل المحدد

إن الطرق المقدمة سابقا لحساب التكاملات الغير محدد تبقى صالحة لحساب التكاملات المحددة، غير أنه يجب مراعاة بعض التفاصيل بما أنه تم وضع حدود للتكامل.

قضية 25.5 حساب التكامل المحدد بالتجزئة

إذا كانت u و v دالتين من $C^1([a, b])$ فإن:

$$(8) \quad \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

البرهان 25.5

إثبات هذه القضية يتبع نفس خطوات إثبات النظرية 8.5.

ملحوظة 26.5

حتى يكون للطرف الأيمن من العبارة (8) معنى يجب أن يكون ممكنا حساب $u(x) \cdot (x) \Big|_a^b$. لهذا فإنه من الضروري أن تكون الدالتان u و v معرفتين عند طرفي المجال $[a, b]$.

مثال 20.5

$$\cdot \int_0^1 x e^x dx \text{ أحسب}$$

طبعا الدالة $x e^x$ مستمرة على المجال $[0, 1]$. ولحساب تكاملها على المجال $[0, 1]$ نستعمل المكاملة بالتجزئة ونضع $u'(x) \cdot v(x) = x e^x$ حيث

$$u'(x) = e^x, \quad v(x) = x$$

لذلك يكون لدينا

$$u(x) = e^x, \quad v'(x) = 1$$

نطبق القاعدة لنحصل على

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (x e^x - e^x) \Big|_0^1$$

إذن

$$\int_0^1 x e^x dx = (1 \cdot e^1 - e^1) - (0 \cdot e^0 - e^0) = 1$$

مثال 21.5

$$\cdot \int_3^8 x \sqrt{x+1} dx \text{ أحسب التكامل التالي}$$

الدالة $x \sqrt{x+1}$ مستمرة على المجال $[3, 8]$. نستعمل المكاملة بالتجزئة ونضع

$$u'(x) = \sqrt{x+1}, \quad v(x) = x$$

إذن، حسب القضية 11.5 يكون لدينا

$$u(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3}, \quad v'(x) = 1$$

ومنه

$$\int_3^8 x \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} x(x+1) \sqrt{x+1} \Big|_3^8 - \int_3^8 \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} dx$$

وبما أن $(x+1) \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{3}{2}}$ فإن

$$\int (x+1) \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} (x+1)^2 \sqrt{x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

نستنتج من هذا

$$\int_3^8 x \sqrt{x+1} dx = \left(\frac{2}{3} x(x+1) \sqrt{x+1} - \frac{4}{15} (x+1)^2 \sqrt{x+1} \right) \Big|_3^8 = \frac{1076}{15}$$

قضية 27.5 حساب التكامل المحدد بتبديل المتغير

إذا كانت $v : [a, b] \rightarrow [c, d]$ دالة قابلة للإشتقاق وكانت الدالة $u : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق كذلك فإن

$$(9) \quad \int_a^b v'(x) \cdot u'(v(x)) dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u'(t) dt = u(v(b)) - u(v(a))$$

البرهان 27.5

بما أن $u(v(x))$ هي دالة أصلية للدالة $v'(x) \cdot u'(v(x))$ فإن العبارة (9) تستنتج مباشرة.

مثال 22.5

نريد حساب التكامل $\int_3^8 x\sqrt{x+1} dx$ باستعمال طريقة تبديل المتغير. نقترح إذن المتغير $t = x+1$. لدينا إذن $dt = dx$ ولما $x = 3$ و $x = 8$ فإن $t = 4$ و $t = 9$ على الترتيب. ومنه

$$\int_3^8 x\sqrt{x+1} dx = \int_4^9 (t-1)\sqrt{t} dt = \int_4^9 \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) dt$$

نستنتج، باستعمال القضية 5.5، ما يلي

$$\int_3^8 x\sqrt{x+1} dx = \left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_4^9 = \frac{1076}{15}$$

مثال 23.5

أحسب التكامل $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$. نضع $t = \ln x$ ، لذا لدينا $dt = \frac{dx}{x}$ ، ومن أجل $x = 1$ و $x = e^2$ لدينا $t = 0$ و $t = 2$ على الترتيب. باستعمال العبارة (9) يمكن أن نكتب

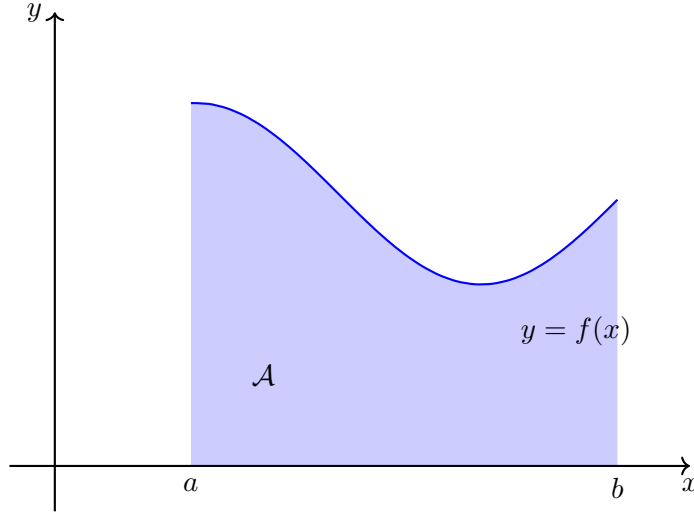
$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^2 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2$$

3.5 التكامل المحدد وحساب المساحات

لقد درسنا في باب الإشتقاق أن لمشتقة دالة معنى هندسي يتمثل في معامل توجيه المستقيم المماس للمنحني عند نقطة الإشتقاق. السؤال الذي نريد الإجابة عنه هو ماذا تمثل الدالة الأصلية بالنسبة لمنحني دالة المكاملة.

1.3.5 مساحة الحيز المحدد بمنحني

لتكن f دالة مستمرة وموجبة على المجال $[a, b]$. نهتم بالمساحة A للحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة f والمستقيم حامل محور الفواصل على المجال $[a, b]$.



