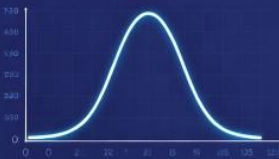
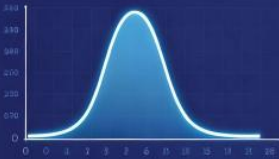


Université Mohamed Ben Ahmed - Oran 2
Faculté des sciences économiques
et commerciales et des sciences de gestion
Département sciences économiques

STATISTIQUES PROBABILISTES

Dr. SABEUR CHOUIREF MOKHTARIA

Ouvrage pédagogique



*Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université D'ORAN 2- Mohamed Ben Ahmed
Faculté Des Sciences Economiques Commercial Et Des Sciences De
Gestions
Département Sciences Economiques*



Ouvrage pédagogique

STATISTIQUES PROBABILISTES

Réaliser par :

Dr. SABEUR CHOUIREF MOKHTARIA

Maître de conférences- A-

Département des sciences économiques

2^{eme} Année Licence

***Année Universitaire
2024/2025***



L'éditeur Jouda édition

Algérie- (Batna)

Première édition 1447 AH - 2025

Dépôt légal: 11/2025

ISBN: 978-9969-00-930-9

Titre de l'ouvrage: STATISTIQUES PROBABILISTES

Nom de l'auteur (a): SABEUR CHOUIREF MOKHTARIA

Conception de la couverture: Zakaria Regab

Téléphone: 00213671827876

Courriel: editionjouda@gmail.com

Tous les droits d'auteur papier, électronique, visuel et sonore
Réservé à l'auteur et ce livre n'est pas autorisé à être diffusé par
découpage ou copie ou modification sauf avec son autorisation.
L'auteur sera responsable de toute responsabilité morale, matérielle ou
légale découlant de toutes les réclamations liées au matériel, au
contenu ou aux graphiques du livre..

Avant-Propos

Ce livre est né d'un besoin simple : disposer d'un support pédagogique solide, clair et rigoureux pour aborder les fondements des statistiques probabilistes. Dans l'enseignement comme dans la pratique, la probabilité reste un outil essentiel pour comprendre les phénomènes aléatoires, analyser les données et prendre des décisions fondées. Pourtant, beaucoup d'étudiants rencontrent des difficultés face à une discipline qui exige à la fois logique, méthode et précision.

Cet ouvrage propose une progression structurée, allant des bases combinatoires jusqu'aux principales lois de probabilité, en passant par les espaces probabilisables, les variables aléatoires, leurs distributions, et les outils nécessaires au raisonnement statistique. Chaque notion est présentée de manière concise, accompagnée d'exemples et d'applications qui permettent d'en saisir l'utilité réelle.

L'objectif est simple : offrir un guide accessible mais rigoureux, permettant à l'étudiant ; débutant ou non ; de comprendre, manipuler et utiliser les concepts probabilistes avec assurance. Que ce soit pour étudier, enseigner ou pratiquer, cet ouvrage a été conçu pour être un outil fiable, structuré et immédiatement opérationnel.

Dr. SABEUR CHOUIREF MOKHTARIA
Maitre de conférences –A–
Université Mohamed Ben Ahmed – Oran 2

SOMMAIRE

Partie 1 : Statistiques Mathématiques

Analyse Combinatoire

Espaces Probabilistes

Théorèmes De Passage A Limite

Probabilité Conditionnelle

Formule De Bayes

Variables Aléatoires Discrète

Variable Aléatoire Réelle Continue (A Densité)

Lois Usuelles Continues

Principales Distributions De Probabilités

Distribution Binomiale : Distribution Discrète Finie

Distribution Géométrique

Distribution De Poisson

Distribution Exponentielle

Distribution Normale

Distributions Dérivant Du Modèle Gaussien

La Distribution Du KHI DEUX De Pearson

La Distribution De Fischer-Snedecor

La Distribution De Student

Partie 2 : Statistiques Inférentielles

Concepts Et Définition

Étapes Pour Sélectionner Un Echantillon

Les Divers Types D'échantillons

Hypothèse Statistique

Seuil De Signification D'un Test D'hypothèse

Test Sur Une Moyenne

Test Sur Une Variance

Test Sur Une Proportion

Exercices

Solutions

Bibliographie

Lexique

Résumé

Partie 1 : Statistiques Mathématiques

Introduction :

La théorie des probabilités est une science mathématique étudiant les lois régissant les phénomènes aléatoires. Un phénomène est aléatoire si, reproduit maintes fois, il se déroule chaque fois un peu différemment, de sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois à l'autre d'une manière aléatoire, imprévisible."

L'usage même du mot expérience sous-entend que le phénomène aléatoire est observé par le biais d'un critère bien défini, et que le résultat de cette observation peut être décrit sans ambiguïté. L'expérience peut aussi être répétée, et on suppose que chacun des résultats possibles est observé avec une certaine fréquence dont la valeur se stabilise si on répète l'expérience maintes et "maintes fois". C'est cette "loi" que présuppose l'existence d'un modèle probabiliste.

ANALYSE COMBINATOIRE

Quand on cherche la probabilité d'événement complexe, l'énumération des cas élémentaires est souvent difficile, fastidieuse, ou l'un et l'autre. Pour faciliter la tâche ; on utilisera les principes de base de l'analyse combinatoire.

1-Arrangement de n éléments p à p : Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments parmi n .

Les trois lettres a,b,c, prises deux à deux conduisent aux arrangements : ab,ac,ba,bc,ca,cb.

Il ya n manières de choisir le premier élément. Ensuite ($n-1$) manières de choisir le deuxième élément. Ainsi de suite jusqu'au n ème élément où il y a ($n-p+1$).

2-Permutation de n éléments: une permutation est une suite ordonnée de n éléments parmi n. une permutation de trois lettres a,b,c, sont : abc,acb,bac,bca,cab,cba.

Il y a n manières de choisir le premier élément, (n-1) manières de choisir le deuxième élément .ainsi de suite jusqu'au dernier élément le Nième où il y a une seule manière de le choisir.

$$P_n = n (n-1) (n-2) \dots \dots \dots 3.2.1$$

$$P_n = n !$$

On pose par convention ,0 !

A_p^n : S'écrit

$$A_p^n = (n)(n - 1)(n - 2) \dots \dots \dots; A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3-Combinaison de n élément p à p : une combinaison est une suite non ordonnée de p éléments parmi les n élément.

Les trois lettres a,b,c, prises deux à deux donnent les combinaisons suivantes : ab,ac,bc.

Si on permute entre eux les p élément d'une combinaison quelconque, on aurait p! Arrangements différents on a :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{(n)(n - 1)(n - 2) \dots \dots (n - p + 1)}{p!}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Propriétés :

$$C_n^1 = 1$$

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

ESPACES PROBABILISTES

Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle un *événement élémentaire*. L'ensemble des résultats possibles s'appelle

ensemble *fondamental* (ou univers) et est noté traditionnellement Ω . Chaque élément ω de Ω représente donc un événement élémentaire, et toute partie $A \subset \Omega$ (ou $A \in \mathcal{P}(\Omega)$) sera un événement. Parfois on dit que Ω est l'ensemble des *éventualités possibles* et les événements élémentaires sont alors les singletons, c'est-à-dire les ensembles réduits à un seul élément $\{\omega\}$, qui sont effectivement en toute rigueur des événements, puisqu'appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$, ce qui n'est pas le cas du point ω .

1-Évènements :

Etant donnée une expérience aléatoire, on note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. Un singleton de Ω est appelé *évènement élémentaire*. Un sous-ensemble A de Ω est appelé un *évènement*. Un évènement A est donc un ensemble constitué de résultats possibles de l'expérience. Si le résultat d'une expérience est dans A , on dit que A est réalisé.

Exemple :

On détermine le sexe d'un nouveau-né. On posera : $\Omega = \{g, f\}$

Dans le cadre de la théorie des probabilités, un évènement est généralement défini comme l'ensemble des résultats ayant une propriété donnée. La plupart du temps, l'ensemble A est noté comme la propriété qui le définit. Donnons quelques exemples de telles assimilations :

Langage probabiliste	Notations ensemblistes
évènement certain	Ω
évènement impossible	$\emptyset$
A et B sont identiques	$A=B$
A implique B	$A \subset B$
évènement (A ou B)	$A \cup B$ (ou $A+B$ si $A \cap B = \emptyset$)
évènement (A et B)	$A \cap B$

(non A , $\bar{A}$, A^c), évènement contraire de A $\bar{A} = \Omega - A$

les évènements A et B sont incompatibles $A \cap B = \emptyset$

2-Espace probabilisable :

Soit une expérience aléatoire. On peut identifier un évènement aléatoire A avec la partie de Ω dont les éléments réalisent A . l'ensemble de tous les évènements est l'ensemble de tous les sous ensembles de Ω : $P(\Omega)$

Une classe A de $P(\Omega)$ est une tribu (ou σ - algèbre) si :

- $\Omega \in A$
- Si $A \in A$, alors $\bar{A} \in A$, ($\bar{A} = \Omega - A$)
- Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'évènement de A , alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in A$
- Le couple (Ω, A) s'appelle espace probabilisable.

3-Probabilité :

On appelle probabilité P sur (Ω, A) une application $P : A \rightarrow [0,1]$ telle que :

$$P(\Omega) = 1$$

Pour toute suite $(A_i)_{i \geq 1}$ d'évènements deux à deux incompatibles, on a :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

Le triplet (Ω, A, P) s'appelle un *espace probabilisé*.

Proposition:

- $P(\emptyset) = 0$
- Pour tout $\bar{A} \in A$, $p(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Pour tout A et $B \in A$ tels que $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
- Pour tout A et $B \in A$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Définition :

Soit (Ω, P) un espace de probabilité correspondant à une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est fini : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ Supposons que chaque résultat "a autant de chances d'être réalisé qu'un autre", soit, en termes probabilistes, que P est telle que :

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$$

Comme la somme de ces n nombres est 1, leur valeur commune est égale à $1/n$. Soit maintenant un évènement A . Sa probabilité est :

$$P(A) = \sum_{k/\omega_k \in A} P(\{\omega_k\}) = \text{card}(A) \cdot \frac{1}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Cette loi de probabilité est souvent appelée *loi uniforme* sur Ω . Calculer des probabilités par une méthode directe dans ce cas revient donc à dénombrer des ensembles.

Exemple01 :

Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/3$ et $P(A \cap B) = 1/8$.

Calculer les probabilités de : $E =$ « au moins l'un de ces événements se produit » et $F =$ « un seul de ces événements se produit ».

Corrigé :

Les événements considérés sont :

$E = A \cup B$ et $F = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ dont les probabilités se calculent par :

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 19/24$$

$$P(F) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(E) - P(A \cap B) = 2/3$$

4-Théorèmes de passage à limite :

Une suite d'évènement $(A_n)_{n \geq 1}$ est dite décroissante si :

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$$

4-1-Théorèmes :

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante d'évènement telle que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(B)$$

4-2-Théorèmes :

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante d'événement telle que :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$$

5-Probabilité conditionnelle:

Soit deux événements A et B où $P(B) \neq 0$, alors on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B que l'on note $P(A/B)$, le rapport :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- On dit que 2 événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

La Probabilité conditionnelle de A sachant B est la probabilité que l'événement A se réalise alors que l'événement B s'est déjà réalisé.

Si A et B sont disjoints(Désunir) alors $P(A/B)=0$

Si A et B sont indépendants alors $P(A/B)=P(A)$

Propriété:

Soit deux événements A et B où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

$$P(A \cap B) = P(A/B) * P(B) = P(B/A) * P(A)$$

Exemple02:

Soit l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de $P(\Omega)$

Soit P_1 et P_2 les probabilités définies sur $(\Omega ; P(\Omega))$:

i	1	2	3	4	5	6
$P_1(\{i\})$	1/6	1/9	1/6	1/9	1/3	1/9
$P_2(\{i\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$A = \{1,3\}$; $B = \{3,5\}$ sont –ils indépendants pour P_2 ?

$$P_2(A) = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

$$P_2(B) = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

$$\text{Et } P_2(A \cap B) = P_2(\{3\}) = 1/6$$

$$\text{Or : } P_2(A) * P_2(B) + 1/9 \neq P_2(A \cap B)$$

Formule des probabilités totales:

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements non impossibles. Pour tout B, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) * P(B/A_i)$$

6-Formule de Bayes (Formule de la probabilité des causes) :

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements non impossibles et B non impossible. Pour tout j tel que $1 \leq j \leq n$ on a:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) * P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) * P(B/A_i)}$$

Exemple03 :

On considère trois urnes, la première contient 3 boules blanches et 3 noires, la seconde 4 blanches et 2 noires et la troisième 6 blanches. On choisit l'une des trois urnes au hasard et on tire simultanément 2 boules de cette urne. Sachant que 2 boules extraites sont blanches. Calculer la probabilité qu'elles proviennent de l'urne 2.

Corrigé :

Soient les événements U_i "Le tirage se fait dans l'urne i" $i = 1, 2$ et B : "Les 2 boules tirées sont blanches". On a :

$$P(U_2/B) = \frac{P(U_2) * P(B/U_2)}{\sum_{i=1}^n P(U_i) * P(B/U_i)} \text{ Comme } P(U_i) = 1/3 \text{ } (\forall i = 1, 2, 3)$$

$$P(B/U_1) = \frac{1}{5}, P(B/U_2) = \frac{2}{5} \text{ et } P(B/U_3) = 1, \text{ on trouve :}$$

$$P(B/U_2) = 0.25$$

VARIABLES ALEATOIRES

Une variable aléatoire, notée V.A. n'est autre qu'une grandeur numérique attachée au résultat d'une expérience

aléatoire. Chacune de ses valeurs est associée à une probabilité d'apparition. Par exemple : La somme des numéros affichés par le lancé de 2 dés ; Le nombre d'appels arrivés à 1 standard téléphonique pendant 1 minute ; La durée de vie d'1 composante électronique. **1-1-Définition :**

On appelle variable aléatoire réelle, notée VAR, une application X définie sur l'univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui associe à chaque résultat de l'épreuve aléatoire, un nombre réel :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} :$$

$$\omega \rightarrow X(\omega) = x$$

Remarque :

- Si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, X est dite V.A. discrète (VAD)
- X est dite V.A. continue (VAC) si $X(\Omega)$ est une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Désormais, on note $X=x$ à la place de $X(\omega)=x$

1-2-Fonction de Répartition :

Définition :

On définit la Fonction de Répartition F d'une variable aléatoire X comme étant la fonction :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$$

$$x \rightarrow F(x) = (P \leq x)$$

Remarque :

F nous permet de définir la loi de probabilité de X

Propriétés de la Fonction de Répartition :

- $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F(x) \leq 1$
- F est croissante car si $x < y \Rightarrow (X \leq x) \subset (X \leq y)$ donc :

$$F(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F(y)$$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

➤ $\forall a \text{ et } b \in R, \text{ tel que } a < b : P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$

2-Variable aléatoire réelle discrète :

2-1-Définition :

On appelle V.A. discrète définie sur (Ω, A) une application $X : \Omega \rightarrow R$ telle que $X(\Omega)$ est dénombrable, i.e. en correspondance bijective avec N , et telle que pour tout x réel :

$X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} \in A$ ce qui exprime tout simplement que $X^{-1}(x)$ est un événement.

2-2-Loi de probabilité :

Définition 1:

La probabilité notée P_X , définie sur $\Omega = X(\Omega)$ et définie par :

$$P_X(X = x) = P(X^{-1}(x)) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$$

s'appelle la *probabilité image* de P par X . L'ensemble Ω' étant dénombrable, il existe une bijection permettant de représenter ses éléments par l'ensemble des $x_i, i \in N$. La loi de probabilité est alors définie par les probabilités individuelles : $p_i = P_X(X = x_i) = P(X^{-1}(x_i)), i \in N$

On appelle alors *distribution* ou *loi de probabilité* de X l'ensemble des couples $(x_i, p_i)_{i \in N}$.

Définition 2:

On appelle Loi de Probabilité d'un variable aléatoire discrète, la donnée, pour chaque valeur x_i prise par X , de la Probabilité de l'événement $(X = x_i)$, notée $p_i : P(X = x_i) = p_i$.

Remarque :

- Si $X(\Omega)$ est fini $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
- Si $X(\Omega)$ est dénombrable infini $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$

Exemple04:

On lance deux pièces de monnaie. Soit l'univers $\Omega = \{(p,p) ; (p,f) ; (f,p) ; (f,f)\}$ muni de $P(\Omega)$.

Soit X la VA qui vaut 0 si on obtient (p,p) , 1 si on obtient (p,f) ou (f,p) et 2 si on obtient (f,f) .

On a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Soit P la probabilité définie sur $(\Omega ; P(\Omega))$ par :

ω	(p,p)	(p,f)	(f,p)	(f,f)
$P(\{\omega\})$	1/4	1/4	1/4	1/4

Puisque, en supposant que les 2 pièces sont équilibrées, les événements élémentaires sont équiprobables.

x_i	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

$$\text{En effet } \begin{cases} p_2 = P(\{X=1\}) = P(\{\omega / X(\omega)=1\}) = P(\{(f,p); (p,f)\}) \\ \quad = P(\{(f,p)\}) + P(\{(p,f)\}) = 1/4 + 1/4 = 1/2 \end{cases}$$

2-3-Espérance mathématique :

On appelle Espérance mathématique d'un variable aléatoire discrète, notée $E(X)$, la quantité :

Si $X(\Omega)$ est fini $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Si $X(\Omega)$ est dénombrable infini $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i$

Remarque :

- Cette notion correspond à la notion de moyenne arithmétique en Statistiques Descriptives
- Dans le cas dénombrable infini, la série doit être convergente pour que $E(X)$ existe.
- X est dite centrée si $E(X)=0$

Propriétés de l'Espérance mathématique :

- L'Espérance mathématique est un opérateur linéaire:
Soient X et Y et R on a deux V.A et $a, b \in R$ on a : $E(aX + bY) = a E(X) + b E(Y)$
- Soit g une fonction de R dans R , alors : $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) p_i$

Remarque :

Si $g(X)=x^3$ $E(X^3)=\sum_i x_i^3 p_i$

Exemple04 (suite) :

x_i	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i$$

$$= (0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\text{Et } E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

2-4-Variance et Ecart-type :

On appelle Variance d'un variable aléatoire discrète, notée $V(X)$, la quantité :

- Si $X(\Omega)$ est fini

$$V(X) = E \left[(X - E(X))^2 \right] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

- Si $X(\Omega)$ est dénombrable

$$V(X) = E \left[(X - E(X))^2 \right] = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i \quad \text{Où}$$

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

Remarque :

Dans le cas dénombrable, les séries $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 p_i$ doivent être convergentes pour que $E(X)$ et $E(X^2)$ existent.

