جامعة وهران 2
محمد بن احمد
Université d'Oran 2
Mohamed Ben Ahmed

جامـــعة وهـــران 2

كلية العلوم اقتصادية التجارية و علوم التسيير

مطبوعة

النمذجـــــة الإحصائيـــــة

موجهة لطلبة الماستر تخصص: إدارة موارد بشرية

مقدمة من طرف :

الدكتورة بن رمضان أنيسة

أستاذ محاضر قسم – أ –

أ. د. رقيف - اسعد دريس
رئيس المجلس العلمي للكلية
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير
جامعة وهران 2 – محمد بن أحمد

السنة 2025/2024

جامـــعة وهـــران 2

كلية العلوم اقتصادية التجارية و علوم التسيير

<u>مطبوعة</u>

النمذجـــــة الإحصائيـــــــة

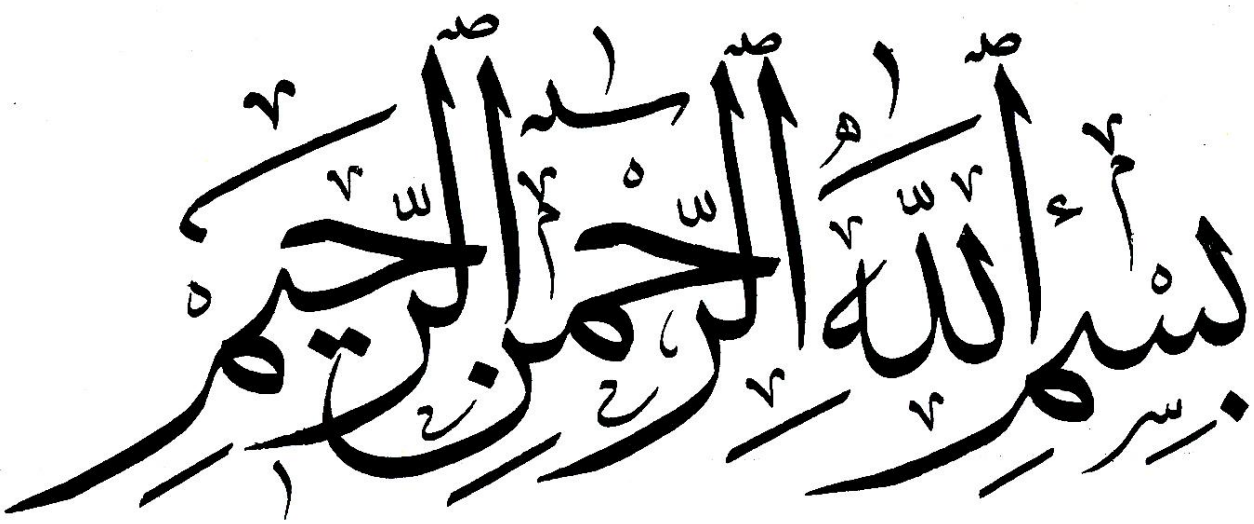
موجهة لطلبة الماستر تخصص: إدارة موارد بشرية

<u>مقدمة من طرف :</u>

الدكتورة بن رمضان أنيسة

أستاذ محاضر قسم – أ –

السنة 2025/2024


بسم الله الرحمن الرحيم

يتضمن علم الاقتصاد العديد من العلوم الفرعية المهمة، ومن أبرزها النماذج الإحصائية، التي تعتبر جزءا أساسيا من الاقتصاد بشكل عام .تلعب هذه النماذج دورا مهما في تدريب الاقتصاديين الذين تعلموا المفاهيم الاقتصادية وكيفية التعامل مع النماذج الاقتصادية لدراسة مختلف الظواهر الاقتصادية .تعتمد النماذج الإحصائية على الأساليب الإحصائية لتقدير العلاقات الاقتصادية، واختبار النظريات الاقتصادية، وتقييم وتنفيذ السياسات الحكومية وقرارات رجال الأعمال .من أكثر التطبيقات شيوعا لهذه النماذج هو التنبؤ بالمتغيرات الاقتصادية الكلية المهمة مثل أسعار الفائدة ومعدلات التضخم والناتج المحلي الإجمالي فعادة ما تكون توقعات المؤشرات الاقتصادية واضحة للغاية وتنتشر على نطاق واسع.

تركز النماذج الإحصائية بشكل عام على أساليب القياس في مجال الاقتصاد، ولكن توجد عمليات قياس في الاقتصاد لا يمكن اعتبارها ضمن إطار القياس الاقتصادي كفرع متخصص .على سبيل المثال، عندما نقيس إنتاجية أحد عوامل الإنتاج بالطرق التقليدية مثل تقسيم كمية العامل على عدد الوحدات المنتجة، فإن ذلك لا يعتبر ضمن القياس الاقتصادي، بالرغم من ارتباطه بعملية قياس في المجال الاقتصادي .لذا من الضروري توضيح مفهوم النماذج الإحصائية بشكل أدق، حيث أن الهدف الأساسي لاستخدامها في الأبحاث هو قياس العلاقة بين متغير تابع، الذي يمثل الظاهرة المعنية بالدراسة، ومتغير أو أكثر كمفسر لهذه العلاقة .يتم هذا من خلال بناء نماذج اقتصادية تظهر الارتباط بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة.

تعد هذه المطبوعة سندا بيداغوجيا لأبنائنا الطلبة وزملائنا الأساتذة في مقياس النمذجة الإحصائية، و قد تم إعدادها بناء على ما احتواه دفتر شروط عرض التكوين في تخصص إدارة الأعمال، فرع علوم التسيير، مع الإشارة إلى أنه احتوى على مواضيع فرعية إضافية تخدم الهدف البيداغوجي للتكوين في هذا التخصص وتخصصات أخرى .

تشتمل هذه المطبوعة على ستة محاضرات متسلسلة بطريقة سلسلة تسهل فهم القارئ للمادة:

المحاضرة الأولى: خصص لتقديم الإطار العام للنمذجة الإحصائية .

المحاضرة الثانية: تناولنا فيه مختلف المفاهيم المتعلقة بتحليل الانحدار البسيط، حيث تم التطرق إلى تمثيل سحابة النقط، حساب المتوسطات، حساب المقدرات، كتابة النموذج المقدر، حساب الأخطاء العشوائية، حساب تباين البواقي، حساب تباين المقدرات، بناء مجالات الثقة للمعالم، قراءة القيمة الحرجة مباشرة من جدول ستيودنت و اختبار الفرضيات.

المحاضرة الثالثة:خصص لتقديم الإطار العام لتحليل الانحدار المتعدد من خلال التطرق إلى ماهية النموذج الخطي المتعدد، القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ، تباين العناصر العشوائية و التباين المشترك، مصفوفة التباين والتباين المشترك، طرق تقدير معلمات النموذج واختبار الفرضيات.

المحاضرة الرابعة: فخصص لتقديم العديد من التقنيات المستخدمة في تحليل الارتباط الذاتي من خلال دراسة الارتباط الذاتي بين الأخطاء، أسباب الارتباط الذاتي، النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي للأخطاء، اختبار وجود الارتباط الذاتي ومعالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

المحاضرة الخامسة: تم تخصيصها لدراسة وتحليل السلاسل الزمنية.

المحاضرة السادسة: خصصت لدراسة الاستقرارية .

في الأخير،نأمل أن نكون قد وفقنا، بمشيئة الله، في تزويد طلبتنا الأعزاء و أساتذتنا الكرام بهذه المطبوعة البيداغوجية المتواضعة، نحسبها أن تكون سندا لهم في دراسة مادة النمذجة الإحصائية، كما نتمنى أن نكون قد ساهمنا، ولو بجزء يسير، في إثراء المكتبة الجامعية الجزائرية بهذا العمل الأكاديمي.

الدكتورة بن رمضان أنيسة

المحتويات	الصفحة
قائمة المحتويات	
المقدمة	أ–ب
الإطار العام للنمذجة الإحصائية	04-02
تحليل الانحدار الخطي البسيط	35-05
تحليل الانحدار الخطي المتعدد	66-36
مشاكل الاقتصاد القياسي: تحليل الارتباط الذاتي	84-67
تحليل السلاسل الزمنية	113-85
دراسة الاستقرارية	122-114
خاتمة عامة	123
قائمة المصادر والمراجع	125-124
الجداول الإحصائية	129-126

المحاضرة الأولى: مقدمة في النمذجة الإحصائية

النمذجة الإحصائية هي عملية بناء نماذج رياضية لفهم وتحليل البيانات المعقدة. إنها أداة أساسية للتحليل الكمي، ويتم استخدامها في مجالات مختلفة مثل الاقتصاد والمالية والرعاية الصحية والهندسة. تساعدنا النمذجة الإحصائية على إجراء التنبؤات وتحديد الأنماط واتخاذ قرارات مستنيرة بناء على البيانات. سنقدم في هذا القسم النمذجة الإحصائية ونناقش أهميتها وأنواعها وتطبيقاتها.

1. أهمية النمذجة الإحصائية:

تعد النمذجة الإحصائية أمرا بالغ الأهمية في تحليل البيانات لأنها تتيح لنا إجراء تنبؤات وتحديد الأنماط التي لا يمكن رؤيتها على الفور. فهو يساعدنا على فهم العلاقة بين المتغيرات وكيفية تفاعلها مع بعضها البعض. توفر لنا النمذجة الإحصائية أيضاً إطاراً لاختبار الفرضيات واتخاذ قرارات مستنيرة بناءً على البيانات. فهو ضروري في تحديد الاتجاهات والأنماط، ويمكّننا من التنبؤ بالنتائج المستقبلية.

2. أنواع النمذجة الإحصائية:

هناك أنواع مختلفة من النمذجة الإحصائية، ويستخدم كل نوع لغرض محدد. تتضمن بعض الأنواع الأكثر شيوعا للنمذجة الإحصائية الانحدار الخطي، والانحدار اللوجستي، وتحليل السلاسل الزمنية، والتحليل العنقودي. يستخدم الانحدار الخطي لنمذجة العلاقة بين متغير تابع ومتغير مستقل واحد أو أكثر. يستخدم الانحدار اللوجستي لنمذجة احتمالية النتيجة الثنائية .يستخدم تحليل السلاسل الزمنية لنمذجة سلوك المتغير مع مرور الوقت، ويستخدم التحليل العنقودي لتجميع الملاحظات المماثلة في مجموعات.

3. تطبيقات النمذجة الإحصائية:

للنمذجة الإحصائية مجموعة واسعة من التطبيقات في مجالات مختلفة. وفي مجال التمويل، يتم استخدامه لنمذجة أسعار الأسهم والتنبؤ باتجاهات السوق. وفي الرعاية الصحية، يتم استخدامه للتنبؤ بمخاطر المرض ووضع خطط العلاج. وفي الهندسة، يتم استخدامه لنمذجة سلوك المواد وتحسين التصميم. تُستخدم النمذجة الإحصائية أيضاً في العلوم الاجتماعية لفهم السلوك البشري والتنبؤ بالاتجاهات الاجتماعية.

4. اختيار النموذج الإحصائي الأفضل:

ويعتمد اختيار النموذج الإحصائي الأفضل على نوع البيانات وسؤال البحث. هناك عوامل مختلفة يجب مراعاتها عند اختيار النموذج الإحصائي، بما في ذلك طبيعة البيانات، وعدد المتغيرات، وافتراضات النموذج. ومن المهم اختيار نموذج يناسب البيانات بشكل جيد ومناسب لسؤال البحث. في بعض الحالات، قد يكون من الضروري استخدام نماذج متعددة لتحليل جوانب مختلفة من البيانات.

النمذجة الإحصائية هي أداة أساسية للتحليل الكمي. فهو يساعدنا على إجراء التنبؤات وتحديد الأنماط واتخاذ قرارات مستنيرة بناءً على البيانات .هناك أنواع مختلفة من النمذجة الإحصائية، ولكل منها نقاط القوة والقيود الخاصة بها. ويعتمد اختيار النموذج الإحصائي الأفضل على نوع البيانات وسؤال البحث. باستخدام النمذجة الإحصائية، يمكننا الحصول على رؤى قيمة حول البيانات المعقدة واتخاذ قرارات مستنيرة بناءً على الأدلة.

5.أنواع النماذج الإحصائية:

النمذجة الإحصائية هي واحدة من أهم جوانب التحليل الكمي. وهو ينطوي على إنشاء تمثيل رياضي لظاهرة في العالم الحقيقي، باستخدام نقاط البيانات لإجراء التنبؤات واستخلاص النتائج. هناك عدة أنواع من النماذج الإحصائية، ولكل منها نقاط القوة والضعف الخاصة بها. في هذا القسم، سنستكشف هذه الأنواع المختلفة من النماذج ونناقش متى نستخدم كل منها.

1.5.نماذج الانحدار الخطي:

تستخدم نماذج الانحدار الخطي لنمذجة العلاقة بين متغيرين. وغالبا ما تستخدم في المواقف التي من المتوقع أن يؤثر فيها متغير واحد على الآخر، كما هو الحال في أبحاث التسويق أو التحليل الاقتصادي .تعد نماذج الانحدار الخطي سهلة الاستخدام نسبياً ويمكن استخدامها للتنبؤ بالنتائج المستقبلية بناءً على البيانات السابقة .على سبيل المثال، يمكن استخدام نموذج الانحدار الخطي للتنبؤ بمبيعات منتج ما بناءً على سعره.

2.5. نماذج الانحدار اللوجستي:

تستخدم نماذج الانحدار اللوجستي لنمذجة العلاقة بين النتيجة الثنائية (مثل ما إذا كان العميل سيشتري منتجاً أم لا) وواحد أو أكثر من متغيرات التوقع. يتم استخدامها غالباً في المواقف التي تكون فيها النتيجة قاطعة وتكون المتنبئات مستمرة أو قاطعة. على سبيل المثال، يمكن استخدام نموذج الانحدار

اللوجستي للتنبؤ بما إذا كان العميل سيشتري منتجاً بناءً على العمر والجنس والدخل والمتغيرات الديموغرافية الأخرى.

3.5.نماذج السلاسل الزمنية:

تستخدم نماذج السلاسل الزمنية لنمذجة سلوك المتغير مع مرور الوقت. وغالبا ما يتم استخدامها في المواقف التي يتم فيها جمع البيانات على فترات زمنية منتظمة، مثل كل ساعة أو يومياً أو شهرياً. يمكن استخدام نماذج السلاسل الزمنية للتنبؤ بالاتجاهات والأنماط المستقبلية بناءً على البيانات السابقة. على سبيل المثال، يمكن استخدام نموذج السلسلة الزمنية للتنبؤ بمبيعات منتج ما خلال العام التالي بناءً على بيانات المبيعات السابقة.

4.5. نماذج الغابات العشوائية :

تستخدم نماذج الغابات العشوائية لنمذجة العلاقات المعقدة بين متغيرات متعددة. غالبا ما يتم استخدامها في المواقف التي يوجد فيها العديد من المتغيرات المتوقعة ولا تكون العلاقة بينها مفهومة جيدا. تستخدم نماذج الغابات العشوائية مجموعة من أشجار القرار للتنبؤ بالنتائج المستقبلية بناء على البيانات السابقة. على سبيل المثال، يمكن استخدام نموذج الغابة العشوائية للتنبؤ باحتمالية شراء العميل لمنتج ما بناء على العمر والجنس والدخل والمتغيرات الديموغرافية الأخرى.

5.5. نماذج الشبكات العصبية:

تستخدم نماذج الشبكات العصبية لنمذجة العلاقات المعقدة بين متغيرات متعددة. يتم استخدامها غالباً في المواقف التي لا تكون فيها العلاقة بين متغيرات التوقع والنتيجة مفهومة جيدا. تستخدم نماذج الشبكات العصبية شبكة من العقد المترابطة لإجراء تنبؤات حول النتائج المستقبلية بناءً على البيانات السابقة. على سبيل المثال، يمكن استخدام نموذج الشبكة العصبية للتنبؤ باحتمالية شراء العميل لمنتج ما بناءً على العمر والجنس والدخل والمتغيرات الديموغرافية الأخرى.

يعتمد نوع النموذج الإحصائي المطلوب استخدامه على نوع البيانات وسؤال البحث الذي يتم تناوله. تعد نماذج الانحدار الخطي مناسبة لنمذجة العلاقة بين متغيرين، ونماذج الانحدار اللوجستي للنتائج الثنائية، ونماذج السلاسل الزمنية للاتجاهات بمرور الوقت، ونماذج الغابة العشوائية للعلاقات المعقدة بين المتغيرات، ونماذج الشبكة العصبية للعلاقات المعقدة وغير الواضحة.

تحليل الانحدار الخطي البسيط [تقدير معالم النموذج]

1. تمهيد:

تحليل الانحدار من أكثر الأدوات المستعملة في التحليل القياسي لذا سوف نبدأ بتحديد الخطوط العريضة لتحليل الانحدار. بينما في الفصول التاليه سوف تتعامل مع التعديلات وتوسيع للأساليب الاساسيه اللازمة في تحليل البيانات الاقتصاد يه.

نبدأ بالسؤال الأساسي: ما هو تحليل الانحدار؟ تحليل الانحدار يهتم بوصف وتقييم العلاقة بين متغير (عادة يسمى المتغير التابع) وواحد آو اكثر لمتغيرات أخرى (تسمى عادة المتغيرات المفسرة آو المتغيرات المستقلة) ويرمز للمتغير المفسر بـ y والمتغيرات المفسرة بـ x_1 x_2 x_3....x_n .

التفسير الحرفي لكلمة انحدار تعني" ارتداد أو انكفاء أو رجوع" في الحقيقة تحليل الانحدار لا يربطه بهذا المعنى أي رابط.

كلمة انحدار استخدمت من قبل سير فرنسيس جالتون (1911-1982) Sir Francis Galton من إنجلترا. والذي كان يدرس العلاقة بين طول الأبناء وطول الآباء والذي لاحظ جالتون أن الطول يميل إلى المعدل مع أن الآباء الطوال يكون أبنائهم طوال والآباء القصار يميل أبنائهم لان يكونوا قصار أي أن هناك ميل عند ألأبناء للمعدل أي أن هناك انحدار نحو المعدل.في دراسات أخرى مشابهه تحصل على نفس النتيجة التي تحصل عليها جالتون.

بالعودة إلى الرموز التي استخدمناها حيث رمزنا للمتغير المفسَر بـ y والمتغيرات المفسرة بـ x_1....x_n . إذا كانت $k=1$ ، أي إن هناك متغير مستقل واحد فقط من المتغيرات المفسرة. أي ان هناك x واحدة فقط. يعرف هذا بالانحدار البسيط. وهو ما سوف يتم مناقشته في هذا الفصل. إذا كانت $k>2$ ، آي أن هناك اكثر من x واحد و متغير مستقل. نحصل على ما يعرف بالانحدار المتعدد. والذي سوف نناقشه في الفصل القادم.

مثال 1 : الانحدار البسيط.

y = المبيعات

x = النفقات الاعلانيه.

حيث يتم تحديد العلاقة بين المبيعات والنفقات الأعلانيه.

مثال 2: الانحدار المتعدد.

Y = استهلاك ألا سره.

X_1 = دخل ألا سره.

X_2 = الأصول المالية للاسره

X_3 = حجم ألا سره

تحديد العلاقة بين نفقات استهلاك ألا سره من جهة والدخل، والأصول المالية و حجم ألا سره من جهة اخرى.

هناك عدة أسباب لدراسة هذه العلاقات. يمكن استخدام ذلك في :

1- تحليل تأثير بعض السياسات التي تتضمن تغير قيم لفرد معين. في المثال الأول نستطيع أن نحلل تأثير النفقات الاعلانيه على كمية المبيعات.

2- التنبؤ بقيم Y من قيم X.

3- اختبار مدى معنوية العلاقة بين آي من X و Y.

في مناقشتنا نفرق بين المتغير Y و المتغيرات X. افترضنا أن المتغيرات X هي المتغير الذي يؤثر على المتغير Y. هناك العديد من المصطلحات التي نطلقها على X , Y توجد في الجدول 1.3 .

جدول 1: مصطلحات المتغير التابع و المتغير المستقل.

X	Y
1-مًتنبأ	متَنبأ به
2-مفسر	مفَسر
3-مستقل	تابع
4-مسبب	متأثر
5-خارجي	داخلي

6-المتغير المتحكم	المتغير الهدف

كل من هذه المصطلحات يستخدم حسب الغرض من تحليل الانحدار فالمصطلح الأول يستخدم في عملية التنبؤ بينما المصطلحات الأخرى تستخدم في مناقشة الانحدار. اما المصطلح خارجي وداخلي تستخدم فقط من قبل القياسيين. بينما المصطلح الأخير يستخدم في التجارب الخاصة بدراسة تأثير مسببات معينه على متغير مستهدف.

2. تحديد العلاقة:

العلاقة بين Y و X تمثل بالتالي:

$$Y = f(X) \qquad 1.2$$

حيث ترمز لـ Y كدالة لـ X. نستطيع إن نقسم العلاقة إلى نوعين:-

1- علاقة رياضية محدده.Deterministic

2- علاقة إحصائيه لا تعطي قيمه فريدة لـ Y من قيمه محدده من X. ولكن يمكن أن توصف بصيغة احتماليه.

سوف نتحدث هنا في تحليل الانحدار عن العلاقة من النوع الأول على سبيل المثال العلاقة بين المبيعات و النفقات الاعلانيه يمكن أن توصف بما يلي:-

$$Y = 2500 + 100X$$

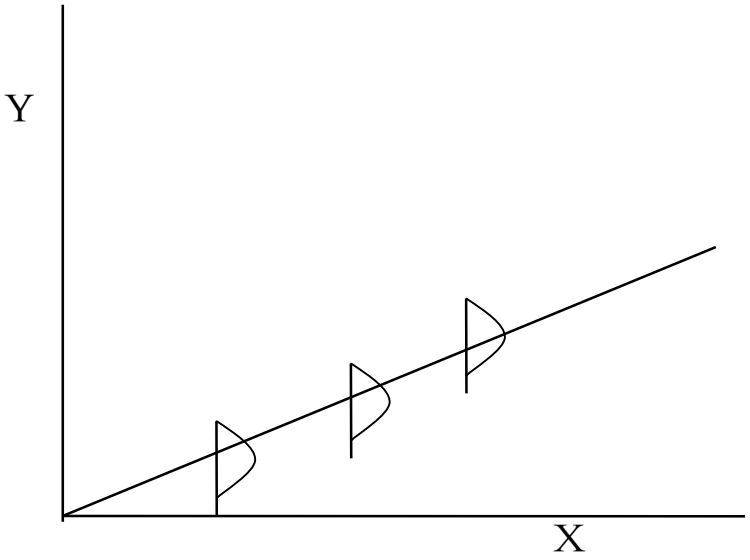
هذه علاقة محدده deterministic . حيث يمكن تحديد المبيعات لكل مستوى من النفقات الاعلانيه، كما يلي:-

X	Y
0	2500
20	4500
50	7500
100	12500

في الجانب الأخر، نفترض أن العلاقة بين المبيعات والنفقات الاعلانيه كما يلي:-

$$Y = 2500 + 100X + u$$

قيمة u تتراوح بين قيم معينه حسب جدول للاحتمالات يعطي لكل قيمه احتمال معين على سبيل المثال:- الاحتمالات أن قيمة u اكبر من 500 يساوي ½ واقل من 500 يساوي ½ . لذا لا نستطيع تحديد قيمة Y من قيمة X نقول إن هناك العديد من قيمY المقابلة لقيمة واحدة من X . إذا كان هناك توزيع طبيعي لقيم Y المقابلة لقيمه واحدة من X . كما هو في الشكل



الخط الذي يمثل العلاقة هو العلاقة التحد يديه . ولكن القيم الحقيقية لـ Y تمثل الخط العمودي وتسمى العلاقة بين X , Y علاقة عشوائية.

بالرجوع إلى المعادلة التي تمثل الدالة.نستطيع القول إن الدالة تمثل الخط $f(x) = \alpha + \beta X$ بينما العلاقة العشوائية هي $f(x) = \alpha + \beta X + u$ حيث تمثل u الخطأ العشوائي. وتمثل α β معاملات الانحدار.

لماذا يتم إضافة الخطأ العشوائي للمعادلة؟

1- يمثل عنصر العشوائية في استجابة الإنسان مثل اختلاف النفقات الاستهلاكية من فرد لأخر مع العلم انهم قد يتساووا في الدخل.

2- تأثير عوامل أخرى محذوفة مثل العادات حجم ألا سره وغيرها من العوامل.

3- خطأ في قياس المتغير التابع.

الهدف هو الحصول على تقدير للمعاملات الغير معروفه α β للقيام بعملية التقدير **يجب افتراض بعض الافتراضات الخاصة بالخطأ العشوائي:**

1- الوسط الصفري.$E(u)=0$

-أن وسـط التوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي = الصفر. إي أن قيم u تتمركز حول الصفر.

2- تساوي التباين $V(u) = \sigma^2$.

تباين التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية u يساوي قيمه ثابتة وموجبة.

3- استقلالية الخطأ العشوائي: أي أن التغاير، درجة الارتباط بين قيم العشوائي = الصفر

أي انها مستثقله عن بعضها. $COV(u_i, u_j) = 0$

4- التوزيع الطبيعي للخطأ العشوائي. $u_i \sim N$

تمثل هذه الافتراضات بالتالي $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

3. تقدير نموذج الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

هناك عدة طرق لتقدير معاملات معادلة الانحدار أهمها:

- طريقة المربعات الصغرى
- طريقة الإمكانية العظمى.

في المرحلة الأولى نفترض وجود الفروض الاساسيه لمعالجة النموذج الخطي. وفي المراحل اللاحقة نتعرض للحالات التي تكون فيها هذه الفروض غير صحيحة. نموذج الانحدار بالافتراضات الأساسية كما يلي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u$$

هي المعادلة الأساسية التي تصور العلاقة بين التابع والمستقل حيث i تعتمد على العينة التي يبلغ حجمها n . بالأضافه إلى المعادلة ألأساسيه نقول أن النموذج يحتوي افتراضات عن المتغير العشوائي.

تقدير النموذج يتم بغرض الحصول على مقدرات معالم نموذج الانحدار البسيط. نموذج الانحدار البسيط يتضمن ثلاث معالم هي, α , معلمة القاطع، β معلمة الميل، σ^2 معلمة التباين. المراد هو استخدام إحصائيات المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة حسب الطرق الإحصائيه الملائمة للحصول على مقدرات لهذه المعالم.

أولا: طريقة المربعات الصغرى Ordinary least squares OLS

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات , الانحدار حيث تمثل αمعلمة القاطع، , β معلمة الميل. بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البوا قي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البوا قي وبعد ذلك يشرع في الحصول على , α، , β بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له.

طريقة المربعات الصغرى تعطينا مقدرات الانحدار , α، , β ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.

المعيار الخاص في المربعات الصغرى العادية: النموذج المقدر هو كما يلي

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u_i$$

u هي البوا قي والتي تساوي من النموذج $u_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X)$ نموذج الانحدار ممكن أن يمر من خلال انتشـــار البيانـات الخاصـة بـ Y, X، الخـط المقـدر هنـا هـو الـذي يعطـي Y المقـدرة

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

إذا أخذنا إحداثيات القيم Y,X إحداثيات النقطة الأولى تنقسم إلى قسمين، قسم من المحور الأفقي في النموذج المقدر، هذا عبارة عن $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$ الجزء الثاني عبارة عن قيمة البوا قي. فالمشاهدة Y هي حصيلة جمع $u + \hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$ أي أن أي مشاهده مكونه من جانبين، جانب الخط المقدر والبـواقي. البـواقي بحكـم أنهـا مقـدرة العنصـر العشـوائي يمكـن أن تكـون موجبـة وممكـن أن تكـون سـالبه وكذلك من الناحية النظرية يمكن أن تساوي الصفر.

للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أن نحصل أولا على البواقي:

$$u_t^2 = (\hat{Y} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X))^2$$

مجموع مربعات البواقي $=\sum u^2$

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)^2$$

يتم التوصل إلى الخط الذي تكون فيه مجموع مربعات البواقي اصغر ما يمكن [اختيار الخط الذي يدني مجموع مربعات البواقي إلى أصغر ما يمكن]. باستخدام الرياضيات فأن شرط الدرجة الأولى يتطلب أجراء التفاضل بالنسبة للمجاهيل α β نستخدم التفاضل الجزئي وبعد ذلك نساوي المعادلات التي تم أل تحصل عليها بالصفر ثم نطبق المعادلات الآنية للحصول على قيم المقدرات.

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\alpha}} = (2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-1) = 0$$

$$= (-2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

بادخال المجموع Σ وحيث ان αعدد ثابت فأن $n\alpha = \Sigma\ \alpha$ ثم بقسمة المعادلة على n نحصل على مايلي:

$$\sum Y_i - \sum{}_i\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum{}_i X = 0$$
$$\sum{}_i\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum{}_i X$$
$$n\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum{}_i X$$
$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum{}_i X}{n}$$
$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = (2)(\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-X) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = -2\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$(\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$-\sum XY + \sum X\alpha + \sum \beta X^2 = 0$$

نساوي بالصفر

$$\sum XY = \alpha\sum X + \beta\sum X^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\hat{\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{n} X^2\right)\hat{\beta}$$

بالتعويض بقيمة α نحصل على

$$\sum XY = \sum X\left(\frac{\sum Y}{n} - \beta\frac{\sum X}{n}\right) + \beta\sum X^2$$

بالضرب في n

$$n\sum XY = \sum X\sum Y - \beta(\sum X)^2 + \beta\, n\sum X^2$$
$$n\sum XY - \sum X\sum Y = -\beta(\sum X)^2 + \beta\, n\sum X^2$$
$$= \beta\, n\sum X^2 - \beta(\sum X)^2 \quad *$$
$$= \beta\left(n\sum X^2 - (\sum X)^2\right)$$

معادلة * تسمى المعادلات الطبيعية ونستطيع استخراج قيم α β منها

بالتعويض نحصل على

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

من الممكن الحصول على المقدرات باستخدام الانحرافات كما يلي:

$$\sum\ y_i = \sum (Y - \overline{Y})^2 \qquad = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2$$
$$\sum xy = \sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = \sum XY - n\overline{XY}$$
$$\sum x^2 = \sum (X - \overline{X})^2 \qquad = \sum X^2 - n\overline{X}$$

ولكن

$$\sum Y_i X_i = \sum X_i(\overline{Y}_i - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}(\overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}\overline{Y} - \hat{\beta}n\overline{X}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum Y_i X_i - n\overline{X}\overline{Y} = -\hat{\beta}n\overline{X}\overline{X} + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum XY - n\overline{XY} = -\hat{\beta}n\overline{X}^2 + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum xy = \beta\left[nX^2 - \sum X^2\right]$$
$$\sum xy = \beta\sum x^2$$
$$\beta = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

مثال 01:

ليكن لدينا الجدول التالي للمتغيرين x وy.

y	4	7	3	9	17	4-	1-	5-	1	9
x	2	3	1	5	9	2-	1-	3-	1	5

المطلوب: قم بتقدير معالم الانحدار الخطي؟

الحل:

X	**Y**	$\mathbf{X^2}$	**x**	**y**	**XY**	xy	x^2
2	4	4	-2	-4	8	8	4
3	7	9	-1	-1	21	1	1
1	3	1	-3	-5	3	15	9
5	9	25	1	1	45	1	1
9	17	81	5	9	153	45	25
∑X =20	**∑ Y =40**	**$\sum X^2$= 120**			**230 ∑XY=**	**∑xy=70**	**$\sum x^2$=40**

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

$$\hat{\beta} = \frac{(5)(230) - (20)(40)}{5(120) - (20)^2} = 1.75$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 8 - 1.75(4) = 1$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X =$$

$$\boxed{\hat{Y} = 1 + 1.75X}$$

باستخدام الانحرافات

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{70}{40} = 1.75$$

مثال 02:

ليكن لدينا الجدول التالي للمتغيرين x وy.

N	X	Y	x	y	xy	x^2	XY	X^2
1	**100**	**55**	30	-45	1650	900	5500	10000
2	**90**	**70**	20	-30	1400	400	6300	8100
3	**80**	**90**	10	-10	900	100	7200	6400
4	**70**	**100**	0	0	0	0	7000	4900
5	**70**	**90**	0	-10	0	0	6300	4900
6	**70**	**105**	0	5	0	0	7350	4900
7	**70**	**80**	0	-20	0	0	5600	4900
8	**65**	**110**	-5	10	-550	25	7150	4225
9	**60**	**125**	-10	25	-1250	100	7500	3600
10	**60**	**115**	-10	15	-1150	100	6900	3600
11	**55**	**130**	-15	30	-1950	225	7150	3025
12	**50**	**130**	-20	30	-2600	400	6500	2500
المجموع	**840**	**1200**			**-3550**	**2250**	**80450**	**61050**
	X=70	**Y=100**						
					β=-3550/2250=-1.6			

المطلوب: قم بتقدير معالم الانحدار الخطي؟

4.2 خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية (MCO)

الخصائص الإحصائي التي تتميز فيها مقدرات المربعات الصغرى العادية.

تتميز المقدرات α β بثلاث خواص أساسيه:

1) الخطية 2)عدم التحيز 3) الكفاءة

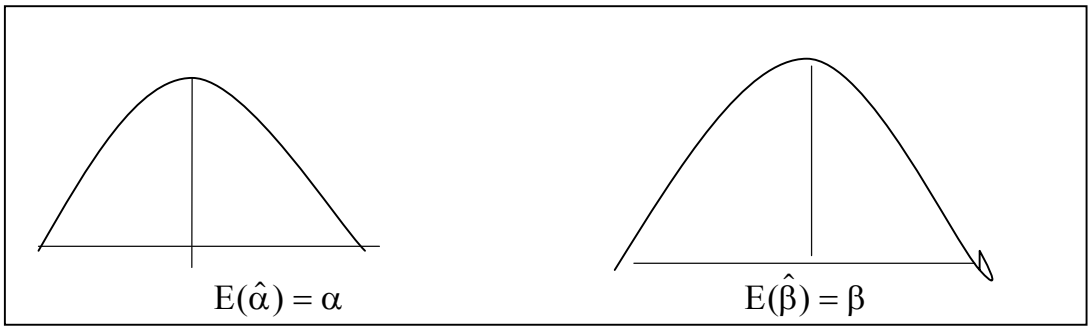
↩ الخطية: $\hat{\alpha}$ تعتبر داله خطية للعنصر العشوائي التابع Y . أهمية هذه الخاصة أنها

تعطينا درجه من البساطة في أجراء الحسابات حيث انه لحساب α β نستعمل المتغير التابع في صوره خطيه فقط هذه لتبسيط الحسابات.

- عدم التحيز: مقدرات (م ص ع) $\hat{\alpha}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة α . عدم التحيز يتطلب بأن القيمه المتوقعة لـ $\hat{\alpha}$ و التي هي قيمة المعلومة الحقيقية بمعنى آخر متوسط $\hat{\alpha} = \alpha$. إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب $\hat{\alpha}$ يتم أخذ المتوسط. ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية. $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ مقدرات (م ص ع) $\hat{\beta}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة β حيث أن $E(\hat{\beta}) = \beta$. أي أن توقع $\hat{\beta}$ يجب أن يساوي المعلم هـ الحقيقية بمعنى آخر متوسط قيم $\hat{\beta}$ أو في المتوسط $\hat{\beta}$ تساوي القيمة الحقيقية للمعلمه β.

هذه الأوضاع كلها نظريه بحتة في الواقع لا يكون عندنا عدد من العينات، بكون في الواقع عينه واحدة فقط وتعطينا قيمه واحدة $\hat{\alpha}$، قيمه واحدة $\hat{\beta}$ يعتمد عليها في التحليل، من الناحية النظرية نقول أن هذه المقدرات يتوقع أنها تساوي القيمة الحقيقية من الناحية الأخرى القيمة الحقيقة لا نعرفها وبالتالي هذه الخصائص خصائص نظريه بحتة.

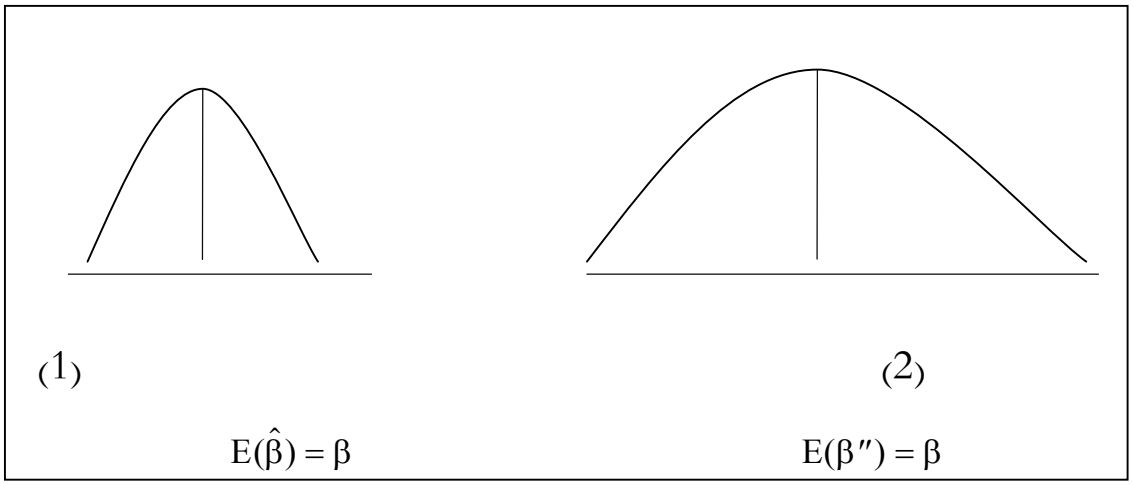
على الرسم البياني، رسم دالة احتمال $\hat{\beta}$ ، خاصية عدم التحيز تقول أن توزيع احتمال $\hat{\beta}$ يأخذ هذا الشكل يتمركز حول القيمة الحقيقية، لـ β يعني أن القيمة المتوقعة لـ$\hat{\beta}$ تساوي β $E(\hat{\beta}) = \beta$ وأن قيمة β تساوي المعلمة الحقيقية ونفس التحليل ينطبق على α.



- آدني تباين:

الخاصية الثالثة لمقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين هذه الخاصية لها أهمية بالغة في الاقتصاد القياسي لان آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعني أعلى دقة من ناحية القياسات.

هناك علاقة عكسية بين التباين ودقة القياسات كلما زاد التباين كلما انخفضت دقة القياسات وكلما قل ارتفعت دقة القياسات. لأن مقدرات م ص ع $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ تلك المقدرات تمتلك آدني تباين نعني مقارنه بمقدرات أخرى تقاس بطريقه مختلفة عن م ص ع فان مقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين إي تتحلى بأعلى دقه. نفترض إن هناك مقدرات لـ $\beta\ \alpha$ تحصل عليها بطريقه مختلفة ونفترض إن المقدرات الأخرى α'', β'' ا ذا افترضنا أن تلك المقدرتين خطيه وغير متحيزة سيكون الاختلاف في خاصية أن مقدرات م ص ع $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ تمتلك أعلى دقة.



$$V(\hat{\beta}) \ < \ V(\beta'')$$

في الحالة (1) استخدمت مقدرات م ص ع . في الحالة الثانية (2) مقدرات أخرى غير م ص ع , في الشكل التوزيع الاحتمالي لقيمة المقدرات $\beta'', \hat{\beta}$. في (1) يتبين ان التباين قليل، درجة الانتشار لـ $\hat{\beta}$ اقل وبالتالي تتمركز قيم $\hat{\beta}$ حول القيمة الحقيقية وفي الشكل (2) قد نحصل على قيم حول β لكنها بعيده عن المعلمة الحقيقية.

من الشكل إن احتمال الحصول على $\hat{\beta}$ أقرب للمعلمة الحقيقية من β'', وبالتالي درجة احتمال العثور على $\hat{\beta}$ أقرب مما سواها، هذا ما يقصد بخاصية أدنى تباين.

من النتائج التي توصلنا أليها عن مقدرات م ص ع يمكن أن نقول أن شـــكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالمقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$

$$\hat{\alpha} \sim N\left[\alpha, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x^2}\right)\right], \quad \hat{\beta} \sim N\left[\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]$$

من المعادلتين يتبين انه :

1- كلما زاد التباين σ^2 كلما زاد تباين المقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

2- كلما كان انتشار قيم X اكبر كلما قل تباين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$

ثانيا: طريقة الإمكانية العظمى (ML) Maximum Likelihood Method

هي طريقة احصائيه تستعمل في مجال التقدير أول من قدمها الإحصائي المشهور Fisher. الإمكانية : مفهوم احتمال حدوث عمل ما. وهي طريقة للتقدير الإحصائي مثلها مثل طريقة المربعات الصغرى تستخدم في تقدير قيم المعالم المجهولة ويمكن أن تطبق على نماذج الانحدار وممكن تطبيقها على آي علاقة مجتمع تحتوي على معالم مجهولة، تتميز مقدرات الإمكانية العظمى بخواص جيدة ومطلوبة سنرى طبية هذه الخواص فيما بعد. طريقة الإمكانية العظمى تتطلب أجراء حسابات معقدة مثل الحسابات المعقدة كانت عامل مهم في الماضي، لكن الآن الحسابات تجري بواسطة الحاسبات الآلية وبالتالي هذا الاعتبار لا يشكل نقيصة فيما يختص باستخدام الإمكانية العظمى.

الإمكانية العظمى تشترك في بعض الحالات مع مقدرات المربعات الصغرى، آي نتحصل على مقدرات الإمكانية العظمى تتطابق مع مقدرات المربعات الصغرى العادية أن مقدرات ألا مكانيه العظمى في مثل نموذج الانحدار البسيط ما هي آلا مقدرات المربعات الصغرى ، لكن في نماذج أخرى اكثر تعقيدا نرى أن مقدرات الإمكانية العظمى تختلف عن مقدرات المربعات الصغرى العادية.

مقدرات الإمكانية العظمى: هي تلك القيم التي تعظم إمكانية (الاحتمال) الحصول على العينة المشاهدة والمستخدمة في التقدير.

طريقة الإمكانية العظمى: نبدأ بنموذج الانحدار البسيط:

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

- **الخطوة الأولى** : افتراض حول شكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية. افترضنا أن المتغير العشوائي يتوزع توزيع طبيعيا.
- **الخطوة الثانية**: تحديد دالة الاحتمال أو دالة الكثافة الاحتمالية Probability Density Function الخاصة بالعناصر العشوائية.
- **الخطوة الثالثة**: استخلاص دالة الاحتمال الخاصة بالمتغير التابع، حيث أن المتغير التابع يعتمد على المتغير العشوائي. ثم يعمم على العينة.
- **الخطوة الرابعة**: تعظم تلك الدالة بالنسبة لقيم المعالم فنتحصل على مقدرات الإمكانية العظمى.

1- دالة الكثافة الاحتمالية لـلعنصر العشوائي u هي دالة توزيع طبيعي معروفه تكتب على النحو التالي:

$$\int(c_t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u-0}{\sigma^2}\right\}}$$

حيث أن π=-3.14 و e=2.718

الجزء الثاني من المعادلة هو مربع $u^{1/2}$ مضروب في المتغير العشوائي مطروح من الوسط ومقسوم على الانحراف المعياري . وبالتعويض بالمتوسط الصفري يمكن كتابتها كما يلي:

$$\int(c_t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

2- تحدد دالة الاحتمال المشتركة join Density Function آي دالة العناصر العشوائية والتي تكون عادة بعدد n $e_1, e_2, \ldots\ldots e_n$ وحيث أن العنصر العشوائية غير مرتبطة مع بعض يمكن كتابة دالة الاحتمال المشتركة كما يلي:

$$\int(u_i \ldots\ldots u_n) = \int(u_1)\int(u_1)\ldots\ldots\int(u_n)$$

تعوض الدوال بقيمتها من معادلة دالة الكثافة الاحتمالية للعشوائي

$$\int(u_t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}} \times \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}} \ldots\ldots \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

$$= \left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

3- استخلاص دالة الاحتمال الخاصة بالمتغير التابع Y، حيث أن المتغير التابع يعتمد على المتغير العشوائي. ثم يعمم على العينة.

حيث أن $u_i = Y - \{\alpha + \beta_i X\}$

نعوض بقيمة u من دالة الإمكانية العظمى:

$$= \left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum (y-\alpha-\beta X)_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

تحولنا عن البواقيu إلى دالة يظهر فيها التابع Y وبحكم ظهور على الجانب الأيمن من المعادلة. تعتبر هذه المعادلة دالة الاحتمال المشتركة وتسمى بدالة الإمكانية العظمى ويرمز لها بالرمز ℓ

$$\ell = f(Y_1).f(Y_2)....f(Y_{ni})$$

ومن دالة الاحتمال المشتركة يمكن الحصول مقدرات الإمكانية العظمى بهذه المعادلة. المطلوب هو أيجاد القيم للمقدرات التي تعظم احتمال العثور على القيم الخاصة بـ Y. آي أن المعيار في دالة الإمكانية العظمى يتطلب تعظيم دالة ألا مكانيه العظمى. لتعظيم أي دالة من الدوال يجب أجراء التفاضل حسب متطلبات شرط الدرجة الأولى ومساواته بالصفر. وحيث أن المعادلة معقده لذل تستخدم الخاصية الرياضية التي تقول أن القيمة العظمى لدالة من الدوال أو قيمة المعلمة التي تحقق القيمة العظمى لدالة من الدوال هي نفس القيمة التي تحقق القيمة العظمى للدالة الرئيسية . للتبسيط نأخذ لوغاريتم الدالة

$$\ell = f(Y_1).f(Y_2)....f(Y_{ni})$$

$$L\ell = \sum lnf(Y_1)$$

$$\ell = \left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum (y-\alpha-\beta X)_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

$$ln\,\ell = -\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum (y-\alpha-\beta X)^2$$

$$ln\,\ell = -\frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}ln\,\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma}\sum (y-\alpha-\beta X)^2$$

نلاحظ وجه التبسيط انه بينما كانت معالم تظهر α β في الأس لـ u الآن تظهر α β كدالة خطية وذلك يسهل عملية أجراء التفاضل.

الغرض من كتابة المعادلة على الصورة المختلفة هو عزل التباين σ^2 عن الثابت (2π). ومن ذلك يمكن التوصل إلى مقدرة معلمة التباين لهذا تعتبر طريقة الإمكانية افضل من طريقة المربعات الصغرى لأنها تعطينا بالأضافه إلى مقدرة α β تعطينا مقدرة σ^2 .

إذا للحصول على مقدرات ألا مكانيه العظمى يتم أجراء التفاضل الذي يعظم دالة الإمكانية اختيار المقدرات التي تعظم الدالة.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\sigma}\sum 2(y-\alpha-\beta X)(-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma}\sum 2(y-\alpha-\beta X)(-X_t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2\sigma}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum\ (y-\alpha-\beta X)^2$$

للحصول على المجاهيل نحل المعادلات الثلاث ومساواتها بالصفر. يمكن الحصول على المعادلات التالية:

$$\sum Y_i = -\tilde{\alpha}n + \tilde{\beta}(\sum X_i)$$

$$\sum X_i Y_i = \tilde{\alpha}(\sum X_i) + \tilde{\beta}(\sum X_i^2)$$

هذه المعادلتين هي نفس المعادلتين التي تم الحصول عليها في طريقة المربعات الصغرى العادية أي إن الإمكانية العظمى تقود إلي نفس المعادلات الطبيعية التي تم الحصول عليها في طريقة م ص ع ولكن استخدمنا رموز جديده لمقدرات الإمكانية العظمي أي المقدرات التي تعظم دالة الإمكانية: $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha},$ وبحل المعادلتين أما بطريقة المصفوفات أو بالمعادلات الآنية أو بطريقة Cramer وباتباع أي من هذه الطرق نتحصل على صيغة خاصة ب مقدرات الإمكانية العظمى:

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \overline{Y} - \tilde{\beta}\overline{X}$$

وهي نفس صيغة مقدرة المربعات الصغرى العادية. في حالة النموذج الخطي البسيط. أما في النماذج المتعددة فلا تنطبق المقدرات.

ومن ميزات مقدرات الإمكانية العظمى الحصول مقدرة التباين σ^2 ويتم العثور من المعادلة رقم 3 .

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum Y_i - \alpha - \beta X)^2 = 0$$

وبحل المعادلة نتحصل $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum (Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}X_i)^2$

وهذه هي مقدرة الإمكانية العظمى للتباين ويمكن إن تكتب على النحو التالي:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum u^2$$

تتميز هذه المقدرة بأنها متحيزة ولا تتميز بالكفاءة.... ولا تستخدم في العينات الصغيرة ولكن إذا كانت العينة كبيرة يمكن استخدام مقدرة الإمكانية العظمى للتباين.

خصائص مقدرات الإمكانية العظمى:

ويشار أليها بالخصائص التقاربية وهي الخصائص التي تتحقق إذا كان حجم العينة كبير ، ولكن في الاقتصاد من الصعب الحصول على عينات كبيرة الحجم وعادة تكون سلاسل زمنية من 20 إلي 25 وبالتالي العينات المستخدمة في الاقتصاد كلها صغيرة الحجم ولا تنطبق عليها الخصائص التقاربية.

الخصائص التقاربيه Asmpotitic result لمقدرات الإمكانية العظمى كما يلي:

1- عدم التحيز التقاربي: إذا زاد حجم العينة أي كلما اقتربت $n\to\infty$ كلما تلاشى التحيز الموجود بالعينة الصغيرة. فعلى سبيل المثال مقدرة التباين متحيزة في العينات الصغيرة ولكن في العينات الكبيرة يختفي ذلك التحيز. أي إن وسط توزيعها عيناتها الاحتمالي لا يساوي القيمة الحقيقية أما إذا ارتفع حجم العينة فن التوزيع الخاص بمقدرات العينات المختلفة يقترب من التوزيع الطبيعي وتكون القيمة المتوقعة في الوسط. أي غير متحيزة.

2- الكفاءة التقاربية (أدنى تباين وأعلى دقة) :

ينخفض التباين وينخفض التحيز إذا وجد بزيادة حجم العينة وتزداد دقة المقدرات.

3- الاتساق Consistency.

إذا زاد حجم العينة إلي لانهاية فان التوزيع الاحتمالي للمعلمة المقدرة ينهار على القيمة الحقيقية للمعلمة سواء كانت مقدرة الميل أو القاطع أو التباين.

تحليل الانحدار الخطي البسيط [اختبار معنوية المعلمات المقدرة واختبار جودة النموذج]

1. حساب تباين المقدرات:

تباين أي قيمة تتوزع حول وسط معين هو معدل تشتت هذه القيم عن الوسط

ويكون القانون الخاص بتباين مقدرة القاطع:

$$V(\hat{\alpha}) = E\{\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})\}^2$$

بإجراء بعض الخطوات يمكن إن نبرهن إن تباين $\hat{\alpha}$ يساوي

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n\sum x^2}$$

من المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{\alpha}$ تعتمد على تباين u فإذا زاد تباين u توقع زيادة تباين $\hat{\alpha}$ لان هناك علاقة طرديه بين تباين $\hat{\alpha}$ وتباين u . وتوجد صيغه أخرى لتباين $\hat{\alpha}$ على انه يساوي :

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}\}$$

أما القانون الخاص بتباين $\hat{\beta}$:

$$V(\hat{\beta}) = \{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\}^2$$

يمكن إن نثبت إن التباين الخاص بـ$\hat{\beta}$ يساوي $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$

ومن المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{\beta}$ يعتمد طرديا على تباين u وعكسيا على مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل، فكلما ازدادت درجة انتشار المتغير المستقل (آي بيانات X مختلفة كثيرا عن بعضها) نتوقع إن يزيد المكون الموجود في المقام وبالتالي ينخفض تباين $\hat{\beta}$ مما يشعر إلى دقة التقديرات.