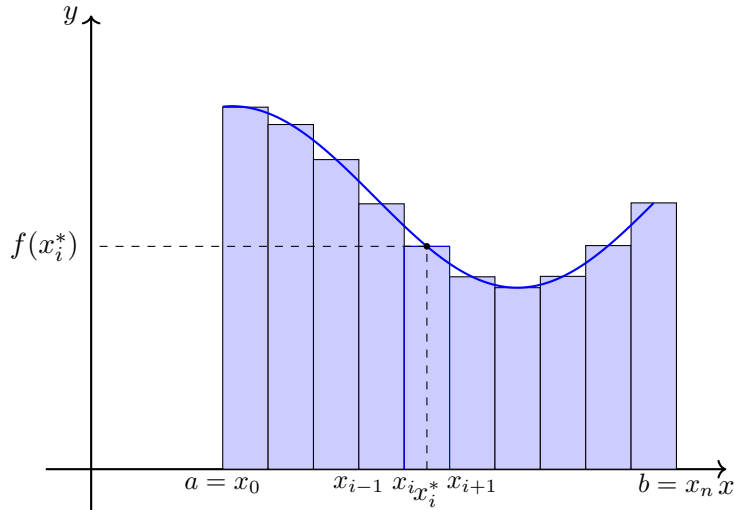
شكل 1.5: المساحة المحددة بمنحني

لهذا نقوم بتقسيم المجال $[a, b]$ إلى n مجال جزئي $[x_i, x_{i+1}]$ ، حيث، من أجل $0 \leq i \leq n$ ، لدينا

$$x_i = a + i \cdot \Delta x, \quad \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

نلاحظ أن $x_0 = a$ و $x_n = b$.

إنطلاقاً من هذا نقوم بتقريب المساحة A باستعمال المستطيلات التي قاعدتها هي المجالات $[x_i, x_{i+1}]$ وارتفاعها يساوي $f(x_i^*)$ حيث x_i^* نقطة كيفية من هذا المجال، أي $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$.



شكل 2.5: تقريب المساحة المحددة بمنحني

نلاحظ أن مساحة كل مستطيل تساوي

$$f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i^*)\Delta x$$

نكتب إذن:

$$A \simeq f(x_0^*)\Delta x + f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1}^*)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x$$

ولنحصل على تقريب أدق للمساحة A يمكننا أن نجزأ أكثر المجال $[a, b]$ وذلك باختيار قيم أكبر للعدد الطبيعي n .

النظرية التالية تعطي نهاية الطرف الأيمن من العبارة السابقة لما n يأخذ قيما تقترب من $+\infty$ باستعمال الدوال الأصلية للدالة f ، بذلك نحصل على القيمة المضبوطة للعدد A اعتماداً على الدوال الأصلية للدالة f .

مبرهنة 28.5 النظرية الأساسية في التحليل

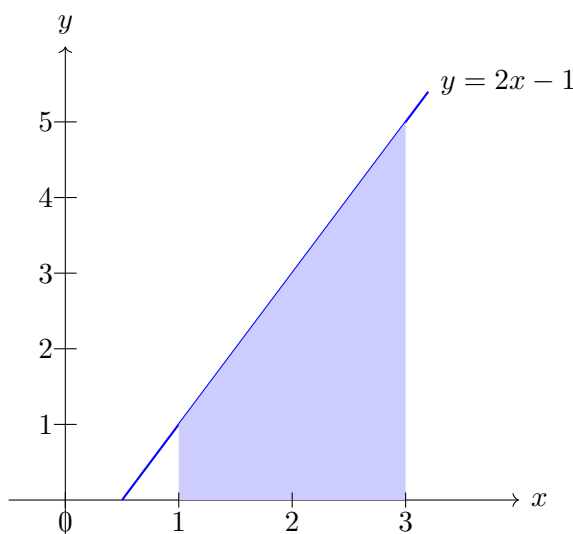
لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a, b]$ ، إذن

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

مثال 24.5

نريد حساب المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 2x - 1$ والمستقيم حامل محور الفواصل $y = 0$ على المجال $[1, 3]$. حسب النظرية الأساسية في التحليل لدينا:

$$A = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (2x - 1)dx = (x^2 - x)|_{x=1}^{x=3} = 6$$



شكل 3.5: المساحة أسفل منحنى الدالة $f(x) = 2x - 1$

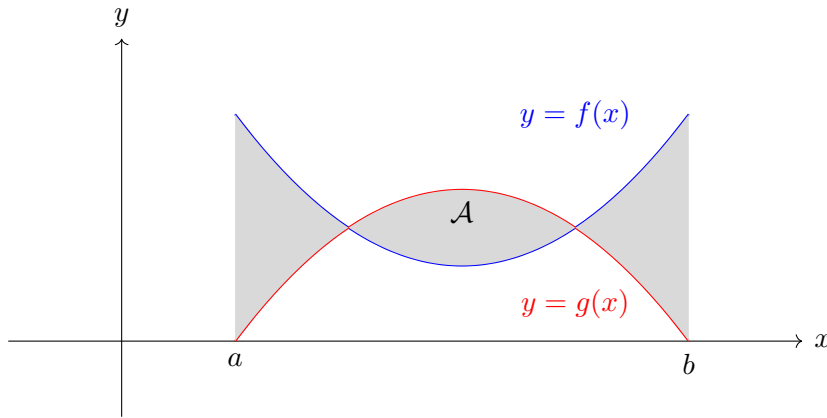
ملحوظة 29.5

إشترطنا على دالة التكامل f أن تكون موجبة لأن المساحة لا يمكن أن تأخذ قيما سالبة. يجب الإنتباه أن نتيجة حساب المساحة تأخذ بوحدة المساحات والتي تمثل في المعلم بمتوازي الأضلاع ذي الضلعين المتجاورين الممثلين بشعاعي الوحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

2.3.5 مساحة الحيز المحدد بمنحنيين

نعتبر دالتين f و g مستمرتين على المجال $[a, b]$.

النظرية التالية تبين كيفية حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنيي الدالتين f و g بين الفاصلتين $x = a$ و $x = b$.