Propriétés de la Variance :

- $V(X) \geq 0$
- $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_i x_i^2 p_i - [\sum_i x_i p_i]^2$
- En général : $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$
- $V(a+X) = V(X)$
- $V(aX) = a^2 V(X)$

Exemple04 (suite) :

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \left[\sum_i x_i p_i \right]^2$$

$$V(X) = 3/2 - 1^2 = 1/2$$

2-5-Ecart-type :

On appelle écart-type d'une variable aléatoire discrète, notée $\sigma(X)$, la racine de la Variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque :

- $\sigma(X) = |a| \sigma(X)$
- $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est dite V.A. centrée réduite : en effet $E(Z) = 0$
ET $V(Z) = 1$

Variable aléatoire réelle continue (à densité):

3-1-Définition :

On appelle V.A. réelle définie sur (Ω, A) une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ on ait :

$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\} \in A$ Cette condition est vérifiée si pour tout réel x , on a $X^{-1}]-\infty, x[\in A$.

3-2-Densité de Probabilité :

On dit qu'une variable aléatoire X est à densité s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, positive, continue sur $\mathbb{R}$ (sauf

peut être en un nombre fini ou dénombrable, de réels), telle que pour tout réel x :

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$; Où F est la fonction de répartition de X .

La fonction f s'appelle la densité de probabilité de la variable aléatoire continue X .

Théorème :

Une fonction f réelle, définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si et seulement si :

- a) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf, éventuellement, en un nombre fini de réels.
- b) Pour tout réel x , $f(x) \geq 0$
- c) $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Si X une VAC admettant une densité f et soit F sa fonction de répartition, alors F est continue sur $\mathbb{R}$ et : $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Si X une VAC admettant une densité f : $P(X = x) = 0$

Propriétés d'une densité de probabilité :

Si X une VAC admettant une densité f et soit F sa fonction de répartition, alors :

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X < b) \\ &= \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Exemple05:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

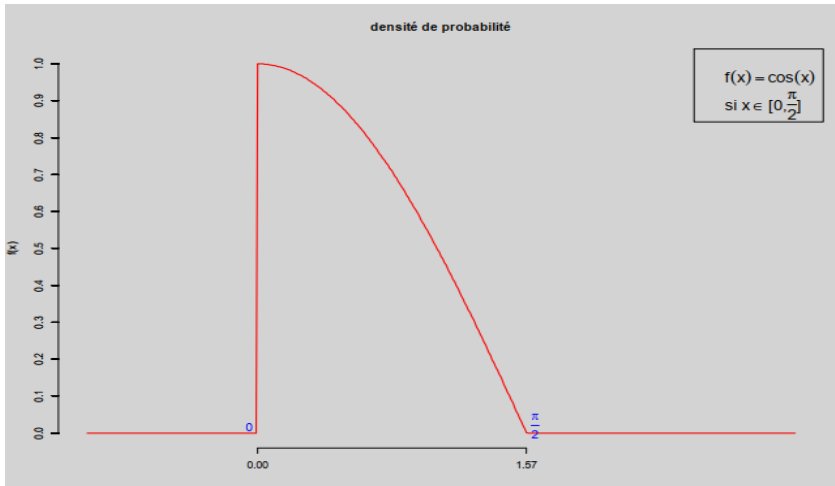
$$f(x) \begin{cases} = \cos x & \text{Si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{+\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(x) dx =$$

$$= 0 + \cos x + 0 + 0$$

- D'où f est une densité de probabilité



Soit F la fonction de répartition d'une VAC X de densité

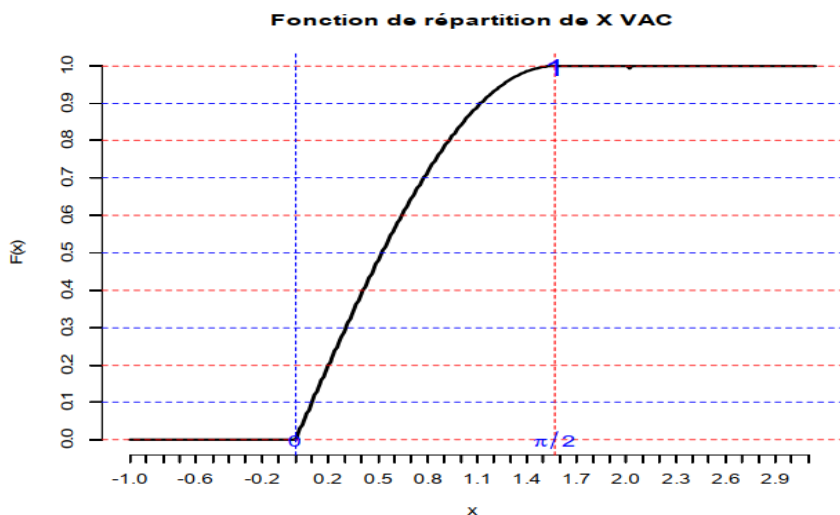
$$f:$$

$$F(x) = \begin{cases} = 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \sin x & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) dt = 1 & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right] \end{cases}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$
 $= 0$ $\cos t$ 0

Par exemple, on peut calculer :

$$p\left(0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



3-3-Espérance mathématique d'une VA à densité :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Propriétés de l'Espérance mathématique :

- Soient X et Y deux VAC et $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$
- Si X VAC de densité f admettant une espérance et si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est convergente, alors X^2 admet une espérance et $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

3-4-Variance d'une V.A. à densité:

On appelle Variance d'une variable aléatoire X de densité f , notée $V(X)$, la quantité réelle :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$$

Quand $E(X)$ et $E(X)^2$ existent.

Propriétés de l'Espérance mathématique :

- $V(X) \geq 0$
- $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2$
- En général : $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$

- $V(a+X)=V(X)$
- $V(aX)=a^2V(X)$
- **3-5-Ecart-type :**

On appelle écart-type d'une variable aléatoire continue, notée $\sigma(X)$, la racine de la Variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque :

- $\sigma(X) = |a|\sigma(X)$
- $Z = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est dite V.A. centrée réduite : en effet $E(Z)=0$
ET $V(Z)=1$

Exemple05 (suite) :

1-Calcul de L'espérance $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\ &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

2-Calcul de La variance $V(X)$:

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2$$

Or,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2 \left([x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \left([\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

D'où

$$V(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \pi - 3$$

3-6-Lois usuelles continues :

6-1- Loi normale ou de Laplace-Gauss :

C'est la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}$$

On note $X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$ avec $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$

Si note $X \rightsquigarrow N(m_1, \sigma_1)$ et $Y \rightsquigarrow N(m_2, \sigma_2)$ sont des V.A. indépendantes, alors :

$$X + Y \rightsquigarrow N(m_1 + m_2), \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

PRINCIPALES DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉS

INTRODUCTION

De nombreuses situations pratiques peuvent être modélisées à l'aide de variables aléatoires qui sont régies par des lois spécifiques. Il importe donc d'étudier ces modèles probabilistes qui pourront nous permettre par la suite d'analyser les fluctuations de certains phénomènes en évaluant, par exemple, les probabilités que tel événement ou tel résultat soit observé.

La connaissance de ces lois théoriques possède plusieurs avantages sur le plan pratique :

- Les observations d'un phénomène particulier peuvent être remplacées par l'expression analytique de la loi où figure un nombre restreint de **paramètres** (1 ou 2, rarement plus).
- La loi théorique agit comme modèle (**idéalis**ation) et permet ainsi de réduire les **irrégularités de la distribution empirique**. Ces irrégularités sont souvent inexplicables et proviennent de fluctuations d'échantillonnage, d'imprécision d'appareils de mesure ou de tout autre facteur incontrôlé ou incontrôlable.
- Des **tables de probabilités** ont été élaborées pour les lois les plus importantes. Elles simplifient considérablement les calculs.

Ce cours présente trois distributions discrètes : la **distribution binomiale**, la **distribution géométrique** et la **distribution de Poisson**. Puis il aborde deux distributions continues: la **distribution exponentielle** et la **distribution normale**. Il importe de bien comprendre quelles sont les situations concrètes que l'on peut modéliser à l'aide de ces distributions. Viennent enfin trois

distributions théoriques dont la fonction n'est pas de modéliser mais de servir d'outils dans les problèmes d'estimation et de test.

1. DISTRIBUTION BINOMIALE (distribution discrète finie)

1.1. VARIABLE DE BERNOULLI OU VARIABLE INDICATRICE

1.1.1. Définition:

Une variable aléatoire discrète qui ne prend que les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives p et $q=1-p$ est appelée **variable de BERNOULLI**.

Exemple: Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire une boule de l'urne. La variable aléatoire X = nombre de boules rouges tirées est une variable de Bernoulli.

On a:

$$P(X=1)= 2/5$$

$$P(X=0)= 3/5$$

Plus généralement, on utilisera une variable de Bernoulli lorsqu'on effectue une épreuve qui n'a que deux issues: le **succès** ou l'**échec**. Une telle expérience est alors appelée **épreuve de Bernoulli**. On affecte alors 1 à la variable en cas de succès et 0 en cas d'échec.

1.1.2. Distribution de probabilités

X	0	1
f(x)= P(X=x)	q	p

1.1.3. Paramètres de la distribution

$$E(X)=0.q+1.p=p$$

$$V(X)=E(X^2) -E(X)^2=0^2.q+1^2.p)-p^2=p-p^2=pq$$

$$E(X)=p$$

$$V(X)=p.q$$

1.2. DISTRIBUTION BINOMIALE

1.2.1. Situation concrète

a) On effectue une épreuve de Bernoulli. Elle n'a donc que deux issues: le succès avec une probabilité p ou l'échec avec une probabilité q .

b) On répète n fois cette épreuve.

c) Les n épreuves sont indépendantes entre elles, ce qui signifie que la probabilité de réalisation de l'événement « succès » est la même à chaque épreuve et est toujours égale à p .

Dans cette situation, on s'intéresse à la variable X = nombre de succès au cours des n épreuves.

1.2.2. Distribution de probabilités

Appelons X_i les variables de Bernoulli associées à chaque épreuve. Si la $i^{\text{ème}}$ épreuve donne un succès X_i vaut 1. Dans le cas contraire X_i vaut 0. La somme de ces variables comptabilise donc le nombre de succès au cours des n épreuves.

On a donc : $X=X_1+X_2+.....+X_n$. X peut prendre $(n+1)$ valeurs: $0,1,....., n$.

Cherchons la probabilité d'obtenir k succès, c'est-à-dire $p(X=k)$.

La probabilité d'avoir k succès suivis de $(n-k)$ échecs est $p^k q^{n-k}$ car ces résultats sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'avoir k succès et $(n-k)$ échecs dans un autre ordre de réalisation est toujours $p^k q^{n-k}$.

Donc tous les événements élémentaires qui composent l'événement $(X=k)$ ont même probabilité.

Combien y en a-t-il? Autant que de façons d'ordonner les k succès par rapport aux $(n-k)$ échecs ?

Il suffit de choisir les k places des succès parmi les n possibles et les $(n-k)$ échecs prendront les places restantes.

Or il y a C_n^k manières de choisir k places parmi n .

Finalement, on obtient pour $0 \leq k \leq n$:

$$p(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

On note: $X \sim B(n,p)$

Remarque: L'adjectif binomial vient du fait que lorsqu'on somme toutes ces probabilités, on retrouve le développement du binôme de Newton:

$$\sum_{k=0}^n p(X=k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

NB: La loi binomiale est tabulée en fonction des 2 paramètres n et p .

1.2.3. Paramètres descriptifs de la distribution

Nous savons que: $X = X_1 + \dots + X_n$ avec $E(X_i) = p$ Pour $1 \leq i \leq n$.

Donc :

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$$

Les variables X_i sont indépendantes et $\text{Var}(X_i) = pq$ pour $1 \leq i \leq n$.

Donc:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = npq$$

$E(X) = np$	$Var(X) = npq$	$\sigma(X) = \sqrt{npq}$
-------------	----------------	--------------------------

Remarque: La formule donnant l'espérance semble assez naturelle. En effet, le nombre moyen de succès (qui correspond à la signification de l'espérance) est intuitivement égal au produit du nombre d'essais par la probabilité de réalisation d'un succès.

1.2.4. Propriétés de la distribution binomiale

- Forme de la distribution binomiale

La représentation graphique de la distribution de la loi binomiale est habituellement présentée sous la forme d'un diagramme en bâtons. Puisque la loi dépend de n et p nous aurons diverses représentations graphiques si nous faisons varier n et/ou p comme c'est le cas pour les figures suivantes.

On peut effectuer plusieurs remarques à propos de ces diagrammes.

- a) La forme de la distribution est symétrique si $p=1/2$, quel que soit n .
- b) Elle est dissymétrique dans le cas où $p \neq 1/2$. Si p est inférieur à 0.50, les probabilités sont plus élevées du côté gauche de la distribution que du côté droit (asymétrie positive). Si p est supérieur à 1/2, c'est l'inverse (asymétrie négative).
- c) La distribution tend à devenir symétrique lorsque n est grand. De plus, si p n'est pas trop voisin de 0 ou 1, elle s'approchera de la distribution de la loi normale que l'on verra plus loin dans ce chapitre.

- Somme de deux variables binomiales

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } X_1 \sim B(n_1, p) \\ \text{Si } X_2 \sim B(n_2, p) \\ \text{Si } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right. \quad \text{alors } X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p).$$

Cette propriété s'interprète facilement: si X_1 représente le nombre de succès en n_1 épreuves identiques indépendantes et X_2 en n_2 épreuves indépendantes entre elles et indépendantes des premières avec la même probabilité de succès que les premières, alors $X_1 + X_2$ représente le nombre de succès en $n_1 + n_2$ épreuves identiques et indépendantes.

2. DISTRIBUTION GÉOMÉTRIQUE (distribution discrète dénombrable)

2.1. SITUATION CONCRÈTE

a) On effectue une épreuve de Bernoulli. Elle n'a donc que deux issues : le succès avec une probabilité p ou l'échec avec une probabilité $q=1-p$.

b) On répète l'épreuve jusqu'à l'apparition du premier succès.

c) Toutes les épreuves sont indépendantes entre elles, ce qui signifie que la probabilité de réalisation de l'événement « succès » est la même à chaque épreuve et est toujours égale à p .

Dans cette situation, on s'intéresse à la variable X =nombre de fois qu'il faut répéter l'épreuve pour obtenir le premier succès.

Remarque: On est donc dans les mêmes hypothèses que pour la loi binomiale, mais le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance. On s'arrête au premier succès.

2.2. DISTRIBUTION DE PROBABILITÉS

L'ensemble des valeurs prises par X est: $1, 2, 3, \dots$

On cherche la probabilité d'avoir recours à n épreuves pour obtenir le premier succès:

Ce succès a une probabilité de réalisation de p . Puisque c'est le premier, il a été précédé de $(n-1)$ échecs qui ont chacun eu la probabilité q de se produire. Étant donné l'indépendance des épreuves, on peut dire que la probabilité de réalisation de $(n-1)$ échecs suivis d'un succès est le produit des probabilités de réalisation de chacun des résultats.

Donc :

$$p(X=n)=q^{n-1} p$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p .

On note: $X \sim G(p)$.

Remarque: l'appellation géométrique vient du fait qu'en sommant toutes les probabilités, on obtient une série géométrique. En effet:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

2.3. PARAMÈTRES DESCRIPTIFS DE LA DISTRIBUTION

On admet que :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Remarque: On peut interpréter l'expression de l'espérance de façon intuitive. En effet en n épreuves, on s'attend à obtenir np succès et par conséquent, le nombre moyen d'épreuves entre deux succès devrait être : $n/np=1/p$.

2.4. PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DE LA DISTRIBUTION GÉOMÉTRIQUE

La propriété la plus importante de la loi géométrique est sans doute d'être "sans mémoire". En effet, la loi de probabilité du nombre d'épreuves à répéter jusqu'à l'obtention d'un premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli identiques indépendantes est la même quel que soit le nombre d'échecs accumulés auparavant. On comprend intuitivement que cela découle de l'indépendance des épreuves qui sont toutes identiques.

C'est la seule loi discrète qui possède cette propriété.

3. DISTRIBUTION DE POISSON (distribution discrète dénombrable)

La loi de Poisson est attribuée à Simeon D. Poisson, mathématicien français (1781-1840). Cette loi fut proposée par Poisson dans un ouvrage qu'il publia en 1837 sous le titre: « Recherche sur la probabilité de jugements en matière criminelle et en matière civile ».

3.1. SITUATION CONCRÈTE

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,...). Les phénomènes ainsi étudiés sont des phénomènes d'attente.

Pour décrire les réalisations dans le temps d'un événement donné, on peut:

- soit chercher le nombre de réalisations de l'événement dans un intervalle de temps donné qui est distribué suivant une **loi de Poisson**.

- soit chercher le temps entre deux réalisations successives de l'événement qui est distribué suivant une **loi exponentielle** (voir 4).

La loi de Poisson peut être interprétée comme un cas limite d'une loi binomiale et la seconde comme un cas limite d'une loi géométrique.

Formulons les hypothèses suivantes relativement à la réalisation de l'événement qui nous intéresse.

(1) Les nombres de réalisations de l'événement au cours d'intervalles de temps disjoints sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que le nombre de réalisations au cours d'un intervalle de temps est indépendant du nombre de réalisations au cours d'intervalles de temps antérieurs.

(2) La probabilité pour que l'événement se réalise une fois, au cours d'un petit intervalle de temps Δt , est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle et vaut $\alpha \Delta t$, où α est une valeur positive que l'on suppose constante tout au long de la période d'observation.