مثال 03:

البيانات التالية عن السعر وكميه البرتقال الذي تم بيعه في أحد أسواق الخضار في مدة 12 يوم إذا رمزنا للسعر بـ X والكميه بـY باستخدام المعادلة التالية:

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

$$\bar{X} = 70, \sum xy = -35550$$

$$\bar{Y} = 100, \quad \sum x^2 = 2250$$

$$\hat{\beta} = \frac{-3550}{2250} = -1.578$$

$$\hat{\alpha} = 100 - (-1.578)70 = 210.460X + u$$

$$\hat{Y} = 210.46 - 1.578X.$$

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}) = \sigma^2 (\frac{1}{12} + \frac{(70)^2}{2250}) = 2.2611\sigma^2$$

$$V(\hat{\beta}) = \beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sigma^2}{2250} = 0.00044\sigma^2$$

تقدير التباين σ^2 : حيث أن σ^2 مجهولة والتي نحتاجها لنتمكن من حساب تباين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

نستخدم مقدرة σ^2 = مجموع مربعات البواقي/درجة الحرية

$$\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} \qquad 7.2$$

بحساب مربعات مجموع البواقي من قيمة $\sum u^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 698$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} = \frac{698}{12-2} = 69.8$$ إذا مقدرة التباين

ومنها يمكن الحصول على مقدرات تباين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}) = 69.8(\frac{1}{12} + \frac{(70)^2}{2250}) = 157.82$$

$$V(\hat{\beta}) = \beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{69.8}{2250} = 0.0310$$

مثال 04: بالتطبيق على المثال رقم 01

$\sum X=20$	$\sum Y=40$	$\sum X^2=120$	$\sum XY=230$	$\sum xy=70$	$\sum x^2=40$	$\sum u^2=1.5$

$$u = Y - \hat{Y} = Y - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X) = Y - 1 - 1.75(X)$$

$$X = 2,3,1,5,9$$

للحصول على مقدرة التباين نستخدم المعادلة التالية $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

$$\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} = \frac{1.5}{5-2} = 0.5$$

وبعد ذلك نستطيع أن نحصل على تباين المقدرات

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}) = 0.5(\frac{1}{5} + \frac{(120)^2}{40}) = 0.3$$

$$V(\hat{\beta}) = \beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{0.5}{40} = .0125$$

وللحصول على الانحراف المعياري نحصل على الجذر التربيعي للتباين:

$$Se(\hat{\beta}) = \sqrt{V(\hat{\beta})} = \sqrt{0.0125} = 0.112$$

$$Se(\hat{\alpha}) = \sqrt{V(\hat{\alpha}} = \sqrt{0.3} = 0.548$$

2. فترات الثقة Confidence Interval

المقدرات مؤشرات مهمة يمكن إن تستخدم لاستخلاص نتائج عن المجتمع التي استخلصت منه هذه المقدرات.لبناء فترات الثقة وأجراء اختبارات الفروض نستخدم التوزيع الطبيعي:

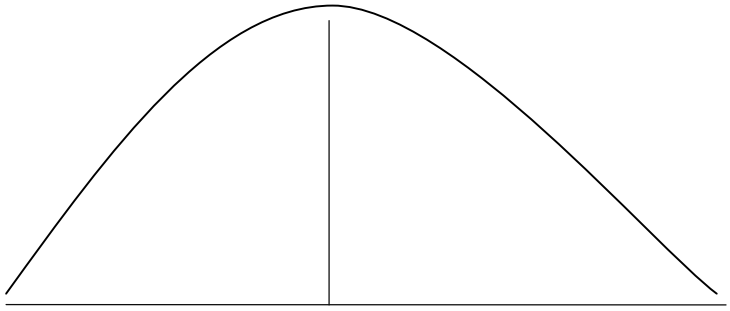
فترة الثقة:

$$\hat{\beta} \sim N\left[\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right], \qquad \hat{\beta} \sim N\left[\beta, \sigma_{\hat{\beta}}^2\right]$$

إذا كانت β تتوزع طبيعيا فستكون قيمة Z كما يلي:

$$Z = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_{\hat{\beta}}}$$

إذا أخذت أي عشوائي يتوزع توزيع طبيعي وطرحت منه الوسط الخاص به وقسمته على الانحراف المعياري فان القيمة المتحصل عليها هي قيمة Z التي تتوزع طبيعيا بوسط صفر وتباين وانحراف معياري يساوي الواحد الصحيح. توزيع Z كما هو معروف يمكن استخلاص الاحتمالات الخاصة به من جدول التوزيع الطبيعي. وبذلك يمكن تحديد الاحتمال الخاص بحدوث أي قيمه من Z بالنظر إلي الجدول حيث يشير العمود الرأسي إلي اليسار إلي قيم Z والقيم بداخل الجدول تشير إلي الاحتمالات.
لاختبار الفرضية فإننا نختبر هل $\hat{\beta}$ تساوي β أم تختلف عنها وإذا كانت تختلف هل هذا الاختلاف قليل يمكن التعايش معه أي إن الاختلاف راجع إلي العشوائية فقط وليس بالاختلاف الكبير الذي يشير إلي انه لا ينتمي إلي نفس المجتمع. ونرفض الفرضية أنهما متساويان.
في القانون أعلاه هناك معلمه غير متوفرة وهي معلمة تباين المجتمع فاستخدمنا مقدرة التباين. مقدرة التباين لا تمتلك التوزيع الطبيعي ولكن تتبع توزيع t والذي يتحدد تبعا لدرجات الحرية المستعملة أي في هذه الحالة إلي $n-2$. توزيع t هو توزيع احتمالي مشابه للتوزيع الطبيعي وتوزيع t يتمركز حول الصفر ويأخذ شكل مماثل لتوزيع Z ،ويستخدم توزيعZ فقط عندما تكون حجم العينه كبيره $n>30$
توزيع t



الاختبار الإحصائي يكون

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta^*}{Se_{\hat{\beta}}}$$

يمكن حساب فترات الثقة كما يلي:

$$\hat{\beta} \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{\beta})$$

$$\hat{\alpha} \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{\alpha})$$

قيمة t تمثل القيمة اختبار t عند درجة حرية $n-2$ عند مساحة $\lambda/2$ من توزيع t من المثال (3)

$$\hat{\beta} \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{\beta})$$

$$1.7 \pm 2.228 \times 0.112$$

$$\pm 0.2495$$

$$1.45 ____ 1.94$$

$$\hat{\alpha} \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{\alpha})$$

$$1 \pm 2.228 \times 0.548$$

$$1 \pm 1.2209$$

$$-0.22 ____ 2.22$$

إن شرح فترة الثقة يعني إن إن الاحتمال أن فترة الثقة المحددة تعطي المعلمة الحقيقية يساوي $(1-\lambda)$. ويستخدم عادة مستوى الثقة 95% أو 99%.

3. اختبار الفرضيات:

يتعلق اختبار الفرضيات بإيجاد ألا جابه على هذا السؤال ما إذا كانت القيمة المحسوبة من العينة متوافقة مع الفرضية أم لا؟ الكلمة متوافقة هنا تعني أن القيمة المحسوبة قريبه من القيمة المفترضة بحيث أننا لا نستطيع إن نرفض القيمة المفترضة. إي إذا كان هناك نظريه سابقه أو اعتقاد إن الميل الحقيقي لدالة الاستهلاك والدخل يساوي على سبيل المثال 1 هل القيمة المحسوبة أو المشاهدة والتي تساوي β=0.509 و تحصل عليها من العينة متفقه مع القيمة التي افترضناها سابقا؟ إذا كان الجواب بنعم فإننا لا نرفض الفرضية.في القياسي نسمي القيمة المفترضة بفرضية العدم لفرضية البديلة

فرضية العدم $H_0: \beta = \beta^*$

الفرضية البديلة $H_A: \beta \neq \beta^*$

من المثال (1) نفترض إننا سوف نقوم باختبار الفرضية انه ليس هناك علاقة بين Y, X

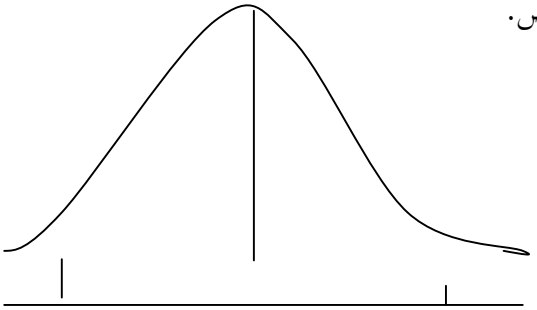
فرضية العدم $H_0: \beta = 0$

الفرضية البديلة $H_A: \beta \neq 0$

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{Se_\beta} \quad t = \frac{1.75 - 0}{0.112} = 15.65, \qquad t_{(n-k),(1-\alpha/2)} = t_{3,(0.975)} = 3.182$$

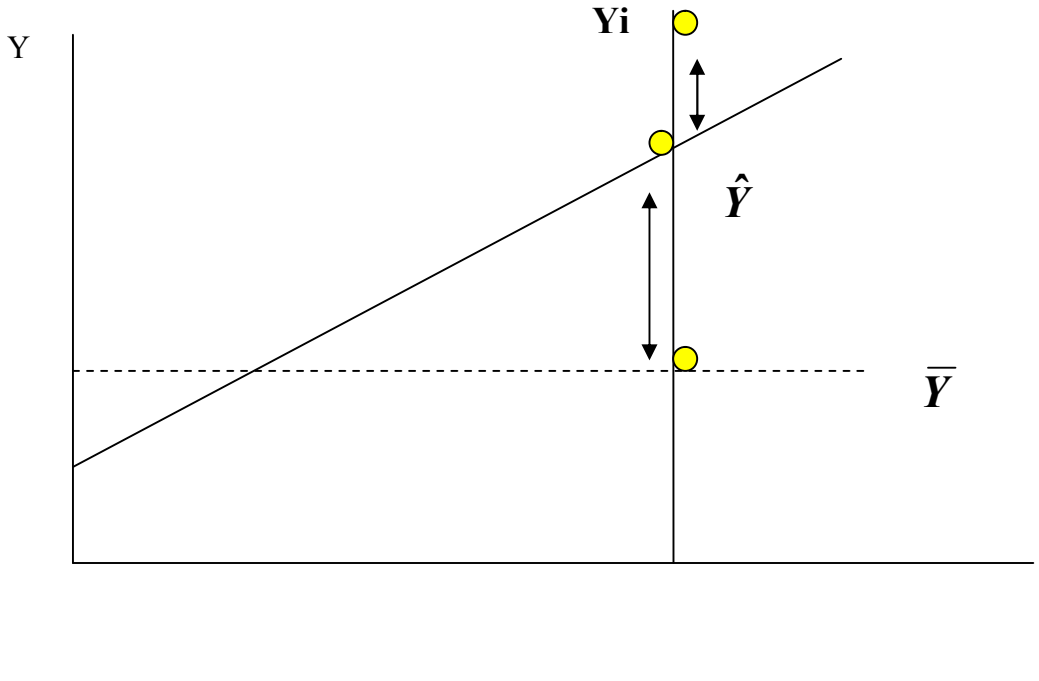
الاختبار يقارن بين ما تقوله الفرضية وما تقوله العينة إذا كان الفرق كبير إي أكثر من القيمة الجدوليه التي نحصل عليها من جدول t فأننا نرفض الفرض. إذا كان الفرق قليل فان هذا يعني إن العينة تؤيد ما يقوله الفرض وبالتالي نقبل الفرض.

توزيع t



t الجدوليه =3.182

يعني إننا يجب إن نوجد القيمة الفرضية من اجل اتخاذ القرار آما بقبول أو برفض . إن قرار القبول أو الرفض يتعلق بفرضية العدم وليس بالفرضيه البديلة.



$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X, \qquad Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u \quad Y_i - \hat{Y} = u$$

4. اختبار جودة النموذج وتحليل التباين:

$$SST = \sum y_i = \sum (Y - \overline{Y})^2$$
$$SSR = \sum \hat{y}^2 = \beta \sum x_i^2 = \sum (\hat{Y} - \overline{Y})^2$$
$$SSE = \sum u_i^2 = \sum (\hat{Y} - Y)^2$$
$$SST = SSR + SSE$$

SST Total Sum of Squares	مجموع المربعات الإجمالي للتغيرات التي تحدث في المتغير التابع Y
SSR Regression Sum of Squares	يسمى بمجموع مربعات الانحدار يعني جزء من تباين Y الذي تم تفسيره بواسطة الانحدار. إي الجزء من المتغيرات التي تحدث في المتغير التابع والذي تم تفسيرها بواسطة النموذج المقدر
SSE Error	مجموع مربعات البواقي، $\sum u^2$ وهذا مؤشر للجزء الذي لم يفسر بواسطة نموذج الانحدار، إي الجزء الذي فشل النموذج في تفسيره

ويمثل نسبة مجموع مربعات الانحدار إلي مجموع المربعات الإجمالي ما يسمى بـ معامل التحديد

$$R_{xy}^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{\hat{\beta} \sum xy}{\sum y_i^2}$$

قيمة R^2 تتراوح بين صفر وواحد. إذا كانت مرتفعه أي قريبه من الواحد تعتبر X جيده في تفسير التغيرات في Y. إذا كانت قريبه من الصفر فان المتغير لا يشرح إلا القليل من التغير في Y.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\hat{\beta} \sum xy}{\sum y^2} = \frac{1.75(70)}{124} = \frac{122.5}{124} = 0.9879$$

جدول تحليل التباين لمعادلة الانحدار ANOVA (Analysis Of Variance):

وهو إن تحليل مجموع المربعات الصغرى إلي مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحدار. الغرض من هذا التحليل لاختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وهذا أيضا يدخل في اختبار معنوية المعامل β.

ونمثل هذا التحليل في جدول تحليل التباين:

جدول تحليل التباين ANOVA

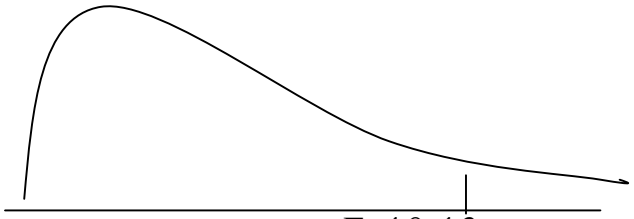
التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مجمـــوع مربعـــات الانحدار	$SSR = \sum \hat{y}^2 = \hat{\beta}\sum xy = \hat{\beta}^2 \sum x^2 =$	k-1=2-1	SSR/1
مجمـــوع مربعـــات البواقي	$SSE = \sum u^2 = \sum y^2 - \sum \hat{y}^2$	n-k=n-2	SSE/(n-2)
مجمـــوع مربعـــات الإجمالي	$SST = \sum y^2 = \sum \hat{y}^2 + \sum u^2$	n-2=3	$F = \frac{SSR}{SSE / n -}$

مثال: جدول تحليل التباين للمثال رقم 01

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مجموع مربعات الانحدار	SSR=122.5	K-1=1	122.5/1
مجموع مربعات البواقي	SSE=1.500	n-k=3	1.5/3
مجموع مربعات الإجمالي	SST=124	n-1=4	$F = \frac{122.5/1}{1.5/3} = 245.00$

اختبار F هو اختبار لجودة النموذج. يحاول أن يجيب على السؤال هل افلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. ويختبر الفرضية إن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر. أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع. وتقارن قيمة المحسوبة من الجدول مع الجد وليه بدرجة حرية للبسط تساوي k-1 ودرجة حرية المقام n-k. قيمة الجد وليه عند مستوى معنوية 5%تساوي 10.13.

توزيع F



5. التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار:

معادلة الانحدار المقدرة $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u_t$ تستخدم في عملية التنبؤ لقيم Y لقيم محدده من X . إذا كانت X_0 تمثل القيمة المحددة من X تستخدم في التنبؤ بقيمة Y_0 من قيم Y.

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0 + u_0$$

حيث u تمثل حد الخطأ.

حيث يمثل خطأ التنبؤ $\hat{Y}_0 - Y_0 = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta)X_0 + u_0$

حيث إن $E(\hat{\alpha} - \alpha) = 0, E(\hat{\beta} - \beta) = 0, E(u_0) = 0$

إذا تكون $E(\hat{y}_0 - y_0) = 0$

هذه تعني إن قيمة Y هي قيمه غير متحيزة ويكون تباين يساوي:

$$V(\hat{y}_0 - y_0) = V(\hat{\alpha} - \alpha) + X_0^2 V(\beta - \beta) + 2X_0 COV(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\beta} - \beta) + V(u)$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right] + \sigma^2 \frac{X_0^2}{\sum x_i^2} - 2X_0 \sigma^2 \frac{\overline{X}}{\sum x_i^2} + \sigma^2$$

$$\boxed{= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum x^2} \right]}$$

أي إن التباين يرتفع بارتفاع تباين X أي باختلاف قيم X عن قيم متوسطها.

باستخدام البيانات أعلاه نحصل على $Y=10.0+0.90\ X$

$\hat{\sigma}^2 = 0.01, \overline{X} = 200, \sum x_i^2 4000,$ إذا استخدمنا $X_0 = 250$ ستكون قيمة Y_0 المتنبأ بها يساوي: $Y_0 = 10.0+0.9(250)=235$

$$SE(\hat{Y}_0) = \sqrt{0.01\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{2500}{400}\right)} = 0.131$$

حيث أن $t=2.228$ من جدول مع 10 درجات حرية، و فترة الثقة 95% تكون

$$235 \pm 2.228\ (0.131) = 235 \pm 0.29$$

آي أن فترة الثقة تساوي (234.71 - 235.29)

التنبؤ للقيمة المتوقعة:

أحيانا يرغب الباحث في التنبؤ بالقيمة المتوقعة لY بدلا من Y_0 آي قيمة $E(Y_0)$ آي القيمة المتوسطة لـ $E(Y_0)$ وليس Y_0 . عند التنبؤ بالقيمة المتوقعة فان $E(Y_0) = Y_0$ حيث أن

$E(Y_0) = \alpha + \beta X_0 + u_0$ فان القيمة المتنبأ بها تساوي

$\hat{E}(Y_0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0 + u_0$ آي يساوي Y_0 ولكن الخطأ المعياري والتباين سيكون مختلفا. سيكون اصغر قيمه

$$\hat{E}(y_0) - E(y_0) = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta) X_0$$

التباين يساوي:

$$\boxed{Var[E(y_0) - E(y_0)] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum x^2} \right]}$$

والخطأ المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين وفترة الثقة تساوي

$$\boxed{\hat{E}(y_0) \pm t\ SE}$$

مثال توضيحي:

	المبيعات Y	النفقات الأعلانيهX
1	3	1
2	4	2
3	2	3
4	6	4
5	8	5

للحصول على مقدرات النموذج:

مشاهده	المبيعات Y	النفقات الأعلانيهX	X^2	XY	u
1	3	1	1	3	0.80
2	4	2	4	8	0.60
3	2	3	9	6	2.60
4	6	4	16	24	0.20
5	8	5	25	40	1.00
	15	23	55		

SSE=8.8 X=3.0 Y =1.0 + 1.2 X

نفترض إن مدير المبيعات يرغب في التنبؤ بدخل المبيعات عندما تكون النفقات الاعلانيه تساوي 600 ريال. ويريد أيضا بناء 95% فترة ثقة لتنبؤه. X_0 =6 إذا

$$y=1.0 + 1.2(6)=8.2$$

والتباين يساوي $$= \sigma^2\left[1+\frac{1}{5}+\frac{(6-3)^2}{10}\right] = 2.1\sigma^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{d.f} = \frac{8.8}{3} = 3.93$$

الخطأ المعياري $\sqrt{2.1(2.93)} = \sqrt{6.153} = 2.48$

عند مستوى المعنوية 5% ، ودرجة حرية df=2.353. و 90% فتره

تمرين:

دالة الاستهلاك الخاص للملكة العربية السعودية:

$$C = \hat{\alpha} + \hat{\beta}Y$$

حيث ترمز X الى الاستهلاك الخاص و Y الى الدخل.

البيانات:

Year	Private Consumption X الاستهلاك الخاص	GDP الدخل (إجمالي الناتج المحلي) بأسعار الجارية
1975	23.90	164.53
1976	34.75	205.06
1977	54.61	225.40
1978	68.61	249.54
1979	102.39	385.81
1980	114.91	520.59
1981	126..39	524.72
1982	151.29	415.23
1983	157.37	372.07
1984	159.35	351.40
1985	158.59	313.94
1986	140.15	271.09
1987	135.54	275.45
1988	139.40	285.15
1989	145.03	310.82
1990	155.87	391.99
1991	168.75	442.04
1992	183.92	461.40
1993	193.91	443.84
1994	185.83	450.03

1955	191.10	470.70
1996	206.21	511.33
1997	207.35	547.41

المطلوب:

1. قم بتقدير معادلة الانحدار؟

2. اختبر معنوية المعلمات المقدرة؟

3. احسب معامل التحديد؟

4. قدر فترة ثقة للمعلمات المقدرة عند مستوى معنوية 5 %؟

5. اختبر جودة النموذج؟

$$\ln C = -3.33 + 1.38 \ln Y$$

$$n = 23, \quad K = 2$$

$$SSE = 0.341$$

$$SSR = 2.44$$

$$\overline{Y} = 4.82$$

$$SE(\hat{\alpha}) = 1.29, \quad SE(\hat{\beta}) = 0.219$$

$$t_{\alpha} = \quad = \frac{-3.33 - 0}{1.29} = -2.57$$

$$t_{\beta} = \quad = \frac{1.38 - 0}{0.219} = 6.31$$

$$t_{(n-k)(1-0.025)} = t_{(21,0.975)} = 2.080$$

$$F = 39.88 \quad F_{(k-1)(n-k)} = F_{1,21} = 4.32$$

$$R^2 = 0.65$$

تحليل الانحدار الخطي المتعدد

1. تقديم النموذج:

يعد الانحدار الخطي المتعدد من الأساليب الإحصائية المتقدمة والتي تضمن دقة الاستدلال من أجل تحسين نتائج البحث عن طريق الاستخدام الأمثل للبيانات في إيجاد علاقات سببية بين الظواهر موضوع البحث . والانحدار الخطي المتعدد هو عبارة عن انحدار للمتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$ لذا فهو يستخدم في التنبؤ بتغيرات المتغير التابع الذي يؤثر فيه عدة متغيرات مستقلة أي تعتمد فكرته على العلاقات الدلالية التي تستخدم ما يعرف بشكل التشتت أو الانتشار ، فبإمكاننا التنبؤ بالمستوى الرقمي في فعالية رمي المطرقة على سبيل المثال اعتماداً على دراسة حالات أخرى للرامي كالعمر الزمني والعمر التدريبي والمهارة والمواصفات الجسمية وغيرها .

إن الانحدار الخطي المتعدد ليس مجرد أسلوب واحد وإنما مجموعة من الأساليب التي يمكن استخدامها لمعرفة العلاقة بين متغير تابع مستمر وعدد من المتغيرات المستقلة التي عادةً ما تكون مستمرة)

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$ وحد عشوائي ε_i ، ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لn من المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة بالشكل الأتي[1]:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., n ..... (1)$$

وفي واقع الآمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الأتي:

$$\begin{array}{l} i = 1 : Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + ... + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\ i = 2 : Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + ... + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\ ..... \\ i = n : Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + ... + \beta_k X_{nk} + \varepsilon_n \end{array}$$

[1] BEN M'BAREK ALaya, **Séries d'exercices Corrigés d'économétrie**, Imprimere Officielle de la République Tunisienne, 2002, P14.

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الآمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كآلاتي :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & ... & X_{1K} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & ... & X_{2K} \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & ... & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad .... \ (2)$$

وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي[2]:

$$\boxed{Y = X\beta + \varepsilon}$$

Y : متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

X : مصفوفة أبعادها $(n\times k+1)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت .

β : متجه عمودي أبعاده $(k+1\times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

ε : متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية .

وبما أن المعادلة (1) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصاءات المتوفرة عن المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$ ، فإنه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة بـ ε_i التالية :

2. فرضيات النموذج:

تأخذ علاقة النموذج الخطي المتعدد الصيغة التالية[3]:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1,....., n$$

ε_i يتوزع توزيعا طبيعيا متعدد المتغيرات.

القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفرا أي أن: $E(\varepsilon_i) = 0$

[2] BOURBONNIAIS. R OP.CIT, p 50.
[3] GREENES. W, **Econométrie**, Pearson, France, 2005, p 10.

$$E(\varepsilon_i) = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1)\\ E(\varepsilon_2)\\ .\\ E(\varepsilon_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ 0\end{bmatrix}$$

تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفرا أي أن [4]:

$$\begin{cases}\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, & \forall i = 1.....n\\ \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j\end{cases}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon 2 & \dots & \varepsilon_n\end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ . & . & . & .\\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n^2\end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & .... & E(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ . & . & ..... & .\\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_n^2)\end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix}\text{var}(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ Cov(\varepsilon_2\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ . & . & .... & .\\ Cov(\varepsilon_n\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & Var(\varepsilon_n)\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\text{var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon^2{}_i) = \sigma^2\\ \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j\end{cases}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

[4] PHILIPPE Casin, **Econométrie Méthode et applications avec Eviews**, Edition TECHNIP,Paris, 2009, P96.

حيث أن: $\sigma_1^{\,2} = \sigma^2{}_2 = \sigma^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\sigma^2{}_n$

$$\Omega_{\varepsilon} = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{\varepsilon}^2 I_n$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك "Variance –Covariance Matrix" لحد الخطأ ε_i، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم ε_i، بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم ε_i .

ويمكن تلخيص الفرضيات السابقة رياضيا كما يلي: $\varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right)$

- $\frac{1}{n}(X'X)$ تؤول إلى مصفوفة محدودة غير فردية.
- عدم وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة كما أن عدد المشاهدات يجب أن يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها أي أن : $\rho(X) = K+1 \prec n$ حيث أن ρ رتبة مصفوفة البيانات و X عدد المتغيرات المستقلة $K+1$، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n)، وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ إذ أن عدم توفر هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من $K+1$ وبالتالي فان رتبة $(X'X)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها اقل من $K+1$ ولا يمكن إيجاد معكوسا لها أي أن : $(X'X)^{-1}$ غير معرفة لن محدده يؤول الى الصفر وهذا ما يسبب ما يسمى **بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد**، وبالتالي لا يمكن الحصول على المقدرات باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS).

$H.7^*$ (X) مصفوفة غير عشوائية[5]، وتعني هذه الفرضية أنه إذا أخذنا عينة أخرى تتكون من (n)مشاهدة فإن المصفوفة (X) (مصفوفة المتغيرات المفسرة) تبقى دون تغيير، المصدر الوحيد للتغير هنا هو شعاع الخطأ العشوائي (ε)وهذا ما يؤثر على الشعاع (Y) أي ; $\text{cov}(X,\varepsilon) = E(X'\varepsilon) = 0$

[5] هاري كلجيان و والاس أونس، مرجع سابق، ص 80.

3. تقدير شعاع المعالم $\hat{\beta}$:

باستعمال طريقة المربعات الصغرى وبإتباع نفس خطوات التقدير التي رأيناها في النموذج الخطي البسيط نستطيع تقدير النموذج الخطي المتعدد باستعمال طريقتي المعادلات الطبيعية وجبر المصفوفات كالآتي:

1.3 طريقة المعادلات الطبيعية:

في مثل هذه تكون طريقة المعادلات الطبيعية غير عملية، فهي تتطلب وقتا طويلا لإيجاد صيغة مقدرات النموذج، زيادة على ذلك فإن هذه الصيغ تحتاج إلى عمليات حسابية معقدة.

في حالة وجود متغيرين مستقلين فقط وهي أبسط حالة لنموذج الانحدار المتعدد تكون صيغة النموذج كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i .....1$$

النموذج المقدر هو:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + e_i .....2$$

حيث أن:

$\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ هي مقدرات $\beta_2, \beta_1, \beta_0$ على الترتيب و e_i مقدر ε_i .

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد تقدير للشعاع β الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف $\hat{\varepsilon}_i$ بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية Y أي:

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$
$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1.....n$$

ومن خلال التعويض عن $\hat{Y}_i$ بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ ومساواتها بالصفر نحصل على : الشرط اللازم لتدنئة قيمة $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة ل $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ معدومة

أي[6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_{2i}\right)^2 = 0 \text{.....3} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_{2i}\right)^2 = 0 \text{.....4} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_2}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 = 0 \text{.....5} \end{cases}$$

$$3 \Rightarrow \ -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ \sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} \text{.....6}$$

المعادلة رقم: (6) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الأولى.

$$4 \Rightarrow \ -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 \left(X_{1i}\right) = 0$$

$$\sum_i \left(Y_i X_{1i}\right) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i \ {X_{1i}}^2 + \hat{\beta}_2 \sum \ X_{1i} X_{2i} \text{.....7}$$

المعادلة رقم: (7) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثانية.

$$5 \Rightarrow \ -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 \left(X_{2i}\right) = 0$$

$$\sum_i \left(Y_i X_{2i}\right) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i \ X_{1i} X_{2i} \ + \hat{\beta}_2 \sum \ {X_{2i}}^2 \text{.....8}$$

المعادلة رقم: (8) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثالثة.

وتمثل المعادلات (6) و (7) و (8) المعادلات الطبيعية الثلاث التي تستخدم في تقدير المعالم الثلاثة المجهولة $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ وهذه المعادلات يمكن حلها بإحدى الطرق الآتية :

2.3 طريقة المحددات :

يمكن أن تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرا يمر للحصول على قيم $\hat{\beta}_K$ من المعلمات وعلى النحو الآتي

$$\sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} .$$

$$\sum_i \left(Y_i X_{1i}\right) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i \ {X_{1i}}^2 + \hat{\beta}_2 \sum \ X_{1i} X_{2i}$$

$$\sum_i \left(Y_i X_{2i}\right) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i \ X_{1i} X_{2i} \ + \hat{\beta}_2 \sum \ {X_{2i}}^2$$

[6] JOHNSTON. J, DINARDO. J, **Méthodes économétrique**, Economica, Paris, 1999 , p 21-21.