شكل 4.5: المساحة المحددة بمنحنيين

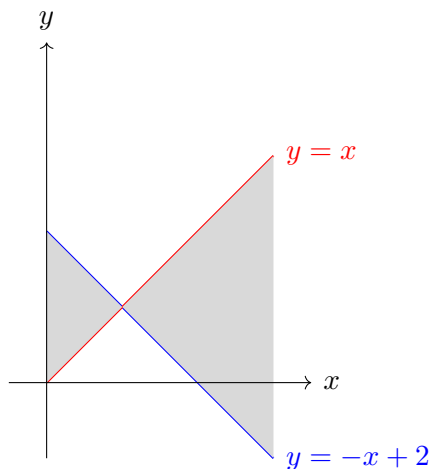
مبرهنة 30.5 المساحة المحددة بمنحنيين

تغطي مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنيي الدالتين المستمرتين f و g على المجال $[a, b]$ بالعلاقة

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

مثال 25.5

لتكن الدالتان $f(x) = x$ و $g(x) = -x + 2$ المعرفتين على المجال $[0, 3]$



لحساب مساحة الحيز المستوى المحدد بمنحنييهما نطبق النظرية السابقة 30.5 ونكتب:

$$A = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^3 |2x - 2| dx$$

بعد دراسة إشارة العبارة $2x - 2$ نكتب:

$$|2x - 2| = \begin{cases} -(2x - 2) & 0 \leq x \leq 1 \text{ من أجل} \\ +(2x - 2) & 1 \leq x \leq 3 \text{ من أجل} \end{cases}$$

ثم نستعمل علاقة شال لحساب التكامل

$$A = \int_0^1 |2x - 2| dx + \int_1^3 |2x - 2| dx = \int_0^1 -(2x - 2) dx + \int_1^3 (2x - 2) dx$$

تعلم أن $x^2 - 2x$ هي دالة أصلية للدالة $2x - 1$. إذن:

$$A = -(x^2 - 2x) \Big|_{x=0}^{x=1} + (x^2 - 2x) \Big|_{x=1}^{x=3} = -(-1 - 0) + (3 + 1) = 5$$

4.5 نماذج إقتصادية لاستعمال الدوال الأصلية والتكامل

1.4.5 الكلفة الإجمالية، الدخل الإجمالي والربح الإجمالي

نعتبر مؤسسة تقوم بإنتاج سلعة معينة. يرافق عملية الإنتاج تكاليف تزداد بازدياد كمية السلعة المنتجة. لذلك، إذا رمزنا للعلاقة التي تعطي قيمة التكاليف عند إنتاج كمية q من السلعة بـ $C_T(q)$ فعندها تكون C_T دالة متزايدة تماماً.

تسمى C_T دالة **الكلفة الإجمالية**.

الزيادة في الكلفة الإجمالية التي تحصل عند إضافة وحدة واحدة إلى الإنتاج تسمى **الكلفة الهامشية** ونرمز لها C_M .

نستنتج من مفهوم الكلفة الإجمالية والكلفة الهامشية العلاقة التالية

$$(10) \quad C_M(q) = C_T(q+1) - C_T(q)$$

عموما، إضافة وحدة واحدة من المنتج يكون ضئيلا بالمقارنة مع كمية الإنتاج الإعتيادية q ، لذلك يمكننا تقريب الفرق $C_T(q+1) - C_T(q)$ باستعمال مفهوم المشتقة، أي $C'_T(q)$ ، ونحصل على العلاقة بين الكلفة الهامشية والكلفة الإجمالية

$$(11) \quad C_M(q) = C'_T(q)$$

بعبارة أخرى نقول أن دالة الكلفة الإجمالية C_T هي دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية C_M . نكتب إذن:

$$(12) \quad C_T(q) = C_F + \int_0^q C_M(x)dx$$

حيث C_F تعبر عن قيمة التكاليف الثابتة للمؤسسة.

مثال 26.5

نفرض أن دالة الكلفة الهامشية تعبر كما يلي

$$C_M(q) = 2q + 3$$

وأن التكاليف الثابتة تقدر بـ $C_F = 7$ ، فإن الكلفة الإجمالية تكتب

$$C_T(q) = 7 + \int_0^q (2x + 3)dx$$

بما أن $x^2 + 3x - 1$ هي دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية $C_M(x)$ فإن

$$C_T(q) = 7 + (x^2 + 3x - 1)|_0^q = q^2 + 3q + 7$$

عندما يتم بيع أو تسويق كمية q من منتج المؤسسة فإن ذلك يعود إليها بدخل $R_T(q)$. الدالة R_T تسمى دالة **الدخل الإجمالي** وهي دالة متزايدة تماما، لأنه كلما باعت المؤسسة منتوجها أكثر كلما ازداد دخلها.

إن الزيادة التي تطرأ على دالة الدخل الإجمالي عند بيع وحدة إضافية إلى الكمية q من المنتج نرمز لها $R_M(q)$ وهي تعرف دالة جديدة R_M تسمى دالة **الدخل الهامشي**. حسب هذا التعريف نكتب

$$(13) \quad R_M(q) = R_T(q+1) - R_T(q)$$

وعندما تكون كمية الإنتاج الإعتيادية q كبيرة جدا بمقارنتها مع وحدة الإنتاج فإنه يمكن استعمال تقريب للفرق $R_T(q+1) - R_T(q)$ باستعمال الدالة المشتقة R'_T ، لذلك نستعمل عموما العلاقة

$$(14) \quad R_M = R'_T$$

بدلاً من المساواة (13) التي تعبر عن دالة الدخل الهامشي كمشتقة دالة الدخل الكلي. وبالمقابل نقول أن دالة الدخل الإجمالي هي دالة أصلية لدالة الدخل الهامشي. لذلك نكتب

$$(15) \quad R_T(q) = R_C + \int_0^q R_M(x) dx$$

حيث R_C يعبر عن الدخل الثابت.

مثال 27.5

نفرض أن دالة الدخل الهامشي لمؤسسة يكتب بالعلاقة

$$R_M(q) = 30 - 2q$$

وأنه لا دخل للمؤسسة إذا لم يتم بيع أي شيء.