(3) Il est très rare d'observer plus d'une fois l'événement au cours d'un petit intervalle de temps Δt , c'est-à-dire que la probabilité pour que l'événement se réalise plus d'une fois au cours de l'intervalle de temps Δt est négligeable.

Les hypothèses (1), (2), (3) caractérisent ce qu'on appelle un processus de Poisson.

α est une constante du processus qui représente le nombre moyen de réalisations par unité de temps et que l'on appelle l'intensité du processus.

Sous ces hypothèses, la variable aléatoire X = « nombre de fois où l'événement considéré se réalise au cours d'un intervalle de temps de durée t » est distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \alpha t$.

3.2. DISTRIBUTION DE PROBABILITÉS

Nous cherchons à déterminer la loi de probabilité de la variable X = « nombre de réalisations d'un événement donné pendant un intervalle de temps t », sachant que le nombre moyen de réalisations de cet événement par unité de temps est α .

Or, nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable Y = « nombre de réalisations d'un événement de probabilité p donné au cours de n essais ». Il s'agit d'une loi binomiale $B(n, p)$.

Pour comprendre la relation entre ces deux lois, divisons l'intervalle de temps de longueur t , en n petits intervalles de temps disjoints de longueur $\Delta t = t/n$ pour n assez grand.

L'hypothèse (3) du processus nous permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles il n'y a principalement que deux possibilités: l'événement se réalise une fois ou ne se réalise pas (cela sera d'autant plus vrai que n est grand). Dans chaque intervalle, la variable « nombre de réalisations de l'événement » est une variable de Bernoulli.

L'hypothèse (2) du processus nous permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles, la probabilité de réalisation de l'événement est constante et égale à $\alpha \Delta t = \alpha t/n$

$= .$. Les variables de Bernoulli ont donc toutes le même paramètre $p = \alpha t/n$

L'hypothèse (1) du processus nous permet d'affirmer que les n variables de Bernoulli sont indépendantes.

La somme de ces n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\alpha=t/n$ est une variable qui suit la loi binomiale $B(n, \alpha=t/n)$ et qui représente approximativement le nombre de réalisations de l'événement dans l'intervalle de temps t .

Si on choisit n de plus en plus grand, on a de plus en plus d'intervalles, la probabilité de réalisations de l'événement dans chaque intervalle est de plus en plus petite et la distribution $B(n, \alpha=t/n)$ se rapproche de plus en plus de la distribution que l'on cherche à déterminer, c'est-à-dire de la **distribution de Poisson** de paramètre $\alpha=t$.

Conclusion: On peut considérer la loi de Poisson de paramètre λ comme la loi limite d'une loi binomiale $B(n, \alpha=t/n)$ lorsque n tend vers l'infini, le produit des paramètres $n\alpha=t/n$ restant toujours constant égal à $\alpha t = \lambda$.

Nous allons nous appuyer sur cette caractérisation pour déterminer sa fonction de densité.

Si Y suit une loi $B(n, \lambda/n)$, on sait que:

$$p(Y = k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

donc :

$$p(Y = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = \frac{\left[\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n}\right] \times \frac{\lambda^k}{k!} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini. Donc le crochet tend vers 1.

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = 1 \quad \text{donc :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k = 1$$

$$\text{-De plus : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)} = e^{-\lambda}$$

en utilisant la continuité de l'exponentielle et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda$$

Donc pour n assez grand:

$$p(Y = k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Définition: La distribution de Poisson de paramètre λ est celle d'une variable discrète X qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ selon la fonction de densité :

$$f(k) = p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k \in \mathbb{N}$$

On écrit: $X \sim P(\lambda)$.

Remarque : Il existe des tables donnant la fonction de densité et la fonction de répartition de la loi de Poisson en fonction des différentes valeurs de λ (**pour $\lambda \leq 15$**).

3.3. PARAMÈTRES DESCRIPTIFS DE LA DISTRIBUTION

La loi $P(\lambda)$ est la loi limite de la loi $B(n, \lambda/n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Or l'espérance mathématique de la loi $B(n, \lambda/n)$ est $n \lambda/n = \lambda$

Sa variance est $n \lambda/n (1 - \lambda/n)$, quantité qui tend vers λ lorsque n tend vers l'infini.

On aura donc lorsque $X \sim P(\lambda)$:

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

3.4. PROPRIÉTÉS DE LA DISTRIBUTION DE POISSON

3.4.1. Allure de la distribution

On peut effectuer plusieurs remarques à propos de ces diagrammes.

- En général, le diagramme est dissymétrique par rapport à λ avec étalement vers la droite. Les valeurs élevées d'une variable de Poisson sont peu rencontrées.
- A mesure que λ augmente, la forme de la distribution tend à devenir symétrique et s'approche de celle de la loi normale que nous traiterons plus loin dans ce chapitre. Cela est vérifié pour $\lambda \geq 10$ et même acceptable pour $\lambda \geq 5$.

3.4.2. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi binomiale dépend de deux paramètres n et p . Bien qu'il existe quelques tables, elle n'est pas simple à utiliser. La loi de Poisson ne dépend que d'un paramètre ce qui la rend donc plus pratique. Il faut donc avoir toujours présent à l'esprit que, lorsque les conditions le permettent, on peut avoir intérêt à remplacer une loi binomiale par une loi de Poisson.

Lorsque n est grand et p petit, de telle façon que le produit $np = \lambda$ reste petit par rapport à n , la loi binomiale $B(n, p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $P(\lambda)$ (revoir ce qui a été dit sur ce sujet dans le paragraphe : « Distribution de probabilités »).

Cette approximation s'appliquant lorsque p est petit, la loi de Poisson est appelée la loi des événements rares.

En pratique, l'approximation est valable si :

$n > 20$ et $p \leq 0.1$ et $np \leq 5$.

On approche la loi $B(n,p)$ par la loi $P(np)$ dès que :

$$\left\{ \begin{array}{l} n > 20 \\ p \leq 0.1 \\ np \leq 5. \end{array} \right.$$

RÈGLE IMPORTANTE : Lorsqu'on approche une loi par une autre, on choisit le ou les paramètres de la loi approchante de manière que l'espérance (et la variance lorsqu'on a suffisamment de paramètres) de la loi approchante soit égale à l'espérance (et la variance) de la loi approchée.

3.4.3. Somme de deux lois de Poisson

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } X_1 \sim P(\lambda_1) \\ \text{Si } X_2 \sim P(\lambda_2) \\ \text{Si } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right. \quad \text{alors } X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

3.5. IMPORTANCE PRATIQUE DE LA LOI DE POISSON

Le physicien et le technologue rencontrent la loi de Poisson dans de nombreuses circonstances.

3.5.1. Le comptage en radioactivité, microanalyse x, analyse SIMS...

Un détecteur compte le nombre de particules qu'il reçoit pendant un temps de comptage t_0 .

Ce nombre k obéit à une loi de Poisson dont le paramètre λ est le produit du flux moyen de particules α pendant le temps de comptage t_0 .

$$X \sim P(\alpha t_0)$$

$$p(X = k) = e^{-\alpha t_0} \frac{(\alpha t_0)^k}{k!}$$

Conséquence : L'espérance mathématique de X est αt_0 et l'écart-type sur X est $\sqrt{\alpha t_0}$. Il en résulte que la variabilité de X (quotient de l'espérance sur l'écart-type) devient très grande quand le nombre moyen de coups est petit. Si les valeurs prises par X sont proches de 10 correspondant à une espérance αt_0 proche de 10, l'écart-type valant $\sqrt{\alpha t_0}$ est proche de 3, ce qui donne une variabilité de 30%. Ceci est parfaitement visible sur le « profil SIMS » présenté sur le graphique de la page suivante. Le bruit devient important lorsque X est entre 10 et 15.

Dans la mesure du possible, l'expérimentateur sera alors amené à augmenter le temps de comptage pour augmenter les valeurs de X.

3.5.2. Contrôle de qualité

On effectue un contrôle de qualité sur des composants fabriqués par une unité de production. Un composant est réputé bon (ou mauvais) lorsqu'il satisfait (ou non) à des spécifications. Le critère de choix est donc qualitatif. Le taux moyen de rebuts (pièces mauvaises) est appelé p. On effectue un tirage de \$n\$ pièces. La probabilité de trouver k pièces mauvaises dans cet échantillon de taille n est donnée par une loi de Poisson (il s'agit ici de la loi des événements rares : la loi binomiale est approchée par la loi de Poisson).

$$X \sim P(np)$$

$$p(X = k) = e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$$

Lorsque np est petit, le rapport :

$$\frac{\sigma_X}{E(X)} = \frac{\sqrt{np}}{np} = \frac{1}{\sqrt{np}}$$

devient grand et la variabilité sur k rend le contrôle imprécis. Ceci explique que, dans un contrôle de qualité, la taille des échantillons tirés de la population des pièces fabriquées doit être au moins de l'ordre de 100.

3.5.3. Dénombrement d'événements survenant dans un espace délimité

La loi de Poisson permet de modéliser aussi bien le nombre d'événements survenant pendant un temps donné que le nombre d'événements survenant dans un espace délimité.

Par exemple, si on appelle X le nombre de particules bombardant une cible de surface S soumise à une irradiation de fluence F (en m^{-2}) :

$$X \sim P(FS)$$

$$p(X = k) = e^{-FS} \frac{(FS)^k}{k!}$$

FS est donc analogue au αt_0 du paragraphe 3.5.1.

La loi de Poisson sert donc aussi à décrire des phénomènes de localisation spatiale et non plus seulement temporelle, c'est-à-dire qu'elle modélisera aussi bien le nombre d'accidents qui peuvent survenir en une matinée que le nombre d'accidents qui peuvent survenir sur une section donnée d'autoroute.

4. DISTRIBUTION EXPONENTIELLE (distribution continue)

4.1. SITUATION CONCRÈTE

On se place dans le cas d'un phénomène d'attente décrit au paragraphe 3 et on s'intéresse à la variable aléatoire qui représente le temps d'attente pour la réalisation d'un événement ou le temps d'attente entre la réalisation de deux événements successifs.

Si on se place dans le cas où l'intensité α du processus de Poisson est constante, ce temps d'attente suit une loi exponentielle de paramètre α .

Exemple : Lorsque l'événement attendu est la mort d'un individu (ou la panne d'un équipement), α s'appelle le taux de mortalité (ou le taux de panne). Dire qu'il a une valeur constante, c'est supposer qu'il n'y a pas de vieillissement (ou pas d'usure s'il s'agit d'un équipement), la mort ou la panne intervenant de façon purement accidentelle.

4.2. DISTRIBUTION DE PROBABILITÉS

On veut déterminer la loi de la variable T = « temps d'attente entre la réalisation de deux événements successifs » où le nombre moyen de réalisations de l'événement considéré par unité de temps est α .

Pour cela, nous allons procéder comme dans le paragraphe 3 : Si t est la longueur de l'intervalle de temps sur lequel dure notre étude, nous le divisons en n petits intervalles de longueur t/n . Appelons X la variable aléatoire représentant le nombre d'intervalles de temps que l'on doit laisser s'écouler pour obtenir la réalisation de l'événement suivant. Chaque intervalle possédant la même probabilité $\alpha \cdot t / n$ de voir l'événement se produire, X suit, par définition, la loi géométrique de paramètre $\alpha \cdot t / n$. Le temps

d'attente T est alors le produit de ce nombre d'intervalles par le temps de chaque intervalle.

$$T = t/n = X$$

On cherche :

$$p(T > t_0) = p(X > \frac{nt_0}{t}) \dots\dots$$

et lorsque n tend vers l'infini on obtient :

$$p(T > t_0) = e^{-\alpha t_0} = \int_{t_0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha u} du.$$

Ceci nous permet d'affirmer que la fonction de densité de la variable T est

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \text{ si } x > 0.$$

Définition : La loi exponentielle de paramètre α décrit la distribution une variable aléatoire continue suit une loi exponentielle de paramètre α si l'expression de sa fonction de densité de probabilités est de la forme :

$$\boxed{f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad x > 0}$$

On note : $X \sim \text{Exp}(\alpha)$

Remarque : La loi exponentielle n'est pas tabulée. On calcule les probabilités au moyen de sa fonction de répartition $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$.

4.3. PARAMÈTRES DESCRIPTIFS DE LA DISTRIBUTION

On vient de voir que la loi exponentielle est la loi limite d'une loi géométrique.

On a : $T \approx t/n X$ où X suit la loi géométrique de paramètre $\alpha.t/n$.

Or : si n est grand

$$E(T) = \frac{t}{n} E(X) = \frac{t}{n} \frac{1}{\frac{\alpha t}{n}} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \text{Var}(T) = \frac{t^2}{n^2} \times \frac{1 - \frac{\alpha t}{n}}{\left(\frac{\alpha t}{n}\right)^2} \approx \frac{1}{\alpha^2}$$

4.4. PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DE LA DISTRIBUTION EXPONENTIELLE

- a) Comme la loi géométrique, la loi exponentielle est sans mémoire. C'est la seule loi continue qui possède cette propriété. Elle provient bien entendu du fait que le paramètre α est constant.
- b) Une somme de n variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre α n'est pas une variable de loi exponentielle mais une variable qui suit une loi gamma de paramètres n et α . Une telle loi est aussi appelée loi d'ERLANG d'ordre n . Elle représente le temps d'attente requis avant qu'un événement se réalise n fois.
- c) La loi exponentielle est aussi couramment utilisée dans les problèmes de datation en géochronologie.

5. DISTRIBUTION NORMALE (distribution continue)

La loi normale (ou loi de Gauss) est également appelée la **loi de Laplace-Gauss**. On trouve aussi l'expression, consacrée à une longue tradition, de **loi normale** (ce qui ne signifie pas pour autant que les autres lois soient « anormales »). Elle jouit d'une importance fondamentale car un grand nombre de méthodes statistiques repose sur elle. Ceci est lié au fait qu'elle intervient comme loi limite dans des conditions très générales.

5.1. SITUATION CONCRÈTE

On rencontre souvent des phénomènes complexes qui sont le résultat de causes nombreuses, d'effet faible, et plus ou moins

indépendantes. Un exemple typique est celui de l'**erreur commise sur la mesure d'une grandeur physique**. Cette erreur résulte d'un grand nombre de facteurs tels que : variations incontrôlables de la température ou de la pression, turbulence atmosphérique, vibrations de l'appareil de mesure, etc... Chacun des facteurs a un effet faible, mais l'erreur résultante peut ne pas être négligeable. Deux mesures faites dans des conditions que l'expérimentateur considère comme identiques pourront alors donner des résultats différents.

Donc dès que nous serons dans une situation où la distribution dépend de causes:

- en grand nombre et indépendantes
- dont les effets s'additionnent
- dont aucune n'est prépondérante

alors nous serons en présence de la distribution normale.

C'est le cas, par exemple:

- En métrologie, pour la distribution des erreurs de mesure.
- En biologie, pour la distribution des caractères physiques et psychologiques.
- En démographie, pour la distribution des effectifs.
- En économie, pour la distribution des revenus, des salaires.

5.2. DISTRIBUTION DE PROBABILITÉS

Définition : Une variable aléatoire continue X suit une loi normale si l'expression de sa fonction de densité de probabilités est de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

La loi dépend des deux réels m , σ appelés paramètres de la loi normale.

On note : $X \sim N(m, \sigma)$.

Remarques :

1. Une fonction de densité de probabilité étant toujours positive, le paramètre σ est donc un réel strictement positif.
2. On démontre que f est bien une fonction de densité de probabilité car :

$$\text{car } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Pour le démontrer on utilise que: (c'est l'intégrale de Gauss)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

On appelle courbe de Gauss la courbe représentative de la fonction $f(x)$.

3. La loi normale étant tabulée, cette expression nous sera de peu d'utilité. Il est important néanmoins de préciser à quoi correspondent m et σ .

5.3. PARAMÈTRES DESCRIPTIFS DE LA DISTRIBUTION

On démontre sans problème grâce à l'intégrale de Gauss que :

$$E(X) = m \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad \sigma(X) = \sigma$$

5.4. PROPRIÉTÉS DE LA DISTRIBUTION NORMALE

5.4.1. Allure de la distribution

La fonction de densité de probabilités de la loi normale a la forme d'une « courbe en cloche ». En fait il ne s'agit pas d'une courbe unique mais plutôt d'une famille de courbes dépendant de m et σ .

On peut effectuer quelques remarques à propos de ces courbes.

a) La distribution est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$. Donc l'aire sous la courbe de part et d'autre de cette droite est égale à 0.5.

b) La distribution est d'autant plus étalée que σ est grand.

c) L'axe des abscisses est une asymptote et l'aire sous la courbe à l'extérieur de l'intervalle $[m-3\sigma, m+3\sigma]$ est négligeable.

Pour fixer les idées, on peut indiquer que:

$$p(m-\sigma < X < m+\sigma) = 0.6826.$$

$$p(m-2\sigma < X < m+2\sigma) = 0.9544.$$

$$p(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = 0.9974.$$

d) σ représente la différence des abscisses entre le sommet de la courbe et le point d'inflexion.

e) La longueur à mi-hauteur de la courbe (L.M.H. ou en anglais F.W.H.M. Full Width Half Maximum) vaut 2.35σ . Cette distance est souvent employée par le spectroscopiste pour déterminer expérimentalement σ . Cette méthode doit cependant être utilisée avec précaution car il faut s'assurer que les « bruits » permettent d'observer correctement le « pied » de la courbe.

5.4.2. Somme de deux variables normales

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } X_1 \sim N(m_1, \sigma_1) \\ \text{Si } X_2 \sim N(m_2, \sigma_2) \\ \text{Si } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right. \quad \text{alors } X_1 + X_2 \sim N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

5.4.3. Loi normale centrée réduite ou loi normale standardisée

Nous avons vu qu’à toute variable aléatoire X , on pouvait associer une variable dite **standardisée** $T = [X - E(X)] / \sigma(X)$ d’espérance nulle et de variance unité (ceci résultait des propriétés de translation et de changement d’échelle). On montre assez facilement que si on effectue cette transformation sur une variable suivant une loi normale, la variable standardisée suit encore une loi normale mais cette fois-ci de paramètres 0 et 1. La loi standardisée est appelée **loi normale centrée réduite** notée $N(0,1)$.