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن أيجاد المحددات الآتية :

$$|D| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i} Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{i2i} Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{|N_2|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{i2i} Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة ل $\hat{\beta}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق : $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2$

3.3 طريقة الانحرافات :

من الممكن الحصول على المقدرات **باستخدام الانحرافات** وذلك بواسطة y و xعن وسطهما الحسابي:

$$y_i = \left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

$$x_{1i} = \left(X_{1i} - \overline{X}_1\right)$$

$$x_{2i} = \left(X_{2i} - \overline{X}_2\right)$$

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \ddot{y}_i\right)^2$$

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i \qquad i = 1.....n$$

$$Min\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = Min(y-\hat{y})'(y-\hat{y}) = Min\, e'e$$

$$\Rightarrow \quad e = y - \hat{y} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$Min(e'e) = (y-\hat{y})'(y-\hat{y}) = \hat{y}'\hat{y} - 2\hat{y}'y + y'y = \hat{\beta}'x'x\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'x'y + y'y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}'} = 0 \Leftrightarrow 2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0$$

وبما أن رتبة (X)هي k فإن : $(x'x)$مصفوفة مربعة $((k)\times(k))$ رتبتها k وتقبل معكوس $(x'x)^{-1}$.

ومنه: $2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0 \Rightarrow (x'x)\hat{\beta} - x'y = 0$

نضرب طرفي المعادلة بـ$(x'x)^{-1}$ لنحصل على : $\boxed{\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y}$ وهو تقدير لـ β .

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^{\,2} & \sum x_{1i}x_{2i} & .... & \sum x_{1i}x_{ki} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{\,2} & .... & \sum x_{2i}x_{ki} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \sum x_{ki}x_{1i} & \sum x_{ki}x_{2i} & ..... & \sum x_{ki}^{\,2} \end{pmatrix}$$

و

$$(x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \\ ..... \\ ..... \\ \sum x_{ki}y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ . \\ \hat{B}_K \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}{}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} & .... & \sum x_{1i}x_{ki} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}{}^2 & .... & \sum x_{2i}x_{ki} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \sum x_{ki}x_{1i} & \sum x_{ki}x_{2i} & ..... & \sum x_{ki}{}^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \\ ..... \\ ..... \\ \sum x_{ki}y_i \end{bmatrix}$$

يمكن ايجاد عناصر هذه المصفوفة انطلاقا من المعطيات الأصلية كما يلي :

$$\sum x_{1i}y_i = \sum X_{1i}Y_i - \frac{\sum X_{1i}\sum Y_i}{n}$$

$$\sum x_{2i}y_i = \sum X_{2i}Y_i - \frac{\sum X_{2i}\sum Y_i}{n}$$

$$\sum x_{1i}x_{2i} = \sum X_{1i}X_{2i} - \frac{\sum X_{1i}\sum X_{2i}}{n}$$

$$\sum x_{1i}{}^2 = \sum X_{1i}{}^2 - \frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n}$$

$$\sum x_{2i}{}^2 = \sum X_{2i}{}^2 - \frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n}$$

$$\sum y_i{}^2 = \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}$$

4. مثال تطبيقي :

الجدول التالي يتضمن البيانات الخاصة بالاستيراد كمتغير تابع (Y) والدخل الوطني كمتغير مستقل أول (X_1) وأسعار الاستيراد كمتغير مستقل ثاني (X_2) في إحدى الدول للفترة من : 2012- 2020.

الاستيراد Y_i	**الدخل الوطني** X_1	**السعر** X_2
20	3	02
22	5	02
23	6	02.5
24	7	3.5
26	8	4.5
29	9	06
30	11	7
34	12	10
37	13	10.5
40	16	12
$\sum Y_i = 285$	$\sum X_{1i} = 90$	$\sum X_{2i} = 60$

المطلوب:

قدر معادلة الانحدار الخطي المتعدد باستخدام طريقتي المعطيات العادية والانحرافات؟مع شرح المعنى الاقتصادي للمعالم؟

الحل:

إيجاد المعادلة المقدرة باستخدام المعطيات العادية والانحرافات:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} \mathrm{n} & \sum \mathrm{X}_{1\mathrm{i}} & \sum \mathrm{X}_{2\mathrm{i}} \\ \sum X_{1i} & \sum \mathrm{X}_{1\mathrm{i}}{}^{2} & \sum \mathrm{X}_{1\mathrm{i}}\mathrm{X}_{2\mathrm{i}} \\ \sum X_{2i} & \sum \mathrm{X}_{1\mathrm{i}}\mathrm{X}_{2\mathrm{i}} & \sum \mathrm{X}_{2\mathrm{i}}{}^{2} \end{bmatrix}$$

بالتطبيق العددي نتحصل على :

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 10 & 90 & 60 \\ 90 & 954 & 671 \\ 60 & 67 & 486 \end{bmatrix}$$

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 285 \\ 2804 \\ 1935 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \begin{bmatrix} 10 & 90 & 60 \\ 90 & 954 & 671 \\ 60 & 671 & 486 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 285 \\ 2804 \\ 1935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.99 \\ 0.65 \\ 1.11 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{Y}_i = 15.99 + 0.65X_{1i} + 1.11X_{2i}}$$

- **تقدير المعلمات باستخدام الانحرافات :**

$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

$$x_{1i} = (X_{1i} - \bar{X}_1)$$

$$x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X}_2)$$

$$(x'x) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}{}^{2} & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}{}^{2} \end{bmatrix}$$

$$(x'y)=\begin{bmatrix}\sum y_i\\ \sum x_{1i}y_i\end{bmatrix}$$

$$\sum x_{1i}y_i=\sum X_{1i}Y_i-\frac{\sum X_{1i}\sum Y_i}{n}=239$$

$$\sum x_{2i}y_i=\sum X_{2i}Y_i-\frac{\sum X_{2i}\sum Y_i}{n}=225$$

$$\sum x_{1i}x_{2i}=\sum X_{1i}X_{2i}-\frac{\sum X_{1i}\sum X_{2i}}{n}=131$$

$$\sum {x_{1i}}^2=\sum {X_{1i}}^2-\frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n}=144$$

$$\sum {x_{2i}}^2=\sum {X_{2i}}^2-\frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n}=126$$

$$\sum {y_i}^2=\sum {Y_i}^2-\frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}=1274$$

$$(x'x)=\begin{bmatrix}144 & 131\\ 131 & 126\end{bmatrix}\quad,\quad (x'y)=\begin{bmatrix}239\\ 225\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(x'x)^{-1}(x'y)=\begin{bmatrix}144 & 131\\ 131 & 126\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}239\\ 225\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.65\\ 1.11\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0=Y-\hat{\beta}_1\overline{X}_1-\hat{\beta}_2\overline{X}_2=15.99$$

$$\boxed{\hat{Y}_i=15.99+0.65X_{1i}+1.11X_{2i}}$$

شرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة :

تشير التقديرات إلى وجود علاقة طردية بين الاستيراد (Y) والدخل الوطني(X_1) فكل زيادة في الدخل الوطني بمقدار وحدة واحدة تزداد الاستيراد (Y) ب 065 وحدة مع ثبات أثر السعر(X_2) . كما تشير المعادلة إلى وجود علاقة طردية بين السعر(X_2) والاستيراد (Y) فزيادة السعر (X_2)بوحدة واحدة تؤدي إلى زيادة الاستيراد (Y) ب 1.11 وحدة مع ثبات أثر الدخل الوطني(X_1). وهذا مخالف للنظرية الاقتصادية لأن النظرية الاقتصادية تشير إلى علاقة عكسية بين السعر والاستيراد.

5. الخصائص الإحصائية للمعالم المقدرة:

1.5 التوقع:

لدينا: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$.....01

و أيضا : $Y = X\beta + \varepsilon$

بتعويض قيمة Y في المعادلة 01 نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'[X\beta + \varepsilon] = (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon \Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon$$

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon \text{..... ....} \quad 02$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1} X'E(\varepsilon) \quad / \quad E(\varepsilon) = 0$$

نتحصل على: $\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$

نستنتج أن $\hat{\beta}$ المحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى مقدرة غير متحيزة.

حسب نظرية " Gausse – Marcov" والتي تقول من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS" أفضل مقدرات خطية غير متحيزة "BLUE " حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى. تتضمن هذه النظرية خاصية أقل تباين للمقدرات ويمكن البرهنة عليها بعد إيجاد تباينات المقدرات كما يلي:

2.5تباين المقدرات:

لدينا: $\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left(\hat{\beta}-\beta\right)\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right]$.....03

من المعادلة رقم 02 نجد:

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1} X'\varepsilon$$

نعوض $\hat{\beta} - \beta$ في المعادلة رقم 03 نجد:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left((X'X)^{-1} X'\varepsilon\right)\left((X'X)^{-1} X'\varepsilon\right)'\right]$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left(X'X\right)X'\,\varepsilon\varepsilon'\,X\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left[\left(X'X\right)X'\,E\left(\varepsilon\varepsilon'\right)X\left(X'X\right)^{-1}\right] \quad \text{.....04}$$

لدينا : $$\Omega_{\varepsilon} = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_{\varepsilon}^{2} I_{n}$$

بتعويض هذه العلاقة في المعادلة رقم : 04 نجد:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left[\left(X'X\right)X'\sigma^{2}{}_{\varepsilon} I_{n} X\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

نتحصل على:

$$\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^{2}\left(X'\,X\right)^{-1}}$$

حيث σ_{ε}^{2} : تباين الحد العشوائي.

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك "Variance – CovarianceMatrix" للمعالم المقدرة، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين المعالم المقدرة ، بينما العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) التباين المشترك والترابط بين أي إثنين من هاته المعالم المقدرة.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_K) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & .... & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_K) \\ . & . & .... & . \\ Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_1) & .... & Var(\hat{\beta}_K) \end{bmatrix}$$

من المصفوفة أعلاه يمكن استنتاج ما يلي:

أي أن: $Var(\hat{\beta}) = diag\,\Omega_{\hat{\beta}}$

أي أن : $Var\left(\hat{\beta}\right) = diag\;\sigma_{\varepsilon}^{2}\left(X'\,X\right)^{-1}$

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_{\varepsilon}^{2}\;diag\left(X'X\right)^{-1}$$

وبالتالي فإن تباين أي عنصر من عناصر $\hat{\beta}$ هوعبارة عن حاصل ضرب قيمة σ_ε^2 بما يقابلها من العناصر الواقعة على قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$، كما أن قيمة التباين المشترك بين أي اثنين من عناصر $\hat{\beta}$ هوعبارة عن حاصل ضرب σ_ε^2 بالعنصر المقابل لها والواقع خارج نطاق القطر للمصفوفة $(X'X)^{-1}$.[7]

تباين المقدرات باستخدام المعطيات المركزة "الانحرافات":

يمكننا إيجاد مصفوفة التباين والتباين المشترك باستخدام المعطيات المركزة كما يلي:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_\varepsilon^2 (x'x)^{-1}$$

فلنأخذ مثالا لنموذج متكون من متغيرتين مستقلتين في النموذج

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

$\Omega_{\hat{\beta}}$ تكتب على الشكل التالي:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

نلاحظ من مصفوفة التباين والتباين المشترك للمقدرات بالانحرافات أنها لا تتضمن تباين الحد الثابت $Var(\hat{\beta}_0)$ كما أنها لا تتضمن التباين المشترك للحد الثابت مع أي ميل حدي $i = 1,2,\ Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_i)$

[7] عبد المحمود محمد عبد الرحمان، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، عمادة شؤون المكتبات، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1995، ص96.

نستطيع أن نستخرج تباين الحد الثابت بكل سهولة من العلاقة الآتية:

$$Var(\hat{\beta}_0)=\sigma_e^2\left[\overline{X}'(x'x)^{-1}\overline{X}+\frac{1}{n}\right]$$

$\overline{X}'$ منقول مصفوفة المتوسطات الحسابية في حالة متغيرتين مستقلتين: $\overline{X}'=(\overline{X}_1,\overline{X}_2)$ و $\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{X}_1\\ X_2\end{pmatrix}$

خاصية الاتساق:

بما أن $\hat{\beta}$ تحقق الشروط :

$$E(\hat{\beta})=\beta$$
$$\lim_{n\to\infty}\Omega_{\hat{\beta}}=0$$

فإن المقدرات $\hat{\beta}$ هي مقدرات متسقة للمعالم $\hat{\beta}$

6. تقدير تباين الأخطاء σ_ε^2 :

إحدى فرضيات النموذج هي $E(\varepsilon\varepsilon')=\Omega_\varepsilon=\sigma^2 I_n$ وبما أن σ^2 غير معروف، فينبغي تقديره:

$$\hat{\varepsilon}=Y-X\hat{\beta}=X\beta+\varepsilon-X\hat{\beta}=\varepsilon-X(\hat{\beta}-\beta)=\varepsilon-X(X'X)^{-1}X'\varepsilon=(I_n-X(X'X)^{-1}X')\varepsilon$$

نضع : $M_X=(I_n-X(X'X)^{-1}X')$ ، حيث M_X تسمى *المصفوفة الدورية* أي :

$$M_X=M_X^{'}M_X=M_X^2=M'$$

بالإضافة إلى ذلك : $M_X X=0$

ومنه: $e^{'}e=e'M_X^{'}M_X e$ أي : $e^{'}e=e'M_X e$

ندخل التوقع الرياضي على الطرفين : $E(e^{'}e)=E(e'M_X e)$

ويجب الملاحظة أن أثر $e'e$ يساوي أثر $e'Me$ ، ونعلم أيضا أن أثر (AB)=أثر (BA).

يكون لدينا إذن : أثر $(e'Me)$=أثر $(ee'M)$

$$E(ee')=E(ee')Tr(M_X)$$

نعلم أن: $E(ee')=\sigma^2$ وعليه: $E(ee')=\sigma^2\{Tr(I_n)-Tr(X(X'X)^{-1}X')\}$

ومنه : $E(e^{'}e)=\sigma^2(n-k-1)$

حيث : $Tr(X(X'X)^{-1}X')=k+1$; $Tr(I_n)=n$

لكي نحصل على تقدير غير متحيز لـ σ^2 يكفي قسمة العبارة على : $(n-k-1)$

$$E\left(\frac{e'e}{n-k-1}\right)=\sigma^2$$

في حالة الانحدار المتعدد حيث هناك $k+1$ معلم للتقدير و n عدد المشاهدات، وهذا يُعطي عدد درجات الحرية $n-k-1$، إذن :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}$$

7. اختبار جودة التوفيق والارتباط:

1.7 معامل التحديد R^2

ويعد مؤشر أساس في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة (X_k) حيث : ($k=1,2,3.....k$) ، بعبارة أخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع .

يمكن كتابة معادلة الانحرافات الكلية كآلاتي :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT-SCR}{SCT} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2}$$

$$SCE = \sum_i (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \sum \hat{Y}_i - n\overline{Y}^2$$

$$\sum \hat{Y}_i - n\overline{Y}^2 = \hat{Y}'\hat{Y} - n\,\overline{Y}^2$$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$$

SCT : تمثل الانحرافات الكلية .

SCE : تمثل الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار .

$e'e$: تمثلا الانحرافات غير الموضحة .

وبما أن معامل التحديد R^2 عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قيل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية ، فانه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية[8] ويكون محصورا بين 0 و1 كالتالي: $0 \leq R^2 \leq 1$

- عندما يكون R^2 قريب من الواحد فهذا يدل على جودة التوفيق وقوة القدرة التفسيرية للنموذج والعكس صحيح.
- إذا كان: "SCR=0" فهذا يعني أن النموذج هو عبارة عن خط مستقيم ولا توجد أخطاء في النموذج وهي حالة نادرة الحدوث.
- أما إذا كان: " SCE=0" فهذا يعني ان المتغيرات المستقلة لا تفسر إطلاقا المتغير التابع وهي حالة نادرة الحدوث ايضا.

يمكن إيجاد معامل التحديد بالانحرافات كما يلي:

حيث : $y_i = Y_i - \overline{Y} \quad , \quad x_i = X_i - \overline{X} \qquad \forall i = 1.....n$

$$R2 = \frac{\hat{\beta}'x'y}{y'y} = \frac{\hat{\beta}'x'y}{\sum y^2}$$

معامل التحديد المصحح $\overline{R}^2$:

إن إضافة متغيرات مستقلة جديدة إلى المعادلة يؤدي إلى رفع قيمة R^2 ، وذلك لثبات قيمة المقام وتغير قيمة البسط بمقدار $(\hat{\beta}'X'Y)$غير أن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي إلى انخفاض درجات الحرية $(n-k-1)$، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل أو المصحح $\overline{R}^2$ على النحو الآتي[9] :

$$\overline{R}^2 = \left[1 - \frac{SCR/n-k-1}{SCT/n-1}\right]$$

$$\overline{R}^2 = \left[1 - \left(\frac{SCR}{SCT}\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

[8] مرجع سابق، ص68.

[9] Wiliam GREENES, OP.CIT, P58.

$$\overline{R}^2 = \left[1-\left(1-R^2\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

نلاحظ أن: $R^2 \geq \overline{R}^2$ إذا كانت $k>1$

يمكن أن نلاحظ أنه عندما يكون عدد المشاهدات n كبير نسبيا فإن R^2 يؤول إلى $\overline{R}^2$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{R}^2 = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n-k-1}\left(1-R^2\right) = R^2$$

إذا كان حجم العينة n كبيرا، فإن R^2 و $\overline{R}^2$ يقتربان قي قيمتهما، لكن في العينات الصغيرة، إذا كان عدد المتغيرات المستقلة كبيرا بالمقارنة مع حجم العينة، فإن $\overline{R}^2$ يقل بكثير على R^2، ويمكن أن يأخذ قيما سالبة، في هذه الحالة يجب شرحه على أساس أن قيمته تساوي الصفر.

مثال : في المثال التطبيقي السابق أوجد :

- **الانحراف المعياري المقدر للمعلمات بطريقتين مختلفتين؟**
- **معامل التحديد مع تفسير النتائج؟**
- **معامل التحديد المصحح؟**

الحل:

1. حساب الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة باستخدام المعطيات الأصلية والانحرافات:

*** حساب الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة .**

$$\boxed{Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

لدينا : $\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}}$ و $\boxed{\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}}$

إيجاد $\sum e^2{}_i$:

لدينا : $\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

$$SCT = \sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = 408.50$$

$$SCT = \sum Y_i{}^2 - n\overline{Y}^2 = 408.5$$

$$SCE = \sum_I \left(\hat{Y} - \overline{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2 = 405.1$$

$$SCE = (15.99 \quad 0.65 \quad 1.11)\begin{pmatrix} 285 \\ 2804 \\ 1935 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{285}{10}\right)^2 = 405.1$$

$$SCR = \sum e^2{}_i = SCT - SCE = 3.4$$

$$\sigma_e{}^2 = \frac{\sum e^2{}_i}{n-k-1} = \frac{3.4}{10-2-1} = 0.48$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e{}^2 (X'X)^{-1} = 0.48 \begin{bmatrix} 10 & 90 & 60 \\ 90 & 954 & 671 \\ 60 & 671 & 486 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = 0.48 \begin{bmatrix} 1.36 & -0.35 & 0.32 \\ -0.35 & 0.12 & -0.13 \\ 0.32 & -0.13 & 0.14 \end{bmatrix}$$

- **حساب الانحراف المعياري للمقدرات :**

$$Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = 0.48 * 1.36 = 0.65 \qquad \sigma_{\hat{\beta}0} == \sqrt{0.65} = 0.80$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = 0.48 * 0.12 = 0.06 \qquad \sigma_{\hat{\beta}1} == \sqrt{0.06} = 0.24$$

$Var(\hat{\beta}_1) = 0.48 * 0.15 = 0.07$ $\sigma_{\hat{\beta}2} = \sqrt{0.07} = 0.26$

- **حساب الانحراف المعياري للمقدرات " بطريقة الانحرافات :**

بالانحرافات مصفوفة التباين والتباين المشترك على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

لدينا : $\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^2 (x'x)^{-1}}$

إيجاد $\sum e^2{}_i$:

لدينا : $\sum_i y_i{}^2 = \sum_i \hat{y}^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

$SCT = \sum_i y_i{}^2 = 408.5$

$SCE = \sum_I \hat{y}^2 = \hat{\beta}' x' y = 405.1$

$SCR = \sum_i e_i{}^2 = SCT - SCR = 3.4$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}$$

$$\sigma_e{}^2 = \frac{\sum e^2{}_i}{n-k-1} = \frac{3.4}{10-2-1} = 0.48$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e^2 (x'x)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e{}^2 (x'x)^{-1} = \sigma_e{}^2 \begin{bmatrix} 144 & 131 \\ 131 & 126 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.06 \\ -0.06 & 0.07 \end{bmatrix}$$

- **حساب الانحراف المعياري للمقدرات :**

$$Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = 0.06 \qquad \sigma_{\hat{\beta}1} == \sqrt{0.06} = 0.24$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = 0.06 \qquad \sigma_{\hat{\beta}2} = \sqrt{0.07} = 0.26$$

- **حساب الانحراف المعياري للحد الثابت باستخدام الانحرافات :**

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_e^2 \left[\overline{X}'(x'x)^{-1} \overline{X} + \frac{1}{n} \right]$$

$$\overline{X}' = (\overline{X}_1, \overline{X}_2) = (9,6) \qquad \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_e^2 \left[\overline{X}'(x'x)^{-1} \overline{X} + \frac{1}{n} \right] = 0.48 \left[(9,6) \begin{pmatrix} 144 & 131 \\ 131 & 126 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \right]$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = 0.65 \qquad \sigma_{\hat{\beta}0} == \sqrt{0.65} = 0.80$$

- **إيجاد معامل التحديد مع التفسير R^2 :**

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2} = \frac{405.1}{408.5} = 0.99$$

$$SCE = \hat{\beta}'(X'Y) - n\overline{Y}^2$$

$$SCE = (15.99 \quad 0.65 \quad 1.11) \begin{pmatrix} 285 \\ 2804 \\ 1935 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{285}{10}\right)^2 = 405.1$$

$$SCT = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2 = 408.5$$

أو :

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{3.4}{408.5} = 0.99$$

التفسير : الاستيراد (Y) مفسر ب : 99% عن طريق الدخل الوطني (X_1) و السعر (X_2) وتبقى 01% تدخل ضمن هامش الخطأ وهي متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج أو أخطاء إرتكبناها أثناء القياس ، على العموم هو هامش قليل جدا دلالة على قوة النموذج التفسيرية.

- **إيجاد معامل التحديد المصحح** $\overline{R}^2$:

$$\overline{R}^2 = \left[1-\left(1-R^2\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

$$\overline{R}^2 = \left[1-\left(1-0.99\right)\frac{10-1}{10-2-1}\right] = 0.98$$

8. معامل الارتباط الجزئي:Partial Correlation

في بعض الظواهر والدراسات يوجد هناك عدد من المتغيرات (ثلاثة فأكثر) مرتبطة بعلاقة رياضية فيما بينها مثل: إنفاق أسرة يكون مرتبط بدخلها الشهري و عدد افرادها وكذلك حجم مبيعات سلعة معينة يرتبط بسعرها وحجم الدعاية لها وكذلك الفترة الزمنية للبيع ففي هذه الحالة، ولغرض حساب معامل الارتباط بين متغيرين اثنين في دراسة معينة مع وجود متغيرات أخرى نلجأ إلى حساب ما يسمى بالارتباط الجزئي .

الارتباط الجزئي هو: العلاقة الرياضية الصافية بين متغيرين اثنين فقط مع وجود متغيرات أخرى قيد الدراسة ويمكن حساب هذه العلاقة الرياضية من خلال معامل الارتباط الجزئي.

إن الفرق بينه وبين معامل الارتباط البسيط هو أن معامل بيرسون يستخرج العلاقة بين متغيرين اثنين لأي ظاهرة بدون يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة أو لا ، بينما معامل الارتباط الجزئي لا يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة فحسب وإنما يقوم باستبعاد أثرها لكي يستخرج الارتباط الصافي بين أي متغيرين.

1.8. حساب معامل الارتباط الجزئي

ليكن لدينا نموذج انحدار متكون من متغيرتين مستقلتين كالأتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_1, Y) [10]:

$$r_{(Y,x_1)}\left(X_2\right) = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{Yx_2}\right)\left(1-r^2_{x_1x_2}\right)}}$$

[10] Wiliam GREENES, OP.CIT, P46.

r_{YX1} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y, X_1).

r_{YX2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y, X_2).

r_{X1X2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (X_1, X_2).

- **معامل الارتباط الجزئي بين (X_2, Y):**

$$r_{(Y,x_2)}(X_1) = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1} r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{YX_1}\right)\left(1-r^2_{X_1X_2}\right)}}$$

خصائص معامل الارتباط الجزئي:

* إن قيمة معامل الارتباط الجزئي تتراوح بين $(1,-1)$

* تفسر قيمته كما تفسر قيمة معامل الارتباط البسيط.

* إن معامل الارتباط الجزئي لأي متغيرين تكون إشارته مماثلة لإشارة معامل الارتباط البسيط بينهما.

مثال تطبيقي :

إنطلاقا من المعطيات السابقة أوجد معامل الارتباط الجزئي (X_1, Y) مع تثبيت X_2 ثم أوجد معامل الارتباط الجزئي (X_2, Y) مع تثبيت X_1 ؟

- **معامل الارتباط الجزئي بين(X_1, Y) :**

$$r_{(Y,x_1)} = \frac{COV(Y, X_1)}{\sigma_Y \ \sigma_{X1}} = \frac{23.9}{\sqrt{40.85}\sqrt{14.4}} = 0.98$$

$$r_{(Y,x_2)} = \frac{COV(Y, X_2)}{\sigma_Y \ \sigma_{X2}} = \frac{22.5}{\sqrt{40.85}\sqrt{12.6}} = 0.99$$

$$r_{(X_1,X_2)} = \frac{COV(X_1, X_2)}{\sigma_{X1}\ \sigma_{X2}} = \frac{13.1}{\sqrt{14.4}\sqrt{12.6}} = 0.97$$

$$r_{(Y,X_1)}(X_2) = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{\ Yx_2}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}} = \frac{0.98 - 0.99 * 0.97}{\sqrt{\left(1 - 0.99^2\right)\left(1 - 0.97^2\right)}} = 0.57$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين** (X_2, Y):

$$r_{(Y,X_2)}(X_2) = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{\ YX_1}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}} = \frac{0.99 - 0.98 * 0.97}{\sqrt{\left(1 - 0.98^2\right)\left(1 - 0.97^2\right)}} = 0.81$$

نلاحظ من النتائج المتحصل عليها أن المتغيرة X_2 اكثر مساهمة في تفسير Y من المتغيرة X_1

9. اختبار الفرضيات لنموذج الخطي المتعدد :

يهدف هذا العنصر إلى توسيع معارفنا الأساسية لنموذج الانحدار وذلك بإجراء اختبار معنوية الانحدار المتعدد والمقدر باستخدام توزيع اختبار إحصاءه F ومقارنته باختبار t ومن ثم تقييم كفاءة الأداء العام لنموذج الانحدار المتعدد R^2 ومقارنته بمعامل التحديد المقدر المعدل $\overline{R}^2$ ، وكذلك اختبار العلاقة بين F و R^2 من خلال جدول تحليل التباين $ANOVA$, ثم علاقة R^2 بقيمة المتغير العشوائي $\sum e_i^2$.

1.9 اختبار معنوية المعالم (t) :

يستخدم اختبار t لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ,..., X_k$ في المتغير التابع Y في نموذج الانحدار المتعدد يعتمد على نوعين من الفروض [11]:

فرضية العدم $H_0 : \beta_i = 0 \quad i = 0,1,..., k$ المعلمة ليس لها دلالة معنوية

الفرضية البديلة $H_1 : \beta_i \neq 0$ المعلمة لها دلالة معنوية

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول او رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار يمكن بيانها كما يلي[12] :

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$$ القيمة المحسوبة.