نفهم من هذا أن $R_C = 0$ وعليه نكتب

$$R_T(q) = \int_0^q (30 - 2x) dx$$

بما أن $30x - x^2$ هي دالة أصلية لدالة الدخل الهامشي $R_M(x)$ فإن

$$R_T(q) = (30x - x^2)|_0^q = 30q - q^2$$

إن الذي يسعى إليه كل منتج أو مؤسسة هو تحقيق أكبر قدر من الربح في عمله. ويتم تقدير

الربح الإجمالي

لمؤسسة بواسطة الدالة $\pi(q)$ وذلك بحساب فارق الدخل الإجمالي والكلفة الإجمالية.

$$(16) \quad \pi(q) = R_T(q) - C_T(q)$$

معناه أن الربح الذي تحققه المؤسسة بعد بيعها كمية q من سلعتها يساوي مداخيلها من هذه العملية،

أي $R_T(q)$ ، طرح تكاليف وأعباء إنتاج وتسويق هذه الكمية، أي $C_T(q)$.

ومثلما سبق، فإن التغير الذي يطرأ في الربح الإجمالي جراء إضافة وحدة من المنتج وبيعها يسمى

هامش الربح. نرمز لدالة هامش الربح بـ MP . ومن تعريفها لدينا العلاقة

$$(17) \quad MP(q) = \pi(q+1) - \pi(q)$$

عندما تمثل وحدة الإنتاج تغيراً طفيفاً في كمية الإنتاج q فإن العبارة $\pi(q+1) - \pi(q)$ يمكن تقريبها

باستعمال مشتقة دالة الربح الإجمالي $\pi'(q)$ ، ومن هذا نحصل على العلاقة بين دالة الربح الإجمالي

ودالة الربح الهامشي

$$(18) \quad \pi' = MP$$

ومن العلاقة (16) نستنتج أن

$$MP = R'_T - C'_T$$

أي

$$(19) \quad \pi' = R_M - C_M$$

يعني أن دالة الربح الإجمالي هي دالة أصلية لفرق دالتي الدخل الهامشي والكلفة الهامشية.

$$(20) \quad \pi(q) = \int (R_M(q) - C_M(q)) dq$$

مثال 28.5

نفرض أن مؤسسة لديها ما يلي:

• دالة الكلفة الهامشية: $C_M(q) = 7 + 4q$

• دالة الدخل الهامشي: $R_M(q) = 26 - 2q$

إذن دالة الربح الإجمالي تكتب:

$$\pi(q) = \int [(26 - 2q) - (7 + 4q)] dq = \int (19 - 6q) dq = 19q - 3q^2 + c$$

إن ثابت التكامل c يمثل الفرق بين المداخل الثابتة والتكاليف الثابتة. فإذا اعتبرنا أن هذه المؤسسة لديها تكاليف ثابتة تقدر بـ 10 وحدات نقدية بينما ليس لها أي دخل ثابت فإن $c = -10$ ، ومنه

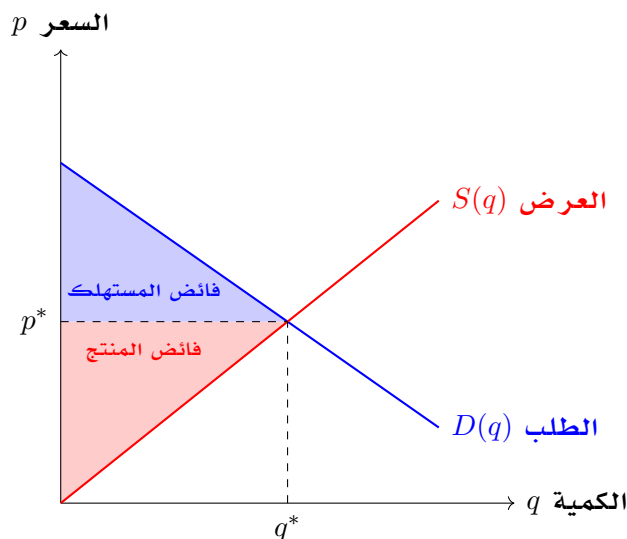
$$\pi(q) = -3q^2 + 19q - 10$$

2.4.5 فائض المستهلك وفائض المنتج

فائض المستهلك CS هو المقياس الإقتصادي الذي يعبر عن فائدة المستهلك. يتم حساب فائض المستهلك بمقارنة سعر الطلب $D(q)$ ، الذي يمثل أقصى ثمن يكون المستهلك من أجله مستعدا لشراء المنتج، مع سعر توازن السوق p^* ، الذي يمثل الثمن الذي يتفق عليه كلا من المنتج والمستهلك لتبادل الكميات المختلفة q للمنتج.

بالتوازي، فإن **فائض المنتج** PS هو المقياس الإقتصادي الذي يعبر عن فائدة المنتج. ويتم حساب فائض المنتج بمقارنة سعر العرض $S(q)$ ، الذي يمثل أدنى ثمن يكون المنتج من أجله مستعدا لوضع

المنتج في السوق، مع سعر توازن السوق p^* لتبادل الكميات المختلفة q للمنتج.



شكل 5.5: فائض المستهلك وفائض المنتج

يظهر فائض المستهلك حينما يكون سعر الطلب D أعلى من السعر الحالي للسوق، أي سعر التوازن p^* ، وفائض الفائدة أو منفعة المستهلك يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بدالة الطلب $p = D(q)$ والمستقيم الأفقي $p = p^*$ من أجل $0 \leq q \leq q^*$.
نحصل إذن على عبارة فائض المستهلك بتطبيق مفهوم التكامل:

$$(21) \quad CS = \int_0^{q^*} (D(q) - p^*) dq = \int_0^{q^*} D(q) dq - p^* q^*$$

كذلك نتكلم عن فائض المنتج لما يكون سعر التوازن p^* أعلى من سعر العرض S ، وفائض فائدة أو منفعة المنتج تمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بدالة العرض $p = S(q)$ والمستقيم الأفقي $p = p^*$ من أجل $0 \leq q \leq q^*$.
باستعمال التكامل نكتب عبارة فائض المنتج كما يلي:

$$(22) \quad PS = \int_0^{q^*} (p^* - S(q)) dq = p^* q^* - \int_0^{q^*} S(q) dq$$

مثال 29.5

تعطى دالة الطلب لسلعة معينة بالعبارة

$$D(q) = 40 - 3q$$

حيث $D(q)$ يمثل السعر الذي يكون المستهلك مستعداً أن يدفعه لشراء كمية q من سلعة السوق.