Donc si $X \sim N(m, \sigma)$, on pose :

$$T = \frac{X - m}{\sigma} \text{ et } T \sim N(0,1).$$

On peut résumer la correspondance de la façon suivante:

Variable normale		Variable normale centrée réduite
$X \sim N(m, \sigma)$	$T = \frac{X - m}{\sigma}$	$T \sim N(0,1)$
ensemble des valeurs prises : $\mathfrak{R}$		ensemble des valeurs prises : $\mathfrak{R}$
Paramètres :		Paramètres :
$E(X) = m \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$		$E(T) = 0 \quad \text{Var}(T) = 1$

La loi $N(0,1)$ est tabulée à l’aide la fonction de répartition des valeurs positives ; Elle donne les valeurs de :

$$: \Phi(t) = p(0 \leq T \leq t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Pour $t > 0$. Ce nombre représente l'aire sous la courbe représentative de la distribution et au-dessus de l'intervalle $[0, t]$. Pour cette raison la table de la loi normale est aussi appelée table d'aires. Cette table ne dépend d'aucun paramètre, mais permet cependant de déterminer les probabilités de n'importe quelle distribution normale !

Comment utiliser la table d'aires?

La première colonne de la table indique les unités et les dixièmes des valeurs de T alors que les centièmes des valeurs de T se lisent sur la ligne supérieure de la table. La valeur trouvée à l'intersection de la ligne et de la colonne adéquates donne l'aire cherchée.

a) Je cherche la valeur de $p(0 \leq T \leq 0.5)$.

A l'intersection de la ligne « 0.5 » et de la colonne « 0.00 » je lis 0.1915.

b) Je cherche la valeur de $p(-0.5 \leq T \leq 0)$.

J'utilise la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées et j'en conclus que $p(0.5 \leq T \leq 0) = p(0 \leq T \leq 0.5) = 0.1915$. Et que pensez-vous de la valeur de $p(-0.5 < T < 0)$?

c) Je cherche la valeur de $p(-2.24 \leq T \leq 1.12)$.

L'aire cherchée correspond à la somme suivante :

$$p(-2.24 \leq T \leq 1.12) = p(-2.24 \leq T \leq 0) + p(0 \leq T \leq 1.12) = 0.4875 + 0.3686 = 0.8561.$$

d) Je cherche la valeur de $p(1.0 \leq T \leq 2.0)$.

L'aire cherchée correspond à la différence suivante :

$$p(1 \leq T \leq 2) = p(0 \leq T \leq 2.0) - p(0 \leq T \leq 1.0) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

e) Je cherche la valeur t de T telle que $p(0 \leq T \leq t) = 0.4750$.

C'est le problème inverse de celui des exemples précédents. Il s'agit de localiser dans la table l'aire donnée et de déterminer la valeur de T correspondante. Je trouve : $t = 1.96$.

Remarque : Si la valeur de l'aire ne peut se lire directement dans les valeurs de la table, on pourra toujours effectuer une interpolation linéaire entre deux valeurs adjacentes ou prendre la valeur la plus proche.

5.5. APPROXIMATIONS PAR DES LOIS NORMALES

5.5.1. Théorème central-limit (ou de tendance normale)

Théorème :

Hypothèses : Soit une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ vérifiant les conditions suivantes:

- (1) Les variables sont indépendantes.
- (2) Leurs espérances mathématiques $m_1, m_2, \dots, m_n$ et leurs variances $\text{Var}(X_1), \text{Var}(X_2), \dots, \text{Var}(X_n)$ existent toutes.
- (3) Pour tout k entre 1 et n , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Var}X_k}{\sum_{i=1}^n \text{Var}X_i} = 0.$$

- (4) Les lois de probabilité des variables X_k ne diffèrent pas trop les unes des autres.

Conclusion :

La distribution de la variable somme $X_1+X_2+\dots+X_n$ se rapproche de la distribution normale lorsque n tend vers l'infini.

Remarque : Ce théorème a une grande importance : il permet d'affirmer que dans des conditions très générales, la somme d'un grand nombre de variables aléatoires s'approche d'une loi normale. En effet :

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ correspondent aux différents facteurs de fluctuations.
- Le grand nombre de causes est assuré par le fait que $n \rightarrow +\infty$.
- L'indépendance parle d'elle-même.
- Additionner les effets revient à considérer la variable somme.
- Dire qu'aucun facteur n'est prépondérant est traduit par l'hypothèse (3) du.

En pratique, ceci se vérifie dès que $n \geq 30$.

5.5.2. Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Toute variable qui suit une loi binomiale $B(n,p)$ peut toujours être considérée comme une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p .

$X_1=X_2+\dots+X_n$ où X_i sont des variables de Bernoulli.

Les hypothèses du théorème central-limit étant vérifiées, on peut affirmer que, lorsque n tend vers l'infini, la loi binomiale $B(n,p)$ tend vers une loi normale. La loi normale qui l'approche le mieux est celle qui possède la même espérance np et le même écart-type $\sqrt{npq}$.

Or la distribution binomiale est asymétrique sauf lorsque $p = 1/2$. La distribution normale, elle, est symétrique. L'approximation

sera valable lorsque p n'est pas trop voisin de 0 ou 1 et sera d'autant meilleure que p est proche de $1/2$ et que n est grand.

En pratique:

On approche la loi $B(n,p)$ par la loi $N(np, \sqrt{npq})$ dès que	$\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 15 \\ nq \geq 15 \end{cases}$
---	---

Les problèmes rencontrés par cette approximation et leurs solutions :

1) On remplace une distribution concernant un nombre fini de valeurs par une distribution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

→ Étant donné qu'à l'extérieur d'un certain intervalle $([m-3\sigma, m+3\sigma])$ la distribution normale est presque nulle, cela ne pose pas de problèmes..

2) On remplace une distribution discrète par une distribution continue.

→ Il nous faut donc appliquer ce qu'on appelle une "correction de continuité" :

Si on nomme X la variable binomiale et Y la variable normale, on remplacera une valeur k de X par un intervalle de Y centré sur k et d'amplitude 1, ce qui signifie que l'on écrit :

$$p(X = k) = p\left(k - \frac{1}{2} < Y < k + \frac{1}{2}\right)$$

Dans la pratique lorsque n est très grand, cette correction n'est pas nécessaire. On l'effectuera cependant si on souhaite une grande précision.

Remarque : Remplacer une loi binomiale par une loi normale simplifie considérablement les calculs. En effet les tables de la loi

binomiale dépendent de deux paramètres et les valeurs de n dans ces tables sont limitées supérieurement par 20. La loi normale, elle, après standardisation ne dépend d'aucun paramètre.

5.5.3. Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

On démontre qu'on peut aussi approcher la loi de Poisson par la loi normale pour les grandes valeurs du paramètre de la loi de Poisson. La seule qui puisse convenir est celle qui a même espérance et même variance. On approche donc la loi $P(\lambda)$ par la loi $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

En pratique, cela s'applique dès que $\lambda \geq 16$.

On approche la loi $P(\lambda)$ par la loi $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$ dès que $\lambda \geq 16$.

Remarque : La loi de Poisson étant elle aussi une loi discrète, on peut avoir à appliquer la correction de continuité.

6. QUELQUES CONSEILS POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES

Voici, lorsqu'elle s'applique, une méthode de travail qui peut guider votre démarche :

1. Suite à l'énoncé du problème, identifier correctement à l'aide de mots la variable aléatoire que vous allez considérer.
2. Préciser les valeurs possibles que peut prendre cette variable.
3. Identifier correctement la loi de probabilité qu'elle suit en essayant de reconnaître dans le problème une situation type.
4. Déterminer les paramètres de la loi.

5. Utiliser les formules théoriques ou les tables pour déterminer les probabilités demandées. Face à de longs calculs et en l'absence de tables correspondant à vos ou votre paramètre, penser à approcher votre loi par une autre.

Quelques exercices types :

Exercice 1: Supposons qu'une tentative pour obtenir une communication téléphonique échoue (par exemple, parce que la ligne est occupée) avec la probabilité 0.25 et réussisse avec la probabilité 0.75. On suppose que les tentatives sont indépendantes les unes des autres.

Quelle est la probabilité d'obtenir la communication si l'on peut effectuer trois tentatives au maximum?

Solution :

- Nous nous intéressons à la variable X = « nombre de tentatives nécessaires pour obtenir la communication », ce que l'on peut considérer comme le nombre d'essais à faire pour obtenir le premier succès. X suit une loi géométrique de paramètre $p = 0.75$

- On cherche à déterminer $p(X \leq 3) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)$

- On peut obtenir la communication au 1er essai. On a pour cela une probabilité $p(X = 1) = 0.75$.

→ On peut obtenir la communication au 2ème essai. On a pour cela une probabilité $p(X = 2) = 0.25 \times 0.75 = 0.1875$.

→ On peut obtenir la communication au 3ème essai. On a pour cela une probabilité $p(X = 3) = 0.25^2 \times 0.75 = 0.0469$.

→ Finalement la probabilité d'obtenir la communication en trois essais maximum est $p(X \leq 3) = 0.75 + 0.1875 + 0.0469 = 0.9844$ soit 98.5 %.

Exercice 2 : Un fabricant de pièces de machine prétend qu'au plus 10% de ses pièces sont défectueuses. Un acheteur a besoin de 120 pièces. Pour disposer d'un nombre suffisant de bonnes pièces, il en commande 140. Si l'affirmation du fabricant est valable, quelle est la probabilité que l'acheteur reçoive au moins 120 bonnes pièces?

Solution :

- Appelons X la variable aléatoire correspondant au « nombre de bonnes pièces dans le lot de 140 pièces ».
- X prend ses valeurs entre 0 et 140. De plus pour chaque pièce, on n'a que deux éventualités : elle est bonne ou elle est défectueuse. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est 0.1. Par conséquent elle est bonne avec la probabilité 0.9. On est donc dans une situation type : X suit la loi binomiale de paramètres $n=140$ et $p = 0.9$.

$$X \sim B(140, 0.9)$$

On veut déterminer la probabilité que l'acheteur reçoive au moins 120 bonnes pièces sur les 140, soit $p(X \geq 120)$. A priori, il nous faudrait calculer la somme des probabilités $p(X = 120) + p(X = 121) + \dots + p(X = 140)$ ce qui serait épouvantablement long. On essaie donc d'approcher la loi binomiale par une loi tabulée :

Comme :

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ np = 126 \text{ donc } np > 10 \\ nq = 14 \text{ donc } nq > 10 \end{cases}$$

On pourra approcher la loi binomiale par une loi normale. On choisit la loi normale qui a la même espérance et le même écart-type. Donc X qui suit la loi $B(140, 0.9)$ sera approchée par Y qui suit la loi $N(126, 3.55)$.

Pour remplacer une loi discrète par une loi continue, il est préférable d'utiliser la correction de continuité : $p(X \geq 120) \cong p(Y > 119.5)$. On se ramène enfin à la loi normale centrée réduite :

$$T = \frac{Y - 126}{3.55}.$$

$$p(Y > 119.5) = p\left(\frac{Y - 126}{3.55} > \frac{119.5 - 126}{3.55}\right) = p(T > -1.83) = p(T < 1.83) = 0.5 + \Phi(1.83) = 0.97$$

Conclusion : l'acheteur a 97 chances sur 100 de recevoir 120 bonnes pièces sur les 140 achetées.

7. DISTRIBUTIONS DÉRIVANT DU MODÈLE GAUSSIEN

Les distributions que nous allons étudier sont importantes non pas pour représenter des modèles théoriques de séries statistiques comme les précédentes, mais en raison du rôle qu'elles jouent dans les problèmes d'estimation ou de tests que nous verrons par la suite.

Pour l'instant leurs définitions peuvent sembler complexes, notamment parce que la notion de « degrés de liberté » n'a pas encore été précisée. Pour le moment, il importe simplement de connaître leur définition et de savoir lire les tables correspondantes.

7.1. LA DISTRIBUTION DE KHI-DEUX (CHI-DEUX) χ^2

7.1.1. Définition

Elle a été découverte en 1905 par le mathématicien britannique Karl Pearson (1857- 1936) qui travailla également sur les problèmes de régression avec le généticien Sir Francis Galton.

Cette distribution (qui se prononce khi-deux) est très importante pour tester l'ajustement d'une loi théorique à une distribution

expérimentale (test du χ^2) et pour déterminer la loi de la variance d'un échantillon.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$. Alors la quantité :

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

est une variable aléatoire distribuée selon la loi de χ^2 à n degrés de liberté.

On note : $X \sim \chi^2_n$

2 7.1.2. Allure de la distribution

L'expression de la densité de probabilités étant très compliquée et d'aucun intérêt pour nous, nous ne la donnons pas ici.

La distribution du χ^2 est continue à valeurs positives et présente un étalement sur le côté supérieur. Elle ne dépend que du nombre de degrés de liberté n .

7.1.3. Paramètres descriptifs

$$E(Y) = n$$

$$\text{Var}(Y) = 2n$$

Somme de deux variables qui suivent une loi du χ^2

$$\begin{cases} \text{Si } X_1 & \chi^2_n \\ \text{Si } X_2 & \chi^2_p \\ \text{Si } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{cases} \quad \text{alors } X_1 + X_2 \sim \chi^2_{n+p}$$

7.1.4. Approximation par la loi normale

A mesure que n augmente, la distribution de khi-deux

7.1.5. Utilisation de la table de la distribution de khi-deux

Pour des raisons de commodité, au lieu de donner la table des fonctions de répartition des variables aléatoires χ^2 pour les différentes valeurs de n , on donne, en fonction de n (nombre de degrés de liberté) et d'une probabilité α que l'on peut choisir, la valeur $\chi^2_{\alpha, n}$ définie par : $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha, n}) = \alpha$.

α est un seuil et a en fait une signification particulière dans les problèmes d'estimation et de tests. Il sera défini ultérieurement.

7.2. LA DISTRIBUTION DE FISHER-SNEDECOR F

Cette distribution fut découverte par l'anglais Fisher en 1924 puis tabulée par Snédecor en 1934. Elle interviendra lors des comparaisons des variances de deux échantillons (test d'hypothèse F).

7.2.1. Définition

Soient χ^2_1 et χ^2_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi de khi-deux de degrés de liberté respectifs n_1 et n_2 , alors la quantité :

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{n_1}}{\frac{\chi_2^2}{n_2}}$$

est une variable aléatoire qui suit la loi de Fischer-Snedecor à n_1 et n_2 degrés de liberté. On note : $F \sim F_{n_1, n_2}$. Cette variable ne prend que des valeurs positives.

7.2.2. Forme de la distribution

On n'écrit pas ici l'expression de la fonction de densité, compliquée et inutile pour nous.

Les formes de distribution dépendent de n_1 et n_2 et sont dissymétriques. A mesure que les valeurs n_1 et n_2 augmentent, la loi de Fischer tend vers une loi normale.

7.2.3. Utilisation de la table de la distribution de Fisher

Les valeurs tabulées de la variable F dépendent d'un seuil α que l'on peut choisir et des nombres de degré de liberté n_1 et n_2 .

La table donne la valeur F_{α, n_1, n_2} définie par : $p(F > F_{\alpha, n_1, n_2}) = \alpha$.

Remarque : faut faire attention à l'ordre de n_1 et n_2 . n_1 représente le nombre de degrés de liberté du *numérateur* et n_2 celui du *dénominateur* et ne peuvent être intervertis.

7.3. LA DISTRIBUTION DE STUDENT (pseudonyme de W.S GOSSET - 1908)

7.3.1. Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, la première étant distribuée selon une loi normale centrée réduite $N(0,1)$ et la deuxième selon une loi de khi-deux à n degrés de liberté χ^2_n .

La quantité $T = (X \sqrt{n}) / \sqrt{Y}$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Student à n degrés de liberté. On écrit $T \sim T_n$

7.3.2. Allure de la distribution.

La densité de probabilité est de forme complexe et nous n'en aurons jamais besoin.

La distribution est symétrique par rapport à l'origine et un peu plus aplatie que la distribution normale centrée réduite. Elle ne dépend que de la valeur n qui est son nombre de degrés de liberté.

7.3.3. Paramètres descriptifs

On a $E(T) = 0$ si $n > 1$ et $\text{Var}(T) = n/n-2$ si $n > 2$.

7.3.4. Approximation par la loi normale

A mesure que n augmente, la distribution de Student à n degrés de liberté se rapproche de plus en plus de celle de la **loi normale centrée réduite** $N(0, 1)$.

En pratique : si $T \sim T_n$ pour $n \geq 30$, on pourra écrire que $T \sim N(0,1)$.

7.3.5. Utilisation de la table de la distribution de Student

Les valeurs tabulées de la variable T dépendent d'un seuil α que l'on peut choisir et du nombre de degré de liberté n . La table donne la valeur $t_{\alpha, n}$ définie par :

$$p(|T| > t_{\alpha, n}) = \alpha .$$

Partie 2 : Statistiques Inférentielles

I. Concepts et définition :

Échantillonnage : C'est un ensemble d'individus prélevés dans une population déterminée

Exemple : L'échantillon des véhicules automobiles immatriculés dans un département.

1. Taille de l'échantillon :

C'est le cardinal de l'échantillon, autrement dit c'est le nombre d'individus qu'il contient (échantillon de taille 800, de taille 1000...).

En général, on note n la taille de l'échantillon considéré.

2. Individu :

Se sont les éléments qui constituent l'échantillon de la population. En langage statistique le mot individu peut être désignés un être humain comme il peut désigner un objet.

Remarque :

- ✓ La population étudiée doit toujours être bien définie.
- ✓ L'échantillon doit être suffisamment représentatif de la population cible.

3. Enquête (statistique) :

C'est l'opération consistant à observer (ou mesurer, ou questionner. . .) l'ensemble des individus d'un échantillon (ou, éventuellement, de la population complète).

4. Recensement :

Enquête dans laquelle l'échantillon observe est en fait la population tout entière (On parle aussi d'enquête exhaustive). En

Algérie, on organise le recensement général de la population chaque 10ans.