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_i فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي: $t_c = \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$، حيث يتم قبول أو رفض الفرضية H_0 بمستوى معنوية $(\%\alpha)$ على أساس مقارنة t_c مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)}$ حيث أن:

$\frac{\alpha}{2}$: مستوى المعنوية و k: عدد المتغيرات المستقلة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد دراسته .

إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| \leq t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ ففي هذه الحالة المعلمة ليس لها معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر .

[11] تومي صالح، مرجع سابق، ص107.

[12] BOURBONNIAIS. R OP.CIT, P58.

إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| > t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر.

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n \geq 30)$ **فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة** $z_{\alpha/2}$ **و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.**

2.9 اختبار جودة النموذج:

يستهدف هذا الاختبار معرفة مدى معنوية العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة $X_1 , X_2 , \ldots X_K$ على المتغير التابع Y ، وكما هو الحال في الانحدار البسيط فإنه يعتمد على نوعين من الفروض[13]:

الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية $H_0 : \beta_i = \beta_2 = \beta_3 = \ldots\ldots\ldots\beta_k = 0$ (فرضية العدم)

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \exists$ معامل $\neq 0$ (الفرضية البديلة)

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي :

$$F_c = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 \Big/ k}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \Big/ (n-k-1)} = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2 / k}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \Big/ (n-k-1)} \sim F_\alpha(k, n-k-1)$$

$$\boxed{F_c = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \sim F_\alpha(k, n-k-1)}$$

وبعد احتساب قيمة F تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (k) و $(n-k-1)$ للبسط والمقام ولمستوى معنوية معين .

- عندما تكون $|F_{Cal}| \rangle F_{Tab}$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.
- عندما تكون $|F_{Cal}| \leq F_{Tab}$ نقبل فرضية العدم (H_0)أي جميع المتغيرات التفسيرية لا تمارس أي تأثير على المتغير التابع وتكون معادلة الانحدار المقدرة غير معنوية إحصائيا.

[13] عبد المحمود محمد عبد الرحمان ، مرجع سابق، ص193.

3.9. جدول تحليل التباين ANOVA [14]:

لغرض الوقوف على تأثير كل من (X_1)، (X_2) في المتغير التابع Y ، لابد من عمل جدول تحليل التباين لبيان أثر المتغيرين المستقلين (X_1)و (X_2)في النموذج.

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	اختبار F
الانحراف الموضح من قبل (X_1)و (X_2) SCE	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	k	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 \Big/ k$	$=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 \Big/ k}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \Big/ (n-k-1)} \sim F_{\alpha}(k,n-k-1)$
الانحراف غير الموضح SCR	$e'e$	$n-k-1$	$e'e \Big/ n-k-1$	
الانحراف الكلي SCT	$\sum(Y_i-\bar{Y})^2$	$n-1$		

مثال تطبيقي :

نفس المثال السابق اختبر معنوية المعلمات باستخدام اختبار t عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$؟ ثم اختبر معنوية النموذج ككل؟

الحل:

- **اختبار معنوية ميل الدخل الوطني عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

[14] أموري هادي كاظم الحسناوي، مرجع سابق، ص43.

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي :

حيث أن: $t_C = \dfrac{\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_1 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.65}{0.24} = 2.70$$

حيث أن : $t_t = t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)} = t_{\left(10-2-1,\frac{0.05}{2}\right)} = t_{(7\,,\,0.025)} = 2.365$

نلاحظ أن : $|t_C| \succ t_{(7\,,\,0.025)}$ نقبل الفرضية H_1 ونرفض الفرضية H_0 أي أن المعلمة لها معنوية إحصائية أي أن الدخل الوطني يؤثر على الاستيراد.

- **اختبار معنوية ميل السعر عند مستوى معنوية α = 5% .**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_2 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_2 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي :

حيث أن: $t_C = \dfrac{\left|\hat{\beta}_2 - \beta_2\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_2 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}2}} = \frac{1.11}{0.26} = 4.26$$

حيث أن : $t_t = t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)} = t_{\left(10-2-1,\frac{0.05}{2}\right)} = t_{(7\,,\,0.025)} = 2.365$

نلاحظ أن : $|t_c| \succ t_{(7\,,\,0.025)}$ نقبل الفرضية H_1 ونرفض الفرضية H_0 أي أن المعلمة لها معنوية إحصائية أي أن السعر يؤثر على الاستيراد.

- **اختبر معنوية الحد الثابت عند مستوى معنوية 5% = α .**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t وتساوي :

حيث أن: $$t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_0 فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{15.99}{0.80} = 19.89$$

حيث أن : $$t_t = t_{\left(n-k-1,\frac{\alpha}{2}\right)} = t_{\left(10-2-1,\frac{0.05}{2}\right)} = t_{(7\,,\,0.025)} = 2.365$$

نلاحظ أن : $|t_c| \succ t_{(7\,,\,0.025)}$ نقبل الفرضية H_1 ونرفض الفرضية H_0 أي أن المعلمة لها معنوية إحصائية.

- **تحليل التباين واختبار جودة النموذج:**

" جدول تحليل التباين ANOVA"

مصدر التباين	مجموع مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	اختبار F
الانحراف الموضح من	$\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = 405.1$	$k = 2$	$\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 \Big/ k$	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \Big/ k$ / n / $\sim F_\alpha(k, n-k-1)$

قبل (X_1) و (X_2) **SCE**				
الانحراف غير الموضح SCR	$e'e = SCR = 3.4$	10–2–1=7	$e'e \,/\, n-k-1$	
الانحراف الكلي SCT	$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 408.5$	10 – 1 = 9		

اختبار معنوية الانحدار ككل باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالأتي:

الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ (فرضية العدم)

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \exists \beta_j \;/\; \beta_j \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي :

$$F_c = \frac{SCE/k}{SCR/(n-k-1)} \sim F_{(k,n-k-1)}$$

$$F_c = \frac{405.1/2}{3.4/(10-3)} = 346.5$$

أو : $$F_c = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0.99/2}{(1-0.99)/7} = 346.5$$

في توزيع F القيمة المجدولة لإحصائية *Fischer* في هده الحالة تعتمد على درجتي حرية 2 (في البسط) و $n-3$ (في المقام).

$$F_t = F_{k,n-k-1} = F_{(2,7)} = 4.74$$

إذا كان $F_C \geq F_t$ نقبل H_1 ونرفض H_0 الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية أي أن: الدخل الوطني (X_1) والسعر (X_2) يؤثران معا في الاستيراد (Y_i) .

المشاكل القياسية: مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء

1. تعريف الارتباط الذاتي وأسباب ظهوره:

يشير الارتباط الذاتي بوجه عام إلى وجود ارتباط بين القيم المشاهدة لنفس المتغير، أي أنه يمثل الارتباط بين المشاهدات المتسلسلة لنفس المتغير خلال فترة زمنية، ويمثل الارتباط الذاتي ثاني مشكلة بعد التعدد الخطي والتي تظهر نتيجة مخالفة أحد فرضيات نموذج الانحدار الخطي وتتعلق المخالفة في سلوك التغاير $Cov(u_j, u_i) = 0$ حيث إن قيمة التغاير صفر تعني إن u_j, u_i مستقلتان ومعنى الاستقلال يعني إن العشوائي غير مرتبط آي إن ما يحدث في الفترة الزمنية i لا يتأثر بما يحدث في الفترة j في دراسات السلاسل الزمنية وفي الدراسات المقطعية نقول أن ما يحدث للمشاهدة الأولى لا يتأثر بما يحدث للمشاهدة الثانية.

يتم خرق فرض انعدام التغاير دائما في الدراسات التي تعتمد على بيانات تم الحصول عليها من سلاسل زمنية. بما معناه إن الحدث الذي حصل في سنه عينه يتأثر بالحدث في السنة الماضية. يشبه الارتباط الذاتي برمي حجر في الماء حيث تبدأ قواه تتلاشى الموجات تدريجيا لكن تأخذ وقتا ليتم ذلك فكلما قصر الزمن بين المشاهدات وكلما زاد احتمال وجود الارتباط الذاتي.

وينشأ الارتباط الذاتي من عدة أسباب منها:

- ✓ حذف بعض المتغيرات المستقلة من النموذج
- ✓ سوء توصيف الصيغة الرياضية للنموذج
- ✓ عدم دقة بيانات السلسلة الزمنية

2. حساب معامل الارتباط الذاتي:

في حالة أن جميع الفروض موجودة كل عشوائي يمثل عنصر مستقل من مجتمع موزع توزيع طبيعي ذا وسط صفري وتباين σ^2 . عندما يكون الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فأن العنصر غير مستقل بل يتبع النموذج التالي

$$u_t = \rho u_{t-1} + \nu_t$$

حيث ρ معلمه تقيس درجة الارتباط وقيمتها اقل من 1 و عشوائي موزعه توزيع طبيعي ومستقلة وذات وسط صفري وتباين ثابت = σ^2

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2) \quad for\ all\ t$$

$$E(u_t, u_s) = 0 \quad for\ all\ t$$

$$E(u_t, u_{t-1}) = 0 \quad for\ all\ t$$

إن العلاقة $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$ تدل على إن التغير جزء من التغير السابق مضافا أليه تأثير يمثل بـ v_t .

الارتباط هو درجة التغاير بين القيم الحالة والقيم التي قد تقع بعد s من الفترات، إذا كان الارتباط بين العناصر في الفترة s والفترة t-s يعني الارتباط بين العشوائي الحالي والعشوائي القادم مماثل للارتباط بين العشوائي الحالي والعشوائي السابق يكون Symmetric

خواص الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (AR(1): الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى وهو اكثر نموذج يستعمل ويأخذ الشكل التالي:

$$u_t = \rho u_{t-1}$$

حيث u تعتمد على u السابقة، ودرجة الاعتماد تعتمد على المعلمة ρ حيث تقيس درجة الارتباط الذاتي بين العناصر الحالية والعناصر السابقة. وتتراوح قيمته ρ بين $-1 \le \rho \le +1$ إذا كانت $\rho = 1$ معناه أن العشوائي الحالي يساوي العشوائي السابق وإذا كانت $\rho = 1/2$ معناه أن الحدث السابق يؤثر على الحدث الحالي ومقدار التأثير أن الحدث الحالي يساوي 1/2 الحدث السابق آي أن u_t تعتمد على قيمة u_{t-1} حسب قيمة ρ ولكن في العلاقة عادة تكون مصحوبة بمتغير عشوائي يمثل التغيرات العشوائية التي قد تصاحب الحدث. ولذلك نضيف العنصر العشوائي الذي هوv_t وهذا ما يسمى بمشروع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى ويسمى بالدرجة الأولى لأن تعتمد على u_{t-1} الدرجة الأولى آتية من 1 .

وتسمى Markov First - order Autoregressive scheme مشروع الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى(AR1).

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t \qquad v_t \sim N(0, \sigma_u^2)$$

- $E(u)=0$
- تباين u^2 يساوي $Var(u_t) = \sigma_u^2$

إذا كانت البيانات ربع سنوية مثلا نقول $u_t = \rho u_{t-4} + u_t$ وفي هذه الحالة يكون ارتباط من الدرجة الرابعة.

إذا كانت ρ =صفر معناه إن u_t مستقلة عن u_{t-1}

لدينا عشوائيين u_t التي تؤثر على نموذج الانحدار الأصلي وثم u_t التي تؤثر على نفسها، فيما يختص بـ u_t التي تؤثر على النموذج الأصلي تعاني من مشكلة وجود الارتباط الذاتي فيها لان قيمتها تتحدد حسب القيم السابقة:

$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ آي أن ترتبط ذاتيا مع القيم السابقة $u_t = \rho u_{t-1} + \nu_t$ و $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$ والتغاير بين u_t و u_{t-s} آي آن u_t يستوفي كل الفروض اللازمة لتطبيق م ص ع عليه ويمكن كتابة نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى على النحو أعلاه. ويسمى في هذه الحالة Pure White Noise.

لكي يتم تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية يجب أن يستوفي النموذج $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ الفروض التالية: الوسط الصفري للعشوائي وثبات التباين و التغاير الصفري.

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2) \quad \text{for all } t$$
$$E(u_t, u_s) = 0 \quad \text{for all } t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \nu_t$$

ونعوض بقيم $\rho u_{t-1} = (\rho u_{t-2} + \nu_{t-1})$ و $\rho u_{t-2} = (\rho u_{t-3} + \nu_{t-2})$ وهكذا حتى نتحصل على العلاقة التالية: $u = \rho^3 u_{t-3} + \rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + \nu_t$

وإذا استمر إضافة القيم المتباطئة لـ ε_t حتى يتلاشى تأثير القيم السابق حيث تصبح $\rho^s = 0$ والفترة=s نستطيع كتابة العلاقة كما يلي

$$u_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s}$$

وفي النهاية نتحصل على قيم يظهر فيها العشوائي الذي يستوفي جميع فروض م ص ع ويسمى وسط متحرك لـ u_t Moving Average Representation (MA) حيث يتضمن قيم المتباطئة حتى يتلاشى أي أن تأثيرات المتغيرات العشوائية سوف يتلاشى تدريجيا.

الوسط: ندخل التوقع على قيمة u_t المعلمة ρ ثابت نتحصل على قيمة التوقع والتي تساوي الصفر.$E(u)=0$

التباين:

$$Var(u_t) = Var(u_t) + \rho^2 Var(u_{t-1}) + \rho^4 Var(u_{t-2}) + ...$$
$$Var(u_t) = \sigma_{u_2}^{u}(1 + \rho^2 + \rho^4 .....)$$
$$\sigma^2 = \frac{\sigma_{u_2}}{1 - \rho^2}$$

التغاير: ويساوي تغاير النموذج $Cov(u_t, u_{t-1}) = \rho^s \sigma^2$

ويتضح أن العلاقة بين المتغيرات العشوائية تعتمد على المعلمة ρ وهذا الاعتماد يمكن توضيحها بالعلاقة التالية:



$$u_t = \rho u_{t-1} + \nu_{tt}$$
$$\hat{\rho} = \frac{\sum u_t u_{t-1}}{\sum u_{t-1}^2}$$

$$Cov(u_t, u_{t-1}) = \rho^s \sigma^2$$
$$\rho = \frac{Cov(u_t, u_{t-1})}{\sigma^2}$$
$$\rho = \frac{Cov(u_t, u_{t-1})}{\sqrt{Var(u_t)}\sqrt{Var(u_{t-1})}}$$

أي أن ρ تمثل معامل الارتباط بين القيم المتباطئة.أي هي التي تقيس قوة الارتباط الذاتي من التغاير بين القيمة الحالية u_t والقيمة السابقة u_{t-1} لا يساوي الصفر.

3. اختبار Durbain Watson للكشف عن الارتباط الذاتي:

يعتبر هذا الاختبار أوسع الاختبارات استعمالا وجيد الأداء لمختلف العينات، لأنه يوجد اختبارات أخرى قد تكون أقوى من اختبار دير بن–واتسون من الناحية الإحصائية إلا أنها تكتسب قوتها في العينات كبيره الحجم ولذلك يفضل ديربن واتسون على الكثير من الاختبارات الأخرى، فضلا على أنه بسيط من ناحية الفكرة والتطبيق. الاختبار مخصص للكشف عن ارتباط الذاتي من الدرجة الأولى.

العالم داربن اشتق اختبار للكشف عن مشكلة الارتباط الذاتي يستند على افتراض أن حدود الخطأ العشوائي u_t لنموذج الانحدار الخطي العام تعاني من الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى ($u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$) .

1.3. شروط استخدام اختبار داربن واتسون:

1- أنموذج الانحدار يجب أن يتضمن على الحد الثابت.

2- الارتباط الذاتي بين الأخطاء العشوائية يكون من الدرجة الأولى $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$.

3- أنموذج الانحدار يجب أن لا يتضمن على قيمة أو قيم مرتدة زمنيا لمتغير الاستجابة ضمن المتغيرات التفسيرية.

فرضية الاختبار تنص على عدم وجود ارتباط ذاتي بين الخطاء العشوائية, هذه الفرضية توصف بفرضية العدم الآتية:

$$H_0 : \rho = 0$$

مقابل الفرضية البديلة الآتية:

$$H_1 : \rho \neq 0$$

هذا الاختبار يعتمد على الأخطاء العشوائية الناتجة من نموذج الانحدار وتحت الافتراض المذكور أعلاه.

أحصاة الاختبار التي يرمز لها (D.W) والتي تسمى بمعامل داربن–واتسون تحسب وفق الصيغة الآتية:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

كلما كبر حجم العينة وأخذ بالاقتراب من ما لانهاية بمعنى ($n \longrightarrow \infty$) فان:

$$\sum_{t=2}^{n} e_t^2 \cong \sum_{t=1}^{n} e_t^2 \cong \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2$$

$$\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} \cong \sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}$$

بالاعتماد على ما ورد أعلاه يمكن تعديل صيغة معامل داربن–واتسون لتصبح كالآتي:

$$D.W \cong \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1} + \sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$\cong \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} - \frac{2\sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} + \frac{\sum_{t=1}^{2} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$\cong 1 - \frac{2\sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{2} e_t^2} + 1 \cong 2 - \frac{2\widehat{Cov}(e_t e_{t-1})}{\widehat{Var}(e_t)}$$

من النتيجة الأخيرة لصيغة معامل داربن واتسون نحصل على العلاقة بين قيمة معامل داربن والقيمة المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى والمبينة بالآتي:

$$D.W \cong 2 - 2\hat{\rho} \cong 2(1 - \hat{\rho})$$

بالاعتماد على العلاقة بين قيمة معامل داربن والقيمة المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، وبما أن $-1 \leq \hat{\rho} \leq 1$, نجد أن قيمة معامل داربن تقع ضمن الفترة $0 \leq D.W \leq 4$, الجدول التالي يبن تحليل العلاقة بين القيمة المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي وقيمة معامل داربن:

$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{1}$	→	**D.W=0**
$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$	→	D.W=2
$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{-1}$	→	D.W=4

من تحليل العلاقة أعلاه نجد انه كلما اقتربت قيمة معامل داربن من الصفر دل على وجود أرتبط ذاتي موجب.وكلما اقتربت من 4 دل على وجود ارتباط ذاتي سالب. في حين القيمة الوسطى 2 تشير إلى انعدام الارتباط الذاتي.

2.3. قاعدة القرار أي قبول فرضية العدم من عدمها:

تعتمد قاعدة القرار الخاصة باختبار فرضية الارتباط الذاتي على تحديد القيمة الدنيا d_L والقيمة العليا d_U لمعامل داربن والمتوفرة في الجداول الخاصة باختبار داربن–واتسون والتي تحدد على أساس درجة الحرية n وعدد المتغيرات التفسيرية، وبالاعتماد على هاتين القيمتين فأن قاعدة القرار تكون كالآتي:

- إذا كانت $0 < D.w < d_L$ ترفض فرضية العدم H_0 (بمعنى وجود ارتباط ذاتي موجب)
- إذا كانت $d_L < D.w < d_U$ منطقة اللاتحديد الاختبار يكون فاشل.
- إذا كانت $d_U < D.w < 4-d_U$ تقبل فرضية العدم H_0 (بمعنى عدم وجود ارتباط ذاتي).
- إذا كانت $4-d_U < D.w < 4-d_L$ منطقة اللاتحديد الاختبار يكون فاشل.
- إذا كانت $4-d_L < D.w < 4$ ترفض فرضية العدم H_0 (بمعنى وجود ارتباط ذاتي سالب)

الرسم البياني التالي يبن قاعدة القرار لاختبار داربن:



3.3 مثال تطبيقي حول اختبار الارتباط الذاتي بين حدود الأخطاء العشوائية:

الجدول التالي يبين قيم كل من متغير الاستجابة Y والمتغير التفسيري X , لعينة بحجم $n=15$. على افتراض أن Y يرتبط بالمتغير التفسيري X بعلاقة خطية وفق أنموذج الانحدار الآتي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

Y_t	X_t	Y_t	X_t	Y_t	X_t
33	10	46	13	40	14

34	10	45	13	43	14
38	11	37	13	44	15
43	12	40	13	54	16
46	12	38	13	55	16

المطلوب: 1-اختبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي.

2- تقدير معامل الارتباط الذاتي في حالة وجود هذه المشكلة.

لغرض اختبار مشكلة الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ العشوائي يجب أولا تقدير معلمات النموذج الانحدار واستخدام النموذج الانحدار المقدر لحساب البواقي $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ثم بعد ذلك يتم حساب معامل داربن واتسون لاختبار فرضية الارتباط الذاتي.

تقدير معلمات النموذج الانحدار :

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum X_t \\ \sum X_t & \sum X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum Y_t X_t \end{bmatrix}$$

n=15 $\quad \sum X_t = 195 \sum X_t^2 = 2583 \sum Y_t = 636 \sum Y_t X_t = 8400$

باستعمال المجاميع أعلاه يمكن تقدير معلمات النموذج الانحدار(**اترك إيجاد القيم التقديرية لمعلمتي النموذج الانحدار كتمرين للطالب**)، أنموذج الانحدار المقدر مبين أدناه:

$$\hat{Y}_t = 6.65 + 2.75 X_t$$

بالاعتماد على معادلة الانحدار المقدرة يتم تقدير قيم متغير الاستجابة $\hat{Y}_t$ وبعدها يتم حساب قيم البواقي $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$، وكما مبينة في الجدول التالي:

$\hat{Y}_t$	e_t	$\hat{Y}_t$	e_t	$\hat{Y}_t$	e_t
34.15	-1.15	42.400	3.6	45.15	-5.15

34.15	-0.15	42.400	2.6	45.15	-2.15
36.90	1.1	42.400	-5.4	47.90	-3.9
39.65	3.35	42.400	-2.4	50.65	3.35
39.65	6.35	42.400	-4.4	50.65	4.35

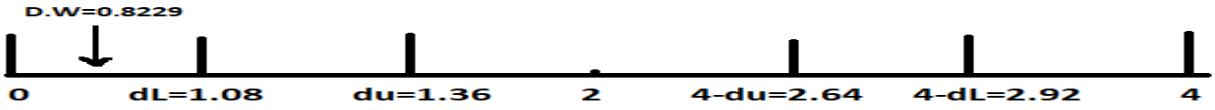
بالاعتماد على الجدول التالي يتم حساب قيمة معامل داربن واتسون D.W :

e_t	e_{t-1}	e_t^2	$(e_t - e_{t-1})$	$(e_t - e_{t-1})^2$
-1.15	--	1.3225		
-0.15	-1.15	.0225	1.00	1.000
1.1	-0.15	1.2100	1.25	1.563
3.35	1.1	11.2225	2.25	5.063
6.35	3.35	40.3225	3.00	9.000
3.6	6.35	12.9600	-2.75	7.563
2.6	3.6	6.7600	-1.00	1.000
-5.4	2.6	29.1600	-8.00	64.000
-2.4	-5.4	5.7600	3.00	9.000
-4.4	-2.4	19.3600	-2.00	4.000
-5.15	-4.4	26.5225	-0.75	.563
-2.15	-5.15	4.6225	3.00	9.000
-3.9	-2.15	15.2100	-1.75	3.063
3.35	-3.9	11.2225	7.25	52.563
4.35	3.35	18.9225	1.00	1.000
المجموع		204.6		168.375

بالاعتماد على الجدول السابق يتم حساب معامل داربن واتسون:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{168.375}{204.6} = 0.8229$$

من جداول داربن واتسون ولمستوى دلالة 0.05 ودرجة (15 , 1) إذ أن (1) يمثل عدد المتغيرات التفسيرية (متغير تفسيري واحد)، و(15) تمثل حجم العينة(n=15), نجد أنd_L=1.08و d_u=1.36 .



نلاحظ أن d_L=1.08 < D.W=0.8229 < 0 وكما موضح في الشكل أعلاه.

لذا يمكن رفض فرضية العدم H0: ρ=0 وقبول الفرضية البديلة H1: ρ≠0 ، مما يشير إلى وجود مشكلة الارتباط الذاتي وأن حدود الخطأ العشوائي تعاني من ارتباط ذاتي موجب أي أن (ρ > 0).

بعد رفض فرضية العدم يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ العشوائي وبالاعتماد على الصيغة التي تمت الإشارة إليها في المحاضرة السابقة وكالآتي:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{15} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{15} e_{t-1}^2} = \frac{110.29}{185.6775} = 0.59$$

يمكن تقدير قيمة معامل الارتباط الذاتي من العلاقة بين هذا المعامل ومعامل داربن وتسون وكالآتي:

$$D.W = 2(1-\hat{\rho})$$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D.W}{2} = 1 - \frac{0.8229}{2} = 0.58855 \cong 0.59$$

t	e_t	e_{t-1}	$e_t e_{t-1}$	e_{t-1}^2
2	-0.15	-1.15	.172	1.32
3	1.1	-0.15	-.165	.02
4	3.35	1.1	3.685	1.21
5	6.35	3.35	21.273	11.22
6	3.6	6.35	22.860	40.32

7	2.6	3.6	9.360	12.96
8	-5.4	2.6	-14.040	6.76
9	-2.4	-5.4	12.960	29.16
10	-4.4	-2.4	10.560	5.76
11	-5.15	-4.4	22.660	19.36
12	-2.15	-5.15	11.072	26.52
13	-3.9	-2.15	8.385	4.62
14	3.35	-3.9	-13.065	15.21
15	4.35	3.35	14.573	11.22
المجموع			110.29	185.6775

3.3. تقدير معامل الارتباط الذاتي ومعالجة مشكلة الارتباط الذاتي:

يقدر معامل الارتباط الذاتي باعتماد الصيغة الآتية:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} t_{t-1}^2}$$

حيث أن: e_t تمثل البواقي المقدرة من أنموذج الانحدار المقدر عند الزمن t .

e_{t-1} تمثل البواقي المقدرة من أنموذج الانحدار المقدر عند الزمن (t-1).

4. معالجة مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء العشوائية:

تتضمن عملية معالجة مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء العشوائية إتباع الخطوات التالية بافتراض أن نموذج الانحدار هو انحدار خطي بسيط:

1- تقدير معادلة الانحدار واختبار معنوية الارتباط الذاتي بإتباع اختبار داربن واتسون.

2- تقدير معامل الارتباط الذاتي وفق الصيغة أعلاه.

3- معالجة المشكلة بتنقية البيانات الخاصة بمتغير الاستجابة Y والمتغير التوضيحي X .

ملاحظة: يمكن تعميم معالجة مشكلة الارتباط الذاتي لحالة أنموذج الانحدار الخطي العام.

5. تنقية البيانات من مشكلة الارتباط الذاتي:

بافتراض أنموذج الانحدار الخطي البسيط

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$$

بعد تقدير قيمة معامل الارتباط الذاتي وإذا كانت نتيجة اختبار داربن واتسون هي رفض فرضية العدم بمعنى أن قيمته لا تساوي الصفر, تأتي مرحلة تنقية البيانات من مشكلة الارتباط الذاتي وتتم التنقية بالشكل الآتي:

أ- بالنسبة لمتغير الاستجابة:

كل قيمة من قيم متغير الاستجابة في الزمن t يتم طرحها من القيمة السابقة لها (أي في الزمن $t-1$) بعد ضربها بالقيمة المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي $\hat{\rho}$. اذا فرضنا أن قيمة متغير الاستجابة التي تم تنقيتها هي Y_t^* فأن عملية التنقية تتم وفق الصيغة الآتية:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$

لاحظ سيتم فقدان مشاهدة واحدة نتيجة عملية الفروق.