• إذا علمت أن سعر توازن السوق هو $p^* = 10$ ، فاحسب فائض المستهلك CS .

أولا علينا تحديد كمية التوازن q^* . وهي الكمية التي تحقق من أجلها دالة الطلب $D(q)$ سعر التوازن، أي لدينا عندها $D(q^*) = p^*$.

هذه المعادلة تكتب $40 - 3q^* = 10$ ، وبعد حلها نحصل على $q^* = 10$.

نتسعمل الآن عبارة فائض المستهلك ونكتب في هذه الحالة:

$$CS = \int_0^{10} (40 - 3q - 10) dq = \left(30q - \frac{3}{2}q^2 \right) \Big|_{q=0}^{q=10} = 150$$

تعطى دالة العرض بالعلاقة $S(q) = 2 + 0.8q$ ، حيث $S(q)$ يمثل السعر الأدنى الذي يوافق المنتج لأجله بادخال كمية q من منتوجة إلى السوق.

• أحسب فائض المنتج PS في هذه الحالة.

طبعاً، يكفي تطبيق قانون فائض المنتج، أي:

$$PS = \int_0^{10} (p^* - S(q)) dq = \int_0^{10} (10 - 2 - 0.8q) dq = (8q - 0.4q^2) \Big|_{q=0}^{q=10} = 40$$

الفائض الإجمالي هو مجموع فائض المستهلك وفائض المنتج، ويمثل بيانيا مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنيي العرض والطلب على مجال التبادل $[0, q^*]$. إذن:

$$(23) \quad TS = CS + PS = \int_0^{q^*} (D(q) - S(q)) dq$$

في المثال السابق يمكن أن نكتب مباشرة

$$TS = CS + PS = 150 + 40 = 190$$

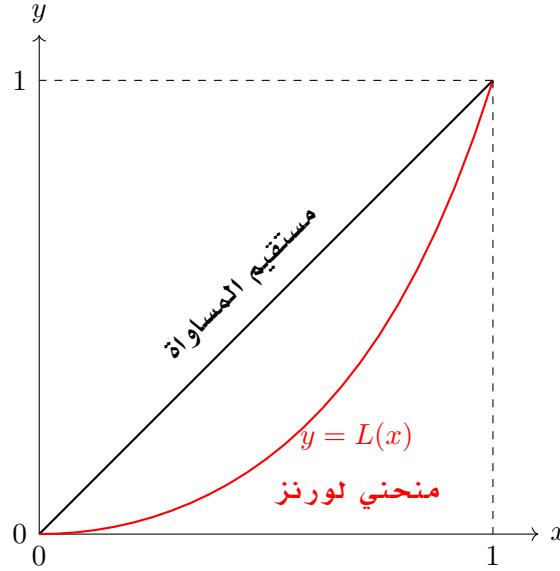
أو نحسبه كما يلي:

$$TS = \int_0^{10} (40 - 3q - 2 - 0.8) dq = (38q - 1.9q^2) \Big|_{q=0}^{q=10} = 190$$

يمثل الفائض الإجمالي حجم الفائدة التي يتشارك فيها المنتج والمستهلك.

3.4.5 منحني لورنز ومعامل جيني

يستعمل **منحني لورنز** لتمثيل توزيع الدخل أو فوارق توزيع الثروة في مجتمع معين.



شكل 6.5: منحني لورنز

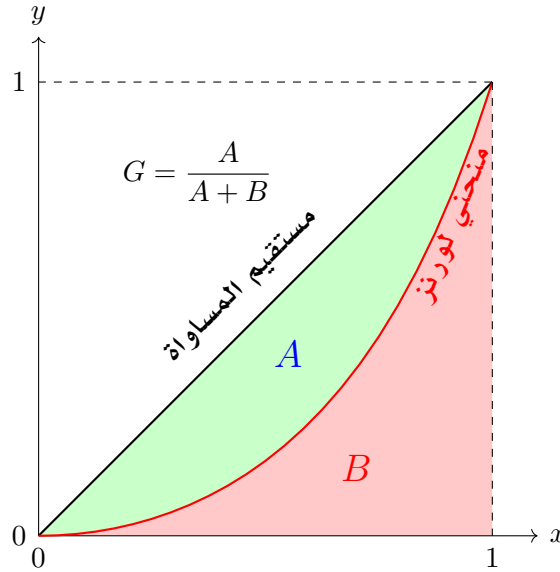
كل فاصلة $0 \leq x \leq 1$ من على محور الفواصل تمثل نسبة أفراد المجتمع التي تحصل على الدخل الأقل، أو تملك أدنى حصة من الثروة الكلية لكامل المجتمع.

كل ترتيبية $0 \leq y \leq 1$ من على محور الترتيب تمثل نسبة من الدخل أو الثروة الإجمالية للمجتمع.

كل نقطة $(x, L(x))$ من منحني لورنز تفيد بأن النسبة $L(x)$ من الدخل أو من ثروة المجتمع تذهب إلى النسبة x الأقل ثراءً من هذا المجتمع.

يعتبر مستقيم المساواة الحالة المثلى التي من أجلها يتساوى كل أفراد المجتمع في الدخل أو في تقاسم الثروة. وكلما كان منحني لورنز أقرب من مستقيم المساواة كلما قلت الفوارق الاجتماعية من ناحية الدخل أو الثروة.

معامل جيني هو المؤشر الذي يدل على مدى المساواة في تقاسم الدخل أو الثروة المتعلقة بمجتمع ما. يتم الحصول عليه بحساب نسبة مساحة الحيز المستوي المحدد بمستقيم المساواة ومنحني لورنز إلى مجموع هذه المساحة مع مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني لورنز والمستقيم حامل محور الفواصل.