5. Sondage :

C'est, au contraire, une enquête dans laquelle l'échantillon observe est un sous-ensemble strict de la population (on parle, dans ce cas, d'enquête non exhaustive). Les exemples de sondages dans la vie courante sont, de nos jours, légion.

6. Variable ou caractère :

C'est une caractéristique (âge, salaire, sexe. . .), définie sur la population et observée sur l'échantillon.

D'un point de vue mathématique, une variable est une application définie sur l'échantillon.

D'un point de vue mathématique, une variable est une application définie sur l'échantillon. Si cette application est à valeurs dans **IR** (ensemble des nombres réels), ou dans une partie de **IR**, elle est dite quantitative (âge, salaire, taille. . .) ; sinon elle est dite qualitative (sexe, catégorie socioprofessionnelle. . .).

a) Un caractère est dit **quantitatif** s'il est mesurable.

Exemples de caractères quantitatifs :

- La puissance fiscale d'un véhicule automobile.
- Le chiffre d'affaires d'une P.M.E.
- L'âge, le salaire des salariés d'une entreprise.

- **Variable quantitative continue :**

Quand la variable est susceptible de prendre toute valeur appartenant à son intervalle de variation. Ex : poids, taille, taux de cholestérol...

- **Variable quantitatif discontinue :**

Quand elle ne peut prendre que des valeurs isolées appartenant à son intervalle donné (valeurs entières). Ex : nombre d'enfant, nombre des véhicules....

b) Un caractère est dit qualitatif s'il est repérable sans être mesurable.

Exemples de caractères qualitatifs :

- La couleur de la carrosserie d'un véhicule automobile
- Le lieu de travail des habitants d'un quartier
- Le sexe et la situation matrimoniale des salariés d'une entreprise

7. Modalités :

Ce sont les différentes situations M_i possibles du caractère.

Ex : le sexe est caractère qui présente deux modalités : masculin, féminin.

Le nombre d'enfant /famille : 0-1-2-3.....

8. Série statistique :

On appelle série statistique, l'ensemble des différentes données associées à un certain nombre d'individus.

II. Échantillonnage

1. Étapes pour sélectionner un échantillon :

- a. Évaluer les avantages et les inconvénients d'un recensement par rapport à un échantillon ou l'utilisation de dossiers administratifs.
- b. Définir la population cible.
 - C'est la population totale pour laquelle on a besoin de l'information
 - Il faut définir les unités qui composent la population sous forme de caractéristiques les identifiant :

- Nature des données dont on a besoin : sur des personnes, des hôpitaux...
- Emplacement géographique : périmètre géographique (région, canton...)
- Période de référence : Date
- Autres caractéristiques dont on veut pouvoir tenir compte
- caractéristiques sociodémographiques par exemple

c. Déterminer les données à recueillir :

- Définition des termes
- Libellé des questions
- Définitions des méthodes de mesures
- S'assurer que les exigences de l'enquête seront respectées sur le plan opérationnel

d. Fixer le degré de précision :

Il y a un degré d'incertitude associé aux estimations établies à partir d'un échantillon qui dépend notamment de la méthode d'échantillonnage et de la taille de l'échantillon

c. Quel degré peut-on accepter ?

Il faut établir un compromis entre le degré d'incertitude et le budget disponible pour l'enquête.

La population observée :

L'enquête prend en compte une population différente : la population observée :

- Certains membres de la population cible ne sont pas observés par exemple du fait du coût de la collecte des données
- Les conclusions ne s'appliqueront qu'à la population réellement observée

2. La base de Sandage :

Permet d'avoir accès à la population

Deux types :

a) Les nomenclatures

Liste de noms et d'adresses qui donnent directement accès à des unités.

Exemple : Liste d'hôpitaux, liste des étudiants inscrits en médecine
Registre des entrées

b) Les bases aléatoires

Liste de « régions » qui donnent accès indirectement à des unités
Exemple :

- Quartier d'une ville
 - Service d'un hôpital
-
- Doit être complète et à jour
 - Aucun membre de la population observée ne devrait en être exclu ni y être représenté plusieurs fois
 - Aucune unité ne faisant pas partie de la population ne doit y figurer (décédé...)

Les unités d'enquête :

L'unité d'échantillonnage :

- Fait partie de la base de sondage

- Peut-être ou non sélectionnée

L'unité déclarante :

- Fournit l'information qu'exige l'enquête

L'unité d'analyse ou de référence :

- C'est l'unité au sujet de laquelle l'information est fournie

3. Les divers types d'échantillons :

Après avoir constitué la base de sondage, la deuxième étape consiste à déterminer la meilleure façon d'échantillonner. Plusieurs stratégies s'offrent à nous. Il faut déterminer laquelle sera la plus efficiente tout en permettant de généraliser à la population.

3.1- L'échantillon probabiliste :

Chaque unité doit avoir une probabilité connue d'être choisie. Cette probabilité ne peut pas être nulle mais elle n'est pas nécessairement égale pour toutes les unités. Cette probabilité ne doit pas dépendre de circonstances entraînant un biais (Ex. personnes répondant habituellement au téléphone).

Pourquoi utiliser un échantillon de type probabiliste ?

Permet l'utilisation de méthodes d'estimation et de méthodes d'inférence et d'analyse statistique.

Toutes sont basées sur la théorie des probabilités.

Permet de connaître et donc de contrôler les biais.

Les méthodes aléatoires :

- L'échantillon aléatoire simple
- L'échantillonnage systématique
- L'échantillonnage stratifié
- L'échantillonnage en grappes

3.1.1-L'échantillonnage aléatoire simple:

- Consiste à choisir des individus de telle sorte que chaque membre de la population a une chance égale de figurer dans l'échantillon.

Ce choix peut se faire avec remise ou sans remise :

Avec remise : un individu peut être choisi plusieurs fois

Sans remise : un individu déjà choisi ne peut l'être de nouveau.
(C'est le cas habituel).

Avantage de cette méthode : On peut espérer un échantillon « représentatif » puisque la méthode donne à chaque individu de la population une chance égale.

Difficultés : la méthode n'est applicable que lorsqu'il existe une liste exhaustive de toute la population

Comment procéder ?

- On numérote tous les individus de la liste correspondant aux individus de la population avec des nombres comportant un même nombre de chiffres.
- En utilisant une table de nombres aléatoires, une calculatrice ou un programme informatique (BASIC, PASCAL, SPSS, etc.), on obtient des nombres aléatoires comportant le nombre de chiffres désiré.
- On sélectionne les nombres qui coïncident avec la liste. On rejette les nombres qui ne coïncident pas avec la liste ou qui se répètent, on s'arrête après avoir sélectionné **n** individus. (**n** représentant le nombre d'individus souhaités dans l'échantillon).

3.1.2-L'échantillonnage systématique:

Pour constituer l'échantillon il faut :

Choisir au hasard un entier naturel **d** entre **1** et **r** (cet entier sera le point de départ), L'individu dont le numéro correspond à **d** est le premier individu. Pour sélectionner les autres, il suffit d'ajouter à **d** la raison de sondage : les individus choisis seront alors ceux dont les numéros correspondent à :

- $d + r$
- $d + 2r$
- $d + 3r$
- etc.

Avantages : facile à sélectionner parce qu'un seul individu est choisi au hasard.

On peut obtenir une bonne précision parce que la méthode permet de répartir l'échantillon dans l'ensemble de la liste.

Désavantages : Les données peuvent être biaisées à cause de la périodicité.

Remarques :

On a une population de 400 individus, on veut un échantillon de 100 individus

R = 4 (le pas)

On a donc que 4 échantillons possibles

- 1, 5, 9, ... 397
 - 2, 6, 10, ... 398
 - 3, 7, 11, ...399
 - 4, 8, 12, ... 400
- Si la population est distribuée au hasard dans la base de sondage, un échantillonnage systématique donnera des

résultats similaires à ceux d'un échantillonnage aléatoire simple

- Cette méthode est très utilisée dans les contrôles de qualité

3.1.3-L'échantillonnage stratifié:

Démarche de sélection :

- 1) On subdivise la population en strates (groupes relativement homogènes) qui sont mutuellement exclusives.
- 2) Proportionnellement à son importance dans la population, on calcule combien il faut d'individus au sein de l'échantillon pour représenter chaque strate.
- 3) Dans chacune des strates, on choisit au hasard le nombre nécessaire d'individus.

Les variables de starification doivent être :

- Simple à utiliser.
- Facile à observer.
- Étroitement reliées au thème de l'enquête.

Avantages : Il est peu probable de choisir un échantillon absurde puisqu'on s'assure de la présence proportionnelle de tous les divers sous-groupes composant la population.

Désavantages : La méthode suppose l'existence d'une liste de la population. Il faut aussi connaître comment cette population se répartit selon certaines strates.

3.1.4-L'échantillonnage par grappes:

- Dans les méthodes précédentes, l'unité statistique était choisie individuellement.
- La technique de l'échantillonnage en grappes entraîne la division de la population en groupes ou grappes.

- On sélectionne au hasard un certain nombre de grappes (unités primaires) pour représenter la population.
- On sélectionne tous les individus des grappes choisies.
- Exp: (1^{er} pop Rural choisir plusieurs village 2^{em} choisir plusieurs écoles primaires choisir aléatoire les élèves de 3eme années....)

Avantages : la méthode ne nécessite pas une liste globale de la population puisque seules les individus inclus dans les grappes comptent. Elle permet de limiter l'échantillon à des groupes compacts ce qui permet de réduire les coûts de déplacement, de suivi et de supervision.

Désavantage : la méthode peut entraîner des résultats imprécis (moins précis que les méthodes précédentes) puisque les unités voisines ont tendance à se rassembler. Elle ne permet pas de contrôler la taille finale de l'échantillon.

3.2. Méthodes empiriques ou non aléatoires

- On oppose aux méthodes aléatoires les méthodes non aléatoires.
- Les méthodes non aléatoires sont des méthodes où le concept de « chance égale » est absent. Ce sont des méthodes généralement peu fiables.
- Elles ne nécessitent pas de base de sondage
- Elles sont souvent utilisées
 - Pour des études exploratoires;
 - Pour réduire les coûts;
 - Quand il est impossible ou non envisageable d'utiliser la méthode aléatoire.

On distingue :

L'échantillonnage à l'aveuglette ou de commodité : Ex.: Déguster un échantillon de vin.

L'échantillonnage de volontaires : Ex : Expériences médicales ou psychologiques.

L'échantillonnage au jugé : cette méthode implique la sélection d'individus en fonction de l'idée qu'on se fait de la composition de la population. On le fait pour des essais auprès des groupes cibles.

L'échantillonnage par quotas : il est largement utilisé dans les enquêtes d'opinion et les études de marché notamment parce qu'il ne suppose pas de liste des individus de la population.

On parle aussi **d'échantillonnage dirigé** ou **par choix raisonné**. On demande aux enquêteurs de faire un nombre d'entrevues dans divers groupes établis en fonction du secteur géographique, de l'âge, du sexe ou d'autres caractéristiques... L'enquêteur doit respecter son quota.

Avantages : Moins coûteuse et plus facile à réaliser.

Désavantages: Beaucoup de non-réponses; difficulté de trancher lorsqu'il s'agit de sélectionner des individus d'un groupe d'âge ouvert (Ex : 65 ans et plus : faut-il prendre 66 ans, 70 ans ...).

1-Echantillonnage accidentel (De convenance)

Il s'agit d'un échantillon constitué d'individus qui se trouvaient accidentellement à l'endroit et au moment où l'information a été collectée.

Les échantillons accidentels ne peuvent être considérés représentatifs d'aucune population. Il est risqué de généraliser à

une population donnée des résultats obtenus par un échantillon accidentel.

Exemple :

-Enquêtes réalisées dans la rue, les lieux publics, en sortie de super marché ...

-Questionnaires figurant dans les magazines et renvoyés spontanément

2-Echantillonnage à priori :

- C'est un échantillonnage par jugement à priori. Il consiste à sélectionner des individus dont on pense, avant de les interroger, qu'ils peuvent détenir l'information.
- Le risque de ce type d'échantillonnage est de considérer des individus, apparemment représentatifs de la population étudiée.

3-Echantillonnage « Boule de neige » :

- Cette méthode est réservée aux populations composées d'individus dont l'identification est difficile ou qui possèdent des caractéristiques rares.
- La méthode consiste à faire construire l'échantillon par les individus eux-mêmes. Il suffit d'en identifier un petit nombre initial et de leur demander de faire appel à d'autres individus possédant les mêmes caractéristiques.

4-Echantillonnage par Quotas:

- L'échantillonnage par quotas est l'échantillonnage non probabiliste le plus connu, et finalement le mieux accepté comme substitut aux méthodes probabilistes dans le cas où ces dernières rencontreraient des contraintes de base de

sondage. Mais la représentativité de la population étudiée reste douteuse.

- L'échantillonnage par quotas consiste à étudier la structure de la population selon des critères choisis (quotas) empiriquement. L'échantillon est ensuite construit de manière à constituer une reproduction en miniature de la population sur ces critères.
- L'échantillonnage par quotas est une forme simplifiée de l'échantillonnage stratifié à fraction de sondage constante. Les quotas représentent les variables de stratification.
- Une fois les quotas sont fixés, les individus sont sélectionnés à la convenance de l'enquêteur.
- Les critères servant de base à la définition des quotas ne doivent pas être nombreux. Au-delà de 3 critères, la démarche devient complexe. Les quotas doivent être construits sur une base de données fiables (statistiques disponibles) indiquant la répartition de la population sur les critères choisis. Les critères les plus utilisés dans les études de marché sont économiques et socio-démographiques en particulier l'âge, le sexe, la catégorie socioprofessionnelle, ...

III. Les tests d'hypothèses :

On veut porter un jugement sur une hypothèse statistique relative à la valeur particulière d'un paramètre d'une population spécifique. Ce jugement est basé sur les résultats d'un échantillon pris dans cette population et d'un certain risque d'erreur que nous acceptons de courir. La construction d'un test d'hypothèse consiste effectivement à déterminer entre quelles valeurs peut varier la statistique (ou l'écart réduit) en supposant l'hypothèse vraie, sur la seule considération du hasard de l'échantillonnage.

Exemple :

Vérification de la durée moyenne de la semaine de travail de dirigeants de PME.

Selon l'enquête, la durée moyenne de la semaine de travail de ces dirigeants est de 54 heures. On aimerait vérifier cette affirmation au près d'un échantillon aléatoire de dirigeants de PME en Tunisie. En supposant que le traitement des résultats de l'échantillon donne une valeur moyenne de 51 heures comme semaine de travail, peut-on considérer que l'écart entre les deux résultats (l'écart $54-51=3$ heures) est uniquement imputable au hasard de l'échantillonnage ?

Cette approche repose sur deux notions importantes celle **d'hypothèse statistique** et celle de **seuil de signification**.

1) Hypothèse Statistique :

Soit l'hypothèse nulle que nous notons H_0 :

$H_0 : \mu = \mu_0$ (ex : la durée moyenne de la semaine de travail est de 54 heures) et soit la contre-hypothèse (ou hypothèse alternative) que nous notons H_1 :

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ (ex : la durée moyenne de la semaine de travail n'est pas de 54 heures). C'est le cas d'un test bilatéral.

Remarque : Si $H_1 : \mu > \mu_0$ ou $H_1 : \mu < \mu_0$ on est dans un cas de test unilatéral `à droite ou unilatéral `à gauche respectivement. Les résultats de l'échantillon vont nous permettre de rejeter ou de ne pas rejeter H_0 .

2) Seuil de signification d'un test d'hypothèse :

Le risque consenti `a l'avance, que nous notons  $\alpha$ , est de rejeter `a tort l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie (et de favoriser alors l'hypothèse alternative H_1). La quantité α s'appelle le seuil de signification du test et s'énonce en probabilité comme suit :

$\alpha = P(\text{rejeter } H_0 / H_0 \text{ est vraie}).$

A ce seuil de signification on fait correspondre une région de rejet de l'hypothèse nulle (appelée région critique). L'aire de cette

région correspond à la probabilité α .

Exemple : Si $\alpha = 0.05$, cela signifie que l'on admet que la statistique peut prendre dans 5% des cas une valeur se situant dans la région de rejet bien que l'hypothèse H_0 soit vérifiée.

Il y a aussi une région complémentaire dite région de non rejet de H_0 appelée région d'acceptation de probabilité $1 - \alpha$.

Dans un test d'hypothèse on ne peut jamais être certain que l'hypothèse nulle doit être rejetée ou non. Les risques de se tromper sont résumés dans le tableau suivant :

	Ne pas rejeter H_0	Rejeter H_0
H_0 est vraie	Bonne décision	Mauvaise décision Erreur de type I $\alpha = P(\text{commettre cette erreur})$ $\alpha = \text{risque de première espèce}$
H_0 est fausse	Mauvais d' décision Erreur de type II $\beta = P(\text{commettre cette erreur})$ $\beta = \text{risque de deuxième espèce}$	Bons décision

Nous définissons les risques de première espèce et de deuxième espèce comme suit :

Risque de première espèce : Le risque de rejeter à tort l'hypothèse H_0 et de favoriser l'hypothèse alternative H_1 s'appelle risque de première espèce ou seuil de signification du test. Ce risque noté α est fixé à l'avance (avant de recueillir les données).

Risque de deuxième espèce : Le risque de ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse s'appelle risque deuxième espèce et est noté β .