ب- بالنسبة للمتغير التوضيحي:

يتم إتباع نفس الإجراء المتبع في تنقية بيانات متغير الاستجابة لتنقية بيانات المتغير التوضيحي، إذا فرضنا أن قيمة متغير الاستجابة التي تم تنقيتها هي X_t^* فأن عملية التنقية تتم وفق الصيغة الآتية:

$$X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

بعد إتمام عملية تنقية البيانات يتم الاعتماد على قيم متغير الاستجابة بعد التنقية Y_t^* وقيم المتغير التوضيحي بعد التنقية X_t^* أي تقدير أنموذج الانحدار الآتي:

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \epsilon_t^*$$

حيث أن :

$$\beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$$
$$\epsilon_t^* = \epsilon_t - \rho \epsilon_{t-1}$$

علما أن الأخطاء العشوائية بعد تنقية البيانات ϵ_t^* تحقق جميع فروض طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية، لذا يمكن اعتماد تلك الطريقة في تقدير معلمات الانموذج وأن المعلمات المقدرة تحقق جميع الخصائص المرغوبة وهي :

- المقدرات تكون غير متحيزه.
- المقدرات تكون دالة خطية بقيم متغير الاستجابة.
- لها اقل تباين من بين جميع المقدرات غير المتحيزة.
- لذا فهي تتصف بخاصية افضل تقدير خطي غير متحيز.

6. ملخص خطوات اختبار ومعالجة مشكلة الارتباط الذاتي وتقدير أنموذج الانحدار:

1- يتم أولا تقدير نموذج الانحدار $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$.

2- من أنموذج الانحدار المقدر في الخطوة (1) يتم حساب قيم البواقي e_t.

3- بالاعتماد على قيم البواقي e_t التي تم حسابها في الخطوة السابقة يتم أختبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي من عدمهابالاعتماد على أختبار داربن واتسون وتحت الافتراضات الخاصة بهذا الاختبار والتي تم ذكرها سابقا.

4- في حال أشار اختبار داربن إلى وجود مشكلة الارتباط الذاتي يتم تقدير قيمة معامل الارتباط. أما إذا أشار اختبار داربن إلى عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي يتم الاعتماد إلى النموذج المقدر في الخطوة (1).

5- تستخدم قيمة معامل الارتباط الذاتي التي تم تقديرها لمعالجة مشكلة الارتباط الذاتي في حالة وجود المشكلة.

6- يتم الاعتماد على البيانات المنقاة والخاصة بقيم متغير الاستجابة والمتغير التوضيحي لتقدير النموذج الانحدار.

7- يتم إعادة الخطوات (2-6) ولكن بالاعتماد على البواقي الناتجة من تقدير النموذج الانحدار الذي حصلنا عليه في الخطوة (6)، للتأكد من معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

ملاحظة : تسمى طريقة التقدير والمعالجة الموضحة بالخطوات أعلاه بطريقة التكرار.

مثال تطبيقي حول معالجة مشكلة الارتباط الذاتي:

البيانات المبينة في الجدول التالي تمثل قيم كل من متغير الاستجابة Y والمتغير التوضيحي X لعينة بحجم (n=10).

المطلوب اختبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء العشوائية، في حالة وجودها عالج المشكلة وقدر معاملات النموذج:

t	Y	X
1	23	5
2	24	8
3	28	6
4	33	7
5	36	7
6	36	8
7	35	9
8	27	8
9	30	9
10	28	9

أولا يتم تقدير أنموذج الانحدار بطريقة المربعات الصغرى : بافتراض العلاقة الخطية بين متغير الاستجابة والمتغير التوضيحي والمتمثلة بالنموذج الانحدار الخطي البسيط الآتي:

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_t \\ \sum X_t & \sum X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum Y_t X_t \end{bmatrix}$$

ومن جدول البيانات حصلنا على المعلومات الآتية:

n=10 $\sum X_t = 76 \sum X_t^2 = 594 \sum Y_t = 300 \sum Y_t X_t = 2299$

ومن تلك المجاميع نحصل على القيم التقديرية لمعلمات أنموذج الانحدار

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 76 \\ 76 & 594 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 300 \\ 2299 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.195 \\ 1.159 \end{bmatrix}$$

أذن معادلة الانحدار المقدرة تكون كالأتي:

$$\hat{Y}_t = 21.195 + 1.159 X_t$$

بالاعتماد على معادلة الانحدار المقدرة يتم تقدير قيم متغير الاستجابة $\hat{Y}_t$ وبعدها يتم حساب قيم البواقي $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ، وكما مبينة في الجدول التالي:

t	$\hat{Y}_t$	e_t
1	26.98780	-3.98780
2	30.46341	-6.46341
3	28.14634	-.14634
4	29.30488	3.69512
5	29.30488	6.69512
6	30.46341	5.53659
7	31.62195	3.37805
8	30.46341	-3.46341
9	31.62195	-1.62195
10	31.62195	-3.62195

وبالاعتماد على قيم البواقي e_t يتم اجراء اختبار داربن واتسون.

بالاعتماد على الجدول السابق يتم حساب معامل داربن واتسون:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{129.98899}{185.9878} = 0.6989$$

من جداول داربن واتسون ولمستوى دلالة0.05 ودرجة (1، 10) حيث أن 1 يمثل عدد المتغيرات التفسيرية (متغير تفسيري واحد)، و10 تمثل حجم العينة n=10 ، نجد أنd_L=0.879و d_u=1.320 .



نلاحظ أن $0 < D.W=0.6989 < d_L=0.879$ وكما موضح في الشكل أعلاه. لذا يمكن رفض فرضية العدم $H0: \rho=0$ وقبول الفرضية البديلة $H1: \rho\neq0$ ، مما يشير إلى وجود مشكلة الارتباط الذاتي وأن حدود الخطأ العشوائي تعاني من ارتباط ذاتي موجب أي أن $\rho > 0$.

بعد أن تم رفض فرضية العدم بمعنى وجود مشكلة الارتباط الذاتي , يتم معالجة البيانات بالاعتماد على قيمة معامل الارتباط الذاتي. نحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي المقدرة وبالاعتماد على الجدول الآتي:

t	e_t	e_{t-1}	$e_t e_{t-1}$	e_{t-1}^2
2	-6.46341	-3.98780	25.77484	15.90
3	-.14634	-6.46341	.94587	41.78
4	3.69512	-.14634	-.54075	.02
5	6.69512	3.69512	24.73929	13.65
6	5.53659	6.69512	37.06811	44.82
7	3.37805	5.53659	18.70286	30.65
8	-3.46341	3.37805	-11.69958	11.41
9	-1.62195	-3.46341	5.61749	12.00
10	-3.62195	-1.62195	5.87463	2.63
المجموع			106.48275	172.87

تنقية البيانات باستعمال قيمة معامل الارتباط الذاتي المقدرة وفق الصيغتين:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} \quad , \quad X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

والبيانات المنقاة مبينة بالجدول التالي :

t	Y_t	Y_{t-1}	$0.6159Y_{t-1}$	$Y_t^* = Y_t - 0.6159Y_{t-1}$	X_t	X_{t-1}	$0.6159X_{t-1}$	$X_t^* = X_t - 0.6159X_{t-1}$
2	24	23	14.1657	9.8343	8	5	3.0795	4.9205
3	28	24	14.7816	13.2184	6	8	4.9272	1.0728
4	33	28	17.2452	15.7548	7	6	3.6954	3.3046
5	36	33	20.3247	15.6753	7	7	4.3113	2.6887
6	36	36	22.1724	13.8276	8	7	4.3113	3.6887
7	35	36	22.1724	12.8276	9	8	4.9272	4.0728
8	27	35	21.5565	5.4435	8	9	5.5431	2.4569
9	30	27	16.6293	13.3707	9	8	4.9272	4.0728
10	28	30	18.4770	9.5230	9	9	5.5431	3.4569

من الجدول أعلاه نحصل على قيم كل من متغير الاستجابة والمتغير التوضيحي التي تم معالجتها من مشكلة الارتباط الذاتي.

من الجدول السابق يتم حساب كل مما يأتي:

$n=9 \quad , \quad \sum X_t^* = 27.7347 \quad , \quad \sum X_t^{*2} = 108.28 \quad , \quad \sum Y_t^* = 109.4752 \quad \sum Y_t^* X_t^* = 360.78$

وبالاعتماد على تلك المعلومات يتم تقدير نموذج الانحدار.

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta_0^*} \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 27.7347 \\ 27.7347 & 108.28 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 109.4752 \\ 360.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.463 \\ -0.091 \end{bmatrix}$$

معادلة الانحدار المقدرة تكون كالآتي:

معادلة الانحدار المقدرة في التكرارا الاول $\widehat{Y_t^*} = 12.463 - 0.091X_t^*$

ذكرنا سابقا أن $\beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$ ، لذا لغرض الحصول على القيمة التقديرية لـ (β_0) يتم تقسيم القيمة التقديرية لـ (β_0^*) والبالغة (12.463) على المقدار ($1-\hat{\rho}$) , وكالآتي :

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\widehat{\beta_0^*}}{1-\hat{\rho}} = \frac{12.463}{1-0.6159} = 32.447$$

لذا فأن معادلة الانحدار المقدرة في التكرار الأول تكون كآلاتي:

$$\widehat{Y_t^*} = 32.447 - 0.091X_t^*$$

كل العمليات التي أجريت (الاختبار والمعالجة والتقدير) تمثل التكرار الأول.

يتم في التكرار الثاني أعادة عملية اختبار مشكلة الارتباط الذاتي بالاعتماد على القيم التقديرية لمتغير الاستجابة بعد المعالجة الأولى أي ($\widehat{Y_t^*}$) وقيم البواقي لمعادلة الانحدار المقدرة الاخيرة (معادلة الانحدار المقدرة أعلاه) للتأكد من معالجة مشكلة الارتباط الذاتي, وفي حال بقاء المشكلة تعاد عملية المعالجة مرة ثانية بالاعتماد على قيمة معامل الارتباط الذاتي المقدرة في التكرار الثاني . وهكذا نستمر لحين إزالة المشكلة.

في التكرار الثاني يتم الاعتماد على قيم البواقي المحسوبة من معادلة الانحدار المقدرة بعد تنقية البيانات أي البواقي ϵ_t^* والتي تساوي :

$$\epsilon_t^* = Y_t^* - \widehat{Y_t^*}$$

7 العلاقة بين ديربن واتسون ومعلمة الارتباط الذاتي:

إذا أخذنا إحصاء ديربن واتسون المحسوب

$$d = \frac{\sum (u_t - u_{t-1})^2}{\sum u_t^2}$$

نلاحظ ان البسط يبدأ بالمشاهدة الثانية نسبة لظهور البواقي المتباطئة في البسط.

$$d = \frac{\sum u_t^2}{\sum u_t^2} + \frac{\sum u_{t-1}^2}{\sum u_t^2} - 2\frac{\sum u_t u_{t-1}^2}{\sum u_t^2}$$

يلاحظ أن الأمر يساوي تقريبا $d = 1+1-2\hat{\rho}$

وبالتالي

$$\boxed{\begin{aligned} d &= 2-2\hat{\rho} \\ d &= 2(1-\hat{\rho}) \end{aligned}}$$

أحيانا تكتب كما يلي:

$$\hat{\rho} \approx 1 - 1/2d$$

من خلال هذا نستطيع الحصول على مقدرة ρ نستفيد من عملية تصحيح النماذج للتخلص من مشكلة الارتباط الذاتي. وذلك بأجراء انحدار النموذج والحصول على d ومنه نستخرج ρ واستخدامها في العملية. من العلاقة نلاحظ انه إذا كانت = صفر لا يوجد ارتباط ذاتي ويترتب عليها $d=2$ مما يؤشر إلى انعدام الارتباط الذاتي. إذا كانت $\rho = +1$ أي كان عندك أي كان هناك ارتباط ذاتي موجب وتام يترتب على ذلك إن $d=0$ أي يكون هناك الارتباط ذاتي موجب(رفض فرض العدم) وإذا كانت

$\rho = -1$ ارتباط ذاتي سلبي ومنها

$$-1 = 1 - 1/2d$$

$$d = \frac{-2}{-1/2} = 4$$

ونستنتج من ذلك انه إذا كانت $2>d$ ارتباط سلبي وإذا كانت $2<d$ ارتباط موجب وإذا كانت $d=2$ لا يكون هناك ارتباط ذاتي.

مزايا اختبار: DW

- ✓ سهل الاستعمال
- ✓ واسع الانتشار
- ✓ أكبر الاختبارات التي تستعمل للارتباط الذاتي
- ✓ حسن الأداء في العينات الصغيرة وأيضا في العينات الكبيرة.

عيوب اختبارDW:

- ✓ مناطق اللاحسم. يقترح البعض ضم منطقة اللاحسم إلى منطقة الرفض.
- ✓ لا يطبق على النماذج التي لا تحتوي على قاطع .
- ✓ لا يستخدم إذا كانت عدد من المتغيرات المستقلة عشوائية، يستخدم فقط في الحال التي يكون فيها المتغير غير عشوائي إذا كان المتغير غير عشوائي يستخدم اختبار آخر. على سبيل المثال:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Y_{t-1} + u_t$$

عشوائي. Y_{t-1}عشوائي فان Y_tوهذا النموذج يكون التابع المتباطئ للسنة الماضية عشوائي حيث أن

عموميات حول السلاسل الزمنية

يعد موضوع تحليل السلاسل الزمنية من الموضوعات الإحصائية المهمة التي تتناول دراسة سلوك الظواهر وتفسرها عبر فترات محددة من الزمن، ويمكن إجمال أهداف تحليل السلاسل الزمنية بالحصول على وصف دقيق للملامح الخاصة للعملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية وبناء نموذج لتفسير سلوك السلسلة الزمنية واستخدام النتائج للتنبؤ بسلوك السلسلة في المستقبل، فضلا عن التحكم في العملية التي تنتج عنها السلسلة الزمنية بفحص ما يمكن حدوثه عند تغير بعض معلمات النموذج.

ولتحقيق ذلك يتطلب الأمر دراسة تحليلية كاملة لنماذج السلاسل الزمنية بالاعتماد على الأساليب الإحصائية والرياضية.

1. مفهوم السلسلة الزمنية:

السلسلة الزمنية هي مجموعة من القيم المشاهدة لظاهرة معينة لمدة من الزمن (عدة سنوات) في فترات زمنية متساوية، أي أن السلسلة الزمنية تتألف من مجموعة من المشاهدات الخاصة بظاهرة معينة خلال فترات زمنية متعاقبة من الزمن وبحدود متتابعة، فعلى سبيل المثال مجموعة القيم الدالة على صادرات الجزائر السنوية من البترول من سنة 2018 ـ 1970 هي سلسلة زمنية، وان المبالغ الدالة على مقدار ما يبيعه احد المخازن في اليوم ولمدة اسبوع هي سلسلة زمنية أيضا. لذلك يمكن اعتبار السلسلة الزمنية علاقة بين متغيرين هما قيمة الظاهرة والزمن .

تهتم كثير من الدراسات ولاسيما الاقتصادية والاجتماعية بدراسة السلسلة الزمنية وذلك لان كثيرا من الظواهر الاقتصادية كالصادرات السنوية مثلا استعرضت وبحثت لعدد من السنين فانه يمكن معرفة طبيعة التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة مع الزمن وتحديد الاسباب والنتائج وتفسير العلاقات المشاهدة بينها والتنبؤ بما سيحدث من تغير على قيم الظاهرة في المستقبل على ضوء ما حدث لها في الماضي .

تعرف السلسلة الزمنية بأنها مجموعة من القراءات لظاهرة معينة في فترات زمنية متساوية وفق ترتيب طبيعي ورياضي يرمز لقيم الظاهرة X محل الدراسة أي السلسلة الزمنية بالقيم:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

حيث أن القيم أخذت عند الأزمنة:

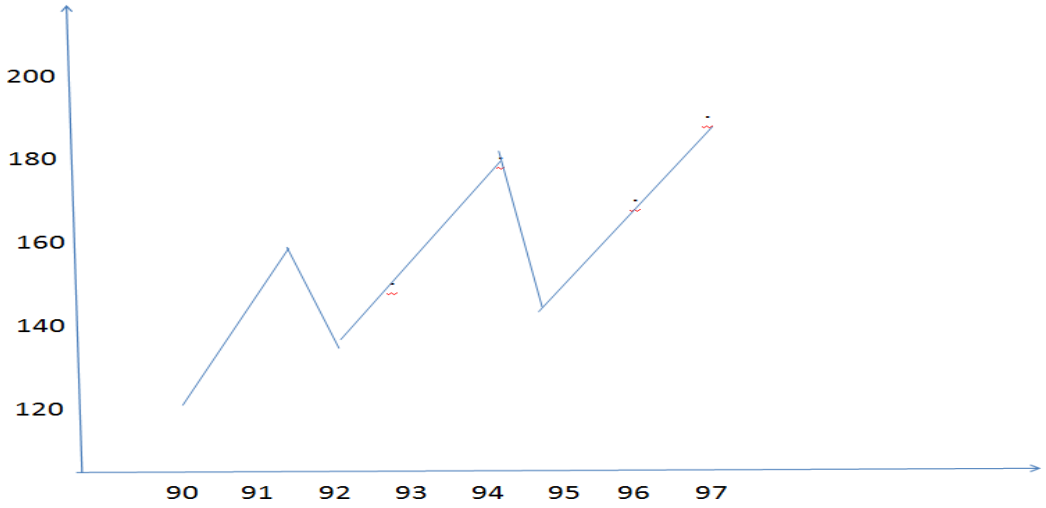
$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$$

أي أن المتغير X محل الدراسة دالة في الزمن T أي أن : X=f(t) حيث أن الزمن T متغير مستقل و X متغير تابع.

مثال1: البيانات التالية تمثل الكميات المستوردة من الحبوب خلال الفترة الزمنية الممتدة بين 2000 و 2007 الكمية معطاة بالطن

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
الكميات	120	160	130	150	180	140	170	190

الرسم البياني



من الرسم البياني يتبين لنا بأنه رغم التذبذبات فان المنحنى الى ارتفاع بمرور الزمن

2. تحليل السلسلة الزمنية :

إن تحليل اللسلة الزمنية عبارة عن عملية فصل مكونات السلسلة عن بعضها البعض بهدف تحديد تأثير كل مكون من هذه المكونات على قيم الظاهرة المدروسة، وقد وجد ان السلسلة الزمنية تتاثر بالعوامل الاتية :

1- مركبة الاتجاه العام Trend components

2- مركبة التغيرات الموسمية Seasonal components

3- مركبة التغيرات الدورية Cyclical components

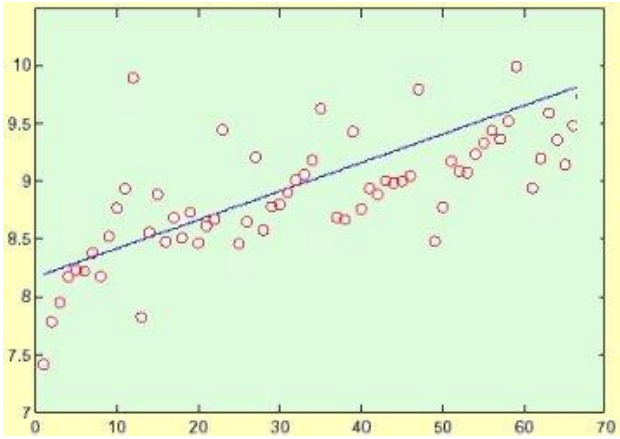
4- مركبة التغيرات العرضية أو المفاجئة Accidental components

وفيما يلي بيان لكل مركبة:

1.2. مركبة الاتجاه العام T:

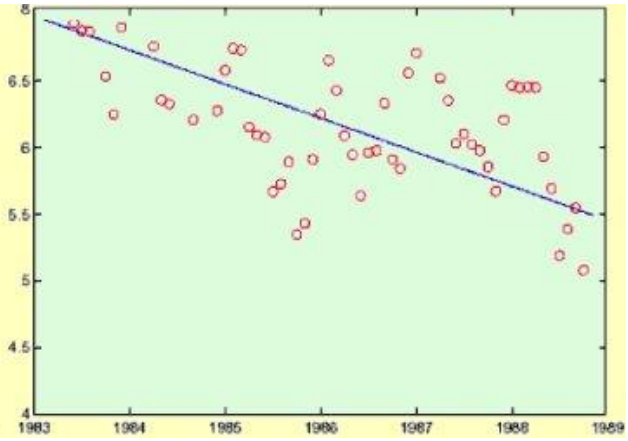
هو العامل الاكثر تأثيرا على القيم الظاهرة في المدى الطويل فمثلا عدد السكان خلال الاربعين سنة الماضية يمثل سلسلة زمنية متأثرة بدرجة كبيرة بالاتجاه العام. نظرا لميل جميع الاعداد المكونة لهذه السلسلة الى التزايد بصورة عامة. يكون الاتجاه العام موجب عندما تتزايد قيمة الظاهرة على مرور الزمن فمثلا نمو السكان يمثل سلسلة زمنية اتجاهها العام موجب .ويكون الاتجاه العام سالبا عندما تتناقص قيم الظاهرة على مرور الزمن فمثلا الوفيات الناتجة عن الاصابة بمرض الجدري تكون سلسلة زمنية اتجاهها سالب.

والاتجاه العام يكون مستقيما اذا كان التغير في قيم الظاهرة كمية ثابتة موجبة او سالبة ويكون الاتجاه العام غير مستقيم (منحني) اذا كان التغير في قيم الظاهرة غير ثابت خلال المدة ويمكن توضيح ذلك بالشكلين الاتيين .



حالة النمو المستمر

الاتجاه العام موجب



حالة الانكماش(النقص)

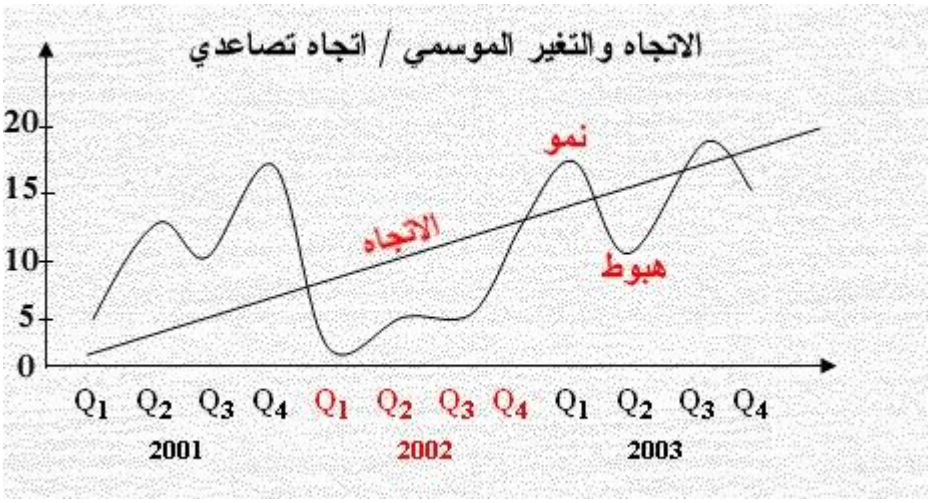
الاتجاه العام سالب

الاتجاه العام رياضيا قد يكون خطا مستقيما أو غير خطي مثل المنحنى الأسي (قياس غير منتظم أو غير ثابت) أو منحنى يأخذ شكل S [نمو في الأجل الطويل لمؤسسة] أو منحنى قطع مكافئ وهو معادلة رياضية من الدرجة الثانية $y = a\,t^2 + b\,t + c$ حيث a, b, c قيم ثابتة

2.2. مركبة التغيرات الموسمية S:

تشير التغيرات الموسمية الى متوسط التغير المنظم الذي يحدث خلال سنة واحدة او فصل واحد او شهر واحد .... الخ ان التغيرات الموسمية تتكرر خلال فترات منتظمة تتكون نتيجة اختلاف المناخ او عادات اجتماعية او مناسبات دينية او ماشابه ذلك.فمثلا التغيرات الموسمية في زيادة الاستهلاك من وقود التدفئة في فصل الشتاء وزيادة الطلب على

المراوح في فصل الصيف لذلك يمكن التنبؤ بمقدار الظاهرة في المستقبل حسب فصول او اشهر السنة. والشكل التالي يبين نموذج لهذا المتغير الموسمي[1].



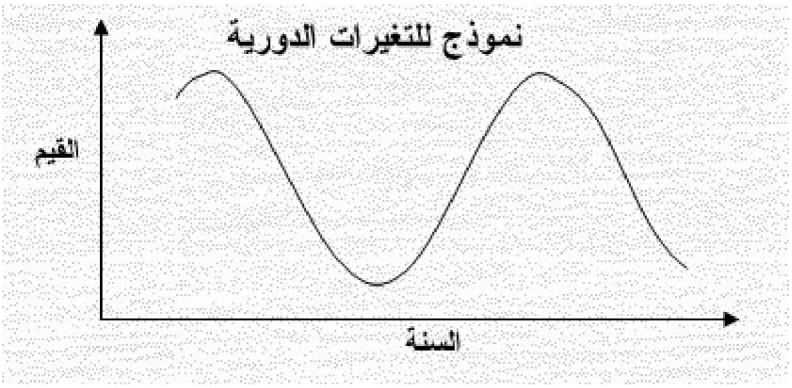
3.2. مركبة التغيرات الدورية C:

التغيرات التي تطرأ على الدورات الاقتصادية من ارتفاع وهبوط بمدة تتجاوز السنة وبيانها كبيان دالة الجيب أو الجيب تمام مع وجود اختلاف في الطول والسعة وتضم عدة خمسة مراحل في الدورة الكاملة هي الارتفاع الأولي – التراجع – الركود – الانتعاش – الارتفاع النهائي وقد تمتد طول الفترة (الدورة الكاملة) من ثماني سنوات إلى عشر سنوات وترجع لعوامل كثيرة مثل سياسة الحكومة والعلاقات الدولية وغيرها ويقاس طول الدورة (التجارية) بطول الفترة الزمنية بين مرحلتي ازدهار متتاليتين أو ركود متتاليتين. وبصيغة أخرى هي التغيرات التي تتكرر خلال فترة زمنية تزيد عن سنة مثل تعاقب الدورات الاقتصادية (الرخاء والانكماش) وتسمى بالتذبذبات الدورية وأنها اقل انتظاما من التغيرات الموسمية. وتختلف هذه التغيرات الدورية عن التغيرات الموسمية في العديد من الأوجه نذكر منها:

- طول الدورة التي تحدثها هذه التغيرات أكبر كثيرا من طول الدورة الموسمية ولذلك تسمى بالتغيرات طويلة الأجل.
- تعكس التغيرات الدورية آثار الدورات والتقلبات الاقتصادية من حيث الكساد أو الرواج للظواهر الاقتصادية.
- طول الدورات في التغيرات الدورية لا يمكن تحديده بشكل دقيق فهذا النوع من التقلبات يتسم بعدم الانتظام بشكل أدى إلى عدم الاعتماد على تقديره من البيانات الزمنية في التنبؤ حيث أنه يحتاج إلى فترة طويلة لاكتشافه وتقديره.