شكل 7.5: معامل جيني

لكتابة عبارة معامل جيني نحسب أولاً المساحة A للحيز المستوي المحدد بمستقيم المساواة الذي معادلته $y = x$ ومنحني لورنز الذي معادلته $y = L(x)$ على المجال $[0, 1]$.
نلاحظ من الشكل 5.6 أن مستقيم المساواة يقع فوق منحني لورنز، إذن

$$A = \int_0^1 (x - L(x))dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 L(x)dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 L(x)dx$$

ثم إن منحني لورنز يقع فوق المستقيم حامل محاور الفواصل، إذن

$$B = \int_0^1 L(x)dx$$

ومنه فإن

$$A + B = \frac{1}{2} - \int_0^1 L(x)dx + \int_0^1 L(x)dx = \frac{1}{2}$$

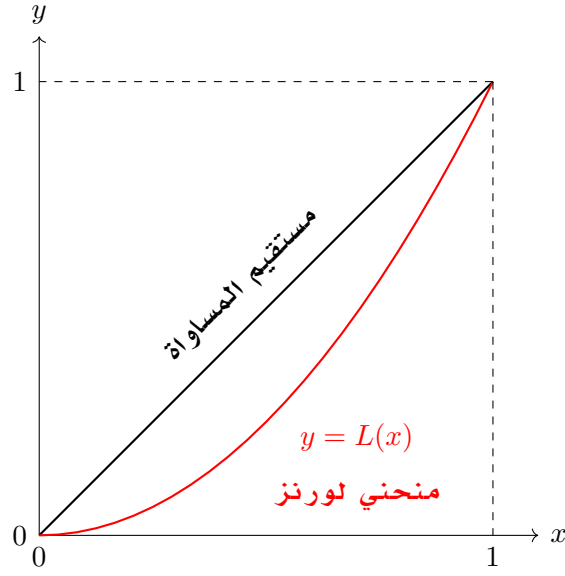
ومنه نستنتج عبارة معامل جيني

$$(24) \quad G = \frac{A}{A + B} = 1 - 2 \int_0^1 L(x)dx$$

مثال 30.5

الشكل التالي يمثل منحني لورنز لأحد المجتمعات والذي عبارة دالته

$$L(x) = x^2$$



شكل 8.5: منحني لورنز الدالة $L(x) = x^2$

1. حدد نسبة الثروة التي يملكها نصف المجتمع الأقل ثراء.

للإجابة على هذا السؤال يكفي حساب $L(0.5)$ فنجد:

$$L(0.5) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

وهذا يعني أن نصف المجتمع الأقل ثراء يتقاسم ربع الثروة.

2. حدد النسبة من المجتمع الأقل ثراء والتي تملك نصف الثروة. يجب البحث عن النسبة من

المجتمع الأقل ثراء، أي x ، بحيث $L(x) = 0.5$. نحل هذه المعادلة

$$L(x) = 0.5 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7$$

و هذا يعني أن 70% من هذا المجتمع يتشاركون في نصف ثروته.

3. أحسب معامل جيني.

$$G = 1 - 2 \int_0^1 L(x) dx = 1 - 2 \int_0^1 x^2 dx = 1 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

إذن $G \simeq 33.33\%$.

4.4.5 قيمة عمر العميل CLV

عمر العميل هو مفهوم تستعمله المؤسسات للتخمين المدة الزمنية التي يبقى فيها العميل وفيها لها

وتستمر المعاملة بينهما. إذن هي كمية تقدر بوحدة الزمن ويرمز لها L .

تستعمل المؤسسات مفهوم **قيمة عمر العميل** الذي يقدر قيمة الأرباح المحصلة جراء تعاملها مع عميلها طيلة المدة الزمنية التي يبقي فيها وفيها لها، أي على مدى المدة الزمنية L . نرمز لقيمة عمر العميل بـ CLV .

لما تكون طبيعة التبادل بين المؤسسة والعميل مستمرة عبر الزمن، تعطى عبارة قيمة عمر العميل بالعبارة:

$$(25) \quad CLV = \int_0^L \frac{R(t) - C(t)}{(1+d)^t} dt$$

حيث:

• $R(t)$ قيمة المداخل التي تحصل عليها المؤسسة مقابل خدماتها للعميل عند الزمن t .

• $C(t)$ قيمة التكاليف التي تتحملها المؤسسة جراء خدماتها للعميل عند الزمن t .

• d نسبة الخصم الناتجة عن القيمة الزمنية لمال.

مثال 31.5

قدرت مؤسسة معينة أن معدل زمن بقاء عملائها أوفياء لها بسبع سنوات. إذا كانت المؤسسة تحصل على دخل ثابت من كل عميل يقدر بـ 30 وحدة نقدية سنوياً، بينما يكلفها خدمة كل عميل 10 وحدات نقدية كل سنة، وقدرت نسبة الخصم لديها جراء القيمة الزمنية للأموال بـ 5%، فإن قيمة عمر العميل تحسب بالعبارة

$$CLV = \int_0^7 \frac{30 - 10}{(1 + 0.05)^t} dt = \int_0^7 20 \times e^{-x \ln 1.05}$$

بما أن $-20 \frac{e^{-t \ln(1.05)}}{\ln(1.05)}$ هي دالة أصلية للدالة $20 \times e^{-t \ln(1.05)}$ و

$$-20 \frac{e^{-t \ln(1.05)}}{\ln(1.05)} = -\frac{20}{\ln(1.05)} \times (1.05)^{-t}$$

$$CLV = -\frac{20}{\ln(1.05)} \times (1.05)^{-t} \Big|_0^7$$

إذن

$$CLV = \frac{20}{\ln(1.05)} (1 - (1.05)^{-7}) \simeq 118.6$$

هذا يعني أن المؤسسة تتوقع الحصول على ربح يقدر بـ 118.6 من كل عميل طيلة تعامله معها.