3) Test sur une moyenne :

Généralement, quand on est amené à comparer une moyenne μ à une norme μ_0 , on est confronté trois cas (selon la taille de l'échantillon et le fait de connaître ou pas la variance de celui-ci) :

1^{er} cas :

Grand échantillon ($n > 30$) prélevé au hasard dans une population de variance connue σ^2 dans ce cas : approximativement la loi normale centrée réduite

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$

Contre-hypothèses	Règles de décision du test
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_{\alpha/2}$ ou $Z < -z_{\alpha/2}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_\alpha$
$H_1 : \mu < \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z < -z_\alpha$

2^{ème} cas :

Grand échantillon ($n > 30$) prélevé au hasard dans une population suivant la loi normale de variance inconnue dans ce cas

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

suit approximativement la loi normale centrée réduite et :

$$s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}$$

Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$

Contre-hypothèses	Règles de décision du test
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_{\alpha/2}$ ou $Z < -z_{\alpha/2}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_\alpha$
$H_1 : \mu < \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z < -z_\alpha$

3^{ème} cas :

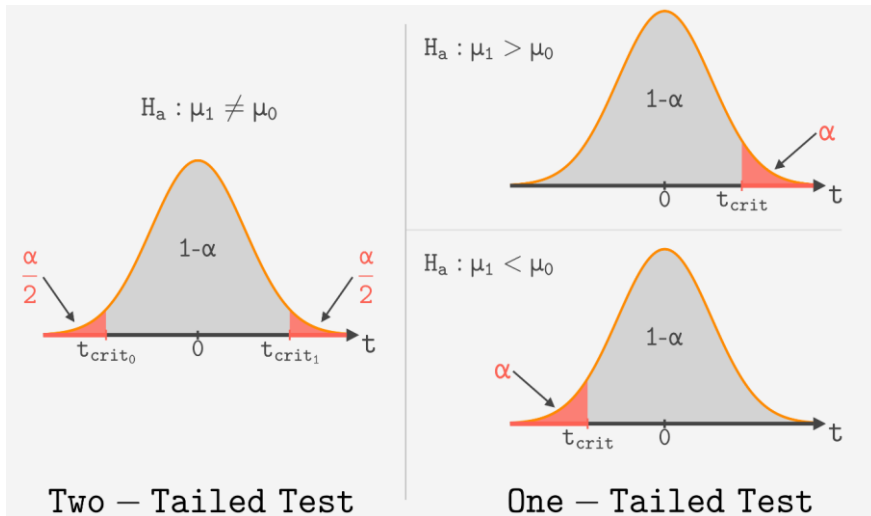
Échantillon de petite taille ($n < 30$) prélevé au hasard dans une population suivant la loi normale de variance inconnue dans ce cas l'écart réduit suit la loi de Student à $(n - 1)$ degrés de liberté.

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$

Contre-hypothèses	Règles de décision du test
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Rejeter H_0 si $T > t_{\alpha/2;n-1}$ ou $T < -t_{\alpha/2;n-1}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	Rejeter H_0 si $T > t_{\alpha;n-1}$
$H_1 : \mu < \mu_0$	Rejeter H_0 si $T < -t_{\alpha;n-1}$

Figure : Zones de rejet et de non-rejet



Exemple :

D'après une société conseil, le salaire annuel moyen d'administrateur de banques de données serait de 49738 Euros. Une enquête effectuée auprès d'un organisme sur un échantillon aléatoire de 36 entreprises de ce secteur donne les résultats suivants concernant la rémunération des administrateurs de banque de données :

Salaire moyen : 50200 Euros

Ecart type : 1560 Euros

- Est-ce que les résultats de cette enquête permettraient de supporter l'affirmation de cette société conseil ? Utiliser un seuil de signification de $\alpha = 0.05$

1- L'Hypothèse Statistique :

$H_0 : \mu = 49738$

$$H_1 : \mu \neq 49738$$

2- Seuil de signification :

$$\alpha = 0.05$$

3- Condition d'application du test :

Grand échantillon ($n \geq 30$) provenant d'une population de variance connue.

4- La statistique :

La statistique qui convient pour le test est $\bar{X}_n$ l'écart réduit est

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ou $\mu_0 = 49738$ et Z suit la loi $N(0, 1)$

5- Règle de décision :

D'après H_1 et au seuil $\alpha = 0.05$ les valeurs critiques de l'écart réduit sont $z_{\alpha/2} = 1.96$ et $-z_{\alpha/2} = -1.96$ (test bilatéral).

On adoptera la règle de décision suivante :

Rejeter H_0 si $Z > 1.96$ ou $Z < -1.96$, sinon ne pas rejeter H_0 .

6- Calcul de l'écart réduit :

Puisque $\bar{X}_n = 50200$, $\sigma = 1560$ et $n = 36$, donc :

$$Z = \frac{50200 - 49738}{\frac{1560}{\sqrt{36}}}$$

$$= \frac{462}{260} = 1.77$$

7- Décision et conclusion :

La valeur de $Z = 1.77$ se situe dans la région de non-rejet de H_0 donc on ne peut rejeter l’affirmation de la société conseil. L’écart observé entre $\bar{X}_n$ et μ_0 soit $(50200- 49738= 462)$, n’est pas statistiquement significatif au seuil $\alpha = 0.05$

4) Test sur une variance :

On se propose de tester si la variance σ^2 d’éléments d’une population gaussienne peut être considérée ou non comme égale à une valeur hypothétique

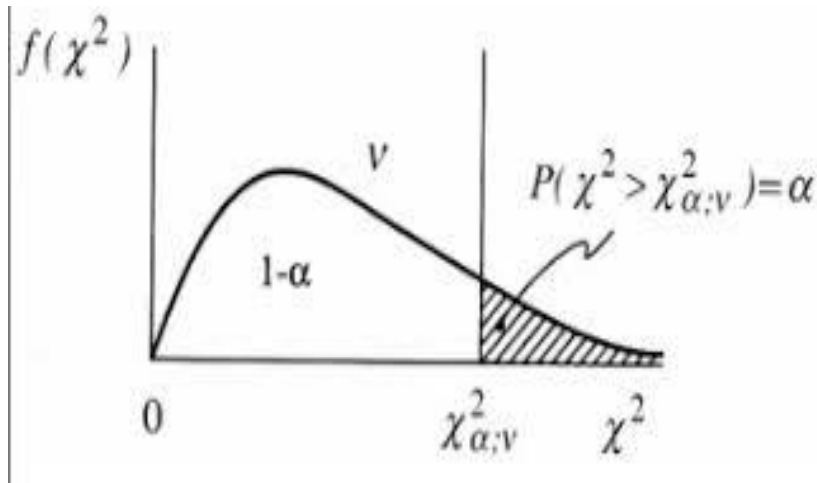
La statistique σ_0^2 associée à ce test est notée et $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ est distribuée selon la loi du χ^2 avec $n - 1$ degrés de liberté.

Le tableau suivant résume dans le cas d’un test sur une variance les règles de décision selon les hypothèses H_1 pour le seuil de signification α .

Hypothèse nulle : $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

Contre-hypothèses	Règles de d´décision du test
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2;n-1}$ ou $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2;n-1}$
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $\chi^2 > \chi^2_{;n-1}\alpha$
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $\chi^2 < \chi^2_{-\alpha;n-1}1$

Figure – Zones de rejet et de non-rejet



Exemple : Selon la responsable de l'application de tests d'évaluation de l'entreprise PMX, la variabilité des résultats aux tests de dextérité n'excède pas 144 ($\sigma = 12$).

Les résultats à ce test obtenus par un échantillon aléatoire de 20 employés donnent une somme de carrés des écarts par rapport à la moyenne de 2952. On suppose que l'échantillon aléatoire provient d'une population normale.

L'hypothèse selon laquelle σ^2 n'excède pas 144 est-elle acceptable au seuil de signification $\alpha = 0.05$?

Effectuer le test selon la démarche usuelle (7 étapes).

1- Hypothèse Statistique :

$$H_0 : \sigma^2 = 144$$

$$H_1 : \sigma^2 > 144$$

2- Seuil de signification :

$$\alpha = 0.05$$

3- Condition d'application du test :

Echantillon aléatoire provenant d'une population normale.

4- La statistique :

La statistique qui convient pour le test en supposant H_0 vraie est

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

$\sigma_0^2 = 144$. La quantité χ^2 est distribuée selon la loi de khi-deux à 19 (20 - 1) degrés de liberté.

5- Règle de décision :

D'après H_1 et au seuil $\alpha = 0.05$ la valeur critique de χ^2 est $\chi^2_{0.05;19} = 30.1435$ (test unilatéral à droite).

On adoptera la règle de décision suivante :

Rejeter H_0 si $\chi^2 > 30.1435$, sinon ne pas rejeter H_0 .

6- Calcul de l'écart réduit :

On a $\sum (X_i - \bar{X}_n)^2 = (n - 1)s^2 = 2952$, $n = 20$ et $\sigma_0^2 = 144$.

Le calcul de χ^2 donne

$$\chi^2 = \frac{2952}{144} = 20.5$$

7- Décision et conclusion :

Puisque $\chi^2 = 20.5 < 30.1435$, on ne peut rejeter H_0 . La dispersion des résultats au test de dextérité semble correspondre à la norme requise. Au risque de se tromper 5 fois sur 100, il n'est pas

invraisemblable d’observer une variance de $2952/19=155.37$ dans un échantillon de taille $n = 20$ lorsqu’on admet que la variance de la population est 144.

Cette valeur expérimentale ne permet pas d’écarter l’hypothèse selon laquelle $\sigma^2=144$.

5) Test sur une proportion :

On se propose de tester si la proportion p d’éléments de la population présentant un certain caractère qualitatif peut être considéré ou non comme égale à une valeur hypothétique p_0 .

Hypothèse nulle : $H_0 : p = p_0$

Hypothèse alternative : $H_1 : p \neq p_0$ ($p > p_0$ ou $p < p_0$)

Soit un échantillon de grande taille ($n > 30$) prélevé au hasard d’une population binomiale de sorte que $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$ dans ce cas l’écart réduit est distribué selon la loi normale $N(0,1)$:

$$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Le tableau suivant résume dans le cas d’un test sur une proportion les règles de décision selon les hypothèses H_1 pour le seuil de signification α .

Hypothèse nulle : $H_0 : p = p_0$

Contre-hypothèse	Règles de décision du test
$H_1 : p \neq p_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_{\alpha/2}$ ou $Z < -z_{\alpha/2}$
$H_1 : p > p_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_{\alpha}$
$H_1 : p < p_0$	Rejeter H_0 si $Z < -z_{\alpha}$

Exemple :

Un cadre d'une société conseil affirme que 36% des entreprises ont reçu des commandes par internet. Une enquête sur le commerce électronique par les entreprises indique que sur un échantillon de 256 entreprises 96 font du commerce électronique. Peut-on considérer, au seuil de signification de 5% que l'affirmation du conseiller est vraisemblable ?

1- Hypothèse Statistique :

$$H_0 : p = 0.36$$

$$H_1 : p \neq 0.36$$

2- Seuil de signification :

$$\alpha = 0.05$$

3- Condition d'application du test :

$$np \geq 5, n(1 - p) \geq 5 \text{ et } n > 30.$$

4- La statistique :

La statistique qui convient pour le test est $\hat{p}$ l'écart réduit est

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

ou $p_0 = 0.36$ et Z suit la loi $N(0, 1)$.

5- Règle de décision :

D'après H_1 et au seuil $\alpha = 0.05$ les valeurs critiques de l'écart réduit sont : $z_{\alpha/2} = 1.96$ et $-z_{\alpha/2} = -1.96$ (test bilatéral).

On adoptera la règle de décision suivante :

Rejeter H_0 si $Z > 1.96$ ou $Z < -1.96$ sinon ne pas rejeter H_0 .

6-Calcul de l'écart réduit :

$$\hat{p} = 96/256 = 0,375 \text{ et } Z = \frac{0.375-0.36}{\sqrt{\frac{0.36(0.64)}{256}}} = 0.5$$

7- D´décision et conclusion :

Puisque la valeur prise par Z est 0.5 et que $-1.96 < 0.5 < 1.96$ on ne peut rejeter l'hypothèse nulle H_0 , donc l'affirmation déconseiller est vraisemblable au seuil de signification de $\alpha = 5\%$.

Exercices

Exercice 01:

Dans tout l'exercice, on suppose qu'il n'y a pas de répétition.

- Combien de nombre de 4 chiffres peut-on former à l'aide des 7 chiffres 1,2,4,5,6,8,9 ?
- Combien de ces nombres sont inférieurs à 5000 ?
- Combien sont pairs ?
- Combien sont impairs ?
- Combien sont des multiples de 5 ?

Exercice 02:

Soit un lot de 7 pièces dont 4 sont bonnes et 3 défectueuses.

- Combien d'échantillon de 3 pièces peut-on réaliser ?
- Combien parmi ces échantillons contiennent 3 bonnes pièces ?
- Combien au moins contiennent une pièce bonne ?

Exercice 03:

pour jouer au bridge on utilise un jeu de 52 cartes. On donne 13 cartes à chacun des 4 joueurs.

1. Quel est le nombre des donnes différentes que peut recevoir un joueur donné?
2. Quel est le nombre de donne différentes qu'un donné peut recevoir et qui contiennent :
 - Un as exactement
 - Un as et une dame exactement
 - Un roi au moins
 - Le roi de pique

Exercice 04 :

Un roi sanguinaire a imaginé le jeu suivant : il fait arrêter quelques-uns de ses sujets et les fait conduire devant un sac contenant mille jetons numérotés d'un à mille ; ils doivent alors

tirer trois fois un jeton dont on note le numéro avant de le remettre dans le sac. Le roi leur demande alors de choisir le cas dans lequel ils seront pendus : soit lorsque le produit des trois nombres est pair, soit dans le cas contraire. Quelle est la probabilité pour un sujet d'être pendu : s'il connaît le calcul des probabilités? S'il ne le connaît pas?

Exercice 05 :

On considère deux événements quelconques A et B . Exprimer en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ les probabilités conditionnelles suivantes : $P(A|A \cup B)$, $P(A|A \cap B)$ et $P(B^c|A^c)$; que devient cette dernière probabilité lorsque A et B sont indépendants?

Calcul de probabilités :

Exercice06 :

soit A et B deux événements tels que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/3$ et $P(A \cap B) = 1/8$. Calculer les probabilités de $E =$ « au moins l'un de ces événements se produit » et $F =$ « un seul de ces événements se produit ».

Probabilités conditionnelles

Exercice 07 :

On cherche une lettre qui a la probabilité p de se trouver dans l'un des quatre tiroirs d'un secrétaire. Quelle est la probabilité qu'elle se trouve dans le quatrième tiroir, sachant qu'on ne l'a pas trouvée dans les trois premiers ?

Théorème de Bayes

Exercice 08 :

On classe les gérants de portefeuille en deux catégories : ceux qui sont bien informés et ceux qui ne le sont pas. Lorsqu'un gérant bien informé achète une valeur boursière pour son client, la probabilité que le cours de celle-ci monte est de 0,8 ; dans le cas d'un gérant mal informé, cette probabilité ne vaut que 0,5. Si on choisit au hasard un gérant dans un annuaire professionnel, la probabilité qu'il soit bien informé est de 0,2. Calculer la probabilité que le gérant ainsi choisi soit mal informé, sachant que la valeur qu'il a achetée a monté. (C'est une application directe du théorème de Bayes).

Exercice 09 :

Dans la coupe de France de football, une équipe E de première division estime qu'elle gagnera si elle rencontre une équipe de division inférieure et qu'elle a une chance sur deux de gagner si c'est une équipe de première division. Sachant que la probabilité de rencontrer une équipe de division inférieure est p , calculer la probabilité que E ait rencontré une équipe de division inférieure, sachant qu'elle a remporté son match.

Après avoir traduit en termes de probabilités les informations fournies dans l'énoncé, on applique la formule de Bayes.

Variable aléatoire réelle discrète

Loi de probabilité

Exercice 10 :

On considère une urne contenant une boule blanche et deux boules noires identiques. On effectue deux tirages successifs dans cette urne, la première boule tirée étant remplacée par une boule de couleur différente. On demande de construire l'ensemble fondamental Ω associé à cette épreuve aléatoire, si on tient compte de l'ordre des tirages, et de déterminer la probabilité de chacun des événements élémentaires. En déduire la loi de probabilité de la V.A. X qui représente le nombre de boules noires tirées.

Remarque : Dans tout problème de tirages successifs, il est important d'établir s'ils sont indépendants ou non. Pour la construction de l'ensemble fondamental associé, il est recommandé de toujours tenir compte de l'ordre des tirages, même dans le cas où cela n'a aucune influence sur les événements considérés, car cela facilite généralement le calcul des probabilités de ceux-ci. La loi de probabilité d'une V.A. discrète X se déduit des probabilités des événements élémentaires, en déterminant pour toutes ses valeurs possibles x l'ensemble $X^{-1}(x)$ des événements élémentaires auxquels correspond cette même valeur x .

Exercice 11 :

Une urne contient six boules dont quatre blanches et deux noires. On extrait une boule de l'urne, puis on la remet et on effectue ensuite des tirages sans remise jusqu'à obtention d'une boule de même couleur. Déterminer la loi de probabilité du nombre X de tirages après remise de la boule tirée initialement.

Remarque : Comme dans l'exercice précédent, on note que la composition de l'urne évolue au cours des tirages qui sont sans remise, donc dépendants. Pour déterminer la loi de X , il faut d'abord déterminer l'ensemble de ses valeurs possibles et ensuite leurs probabilités. Pour cela, il est conseillé de distinguer deux cas

selon le résultat du tirage préliminaire, c'est-à-dire de déterminer la loi conditionnelle, puis de regrouper ces deux cas en appliquant la formule de la probabilité totale vue au chapitre précédent.

Espérance mathématique

Exercice 12 :

Un joueur paie une mise de cent francs pour participer à un jeu où il doit obtenir deux résultats pile successifs en quatre lancers au plus d'une pièce de monnaie. Son gain est alors $G = 20^4 - X$ pour un nombre aléatoire X de lancers. Calculer son espérance de gain.

Remarque : Une espérance mathématique se calcule par rapport à une loi de probabilité. Comme G est fonction de X qui est une v.a., c'est aussi une v.a. Pour chaque valeur possible x de X , il faut calculer la valeur correspondante du gain G et multiplier par la probabilité du résultat conduisant à ce gain et qui ne sera pas la probabilité de la valeur x . En effet, l'expression de G ne correspond qu'aux résultats qui se terminent par deux piles.

Variable aléatoire réelle continue

Fonction de répartition

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la constante k pour que f soit la densité d'une loi dont on précisera la fonction de répartition.

Remarque : Pour qu'une fonction soit une densité, il faut qu'elle soit positive et d'intégrale égale à 1. C'est cette dernière condition qui va permettre de calculer précisément la valeur de la constante

k. On détermine ensuite la f.r. en intégrant la densité de $-\infty$ à x , en choisissant x dans chacun des intervalles où l'expression de cette densité reste la même.