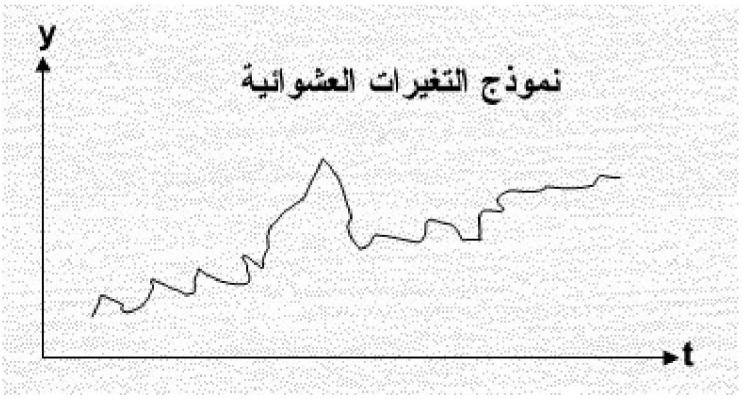
[1] جلاطو جيلالي، 1999، الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ص 167.

والشكل التالي يبين نموذج لها.



4.2. مركبة التغيرات العرضية I:

تشير هذه التغيرات وهي غير منتظمة لتحركات السلسلة الزمنية لأعلى ولأسفل بعد استبعاد التغيرات الأخرى والاتجاه العام وتنشأ هذه التغيرات لعوامل لا يمكن التحكم بها كالزلازل والبراكين والفيضانات والحروب وإفلاس بنك وما شابه ذلك، ومن الواضح بأنه لا يمكن التنبؤ بها لعدم انتظامها من جهة وللفترة الزمنية الصغيرة التي تحدث فيها ويسهل تأثيرها عند دراسة العناصر الأخرى للسلسلة الزمنية وغالبا يشار إليها بالتغيرات المتبقية Residual Variationsلكونها تضم ما تبقى من العوامل التي لم يشار إليها في عناصر السلسلة الثلاثة السابق ذكرها وبالطبع هذا العنصر عشوائي لأنه يقع فجأة أو للصدفة. هي التغيرات التي تحدث لأسباب غير متوقعة مثل الحروب والكوارث الطبيعية , ويصعب التنبؤ بالفترات التي يمكن ان تحدث فيها هذه التغيرات ، والشكل التالي يبين نموذج للتغير العشوائي.



3. أنواع السلاسل الزمنية:

تحليل السلاسل الزمنية إلى مركباتها يتطلب تحديد نموذج لها وهذا يعني أن نحدد العلاقة بين مكونات السلسلة الزمنية، ونجد نموذجان شائعا الاستخدام:

النموذج التجميعي Additive model: ويفترض أن القيمة المقاسة للسلسلة الزمنية H عبارة عن مجموع المركبات أي أن:

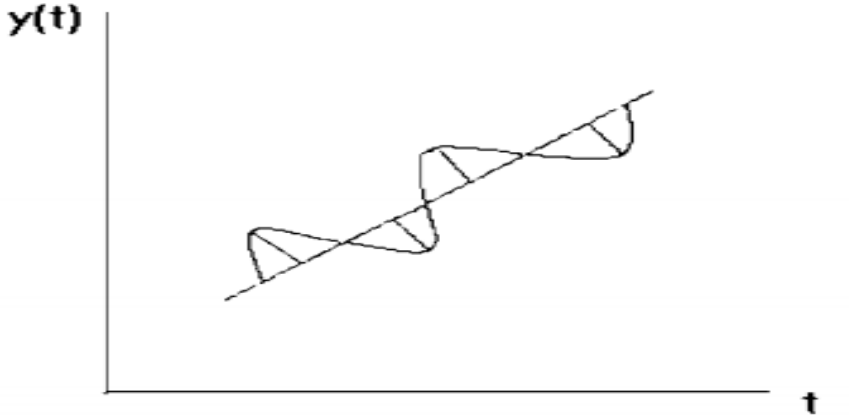
$$H=T+S+C+I$$

ويفترض هذا النموذج تشابه وحدات قياس جميع مركبات الظاهرة المشاهدة X في أي لحظة زمنية ما t، وتصلح هذه الصيغة عندما نريد تقدير قيم المركبات لا نسبها كما يفترض هذا النموذج أن جميع المركبات مستقلة عن بعضها البعض وبالتالي يكون هذا النموذج مناسبا إذا كانت التقلبات الموسمية مستقلة عن مستوى الظاهرة مقاسا بالاتجاه العام بمعنى أن مجموع قيم المركبة الفصلية يكون معدوما على مدار السنة، فإذا فرضنا سلفا أن الدورية منعدمة في السلسلة C=0 يمكن كتابة النموذج بالشكل التالي:

$$X=T+S+I$$

$$\sum_{i=1}^{p} S_i = \sum_{i=1}^{T} S_{t+i} = 0 \ \forall t$$

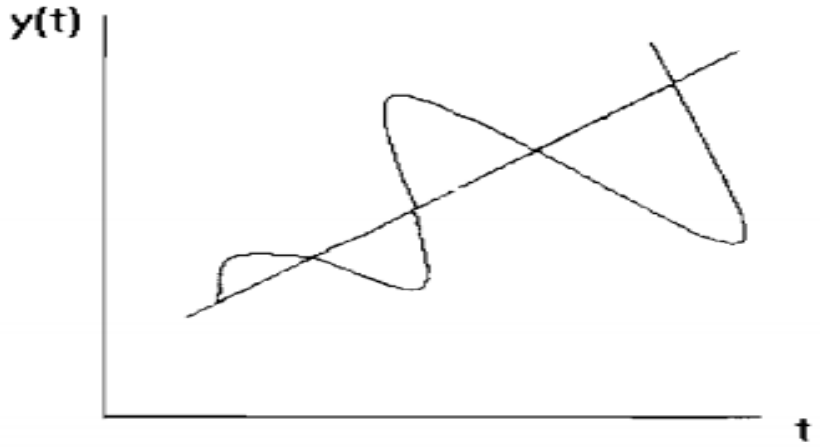
ومن النادر أن نجد سلاسل زمنية فعلية تتبع هذا النموذج.



النموذج الجدائي Multiplicative: ويفترض أن القيمة المقاسة للسلسلة الزمنية تساوي حاصل ضرب المركبات أي أن:

$$H=T*S*C*I$$

ويكون هذا النموذج مناسبا إذا كانت التقلبات الموسمية تتناسب مع مستوى السلسلة مقاسا بالاتجاه العام، ويعد هذا النموذج أكثر استخداما وشيوعا في التطبيقات العملية.



يمكن معرفة طبيعة النموذج باستخدام الأسلوب البياني وتكون وفق هذه الطريقة السلسلة الزمنية تجميعية إذا انحصرت ذبذباتها بين خطين متوازيين بمعنى أن الهزات تكون ثابتة الشدة بينما تكون السلسلة جدائية إذا انحصرت ذبذباتها بين خطين منفرجين وبالتالي تكون ذبذباتها غير ثابتة الشدة [إما متزايدة أو متناقصة]. ويمكن التمييز بين حالتين:

- خطوط المقاطع متوازية خلال فترة زمنية معينة وهذا يعني أن النموذج جمعي.
- خطوط المقاطع غير متوازية خلال فترة زمنية معينة وهذا يعني أن النموذج ضربي.

طريقة جدول Bays-Ballot:

كذلك يمكن معرفة طبيعة النموذج انطلاقا من حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري وإجراء اختباري تجانس المتوسطات Homogeneity of variances test واختبار تجانس التباين ANOVA فإذا كان هذين الأخيرين ثابتين عبر وحدة الزمن فإن السلسلة تكون عبارة عن نموذج تجميعي وفي حالة العكس فإن السلسلة تشكل نموذجا جدائيا، وعند إجراء تعديلات على النموذج الجدائي نحصل على النموذج التجميعي.

تتمثل هذه الطريقة في حساب المتوسط والانحراف المعياري لكل سنة من السنوات ثم مراجعة العلاقة بينهما والمعرفة بالصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma_Y = a\bar{Y} + b$$

ويمكن التمييز بين حالتين:

- الانحراف المعياري ليس دالة للمتوسط ويكون ميل معادلة المربعات الصغرى قريبا من الصفر، وهذا يعني أن النموذج جمعي.

- الانحراف المعياري دالة للمتوسط ويكون ميل معادلة المربعات الصغرى مختلفا عن الصفر، وهذا يعني أن النموذج ضربي.

الأسلوب الانحداري:

ويمكن أن نحدد النموذج الأنسب للسلسلة الزمنية إحصائيا من خلال النتائج التي نتوصل إليها بعد تقدير معلمات المعادلة التالية[2]:

$$\delta_i = a + b\overline{y_i}$$

حيث:

i=1,2,3,…,n مؤشر السنة

j=1,2,3,…,p مؤشر الفصل أو الشهر حسب معطيات السلسلة الزمنية

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}(y_{ij} - \overline{y_i})^2}\ , \quad \overline{y_i} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{ij}\ , \ \hat{b} = \frac{cov(\delta_i, \overline{y_i})}{var(\overline{y_i})}$$

بعد تقدير المعادلة السابقة نصل إلى القرار التالي:

السلسلة الزمنية تجميعية إذا كان : $\hat{b} < 0.05$

السلسلة الزمنية مختلطة إذا كان : $0.05 \leq \hat{b} \leq 0.10$

السلسلة الزمنية جدائية إذا كان : $\hat{b} > 0.10$

4. اختبار الكشف عن مكونات السلسلة الزمنية:

إن الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية باستعمال التحليل البياني لقيمها لا يكون كافيا في كثير من الأحيان نظرا لعدم دقته مما يستلزم استعمال أدوات إحصائية.

1.4. الكشف عن مركبة الاتجاه العام:

إن الاتجاه العام هو أهم مركبة من مركبات السلسلة الزمنية ويمثل التغير طويل الأجل في السلسلة، ويعتبر قياسة عملية هامة لثلاثة أسباب نذكرها فيما يلي:

- يمكن الاتجاه العام من معرفة الكيفية التي تتطور بها الظاهرة على المدى الطويل
- يساعد في التنبؤ بما سيكون عليه حال القيم المستقبلية

[2] أبو صالح محمد صبحي، 2000، الطرق الإحصائية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، ص 497.

يستخدم في حذف أثر الاتجاه العام من السلسلة ومن تم يمكن دراسة باقي التغيرات بشكل أفضل

و توجد عدة اختبارات إحصائية للكشف عن مركبة الاتجاه العام تتمثل أهمها فيما يلي:[3]

1.1.4.الاختبارات غير المعلمية: ويقصد بها الاختبارات التي لا تخضع بالضرورة لأي توزيع إحصائي، فهي إذا حرة التوزيع. تتمثل أهم هذه الاختبارات فيما يلي:

اختبار دانيال DANIEL: يستعين هذا الاختبار بمعامل الارتباط لسبيرمان الذي يقيس الارتباط الخطي بين الترتيبين التصاعدي R_t والزمني t.

ويعرف معامل الارتباط بالعلاقة الرياضية التالية:

$$r_s = \frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - \overline{R})(\overline{t} - t)}{\sum_{t=1}^{n} (t - \overline{t})^2}$$

ولمراعاة عدم تكرار الرتب نعوض الرتب المكررة المتساوية بوسطها الحسابي. لتبسيط هذا المعامل يمكن إعطاءه في الشكل النهائي التالي:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^{n} d_t^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث:

$\sum d_t^2$: مجموع مربعات الفروق بين الترتيب التصاعدي والزمني أي: $d_t = (R_t - t)$

وكون r_s معامل الارتباط الخطي فإن: $-1 \le r_s \le 1$

تتمثل صيغة الاختبار فيما يلي:

H_0 : السلسلة عشوائية[لا يوجد اتجاه عام في السلسلة الزمنية].

H_1 : يوجد اتجاه عام في السلسلة الزمنية.

ويتخذ القرار على الشكل التالي:

يتم رفض الفرضية H_0 وحسب حجم العينة كما يلي:

- إذا كان حجم العينة $n \le 30$ و $|r_S| > r_{\frac{\alpha}{2}}$.
- إذا كان حجم العينة $n > 30$ و $|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

[3] حشمان مولود، 1998، نماذج وتقنيات التنبؤ القصير المدى، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ص 27 – 29.

حيث:

$$Z = \frac{r_s - \mathrm{E}(r_s)}{\sqrt{V(r_s)}}$$

$$V(r_s) = \frac{1}{n-1}$$

$$\mathrm{E}(r_s) = 0$$

بالتعويض نجد:

$$Z = \frac{r_S}{\sqrt{V(r_s)}} = r_S\sqrt{n-1}$$

➢ **اختبار الفروقات:** ينص مبدأ هذا الاختبار على اختبار الفرضية التالية:[4]

H_0 : وجود اتجاه عام.

H_1 : توزيع عشوائي.

ولتكن:

Y_t : قيم السلسلة في الفترة t.

S : عدد الفرو قات الموجبة (Y_t, Y_{t-1}).

يتم حساب الفرو قات كما يلي:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

فإذا كانت Y_t عشوائية تماما وحجم العينة n أكبر من 20 فإن S يتبع التوزيع الأتي:

$$S \to N\left(\mathrm{E}(S), \sqrt{V(S)}\right)$$

حيث أن:

$$\mathrm{E}(S) = \frac{n-1}{2}$$

$$V(S) = \frac{n+1}{2}$$

[4] Malinvaud.E, 1981, Méthodes statistique de l'économétrie, Edition Bordas, France, p 498.

ثم تحسب قيمة Z_C كما يلي:

$$Z_C = \frac{S - \mathrm{E}(S)}{\sqrt{V(S)}}$$

من أجل اتخاذ القرار تقارن قيمة Z_C المحسوبة مع القيمة الجدولية $Z_t = 1.96$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

- **فإذا كانت $|Z_C| > 1.96$ نرفض الفرضية H_0 ونقول أن السلسلة عشوائية.**
- **أما إذا كانت $|Z_C| < 1.96$ نقبل الفرضية H_0 ونقول أن السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة اتجاه العام.**

➢ **اختبار نقاط الانعطاف:** يستعمل هذا الاختبار لما يكون عدد المشاهدات أكبر من 10، وينص مبدأ هذا الاختبار على اختبار الفرضية التالية:[5]

H_0 : توزيع عشوائي.

H_1 : وجود اتجاه عام.

للقيام بهذا الاختبار لابد من حساب الفروقات من الدرجة الأولى للسلسلة المعنية وإعطاء إشارة موجبة للفروقات الموجبة وسالبة للسالبة منها. أي:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

أما القرار فيتخذ على الشكل التالي:

رفض الفرضية H_0 إذا كان: $|Z_C| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$

حيث Z_C معطى بالعلاقة التالية: $Z_C = \frac{U - \mathrm{E}(U)}{\sqrt{V(U)}}$

أين: U: عدد مرات تغير الإشارة في الفروقات (Y_t, Y_{t-1}).

$$\mathrm{E}(U) = \frac{2(n-2)}{3}$$

$$V(U) = \frac{16n - 29}{90}$$

2.1.4. الاختبارات المعلمية: تتمثل هذه الطريقة في افتراض وجود اتجاه عام في السلسلة إضافة إلى المركبة العشوائية، مع افتراض معرفة التوزيع الاحتمالي للأخطاء أي:[6]

[5] حشمان مولود، 1998، ص 23 – 24.

$$Y_t = f(t, \mu_t)$$

بحيث:

$$\mu_t \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

بمعنى أن الخطأ العشوائي μ_t يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم وتباين ثابت σ^2. فبعد تحديد شكل الدالة f، يتم تقدير معالمها، ثم اختبار معلمة الاتجاه العام باستعمال الانحراف المعياري أو احصاءة *Student*.

2.4. الكشف عن المركبة الموسمية:

في كثير من الحالات يمكن الكشف عن المركبة الموسمية ببساطة عند معرفة موضوع السلسلة الزمنية، كما يمكن الكشف عنها من خلال الرسم البياني، حيث تسجل قمم وانخفاضات في فترات منتظمة، إلا أنه يتعذر كشفها في بعض السلاسل الشديدة التذبذب، لهذا الغرض تستعمل الاختبارات الإحصائية للكشف عنها.

1.2.4. اختبار تحليل التباين واختبار فيشر:[7]

يعتمد اختبار فيشر على تحليل التباين وهو يقوم على فرضية عدم وجود المركبة الدورية ومركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية. فإذا كان لدينا:

- n عدد السنوات.
- p عدد الفصول.
- Y_{ij} قيم السلسلة الزمنية.

يتمثل شكل هذا الاختبار فيما يلي:

H_0 : لا توجد مركبة موسمية.

H_1 : توجد مركبة موسمية.

ويتم هذا الاختبار انطلاقا من جدول تحليل التباين التالي:

الجدول رقم 01: جدول تحليل التباين.

التباين	تباين العوالم	درجة الحرية	مجموع المربعات
$V_p = \frac{S_p}{p-1}$	تباين العامل الموسمي	$p-1$	$S_p = n\sum_{j=1}^{p}\left(\overline{Y}_j - \overline{Y}\right)^2$

[6] حشمان مولود، 1998، ص 30 – 31.

[7] Bourbonnais.R; Terraza.M, 1998, Analyse des séries temporelles en économie, Edition Dunod, France, p 18 - 19.

$S_A = p\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{Y}_i - \overline{Y}\right)^2$	$n-1$	تباين العامل السنوي	$V_A = \frac{S_A}{n-1}$
$S_R = \sum_i\sum_j\left(Y_{ij} - \overline{Y}_i - \overline{Y}_j - \overline{Y}\right)^2$	$(p-1)(n-1)$	تباين البواقي	$V_R = \frac{S_R}{(p-1)(n-1)}$
$S_T = S_P + S_A + S_R$	$(np)-1$	التباين الكلي	$V_T = \frac{S_T}{np-1}$

Source : Bourbonnais.R ; Terraza.M, 1998, p 18

حيث:

$$\overline{Y} = \frac{1}{pn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}Y_{ij}$$

$$\overline{Y}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{ij}$$

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{P}Y_{ij}$$

ومن أجل اتخاذ القرار يتم حساب قيمة إحصاءة فيشر المعرفة بالصيغة الرياضية التالية:[8]

$$F_c = \frac{V_p}{V_R}$$

ومقارنتها مع القيمة الجدولية: $F_{\alpha,(V_1,V_2)} = F_t$

حيث:

$$\begin{cases} V_1 = p-1 \\ V_2 = (n-1)(p-1) \end{cases}$$

ويكون القرار رفض الفرضية H_0 إذا كانت: $F_c > F_t$ وهذا يعني أن السلسلة الزمنية تتضمن مركبة موسمية.

2.2.4 اختبار *Kurskall–Wallis*: يتمثل شكل هذا الاختبار فيما يلي:[9]

H_0 : لا توجد مركبة موسمية.

H_1 : توجد مركبة موسمية.

من أجل القيام بهذا الاختبار تستعمل الإحصاءة المعطاة في الشكل الرياضي التالي:

[8] Bourbonnais.R; Terraza.M, 1998, p 19.

[9] حشمان مولود، 1998، ص 32 – 33.

$$KW = \frac{12}{T(T-1)} \sum_{i=1}^{p} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(T+1) \rightarrow \chi^2_{(p-1)}$$

حيث:

R_i : يمثل مجموع رتب المشاهدات المقابلة للفصل i.

n_i : عدد المشاهدات المقابلة للفصل i.

p : الدورة، وتكون مساوية لـ 4 في المشاهدات الفصلية و 12 في المشاهدات الشهرية.

T : عدد المشاهدات.

ويتخذ القرار على الشكل التالي:

رفض الفرضية H_0 إذا كانت $KW > \chi^2_{(p-1)}$ وهذا يعني أن السلسلة تحتوي على المركبة الموسمية.

كما تجدر الإشارة إلى أنه يجب إزالة مركبة الاتجاه العام قبل المركبة الموسمية لتفادي الوقوع في الخطأ.

إن الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية يكون بهدف معرفة العلاقة التي تربط بينها والتي يمكن أن تأخذ الشكل التجميعي أو الضربي أو المختلط.

5. تفكيك السلسلة الزمنية:

1.5. تفكيك الشكل التجميعي:

يتم تفكيك الشكل التجميعي بإتباع الخطوات الموالية:[10]

- حساب الاتجاه العام باستعمال المتوسط المتحرك الممركز من الدرجة p كما يلي:

$$T_t = \frac{0.5Y_{t-k} + Y_{t-k+1} + ... + Y_t + Y_{t-k-1} + 0.5Y_{t+k}}{p}$$

حيث: $k = \frac{p}{2}$

p : دورة المركبة الموسمية.

- حساب المركبة الموسمية S_t بطرح قيمة الاتجاه العام من المشاهدة Y_t.
- حساب المعاملات المؤقتة $S'_1, S'_2, ...S'_p$. التي تمثل المتوسط الحسابي للمركبات الموسمية S_t الخاصة بكل شهر أو الخاصة بكل ثلاثي.

[10] 33. -30Bourbonnais.R; Usinier.J, 1982, p

- حساب المعاملات الموسمية النهائية S_i بحيث:

$$S_i = S_i^{'} - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_i^{'}}{p}$$

- تعديل السلسلة الزمنية من التغيرات الموسمية فنحصل على سلسلة زمنية جديدة معدلة:

$$Y_t^* = Y_t - S_i$$

- تقدير معادلة الاتجاه العام انطلاقا من السلسلة الزمنية المعدلة باستعمال الانحدار الخطي.
- التنبؤ بالقيم المستقبلية باستعمال علاقة التنبؤ المعرفة بالصيغة الرياضية الموالية:

$$\hat{Y}_t = \hat{f}(t) + S_t$$

حيث:

$\hat{f}(t)$: معادلة الاتجاه العام المقدرة.

S_t : المعاملات الفصلية النهائية.

2.5. تفكيك الشكل الجدائي:

تتبع نفس مراحل تفكيك الشكل التجميعي مع مراعاة ما يلي:

$$S_i = \frac{pS_i'}{\sum_{i=1}^{p} S_i'} \qquad Y_t^* = \frac{Y_t}{S_i}$$

وتصبح علاقة التنبؤ كما يلي:

$$\hat{Y}_t = \hat{f}(t) \times S_t$$

6. طرق إيجاد خط الاتجاه العام:

تعتمد الطرق التقليدية في قياس الاتجاه العام على توفيق ما يعرف بمنحنى الاتجاه العام، وتوجد طرق متعددة نذكر منها:

- طريقة متوسطي نصفي السلسلة
- طريقة المتوسطات المتحركة
- طريقة تحليل الانحدار

1.6. طريقة متوسطي نصفي السلسلة:

تتلخص هذه الطريقة في تقسيم بيانات السلسلة الزمنية إلى قسمين متساويين وحساب معدل كل قسم ثم رسم الخط المستقيم الذي يربط بين النقطتين التي تتمثل إحداثياتهما في المعدل النصفي ومنتصف الفترة الزمنية التي حسب عليها.[11]

مثال:

لتكن لدينا السلسلة الزمنية التالية لسكان إحدى الدول للفترة الزمنية الممتدة بين 1990-1999 [الوحدة بالمليون]

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
السكان	5.93	6.09	6.26	6.45	6.67	6.89	7.13	7.37	7.62	7.88

اوجد خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية الاتية باستخدام طريقة متوسطي نصفي السلسلة

1990-1994--1992

الحل :

نقسم السلسلة الى قسمين متساويين الأول من سنة [1990-1994] والسنة الوسطى فيه هي سنة 1992 والقسم الثاني من السلسلة من سنة [1995-1999] والسنة الوسطى فيه هي سنة 1997 ومن ثم نجد الوسط الحسابي لكل قسم كالأتي :

الوسط الحسابي للقسم الأول

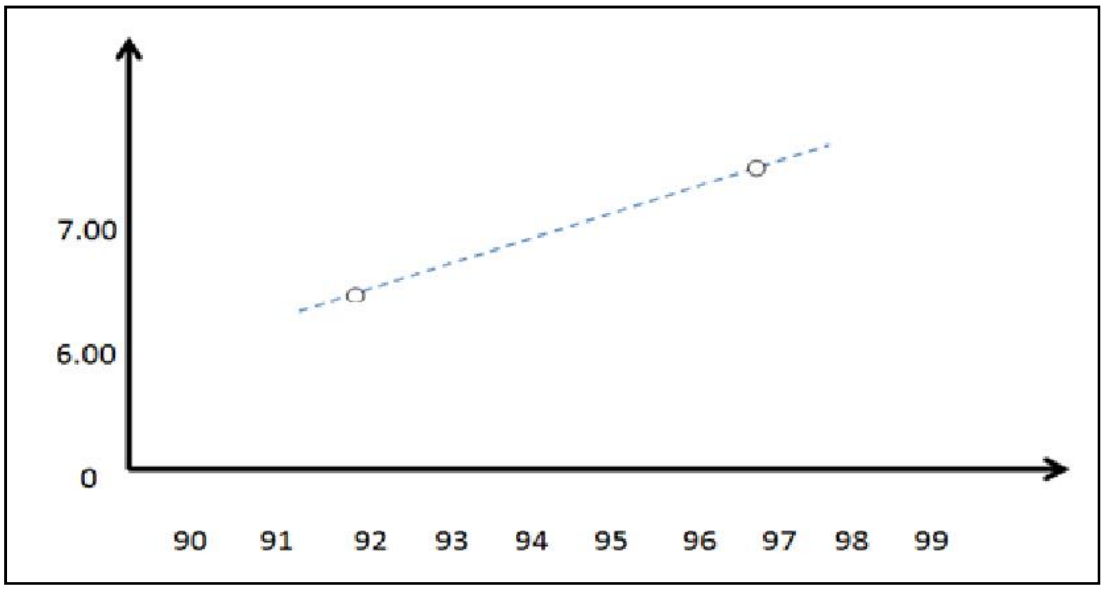
$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5.93+6.09+6.26+6.45+6.67}{5} = 6.28$$

الوسط الحسابي للقسم الثاني

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{6.89+7.13+7.37+7.62+7.88}{5} = 7.38$$

[11] أبو صالح محمد صبحي وعوض عدنان محمد، 2004، ص 500.

نرسم المحور الافقي يمثل السنوات والمحور العمودي ويمثل عدد السكان بالملايين ونحدد النقطتين (الوسط الحسابي لكل قسم) ثم نرسم خط مستقيم يصل بين النقطتين فنحصل على خط الاتجاه العام.



2.6. طريقة المتوسطات المتحركة:

تستعمل هذه الطريقة لاستبعاد التقلبات الدورية، الموسمية والعشوائية، ويعتمد طول فترة المتوسط على طول الفترة التي تظهر فيها التغيرات الدورية.[12]

إذا كان عدد السنين فرديا فإن المتوسط المتحرك من الرتبة p يحسب كما يلي:

$$MM_{t,p}(Y)=\frac{1}{p}\left[\sum_{i=-k+1}^{i=k-1}Y_{t+i}+\frac{1}{2}Y_{t-k}+\frac{1}{2}Y_{t+k}\right]$$

إذا كان عدد السنين زوجيا فإن المتوسط المتحرك من الرتبة يحسب كما يلي:

$$MM_{t,p}(Y)=\frac{1}{p}Y_{t+k}$$

إن تحديد طول فترة الأساس وحساب المتوسطات المتحركة يتوقف على طبيعة البيانات المشاهدة، حيث يتم اختيار فترة زمنية خالية من مختلف أنواع التقلبات، كما يتوقف على طول فترة التقلبات الدورية.[13]

إلا أنه توجد لهذه الطريقة عدة مساوئ وهي:

- فقدان القيم في بداية ونهاية السلسلة الزمنية.
- تأثر المتوسطات المتحركة بالقيم المتطرفة.