5.5 تمارين وتطبيقات

1.5.5 الدوال الأصلية وحساب التكامل المحدد

1.5. التكامل بالتجزئة

باستعمال التكامل بالتجزئة جد دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = xe^x & 2) f(x) = \ln x & 3) f(x) = (\ln x)^2 \\ 4) f(x) = \frac{\ln x}{x} & 5) f(x) = x^2 e^{-x} & 6) f(x) = x^2 \ln(x) \end{array}$$

2.5. التكامل بتبديل المتغير

باستعمال تبديل المتغير المقترح أحسب التكاملات التالية:

$$\begin{array}{ll} 1) \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}, & t = \sqrt{x+1} \\ 2) \int_e^5 \frac{dx}{x \ln x}, & x = e^t \\ 3) \int_0^3 x(3x^2 - 1)^5 dx, & t = 3x^2 - 1 \\ 4) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx, & t = \sqrt{x} \\ 5) \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & tx = 1 \\ 6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x + 1}, & x = -\ln t \end{array}$$

3.5. الكسور البسيطة

إليك الدوال التالية:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \frac{5x+3}{(x-2)(x+1)} & 2) g(x) = \frac{2x+7}{(x+3)(x-4)} & 3) h(x) = \frac{x^2+2x+5}{(x-1)(x+2)} \\ 4) i(x) = \frac{4x^2+7x+2}{(x-1)^2(x+3)} & 5) j(x) = \frac{3x^2+5x+2}{(x+1)(x^2-4)} & 6) k(x) = \frac{x^3+3x^2-3x+3}{1-x^4} \end{array}$$

1. فكك كل دالة منها إلى كسور بسيطة.

2. إستنتج لكل دالة دالة أصلية.

4.5. التكاملات وحساب المساحات

1. أحسب مساحة الحيز المنحني المحدد بمنحني الدالة $f(x) = x^2 + 2x + 2$ والمستقيم حامل

محور الفواصل والمستقيمين ذوا المعادلتين $x = 0$ و $x = 2$.

2. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة $y = e^x$ والمستقيمت التي معادلاتها $x = 0$ و $x = 3$ و $y = 1$.

3. مثل الدالتين $f(x) = x^3 - 3x + 1$ و $g(x) = x + 1$ في المستوي ثم احسب مساحة الحيز المحدد بمنحنييهما من أجل $-1 \leq x \leq 1$.

2.5.5 نماذج وتطبيقات إقتصادية

5.5. الكلفة الإجمالية

تعطى دالة الكلفة الهامشية لمؤسسة بالعبارة $C_M(q) = 6q + 5$ ، حيث q يمثل كمية السلعة المنتجة. إذا علمت أن التكاليف الثابتة للمؤسسة تقدر بـ 25، أكتب عبارة دالة الكلفة الإجمالية $C_T(q)$.

6.5. الدخل الإجمالي

تعطى دالة الدخل الهامشي لمؤسسة بالعبارة $R_M(q) = 39 - 3q$ ، حيث q يمثل كمية السلعة المنتجة. إذا علمت أن المؤسسة لا تمتلك أي دخل دون إنتاج، أكتب عبارة دالة الدخل الإجمالي $R_T(q)$.

7.5. الربح الإجمالي

تعطى دالتى الكلفة الهامشية والدخل الهامشي لمؤسسة بالعبارة

$$C_M(q) = 13 + 1.5q \quad R_M(q) = 37 - 0.5q$$

حيث q يمثل كمية السلعة المنتجة المباعة. إذا علمت أن الكلفة الثابتة للمؤسسة تقدر بـ 100 ولا تحصل على أي دخل من دون إنتاج.

1. أكتب عبارة دالة الربح الإجمالي $\pi(q)$.

2. حدد الكمية q^* التي يتحقق من أجلها أعلى قدر من الربح.

8.5. نموذج العرض والطلب

تعطى دالتا العرض والطلب، S و D على التوالي، بالعبارتين:

$$S(q) = 5 + x, \quad D(q) = 50 - 2x$$

1. مثل بيانيا دالتى العرض والطلب في معلم متعامد.

2. حدد سعر وكمية توازن السوق.

3. أحسب كلا من فائض المستهلك CS وفائض المنتج PS .

4. أحسب بطريقتين مختلفتين الفائض الإجمالي TS .

9.5. نموذج العرض والطلب

تعطى دالتا العرض والطلب، S و D على التوالي، بالعبارتين:

$$S(q) = 5 + 0.5x, \quad D(q) = 100 \times 10^{-0.1x}$$

1. مثل بيانيا دالتي العرض والطلب في معلم متعامد.
2. تحقق أن السوق يحقق التوازن من أجل السعر $p^* = 10$ ، واستنتج كمية توازن السوق q^* .
3. أحسب كلا من فائض المستهلك CS وفائض المنتج PS .
4. أحسب بطريقتين مختلفتين الفائض الإجمالي TS .

10.5. التواصل الإجتماعي

نريد دراسة عدد المتابعين على مواقع التواصل الإجتماعي لأحد المشاهير أو الأنشطة عبر الإنترنت. نرمز لعدد المتابعين بـ $F(t)$ حيث $0 \leq t \leq 20$ يمثل الزمن الذي انقضى منذ انطلاق النشاط أو ظهور الشخصية الشهيرة على مواقع التواصل الإجتماعي. بعد الدراسة تبين أن نمو عدد المتابعين يتبع نموذج دالة لوجيستية، ويكتب في هذه الحالة:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{500}{1 + e^{-\frac{t-10}{2}}}$$

1. بين، من أجل كل t من المجال $[0, 20]$ ، أن:
- $$F(t) = 500 \times \frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^5}$$
2. استنتج عبارة الدوال الأصلية للدالة F على المجال $[0, 20]$.
 3. استنتج عدد المتابعين على الفترة $[0, 20]$.

11.5. معامل جيني

يملك أحد المجتمعات منحنى لورنز ذو الدالة التالية

$$L(x) = x - \sqrt{x}$$

حيث x يمثل النسبة من أفراد المجتمع الأقل ثراء، و $L(x)$ يمثل النسبة من الثروة الإجمالية للمجتمع التي تملكها هذه النسبة من الأفراد.

1. بين أن L متزايدة تماماً ومحدبة على المجال $]0, 1[$.
2. مثل منحنى الدالة L في معلم متعامد ومتجانس.
3. حدد نسبة الثروة التي يملكها نصف المجتمع الأقل ثراء ثم مثلها في المعلم السابق.

4. حدد نسبة المجتمع الأقل ثراء والتي تملك نصف الثروة ثم مثلها في المعلم السابق.
5. إستنتج نسبة الفئة الأكثر ثراء في المجتمع والتي تملك نصف ثروته.
6. أحسب معامل جيني G لهذا المجتمع.