Loi normale

Exercice 14 :

- 1) Si X suit une loi $N(35,5)$, calculer $P(X < 25)$, $P(37,5 < X < 40)$ et $P(32,5 < X < 37,5)$.
- 2) Calculer l'espérance et la variance d'une V.A. Y de loi normale, telle que $P(Y > -3) = 0,6915$ et $P(Y < 2) = 0,9772$.

Échantillonnages

Exercice 15 :

On a une liste d'élèves comprenant **K = 36** élèves et on désire en choisir **k = 10** élèves de façon :

Aléatoire simple ; aléatoire symétrique ; aléatoire stratifié ; aléatoire par grappe.

Lisa	Michel	Jean-Simon	Alexis	Nick
Anne-Marie	• Catherine	Mylène	Valérie	Martine
Nicolas	Laurence	Maude	Cathy	Marie-Claude
Charles	Frédéric	Guillaume	• Mireille	Audrée-Gina
Anne	Samuel	21. Sandra	Fred	
Hugo	Sarah	Ariane	Brian	
Louis-Olivier	Véronique	Simon	Laurie-Anne	
Gabrielle	Natasha	Olivier	Gigi	

Solution

Exercice 01:

- 1) Le 1^{er} chiffre du nombre peut être choisi de 7 manières différentes, le 2^{ème} de 6 manières, le 3^{ème} de 5 manières, et le 4^{ème} de 4 manières. Au total il y a : $7*6*5*4=840$ manières de décrire un nombre de 4 chiffres choisi parmi les 7 chiffres cités.
- 2) Pour qu'un nombre soit inférieur à 5000 il faut que le 1^{er} chiffre soit 1, 2 ou 4. Il n'y a que 3 choix possibles.
Pour le 2^{ème} chiffre, 6 choix et le 3^{ème} chiffre, 5 choix sont possibles. Pour le 4^{ème} chiffre, il n'y a plus que 4 choix. Il y a ainsi : $3*6*5*4=360$ nombres inférieurs à 5000.
- 3) Le dernier chiffre (4^{ème}) ne peut-être que 2 ; 4 ; 6 ou 8. Il y a donc 4 façons de choisir. Le 1^{er} chiffre sera choisi de 6 manières différentes ; le 2^{ème} de 5 manières différentes ; le 3^{ème} de 4 manières différentes.
On obtient ainsi : $6*5*4*3=360$ nombres pairs.
- 4) Le même raisonnement que précédemment donne : $6*5*4*3=360$ nombres impairs.
- 5) Il y a une seule manière de choisir le dernier chiffre d'où le résultat : $6*5*4*1=120$ nombres multiples de 5.

Exercice 02:

- 1) On peut réaliser : $C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$ échantillons de 3 pièces.
- 2) Parmi ces échantillons, il y en a :
 $C_4^3 = \frac{4!}{1!3!} = 4$ qui contiennent 3 pièces bonnes.
- 3) Parmi les échantillons de 3 pièces il y en a :
 $C_4^3 + C_3^2 C_4^1 + C_3^1 C_4^2 = 31$ qui contiennent au moins une pièce bonne.

Exercice 03:

- Il faut prendre une carte parmi les 4 as et 12 cartes parmi les 48 autres cartes. La carte as étant choisie, il y a : C_{48}^{12} donne qui conviennent. Au total on a :

$$n_1 = C_4^1 C_{48}^{12} \text{ qui contiennent un as exactement.}$$

- On prend une carte as parmi les 4 as, une carte dame parmi les 4 dames et 11 cartes parmi les 44 restantes. Donc on a :

$$n_2 = C_4^1 C_4^1 C_{44}^{11} \text{ donne qui contiennent un as et une dame.}$$

Soit le nombre de donnes qui ne contiennent aucun roi : C_{52}^{13}

- Soit le nombre de donnes totales : C_{48}^{13}

D'où : $n_3 = C_{52}^{13} - C_{48}^{13}$ Le nombre de donnes différentes qui contiennent un as au moins.

- Le roi de pique fait partie de la donne considérée, il faut encore choisir 12 cartes parmi les 51 restantes. Au total il y a : $n_4 = C_1^1 C_{51}^{12}$ donnes qui contiennent le roi de pique.

Exercice 04 :

Pour que le produit soit impair, il faut que chacun des nombres soit impair. Le sujet qui connaît le calcul des probabilités sait donc que $P(\text{impair}) = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$ et il choisira donc d'être pendu (événement noté PE) si le résultat est impair. Dans le cas contraire, le choix pair (P) ou impair (I) se fait au hasard, la probabilité d'être pendu étant alors calculée par la formule de la probabilité totale : $P(PE) = P(P)P(PE/P) + P(I)P(PE/I) = (1/2 \times 7/8) + (1/2 \times 1/8) = 1/2$ D'où l'intérêt parfois de connaître le calcul des probabilités !

Exercice 05 :

Il suffit d'appliquer la formule de Bayes et de remarquer que $A \subset A \cup B$:

$$P(A|A \cup B) = P(A)/P(A \cup B) = P(A)/[P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \geq P(A)$$

Savoir que A ou B est déjà réalisé augmente la probabilité de A . Si A et B sont réalisés, l'événement A l'est bien sûr et on peut vérifier que $P(A|A \cap B) = 1$.

En appliquant à nouveau la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(\bar{A}|\bar{B}) &= \frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(A \cup B)}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(A \cap B)}{1 - P(A)} \\ &= 1 - \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} \end{aligned}$$

A^- et B^- sont aussi indépendants, dans ce cas : $P(B^-|A^-) = P(B^-)$.

Exercice 06:

Les événements considérés sont $E = A \cup B$ et $F = (A \cap B^-) \cup (A^- \cap B)$ dont les probabilités se calculent par :

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 19/24$$

$$P(F) = P(A \cap B^-) + P(A^- \cap B) = P(E) - P(A \cap B) = 2/3$$

Exercice 07 :

On note A l'événement « la lettre est dans le quatrième tiroir » et B l'événement « la lettre n'est pas dans les trois premiers tiroirs ». La définition de la probabilité conditionnelle conduit à :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Chaque tiroir a la même probabilité de contenir la lettre, si celle-ci est dans l'un d'entre eux, donc $P(A \cap B) = p \times 1/4$.

On calcule ensuite $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ avec bien sûr $P(A^c \cap B) = 1 - p$. Ainsi :

$$P(A/B) = \frac{p/4}{p/4 + 1 - p} = \frac{p}{4 - 3p}$$

Notons que $p/4 < P(A/B) < p$ avec $P(A/B) = 0$ si $p = 0$ et $P(A/B) = 1$ si $p = 1$

Exercice 08 :

Notons MI (resp. BI) l'événement « le gérant est mal (resp. bien) informé » et M l'événement « la valeur a monté ». Les hypothèses formulées se traduisent par les probabilités $P(BI) = 0,2$, $P(M|BI) = 0,8$ et $P(M|MI) = 0,5$. On obtient alors par application de la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(MI/M) &= \frac{P(MI \cap M)}{P(MI)} \\ &= \frac{P(MI)P(M|MI)}{P(MI)P(M|MI) + P(BI)P(M|BI)} \\ &= \frac{0.8 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 + 0.2 \times 0.8} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Exercice 09 :

Soit A l'événement « l'équipe E a rencontré une équipe de première division » et G l'événement « l'équipe E a gagné son match ». Par hypothèse $P(A^c) = p$, $P(A) = 1 - p$, $P(G|A) = 1/2$ et $P(G|A^c) = 1$. La formule de Bayes permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A}/G) &= \frac{P(\bar{A} \cap G)}{P(G)} = \frac{P(\bar{A})P(G/\bar{A})}{P(A)P(G/A) + P(\bar{A})P(G/\bar{A})} \\
 &= \frac{p}{(1-p)/2 + p} = \frac{2p}{p+1}
 \end{aligned}$$

Le résultat est une fonction croissante de p , de la valeur 0 pour $p = 0$ à la valeur 1 pour $p = 1$.

Exercice 10 :

La composition initiale de l'urne est $\{B, N, N\}$ et selon que la première boule tirée sera B ou N , les compositions respectives avant le second tirage seront $\{N, N, N\}$ ou $\{B, B, N\}$. Dans le premier cas, seul le résultat (BN) est possible, alors que dans le second cas on peut avoir (NB) ou (NN) . Ceci correspond donc à l'ensemble fondamental $\Omega = \{(BN), (NB), (NN)\}$. Les tirages sont bien sûr dépendants ici puisque la composition de l'urne dépend du tirage précédent. Pour le calcul des probabilités des événements élémentaires, nous allons noter B_i (resp. N_i) l'événement « avoir tiré une boule blanche (resp. Noire) au i -ème tirage », avec $i = 1$ ou 2 .

On obtient alors aisément $P(BN) = P(B^1) P(N_2|B_1) = 1/3 \times 1 = 1/3$

$$P(NB) = P(N^1) P(B_2|N_1) = 2/3 \times 2/3 = 4/9$$

$$\text{et } P(NN) = P(N_1)P(N_2|N_1) = 2/3 \times 1/3 = 2/9$$

L'ensemble fondamental nous indique que X ne peut prendre comme valeurs que 1 ou 2, avec $X^{-1}(1) = \{(BN), (NB)\}$ et $X^{-1}(2) = \{(NN)\}$ et par conséquent : $P(X = 1) = P(BN) + P(NB) = 7/9$

$$P(X = 2) = P(NN) = 2/9$$

Exercice 11 :

Si la boule tirée initialement est blanche, comme il n'y a que deux noires, il y aura au maximum trois tirages. Nous noterons B_i (resp. N_i) l'événement « avoir tiré une boule blanche (resp. noire) au i -ème tirage », avec $0 \leq i \leq 5$. La loi de X , conditionnellement à B_0 , se détermine par :

$$P(X = 1|B_0) = P(B_1) = 4/6 = 10/15$$

$$P(X = 2|B_0) = P(N_1 B_2) = 2/6 \times 4/5 = 4/15$$

$$P(X = 3|B_0) = P(N_1 N_2 B_3) = 2/6 \times 1/5 \times 4/4 = 1/15$$

Notons au passage que la somme de ces probabilités conditionnelles est bien égale à 1.

Si la boule tirée initialement est noire, il peut y avoir cette fois jusqu'à cinq tirages avant d'obtenir une noire, puisqu'il y a quatre blanches. La loi conditionnelle est définie par :

$$P(X = 1|N_0) = P(N_1) = 2/6 = 5/15$$

$$P(X = 2|N_0) = P(B_1 N_2) = 4/6 \times 2/5 = 4/15$$

$$P(X = 3|N_0) = P(B_1 B_2 N_3) = 4/6 \times 3/5 \times 2/4 = 3/15$$

$$P(X = 4|N_0) = P(B_1 B_2 B_3 N_4) = 4/6 \times 3/5 \times 2/4 \times 2/3 = 2/15$$

$$P(X = 5|N_0) = P(B_1 B_2 B_3 B_4 N_5) = 4/6 \times 3/5 \times 2/4 \times 1/3 \times 2/2 = 1/15$$

La loi de X se déduit de la formule de la probabilité totale en décomposant l'événement $(X = x)$ sur B_0 et N_0 , avec pour $x \in X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$P(X = x) = P(B_0) P(X = x|B_0) + P(N_0) P(X = x|N_0)$$

$$\text{Soit } P(X = 1) = 2/3 \times 10/15 + 1/3 \times 5/15 = 5/9$$

$$P(X = 2) = 2/3 \times 4/15 + 1/3 \times 4/15 = 4/15$$

$$P(X = 3) = 2/3 \times 1/15 + 1/3 \times 3/15 = 1/9$$

$$P(X = 4) = 1/3 \times 2/15 = 2/45$$

$P(X = 5) = 1/3 \times 1/15 = 1/45$. On vérifie à nouveau que la somme de ces probabilités est égale à 1.

Exercice 12 :

Les valeurs possibles de X sont 2, 3 et 4, avec un gain qui sera associé seulement aux résultats correspondants PP , FPP et $FFPP$ ou $PFPP$ de probabilités respectives $1/2^2$, 12^3 et $1/2^4$. On obtient donc comme espérance de gain, en tenant compte de la mise initiale de 100 francs :

$$E(G) = 1/2^2 \times 20^{4-2} + 1/2^3 \times 20^{4-3} + 2/2^4 \times 20^{4-4} - 100 = 21/8$$

Exercice 13 :

L'intégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$ se réduit à :

$$k \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{k}{2}$$

qui vaut 1 pour $k = 2$.

Pour $x \leq 0$, la densité est nulle et donc $F(x) = 0$. Pour $0 < x \leq 1$, on décompose l'intervalle d'intégration de f en deux :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + 2 \int_0^x (1 - t) dt = 2x - x^2$$

Enfin, pour $x > 1$ on décompose en trois intégrales qui correspondent aux trois intervalles où f conserve la même expression :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + 2 \int_{-\infty}^1 (1-t)dt + \int_1^x 0dt = 1$$

Exercice 14 :

1-On retranche 35 puis on divise par 5 pour pouvoir ensuite utiliser la table1 (Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite) :

$$P(X < 25) = P(X - 35 < -10) = P\left(\frac{X - 35}{5} < -2\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 0,0228$$

$$\begin{aligned} P(X < 25) &= P\left(\frac{X - 35}{5} < -2\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi $N(0, 1)$. On obtient par le même procédé : $P(37,5 < X < 40) = \Phi(1) - \Phi(0,5) = 0,1498$

$$\text{Et : } P(32,5 < X < 37,5) = \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) = 2\Phi(0,5) - 1 = 0,3830$$

2-Les valeurs fournies pour les probabilités figurent dans la table1(Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite), associées aux nombres 0,5 et 2. En centrant sur $m = E(Y)$ puis divisant par $\sigma = \sqrt{V(Y)}$, les hypothèses se traduisent donc par :

$$\begin{aligned} P(Y > -3) &= P\left(\frac{Y - m}{\sigma} > \frac{-3 - m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-3 - m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(0.5) \end{aligned}$$

$$P(Y > -2) = P\left(\frac{Y - m}{\sigma} > \frac{2 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2 - m}{\sigma}\right) = \Phi(2)$$

Ce qui conduit au système :

$$\frac{-3 - m}{\sigma} = -0,5 \text{ et } \frac{2 - m}{\sigma} = 2$$

de solution $m = -2$ et $\sigma = 2$

Exercice15 :

Échantillonnage aléatoire simple

On a une liste d'élèves comprenant **$K= 36$ élèves** et on désire en choisir **$k = 10$ élèves de façon aléatoire simple**.

1. On numérote de **1 à K** , c'est-à-dire de **1 à 36** les prénoms des élèves, ce qui donne :

1. Lisa	9. Michel	17. Jean-Simon	25. Alexis	33. Nick
2. Anne-Marie	10. Catherine	18. Mylène	26. Valérie	34. Martine
3. Nicolas	11. Laurence	19. Maude	27. Cathy	35. Marie-Claude
4. Charles	12. Frédéric	20. Guillaume	28. Mireille	36. Audrée-Gina
5. Anne	13. Samuel	21. Sandra	29. Fred	
6. Hugo	14. Sarah	22. Ariane	30. Brian	
7. Louis-Olivier	15. Véronique	23. Simon	31. Laurie-Anne	
8. Gabrielle	16. Natasha	24. Olivier	32. Gigi	

2. On sélectionne de façon aléatoire **$k = 10$ numéros entre 1 et 36 inclusivement**, c'est-à-dire qu'on sélectionne :

- un premier numéro entre **1 et 36**, ce qui donne par exemple **16** ;

- un deuxième numéro entre **1** et **36**, différent du précédent, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de **10** numéros différents, ce qui donne par exemple la série : 16, 22, 30, 12, 29, 20, 13, 18, 26 et 8.
- 3. On constitue l'échantillon en retenant l'élève correspondant à chaque numéro, ce qui donne les 10 élèves suivants :
 - (1) 16 : Natasha
 - (2) 22 : Ariane
 - (3) 30 : Brian
 - (4) 12 : Frédéric
 - (5) 29 : Fred
 - (6) 20 : Guillaume
 - (7) 13 : Samuel
 - (8) 18 : Mylène
 - (9) 26 : Valérie
 - (10) 8 : Gabrielle

Échantillonnage aléatoire symétrique

On a une liste d'élèves comprenant **K = 36** élèves et on désire en choisir **k = 10** élèves de façon aléatoire systématique.

1. On numérote de **1** à **K**, c'est-à-dire de **1** à **36** les prénoms des élèves, ce qui donne : (tableau n°01)

2. On détermine le pas de sondage, désigné par a , donné par : $a = K / k$ puisqu'on a ici 36 élèves et qu'on désire en sélectionner 10, le pas de sondage a est donné par: $a = 36/10 \approx 3,6$

Ce qui amène à choisir comme pas de sondage l'entier suivant immédiatement 3,6, c'est-à-dire $a = 4$.

3. Le pas de sondage étant égal à 4, on détermine le point de départ, désigné par d , en choisissant au hasard un nombre entre 1 et 4, ce qui donnerait par exemple 3.
4. On constitue l'échantillon en retenant l'élève correspondant à chaque numéro désigné par :

- (1) d ,
- (2) $d + a$,
- (3) $d + (2 \times a)$,

et ainsi de suite jusqu'à obtention des k élèves requis, ce qui donne les 10 élèves suivants :

- (1) 3 : Nicolas
- (2) $3 + 4 = 7$: Louis-Olivier
- (3) $3 + (2 \times 4) = 11$: Laurence
- (4) $3 + (3 \times 4) = 15$: Véronique
- (5) $3 + (4 \times 4) = 19$: Maude
- (6) $3 + (5 \times 4) = 23$: Simon
- (7) $3 + (6 \times 4) = 27$: Cathy
- (8) $3 + (7 \times 4) = 31$: Laurie-Anne
- (9) $3 + (8 \times 4) = 35$: Marie-Claude

- (10) $3 + (9 \times 4) = 39$: comme il n'y a que 36 élèves, on poursuit en reprenant au début de la liste, ce qui donne à nouveau Nicolas. On convient alors de prendre le suivant, c'est-à-dire Charles.

Échantillonnage aléatoire stratifié

On a une liste d'élèves comprenant **K = 36** élèves et on désire en choisir **k** = 12 élèves de façon aléatoire stratifiée selon le sexe.

1. La variable à prendre en considération est le sexe, d'où les catégories ou strates : Filles et Garçons.

2. On numérote séparément les filles et les garçons.

Pour pouvoir distinguer les deux strates, on fait précéder du code **F**- le numéro associé à chacune des filles et du code **G** - le numéro associé à chacun des garçons, ce qui donne :

2. Le nombre d'élèves de chaque strate, c'est-à-dire de chaque sexe qui sera requis dans l'échantillon, est donné par : $ks = (Ks/K) \times k$ où :

ks = le nombre entier (arrondi au besoin) d'éléments de la strate *S* requis dans l'échantillon

k = la taille de l'échantillon désirée

Ks = le nombre d'éléments constituant la strate *S* dans la base de sondage

K = la taille de la base de sondage.

Puisqu'on a ***KF = 21 filles*** dans la base de sondage sur ***K = 36 élèves*** et qu'on désire un échantillon de ***k = 12 élèves***, le nombre de filles requis dans l'échantillon est donné par :

$$kF = (21/36)\times 12 = 7 \text{ filles.}$$

F-1. Lisa	G- 5. Michel	G-8. Jean-Simon	G-12.Alexis	G-15. Nick
F-2.Anne-Marie	F-5.Catherine	F-10. Mylène	F-14. Valérie	F.19.Martine
G-1. Nicolas	F-6. Laurence	F-11. Maude	F-15. Cathy	F20.Marie-Claude
G-2. Charles	G-6. Frédéric	G-9. Guillaume	F-16. Mireille	F21.Audrée-Gina
F-3.Anne	G-7.Samuel	F-12.Sandra	G- 13. Fred	
G-3. Hugo	F-7. Sarah	G-13. Ariane	G-14. Brian	
G-4.Louis-Olivier	F- 8. Véronique	G-10. Simon	F17.Laurie Anne	
F4.Gabrielle	F-9.Natasha	G-11. Olivier	F-18. Gigi	

On aura donc 12 élèves – 7 filles = 5 garçons dans l'échantillon, ce qui correspond à :

$$kG = (15/36) \times 12 = 5 \text{ garçons.}$$

3. On sélectionne de façon aléatoire 7 filles et 5 garçons ; on peut procéder de façon simple ou systématique : (l'un ou l'autre des modes de sélection est acceptable).

A-Sélection simple :

- **Filles** : on choisit au hasard 7 numéros différents entre 1 et 21, ce qui donne 1, 5, 15, 21, 11, 13 et 9 ;
- **Garçons** : on choisit au hasard 5 numéros différents entre 1 et 15, ce qui donne 11, 10, 2, 15 et 7.

B-Sélection systématique :

- **Filles** : Le pas de sondage a est donné par : $a = 21 / 7 = 3$.
 - On choisit au hasard le point de départ d entre 1 et 3, ce qui donne par exemple 1.
 - **Garçons** : Le pas de sondage a est donné par : $a = 15 / 5 = 3$.
 - On choisit au hasard le point de départ d entre 1 et $a = 3$, ce qui donne par exemple 3
5. On constitue l'échantillon en sélectionnant les élèves correspondant aux numéros suivant

Sélection simple :

Filles

- (1) F-1 : Lisa
- (2) F-5 : Catherine
- (3) F-15 : Cathy
- (4) F-21 : Audrée-Gina
- (5) F-11 : Maude
- (6) F-13 : Ariane
- (7) F-9 : Natasha

Garçons

- (8) G-11 : Olivier
- (9) G-10 : Simon
- (10) G-2 : Charles
- (11) G-15 : Nick
- (12) G-7 : Samuel

Sélection systématique :

Filles

- (1) $1 \Rightarrow$ F-1 : Lisa
- (2) $1 + 3 = 4 \Rightarrow$ F-4 : Gabrielle
- (3) $1 + (2 \times 3) = 7 \Rightarrow$ F-7 : Sarah
- (4) $1 + (3 \times 3) = 10 \Rightarrow$ F-10 : Mylène

(5) $1 + (4 \times 3) = 13 \Rightarrow \text{F-13 : Ari}$

(6) $1 + (5 \times 3) = 16 \Rightarrow \text{F-16 : Mireille}$

(7) $1 + (6 \times 3) = 19 \Rightarrow \text{F-19 : Martine}$

Garçons

(8) $3 \Rightarrow \text{G-3 : Hugo}$

(9) $3 + 3 = 6 \Rightarrow \text{G-6 : Frédéric}$

(10) $3 + (2 \times 3) = 9 \Rightarrow \text{G-9 : Guillaume}$

(11) $3 + (3 \times 3) = 12 \Rightarrow \text{G-12 : Alexis}$

(12) $3 + (4 \times 3) = 15 \Rightarrow \text{G-15 : Nick}$

Échantillonnage aléatoire par grappe

On a une liste de **$k = 9$ équipes**, c'est-à-dire **9 grappes de 4 élèves**, et on désire constituer un échantillon de **$n = 12$ élèves**.

1. On numérote de **1 à K** , c'est-à-dire de **1 à 9** les différentes équipes constituant les grappes, ce qui donne :

2. Le nombre **k** de grappes requis est donné par :

$$k = n / \text{Nombre d'unités statistiques par grappes}$$

d'où : **$k = 12 / 4 = 3$ grappes**.

2. On sélectionne de façon aléatoire **$k = 3$ grappes sur 12** ; on peut procéder de façon simple ou systématique : (l'un ou l'autre des modes de sélection est acceptable).

1 Lisa Anne-Marie Nicolas Charles	3 Michel Catherine Laurence Frédéric	5 Jean-Simon Mylène Maude Guillaume	7 Alexis Valérie Cathy Mireille	9 Nick Martine Marie- Claude Audrée- Gina
2 Anne Hugo Louis- Olivier Gabrielle	4 Samuel Sarah Véronique Natasha	6 Sandra Ariane Simon Olivier	8 Fred Brian Laurie- Anne Gigi	

A-Sélection simple :

On choisit au hasard 3 numéros différents entre 1 et 9, ce qui donne 1,8 et 4.

B-Sélection systématique :

Le pas de sondage a est donné par :

$$a = K = \text{Nombre de grappes} / k = \text{Nombre de grappes désiré}$$

d'où : $a = 9 / 3 = 3$.

On choisit au hasard le point de départ d entre 1 et $a = 3$, ce qui donne par exemple 2.

3. On constitue l'échantillon en sélectionnant les élèves faisant partie des grappes correspondant aux numéros suivants :

Sélection simple

Grappe 1 :

Lisa

Anne-Marie

Nicolas

Charles

Grappe 8 :

Fred

Brian

Laurie-Anne

Gigi

Grappe 4 :

Samuel

Sarah

Véronique

Natasha

Sélection systématique

Grappe 2 :

Anne

Hugo

Louis-Olivier

Gabrielle

Grappe 2 + 3 = 5 :

Jean-Simon

Mylène

Maude

Guillaume

Grappe $2 + (2 \times 3) = 8$:

Fred

Brian

Laurie-Anne

Gigi

Petit Lexique Français-Anglais-Arabe de Statistique		
Amplitude d'une classe	Class width	طول الفئة
ANOVA (Analyse de variance)	ANOVA(Analysis of Variance)	تحليل التباين
Asymétrie	Skewness	الالتواء
Aplatissement (kurtosis)	Kurtosis	التقرطح
Borne inférieure	Lower bound	حد أدنى
Borne supérieure	Upper bound	حد أعلى
Calcul des probabilités	Probability calculation	حساب الاحتمالات
Caractère	Attribute	ميزة
Caractéristiques de dispersion	Measures of dispersion	مقاييس التشتت
Caractéristiques de tendance centrale	Measures of central tendency	مقاييس النزعة المركزية
Corrélation	Correlation	الارتباط
Distribution des effectifs	Frequency distribution	توزيع تكراري
Distribution marginale	Marginal distribution	توزيع هامشي
Distribution simple	Simple distribution	توزيع بسيط
Distribution uniforme	Uniform distribution	توزيع منتظم
Distribution normale	Normal distribution	التوزيع الطبيعي
Distribution t de Student	Student's t-distribution	توزيع ت ستودنت

Distribution du khi-deux (χ^2)	Chi-square distribution (χ^2)	توزيع كاي-تربيع (χ^2)
Distribution exponentielle	Exponential distribution	التوزيع الأسّي
Distribution binomiale	Binomial distribution	التوزيع ذو الحدين
Distribution de Poisson	Poisson distribution	توزيع بواسون
Distribution gamma	Gamma distribution	التوزيع غاما
Distribution bêta	Beta distribution	التوزيع بيتا
Distribution log-normale	Log-normal distribution	التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي
Distribution Fisher	Fisher's F-distribution	توزيع فيشر
Espérance mathématique	Mathematical expectation	امل رياضي
Écart-type	Standard deviation	انحراف معياري
Estimation	Estimation	تقدير
Étendue	Range	مدى
Impair	Odd	فردى
Incertitude	Uncertainty	عدم التيقن
Incompatible	Incompatible	متنافى
Indicateur statistique	Statistical indicator	مؤشر إحصائي
Individu	Individual	أثر
Intensité d'une liaison	Strength of association	قوة العلاقة
Interpolation linéaire	Linear interpolation	استقطاب خطي

Interprétation des données	Data interpretation	تفسير البيانات
Intervalle de confiance	Confidence interval	فترة الثقة
Médiane	Median	الوسيط
Mode	Mode	منوال
Moyenne arithmétique pondérée	Weighted arithmetic mean	وسط حسابي متوازن
Moyenne géométrique	Geometric mean	وسط هندسي
Moyenne harmonique	Harmonic mean	وسط توافقي
Moyenne quadratique	Quadratic mean	وسط رباعي
Nombre entier	Integer	عدد صحيح
Niveau de signification	Level of significance	مستوى الدلالة
Pair	Even	زوجي
P-valeur (p-value)	P-value	القيمة الاحتمالية (قيمة P)
Qualitatif	Qualitative	وصفي أو نوعي
Quantitatif	Quantitative	كمي
Quartile	Quartile	رُبيع
Questionnaire	Questionnaire	استمارة استبيان
Régression linéaire	Linear regression	الانحدار الخطي
hypothèse	Hypothesis	الفرضية
Série statistique à deux variables	Bivariate statistical series	سلسلة إحصائية ذات متغيرين
Statistique inférentielle	Inferential statistics	إحصاء استدلالي

Tableau de contingence	Contingency table	جدول ذو مدخلين
Uniforme	Uniform	منتظم
Unité statistique	Statistical unit	وحدة إحصائية
Unités de mesure	Units of measurement	وحدات القياس
Valeur absolue	Absolute value	قيمة مطلقة
Variable continue	Continuous variable	متغير متصل
Variable dépendante	Dependent variable	متغير تابع
Variable discrète	Discrete variable	متغير منفصل
Variable explicative	Explanatory variable	متغير مُفسر
Variable indépendante	Independent variable	متغير مستقل
Variance	Variance	تباين

Bibliographie

- DROESBEKE. J.J. Elément de statistique, édition de l'université libre de Bruxelles Ellipses, Bruxelles, 1997.
- GOLDFARB BERNARD, PARADOUX CATHRINE : introduction a la statistique, 6eme édition, France, 2011.
- Husson F. (2013) ; et Pagès J., Statistique générale pour utilisateurs : 2) Exercices et corrigés, PUR .
- KEDJDAL KACI : Cours de probabilitésG. Saporta : probabilités, Analyse des données et statistiques. Edition Technip. 1990.
- MALIKA BOUKELLA-BOUZOUANE, statistique descriptive, édition Casbah, 2008.
- Monfort A., (1982) ; Cours de statistique mathématique, Economica
- MONILA JEAN LOUIS, KOSIANSKI MICHEL : TD de statistique descriptive, 4^{eme} édition, Broché, France, 2010.
- MURRAY R. SPIEGEL, SERIE SCHAUUM, théorie et application de la statistique, édition française par : ALAIN.E et JEAN .F.M, 1991.
- Pagès J., (2010) ; Statistique générale pour utilisateurs : 1) Méthodologie, PUR.
- PHILIPPE TASSI : Méthodes statistiques 2e Eddition , Economica 1989..
- PIERRE BAILLY, «l'économie et les chiffre» Exercice corrigés de statistique descriptive, PUG, 1990.

- Saporta G., (2011) ; Probabilités, analyse des données et statistique Editions TECHNIP.
- SAYAH ABDALLAH : Cours de probabilités et statistiques 2. (PS2) 4^e DES Mathématiques.
- Wonnacott H. et Wonnacott J., (1999) ; Statistique : économie-gestion-sciences-médecine, Economica.

Description de l'ouvrage :

L'objectif de cet ouvrage est de donner les connaissances essentielles en probabilités pour les étudiants en économie et en sciences sociales et humaines en général. Ce polycopié présente les notions fondamentales des probabilités, les lois usuelles à valeurs réelles et donne les outils pour caractériser et calculer des lois. Nous aborderons les statistiques inférentielles, y compris ce qu'elles sont, comment elles fonctionnent et quelques exemples.

Objectifs du cours :

- D'évaluer la probabilité d'événements en recourant à l'analyse combinatoire ou aux principales lois de probabilité.
- De construire la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète et d'en calculer l'espérance et la variance de normaliser des données.
- D'utiliser correctement les tables des lois binomiales, de Poisson, normale, de Student et du khi carré,
- D'estimer une moyenne ou une proportion par intervalle de confiance,
- D'effectuer des tests d'hypothèses (moyenne, proportion, comparaison de deux moyennes, comparaison de deux proportions, d'ajustement) en respectant leurs conditions d'application en ce qui a trait notamment à la taille ou au type (indépendants ou appariés) des échantillons

Mots clés :

Loi normale ; loi de poisson ; loi binomiale ; teste d'hypothèse ; corrélation

Description:

The objective of the work is to give the essential knowledge of probability for students in economics and the social sciences and humanities in general. This handout presents the fundamental concepts of probabilities, the usual real-valued distributions and gives the tools to characterize and calculate distributions. We'll discuss inferential statistics, including what they are, how they work, and some examples.

Objectives:

- Evaluate the probability of events using combinatorial analysis or major probability distributions.
- To construct the probability distribution of a discrete random variable and to calculate its expectation and variance to normalize the data.
- Correctly use the tables of binomial distribution, Poisson, normal, Student's and chi-square,
- Estimate a mean or proportion per confidence interval,
- Perform hypothesis tests (mean, proportion, comparison of two means, comparison of two proportions, fitting) in accordance with their conditions of application, particularly with regard to the size or type (independent or matched) of the samples

Keywords:

Normal distribution; Poisson distribution; Binomial distribution; Hypothesis testing; Correlation

وصف الكتاب:

معظم النظريات والطرق الاحصائية بنيت من الاساس على علم الاحتمالات. تعتبر نظرية الاحتمالات الخلفية الرياضية للطرق الاحصائية لأنها همزة وصل بين الاحصاء الوصفي (الذي يعالج السلاسل والبيانات) والتحليل الاحصائي الذي يعتبر المعالم الاحصائية كمؤشرات غير مباشرة لقيم حقيقية مقاسة بالمعاينة. اذا النظرية الاحتمالية هي فرع من فروع الرياضيات المطبقة و الذي يهتم بدراسة الظواهر العشوائية . ويلعب دورا مهم في مسائل المعاينة و التقدير و التنبؤ. النظرية الاحتمالية هي فرع من فروع الرياضيات المطبقة حيث تستخدم الكثير من المفاهيم الرياضية مثل : التكامل و الاشتقاق و النهايات....الخ.وهي العلم الذي يدرس الظواهر العشوائية و يحللها الى نتائج ثم يبني على اساس هذه النتائج توقعات مستقبلية (التنبؤ)

الاهداف:

- تقييم احتمال الأحداث باستخدام التحليل التوافقي أو التوزيعات الاحتمالية الرئيسية.
- بناء التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل وحساب توقعه وتباينه لتطبيع البيانات.
- استخدام بشكل صحيح جداول التوزيع ذي الحدين ، بواسون ، ومربع كاي ،
- تقدير متوسط أو نسبة لكل مجال ثقة
- إجراء اختبارات الفرضيات (الوسط الحسابي ، النسبة ، المقارنة بين وسيلتين ، مقارنة نسبتي ، التركيب) وفقا لشروط تطبيقها ، خاصة فيما يتعلق بحجم أو نوع العينات (مستقلة أو متطابقة)

الكلمات المفتاحية:

التوزيع الطبيعي، التوزيع ذي الحدين ، بواسون، اختبار الفرضيات، الارتباط.

L'objectif de cet ouvrage est de donner les connaissances essentielles en probabilités pour les étudiants en économie et en sciences sociales et humaines en général. Ce polycopié présente les notions fondamentales des probabilités, les lois usuelles à valeurs réelles et donne les outils pour caractériser et calculer des lois. Nous aborderons les statistiques inférentielles, y compris ce qu'elles sont, comment elles fonctionnent et quelques exemples.

Objectifs du cours :

- D'évaluer la probabilité d'évènements en recourant à l'analyse combinatoire ou aux principales lois de probabilité.
- De construire la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète et d'en calculer l'espérance et la variance de normaliser des données.
- D'utiliser correctement les tables des lois binomiales, de Poisson, normale, de Student et du khi carré,
- D'estimer une moyenne ou une proportion par intervalle de confiance,
- D'effectuer des tests d'hypothèses (moyenne, proportion, comparaison de deux moyennes, comparaison de deux proportions, d'ajustement) en respectant leurs conditions d'application en ce qui a trait notamment à la taille ou au type (indépendants ou appariés) des échantillons

Mots clés :

Loi normale ; loi de poisson ; loi binomiale ; teste d'hypothèse ; corrélation

• Adresse: Batna Algérie.
• Tél : 06.71.82.78.76
• E-mail : editionjouda@gmail.com



JOUDA
EDITION



ISBN: 978-9969-00-930-9



9 789969 009309

توزيع
zakaria