12.5. معامل جيني

يملك أحد المجتمعات منحنى لورنز ذو الدالة التالية

$$L(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

حيث x يمثل النسبة من أفراد المجتمع الأقل ثراء، و $L(x)$ يمثل النسبة من الثروة الإجمالية للمجتمع التي تملكها هذه النسبة من الأفراد.

1. بين أن L متزايدة تماما ومحدبة على المجال $[0, 1]$.
2. مثل منحنى الدالة L في معلم متعامد ومتجانس.
3. حدد نسبة الثروة التي يملكها نصف المجتمع الأقل ثراء ثم مثلها في المعلم السابق.
4. حدد نسبة المجتمع الأقل ثراء والتي تملك نصف الثروة ثم مثلها في المعلم السابق.
5. إستنتج نسبة الفئة الأكثر ثراء في المجتمع والتي تملك نصف ثروته.
6. فكك عبارة الدالة L إلى كسور بسيطة ثم استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة L على المجال $[0, 1]$.
7. إستنتج معامل جيني لهذا المجتمع.

13.5. معامل جيني

يملك أحد المجتمعات منحنى لورنز ذو الدالة التالية

$$L(x) = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

حيث x يمثل النسبة من أفراد المجتمع الأقل ثراء، و $L(x)$ يمثل النسبة من الثروة الإجمالية للمجتمع التي تملكها هذه النسبة من الأفراد.

1. بين أن L متزايدة تماما ومحدبة على المجال $[0, 1]$.
2. مثل منحنى الدالة L في معلم متعامد ومتجانس.
3. حدد نسبة الثروة التي يملكها نصف المجتمع الأقل ثراء ثم مثلها في المعلم السابق.

4. حدد نسبة المجتمع الأقل ثراء والتي تملك نصف الثروة ثم مثلها في المعلم السابق.
5. إستنتج نسبة الفئة الأكثر ثراء في المجتمع والتي تملك نصف ثروته.
6. فكك عبارة الدالة L إلى كسور بسيطة ثم استنتج الدالة الأصلية للدالة L على المجال $[0, 1]$ والتي تنعدم عند الفاصلة $x = 0$.
7. إستنتج معامل جيني لهذا المجتمع.

14.5.

قدرت إحدى المؤسسات أن معدل فترة تعاملها من زبائنها يساوي ثلاث سنوات. تقدم هذه المؤسسة خدمات تكلفتها تساوي 15 وحدة نقدية لكل زبون لكل شهر، ثم إنها تحصل على مبلغ شهري قدره 37 وحدة نقدية من كل زبون. تم تقدير نسبة الخصم بـ 7%.

- أحسب قيمة عمر كل زبون.

المراجع

- [1] أنمار أمين البرواري، عربية عبدالرحمن داود (2010) **الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والإقتصادية**، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع-الأردن.
- [2] بوريس ديميدوفيتش (1990) **مسائل وتمارين في التحليل الرياضي**، دار مير موسكو.
- [3] جورج شيلوف (1978) **التحليل الرياضي، التوابع ذات متغير واحد**، ديوان المطبوعات الجامعية.
- [4] جي هولتن ولسون (1987) **الإقتصاد الجزئي - المفاهيم والتطبيقات**، دار المريخ للنشر.
- [5] هناء خيرالدين (1981) **الإقتصاد الرياضي**، مكتبة نهضة الشرق-جامعة القاهرة.
- [6] وليم هـ. دورفي (1971) **حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية**، دار ماكجروهيل للنشر.
- [7] حسن ياسين طعمة (2012) **الإقتصاد الرياضي**، دار المسيرة للطباعة والنشر.
- [8] محمد البنا (2008) **الإقتصاد التحليلي**، الدار الجامعية-الإسكندرية.
- [9] محمد مناجد الدليمي (2004) **الرياضيات لطلبة الإقتصاد والعلوم الإدارية**، دار وائل للطباعة والنشر والتوزيع.
- [10] عبدالرزاق حسين علي بني هاني (2013) **مبادئ الإقتصاد الجزئي**، دار وائل للنشر.
- [11] عزام صبري (2006) **الرياضيات في الإدارة والإقتصاد**، جدارا للكتاب العالمي للنشر والتوزيع-الأردن، عالم الكتب الحديث للنشر والتوزيع-الأردن.
- [12] عيد أحمد أبوبكر (2009) **رياضيات التمويل والاستثمار**، دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان.
- [13] عمر عبدالجواد (1999) **الرياضيات المالية - فائدة مركبة وفائدة بسيطة**، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن.
- [14] فتحي خليل حمدان (2006) **الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية**، دار وائل للنشر والتوزيع.

- [15] قادة علاب (2010) *عناصر من التحليل الرياضي*، ديوان المطبوعات الجامعية.
- [16] رشيد بن الذيب، نادية شطاب عباس (2005) *إقتصاد جزئي - نظرية وتمارين*، ديوان المطبوعات الجامعية.
- [17] B. Demidovitch (1977) *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématiques*, éditions Mir.
- [18] Carl P. Simon & Lawrence Blume (2014) *Mathématiques pour économistes*, de boeck.
- [19] Frank Aures Jr. (1992) *Théorie et application du calcul différentiel et integral*, Schaum.
- [20] Jean-Pierre Posière (2005) *Mathématiques appliquées à la gestion*, Gualino éditeur.
- [21] Jean-Pierre Ramis & André Warusfel (2006) *Mathématiques Tout-en-un pour la licence, Niveau L1*, DUNOD.
- [22] Laurence D. Hoffmann & Gerald L. Bradley (2010) *Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences*, Mc Graw Hill, Brief edition, tenth edition.
- [23] N. Piskounov (1988) *Calcul différentiel et intégral*, Office des Publications Universitaires, 3ème édition.
- [24] Naila Hayek & Jean-Pierre Leca (2019) *Mathématiques pour l'économie*, DUNOD, 6ème édition.
- [25] Robert Pindyck & Daniel Rubinfeld (2005) *Microeconomics*, PEARSON Education, 6th edition.