[12] العاروري فتحي والعتوم شفيق، 2002، الأساليب الإحصائية، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الثانية، ص 280.

[13] لزعر علي، 2000، الإحصاء وتوفيق المنحنيات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ص 143.

مثال :

الجدول التالي يبين قيم المبيعات الفعلية yi بالمليون لأحد مصانع الاسمنت للفترة الزمنية الممتدة بين 2000-2008.

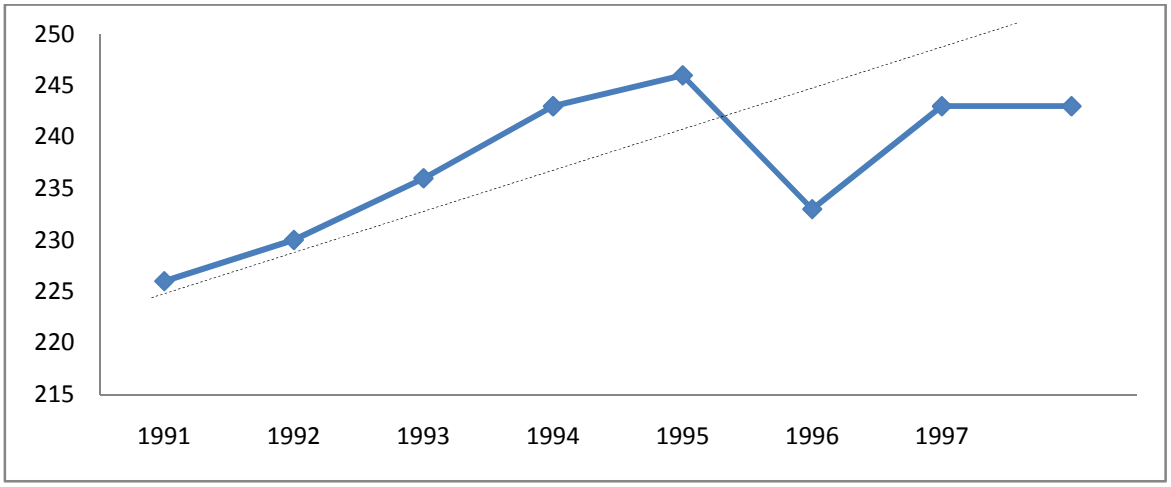
السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
المبيعات	210	240	230	220	260	250	230	220	280

المطلوب : رسم خط الاتجاه العام باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة .

الحل:

نفرض أن عدد السنوات المناسب هو ثلاث 3 سنوات

السنة	y_i	Σy_{t+k}	MM_3
1990	210	-	-
1991	240	680	226.67
1992	230	690	230
1993	220	710	236.67
1994	260	730	243.33
1995	250	740	246.67
1996	230	700	233.33
1997	220	730	243.33
1998	280	-	-



3.6. طريقة تحليل الانحدار:

إن أسلوب الانحدار من أهم الطرق التقليدية في تقدير الاتجاه العام ويعتمد هذا الأسلوب على تحديد معادلة رياضية غير عشوائية لتمثيل الاتجاه العام وبالتالي تكون معادلة الاتجاه العام حسب هذه الطريقة كما يلي:[14]

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 \hat{X} + \xi$$

حيث:

$\hat{Y}$: إحداثيات نقطة من نقاط الاتجاه.

X : فاصلة نقطة من نقاط الاتجاه.

ε: الأخطاء العشوائية

عند تمثيل النقاط بيانيا تظهر بعض النقاط تحت أو فوق منحنى الاتجاه وتسمى هذه الفروقات بالبواقي ويظهر أنه من المناسب اختيار الاتجاه الذي يعطي أقل قيمة لمجموع مربعات البواقي، ومنه يكون مبدأ طريقة المربعات الصغرى هو اختيار قيم β_0 و β_1 بهدف تدنئة العبارة التالية:

$$Min\sum \varepsilon_i^2 = \sum \left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i\right)^2$$

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{1}{n}\sum y - a\frac{1}{n}\sum x$$

مثال :

الجدول التالي يبين قيم المبيعات الفعلية yi بالمليون لأحد المصانع للفترة الزمنية الممتدة بين 2000-2008.

المواسم	1	2	3	4	5	6	7	8	9
المبيعات	210	240	230	220	260	250	230	220	280

المطلوب : استخراج معادلة خط الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى.

[14] Johnston.J, 1985, Méthodes économétrique, Traduit par Guerrien .Bernard; Vergara. Francisco, Edition Economica, France, 3 ème édition, p 20 - 21.

الحل:

$(x_i)^2$	$y_i\ x_i$	y_i	x_i
1	210	210	1
4	480	240	2
9	690	230	3
16	880	220	4
25	1300	260	5
36	1500	250	6
49	1610	230	7
64	1760	220	8
81	2520	280	9
285	**10950**	**2140**	**المجموع 45**

حساب المتوسط الحسابي $\bar{x}$و$\bar{Y}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{45}{9} = 5 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{214}{9} = 237.78$$

$b = \frac{\sum y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sum x_i - n\bar{x}^2}$ b=4.17

$a = \bar{y} - b\bar{x}$ a=216.93

Y=216.93+4.17x

اختبار جودة النموذج وتحليل التباين.

$$SST = \sum y_i = \sum (Y - \bar{Y})^2$$
$$SSR = \sum \hat{y}^2 = \beta \sum x_i^2 = \sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$$
$$SSE = \sum u_i^2 = \sum (\hat{Y} - Y)^2$$
$$SST = SSR + SSE$$

SST Total Sum of Squares	مجموع المربعات الإجمالي للتغيرات التي تحدث في المتغير التابع Y
SSR Regression Sum of Squares	يسمى بمجموع مربعات الانحدار يعني جزء من تباين Y الذي تم تفسيره بواسطة الانحدار. إي الجزء من المتغيرات التي تحدث في المتغير التابع والذي تم تفسيرها بواسطة النموذج المقدر
SSE Error	مجموع مربعات البواقي، $\sum u^2$, وهذا مؤشر للجزء الذي لم يفسر بواسطة نموذج الانحدار، إي الجزء الذي فشل النموذج في تفسيره

ويمثل نسبة مجموع مربعات الانحدار إلي مجموع المربعات الإجمالي ما يسمى بـ معامل التحديد

$$R^2_{xy} = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{\hat{\beta}\sum xy}{\sum y_i^2}$$

قيمة R^2 تتراوح بين صفر وواحد. إذا كانت مرتفعه أي قريبه من الواحد تعتبر X جيده في تفسير التغيرات في Y. إذا كانت قريبه من الصفر فان المتغير لا يشرح إلا القليل من التغير في Y.

جدول تحليل التباين لمعادلة الانحدار ANOVA (Analysis Of Variance):

وهو إن تحليل مجموع المربعات الصغرى إلي مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحدار. الغرض من هذا التحليل لاختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وهذا أيضا يدخل في اختبار معنوية المعامل β.

اختبار F هو اختبار لجودة النموذج. يحاول أن يجيب على السؤال هل افلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. ويختبر الفرضية إن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر. أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع. وتقارن قيمة المحسوبة من الجدول مع الجدوليه بدرجة حرية للبسط تساوي $k-1$ ودرجة حرية المقام $n-k$. ونمثل هذا التحليل في جدول تحليل التباين:

الجدول رقم 02:جدول تحليل التباين ANOVA

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مجموع مربعات الانحدار	$SSR = \sum \hat{y}^2 = \hat{\beta}\sum xy = \hat{\beta}^2 \sum x^2 =$	k-1=2-1	SSR/1
مجموع مربعات البواقي	$SSE = \sum u^2 = \sum y^2 - \sum \hat{y}^2$	n-k=n-2	σ^2= SSE/(n-2)
مجموع مربعات الإجمالي	$SST = \sum y^2 = \sum \hat{y}^2 + \sum u^2$	n-2=3	$F = \frac{SSR}{SSE / n - k}$

7. تقدير المركبة الموسمية:

توجد العديد من الطرق لتقدير المركبة الموسمية تتمثل أهمها فيما يلي:

1.7. طريقة النسبة إلى المتوسط المتحرك:

هي الطريقة الأكثر استعمالا من أجل تحديد المؤشرات الموسمية ويمكن التمييز بين حالتين:

❶ **النموذج الضربي**: لتقدير المركبة الموسمية تتبع الخطوات التالية:

- إيجاد النسبة ما بين كل قيمة شهرية والمتوسط المتحرك الخاص بها كما يلي:[15]

$$\frac{Y}{MM_{t,p}} = \frac{T \times C \times S \times U}{T \times C} = S \times U$$

- إزالة أثر التغيرات غير المنتظمة من النسبة $S \times U$ وذلك عن طريق أخذ معدل عدة سنوات والتي تمثل المركبة الموسمية للشهر الذي حسبت له.
- قسمة المشاهدات الخالية من التغيرات الموسمية على المؤشر الموسمي وضرب النتيجة المحصل عليها في 100. ويمكن التعبير عن هذه الخطوة بالمعادلة التالية:

$$\frac{Y}{S} = T \times C \times U$$

❷ **النموذج الجمعي**: لتقدير المركبة الموسمية تتبع الخطوات التالية:[16]

- إعطاء قيمة تقريبية للاتجاه مساوية لقيمة المتوسط المتحرك الممركز X_t .
- حساب متوسط الفروق $(Y_t - X_t)$ الموجودة في نفس الموسم عبر السنوات المختلفة.

[15] Kazmier. L, 1982, p 329.
[16] Goldfarb.B; Paradoux.C, 2000, p 113.

- إذا كان مجموع المعاملات الموسمية مختلفا عن الصفر يتم تصحيح المعاملات للحصول على مجموع معدوم.

حيث:

$$S_t^* = S_t - \overline{S}$$

$$\overline{S} = \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} S_t$$

وتسمى السلسلة الخالية من التغيرات الموسمية سلسلة الفروقات:

$$Y_t^* = Y_t - S_t^*$$

- حساب الفروقات مابين الفروقات وقيمة المعامل الموسمي:

$$\varepsilon_t = (Y_t - X_t) - S_t^*$$

بحيث تكون هذه الفروقات معدومة أو صغيرة جدا.

مثال:

جدول الأجور التالي للسنوات الثلاث 1997 ـ 1999 والمطلوب قياس التغير الموسمي.

السنة	1997				1999				1998			
الفصل	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
الأجور	40	33	29	25	21	32	40	45	41	40	39	44

الحل:

نكون الجدول التالي للنتائج في الجدول السابق كالتالي حسب الخطوات التالية:

1. أخذ أساس المناسب وهنا سنأخذ أربعة
2. نوجد قسمة المعطيات الفعلية على الوسط المتحرك وضرب الناتج × 100
3. عزل مركب التغير الموسمي عن مركب التغير العشوائي بتعديل على سنوات السلسلة
4. ضرب ناتج 3) في ناتج 2) ونقسم الناتج على المجموع الفعلي للنسب المئوية فيكون الناتج عنصر التغير الموسمي.

⇦العمود الأول والثاني البيانات الفعلية

⇦العمود الثالث للمجموع المتحرك بأخذ القيم الأربع الأولى ووضع المجموع في المنتصف وتكرار ذلك مع الأربع التالية بدء من القيمة الثانية وهكذا

⇦العمود الرابع المتوسطات بالقسمة للمجموع على 127 ÷ 4 = 31.75

⇦العمود الرابع هو ناتج جمع المتوسطات في العمود الثالث 235 = 108 + 127، + 108 + 107 = 215 ، هكذا (المجموع هنا لثمانية ، فصول كل عدد يمثل أربعة)

⇦العمود الخامس متوسط الفصول الثمانية بقسمة كل قيمة في العمود الرابع على 8 مثل 235 ÷ 8 = 29.375

⇦العمود الأخير بقسمة القيم الثانية في العمود الثاني (33) على القيمة الأولى في العمود الخامس (29.375) والناتج × 100 أي 112.34 = 100×(33 ÷ 29.375)

السنة والفصل	الأجور بالآف	المجموع المتحرك لأربع فصول	المجموع المركزي المتحرك	المتوسط للفصول الثمانية	النسبة الموسمية
1997 Q_1	40				
Q_2	33				
Q_3	29	127	235	29.375	98.723
Q_4	25	108	215	26.875	93.023
1998 Q_1	21	107	225	28.125	74.667
Q_2	32	118	256	32.000	100.00
Q_3	40	138	296	37.000	108.108
Q_4	45	158	324	40.500	111.111
1999 Q_1	41	166	331	41.375	99.094
Q_2	40	165	329	41.125	97.264
Q_3	39	164			
Q_4	44				

نكون جدول جديد لترتيب النتائج في العمود الأخير من الجدول السابق لنحصل على القياس الموسمي المبين بالجدول التالي :

⇦صف المتوسط نتج من مجموع القيمتين أعلاه (الفصلية) مقسوماً على 2 أي (74.667 + 99.094) ÷ 2 = 86.9 مقراً الناتج لرقم عشري واحد

⇦المتوسط : من حيث لكل فصل 100 والمجموع للفصول الأربع 400 ولكن المجموع هنا 86.881 + 98.632 + 103.416 + 102.067 = 390.996 أقل من 400 لذا نضرب كل متوسط في 400 ÷ 390.996 ، نحصل على المعدل المطلوب كما مبين في الصف الأخير: 88.9 + 100.9 + 105.8 + 104.4 = 400

السنة	الفصول			
	1	2	3	4
1997	—	—	98.723	93.023
1998	74.667	100.00	108.108	111.111
1999	99.094	97.264	—	—
المتوسط	86.9	98.6	103.4	102.1
المعدل	88.9	100.9	105.8	104.4

يمكن إضافة هذا المعدل كدليل موسمي في الجدول السابق ومن ثم إضافة البيانات مخلصة من أثر الموسم وعليه نعيد صياغة الجدول الأول بإضافة عمودين عليه العمود الأول خاص بالدليل الموسمي للمعدل الذي حصلنا عليه لكل فصل والعمود الثاني للقيم: (القيمة لفعلية ÷ مقابل في العمود الجديد) × 100 كما يلي:

السنة والفصل	الأجور بالآف	المجموع المتحرك لأربع فصول	المجموع المركزي المتحرك	المتوسط للفصول الثمانية	النسبة الموسمية	الدليل الموسمي	بيانات مخلصة من أثر الموسم
1997 Q_1	40	—	—	—	—	88.9	45
Q_2	33	—	—	—	—	100.9	32.7
Q_3	29	127	235	29.375	98.723	105.8	27.4
Q_4	25	108	215	26.875	93.023	104.4	23.9
1998 Q_1	21	107	225	28.125	74.667	88.9	23.6
Q_2	32	118	256	32.000	100.00	100.9	31.7

37.8	105.8	108.108	37.000	296	138	40	Q_3
43.1	104.4	111.111	40.500	324	158	45	Q_4
46.1	88.9	99.094	41.375	331	166	41	1999 Q_1
39.6	88.9	97.264	41.125	329	165	40	Q_2
36.9	105.8	—	—	—	164	39	Q_3
42.1	104.4	—	—	—	—	44	Q_4

2.7. طريقة النسبة إلى الاتجاه العام:

تستعمل هذه الطريقة خاصة في حالة النموذج الجدائي، وتتمثل خطواتها فيما يلي:[17]

- إيجاد معادلة الاتجاه العام $\tilde{Y}_t$.
- قسمة القيم الفعلية على مركبة الاتجاه العام المناظرة.
- حساب متوسطات القيم المتحصل عليها في الخطوة السابقة لكل موسم للحصول على المؤشر الموسمي.
- قسمة القيم الفعلية Y_t على المؤشرات الموسمية لنحصل على سلسلة زمنية خالية من مركبة الاتجاه العام والمركبة الدورية.

طريقة المتوسط العام:

في هذه الطريقة يستبعد أثر الموسم ويتم ذلك كما يلي ضمن المثال السابق (أعلاه) ومن الجدول الآتي:

الفصل / السنة	1	2	3	4	المجموع
1997	40	33	29	25	127
1998	21	32	40	45	138
1999	41	40	39	44	164

[17] Maurise.L, 2005, Statistique descriptive, Edition Dunod, France, 4 ème édition, p 132.

المجموع	102	105	108	114	429
المتوسط	34	35	36	38	35.75

أولاً :نوجد المتوسط العام ويساوي مجموع القيم الفعلية (الأصلية) مقسوماً على عددها أي: المتوسط العام = مجموع القيم الفعلية ÷ عددها

المتوسط العام=35.75 = 12 ÷ 429

ثانياً :نوجد المتوسط الموسمي ويساوي مجموع قيم الموسم مقسوماً على عدد السنين أي :

المتوسط الموسمي = مجموع قيم الموسم ÷ عدد السنين

⇦المتوسط الموسمي للفصل الأول = مجموع قيم الفصل الأول في السنوات الثلاث ÷ 3

⇦المتوسط الموسمي للفصل الأول 34 = 3 ÷ 102 ، بالمثل يكون:

⇦المتوسط الموسمي للفصل الثاني35 = 3 ÷ 105

⇦المتوسط الموسمي للفصل الثالث36 = 3 ÷ 108

⇦المتوسط الموسمي للفصل الرابع38 = 3 ÷ 114

ثالثاً :نوجد الدليل الموسمي لكل فصل أي:

الدليل الموسمي للفصل = (المتوسط الموسمي للفصل ÷ المتوسط العام) × 100

⇦الدليل الموسمي للفصل الأول = (المتوسط الموسمي للفصل ÷ المتوسط العام) × 100

⇦الدليل الموسمي للفصل الأول = (34 ÷ 35.75) × 100=95.105

⇦الدليل الموسمي للفصل الثاني = (35 ÷ 35.75) × 100 = 95.902

⇦الدليل الموسمي للفصل الثالث = (36 ÷ 35.75) × 100 = 100.699

⇦الدليل الموسمي للفصل الرابع = (38 ÷ 35.75) × 100 = 106.294

رابعاً: نوجد تخليص البيانات من أثر الموسم ويساوي ناتج قسمة كل قيمة من البيانات على الدليل الموسمي المقابل لها مضروباً × 100 أي:

نعيد كتابة الجدول السابق مع استبدال القيم للسنوات الثلاث بفصولها الأربع (12 قيمة (بقسمة كل منها على الدليل الموسمي المقابل مثلاً:

القيمة 40لسنة 1997 الفصل 1 يكون: تخليص البيانات من أثر الموسم = 100 × (95.105 ÷ 40) = 42.06القيم بالخلفية الخضراء

نكرر السابق فنحصل على الجدول الآتي والخاص بتخليص البيانات من أثر الموسم بطريقة المتوسط العام:

الفصل	1	2	3	4
السنة / الدليل الموسمي للفصل	95.105	95.902	100.699	106.294
1997	40	33	29	**25**
تخليص البيانات من أثر الموسم	(40 ÷ 95.105) × 100 = 42.06	34.41	28.80	**23.52**
1998	21	32	40	**45**
تخليص البيانات من أثر الموسم	(21 ÷ 95.105) × 100 =22.08	33.37	39.72	**42.34**
1999	41	40	39	**44**
تخليص البيانات من أثر الموسم	(41 ÷ 95.105) × 100 = 43.31	41.71	38.73	**41.40**

والجدول التالي تلخيص للجدول السابق:تخليص البيانات من أثر الموسم بطريقة المتوسط العام

الفصل / السنة	1	2	3	4
1997	42.06	34.41	28.80	23.52
1998	22.08	33.37	39.72	42.34
1999	43.31	41.71	38.73	44

8. تقدير المركبة الدورية:

نقوم بفصل المركبة الدورية بإتباع الخطوات التالية:[18]

- قسمة القيم الفعلية على قيم التغيرات الطويلة المدى:

$$\frac{T \times C}{T} = C$$

- التخلص من الاتجاه العام والمركبة الموسمية وذلك بقسمة القيم الفعلية على الاتجاه العام مضافا إليه المركبة الموسمية:

$$\frac{Y}{T \times S} = \frac{T \times C \times U \times S}{T \times S} = C \times U$$

[18] Kazmier.L, 1982, p 330 - 331.

- حساب المتوسط المتحرك للقيم المتبقية من أجل إزالة المركبة العشوائية فتبقى التغيرات الدورية:

$$\frac{C \times U}{C} = U$$

دراسة الاستقرارية

1. شروط الاستقرارية:

السلسلة الزمنية المستقرة هي السلسلة التي يكون فيها الوسط الحسابي والتباين ثابتين بتغير الزمن وعند أي فترة زمنية.

❶**الشرط الأول للإستقراية : ثبات الوسط الحسابي** إذا لم يكن الاتجاه العام عنصراً من عناصر السلسلة , أي إذا لم تظهر السلسلة أي اتجاه للتزايد أو التناقص مع الزمن , فإنه من الممكن افتراض ثبات الوسط الحسابي لكل فترة زمنية وافتراض إن القيمة المشاهدة عند كل فترة زمنية تمثل هذا الوسط الحسابي , لذا يمكننا تقدير الوسط الحسابي للسلسلة الزمنية باستخدام بيانات السلسلة وفقاً للصيغة التالية :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t$$

❷**الشرط الثاني للإستقرارية : ثبات التباين** حيث يعبر تباين السلسلة الزمنية عن درجة التشتت حول الوسط الحسابي الذي يفترض ثباته .

❸**الشرط الثالث للإستقرارية : الإرتباط الذاتي** بين البيانات حيث يجب أن لا يعتمد الارتباط الذاتي بين البيانات على الزمن بل يجب أن يعتمد على الفجوة الزمنية بين الزمنيين .

أما إذا كانت السلسلة الزمنية لها اتجاه عام فمن الضروري إزالة هذا الاتجاه للحصول على سلسلة زمنية مستقرة , وحسب نماذج بوكس – جنكنز تستخدم طريقة الفروق لإزالة الاتجاه والحصول على سلسلة زمنية مستقرة وغالباً ما يكون الفرق الأول للسلسلة الزمنية كافياً لتحقيق الإستقرارية .

بإفتراض إن Y_t تمثل بيانات السلسلة الزمنية الأصلية وإن Z_t تمثل بيانات السلسلة الزمنية بعد أخذ الفرق الأول فإن معادلة أخذ الفرق الأول تكون كما يلي :

$$\begin{aligned} Z_t &= \nabla Y_t - Y_{t-1} \\ &= Y_t - \beta Y_t \\ &= (1-\beta) Y_t \end{aligned}$$

حيث إن :

Y_t : المشاهدات في الزمن t (السلسلة الزمنية غير مستقرة)

Z_t : المشاهدات في الزمن t بعد أخذ الفرق الأول $\nabla = (1-\beta)$

أما الفروق من الرتبة الثانية فتكون كما يلي :

$$\begin{aligned} Z_t &= \nabla 2 Y_t - \nabla Y_t - \nabla Y_{t-1} \\ &= Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-1} + Y_{t-2} \end{aligned}$$

$$= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$
$$= Y_t - 2\beta Y_t + \beta^2 Y_t$$
$$= (1 - 2\beta + \beta^2) Y_t$$
$$= (1 - \beta)^2 Y_t$$

أما إذا كانت d عدداً من الفروق للسلسلة الزمنية الأصلية فإن معادلتها تكون كالآتي :

$$Z_t = \nabla^d Y_t = (1 - \beta)^d Y_t$$

وتصبح السلسلة الزمنية Z_t مستقرة , إذ إن $Z_t = \nabla^d Y_t$

أي إن d يمثل أقل الأرقام الضرورية للفروق اللأزمة للحصول على سلسلة زمنية مستقرة في المتوسط

2. دالة الارتباط الذاتي ACF (Autocorrelation Function)

إن مفهوم الارتباط Correlation بين المتغيرات معناه وجود علاقة بين المتغيرات المتسلسلة في السلسلة الزمنية , فيقال إن المتغيرات أو المشاهدات مرتبطة فيما بينها , ويقيس معامل الارتباط الذاتي P_k قوة العلاقة (الارتباط) بين القيم المشاهدة Z_t & Z_{t+k} من المشاهدات أو بين المتغيرات العشوائية , فإذا كانت المتغيرات تتغير بنفس الاتجاه أي زيادة (أو نقصان) في أحد المتغيرات أو بعضها تؤدي زيادة (أو نقصان) في الآخر فيقال عندئذ إن الارتباط موجب وأعلى درجة له (+1) , أما إذا كانت المتغيرات تتغير باتجاه معاكس فزيادة أحد المتغيرات (أو نقصانه) تؤدي إلى نقصان (أو زيادة) في القيم الأخرى , ويقال عندئذ إن الارتباط سالب وأعلى درجة له (−1) , ويعد الارتباط بين متغيرين أو أكثر ارتباطا تاماً Perfect إذا كان التغير في إحداهما متناسب مع التغير في المتغيرات الأخرى.

في السلاسل الزمنية غير العشوائية يكون هنالك عادة اعتماد بين القيم المتتابعة في السلسلة الزمنية , والأداة المفيدة لقياس هذا التأثير هو معامل الارتباط الذاتي P_k فإذا كان معامل الارتباط الذاتي $P(Z_t, Z_{t+k})$ يعتمد على الزمن t عند التأخير k , فإن معامل الإرتباط الذاتي سيكون كما يأتي :

$$P(Z_1, Z_{t+k}) = \frac{E(Z_1 Z_{t+k}) - E(Z_1)E(Z_{t+k})}{\sigma_{Zt}\sigma_{Zt-k}}$$

حيث إن :

σ^2 : التباين

أما إذا إفترضنا إن النموذج هو نموذج تغيرات عشوائية White - Noise Model للسلسلة الزمنية Z_t التي لها متوسط μ وتباين σ^2 ودالة تباين مشترك γ_k سيكون معامل الإرتباط الذاتي P_k كما يأتي :

$$P_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_{ZZ}}$$

3.دالة الارتباط الذاتي الجزئي PACF (Partial Autocorrelation Function)

تمثل دالة الارتباط الجزئي PACF العلاقة بين قيم متتالية لمتغير ما خلال فترتين زمنيتين مختلفتين , مع افتراض ثبات الفترات الأخرى , ويرمز لدالة الارتباط الذاتي الجزئي بالرمز P_{kk} فمعامل الارتباط الجزئي بين Z_{t-k} & Z_t يشير إلى الارتباط بينهما مع استبعاد قيم Z_t الأخرى التي تقع بين الفترتين أو $t-k$.

ويمكن صياغة المعادلة الرياضية لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي P_{kk} من معادلة الارتباط الذاتي ACF كما يأتي

$$P_{11} = P_1$$

$$P_{22} = \begin{vmatrix} 1 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & P_1 \\ P_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_{33} = \begin{vmatrix} 1 & P_1 & P_1 \\ P_1 & 1 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & P_1 & P_2 \\ P_1 & 1 & P_1 \\ P_2 & P_1 & 1 \end{vmatrix}$$

تحليل دالة الارتباط الذاتي:

تعتبر دالة الارتباط الذاتي مؤشرا مهما لكشف عدم استقرارية السلسلة الزمنية، وهذا عندما لا تنعدم هذه الدالة قبل فترة زمنية تعادل ربع عدد المشاهدات، كما أنها تعتبر كاشف مهم للمركبة الموسمية من خلال القمم والانخفاضات التي تظهر بشكل منتظم.[1]

وللتأكد من استقرارية السلسلة الزمنية نقوم بإجراء الاختبار الموالي على قيم معاملات دالة الارتباط الذاتي P_k :[2]

$$\begin{cases} H_0 : P_k = 0 \\ H_1 : P_k \neq 0 \end{cases}$$

يعتمد هذا الاختبار على مقارنة قيمة إحصاءة t الجدولية والمحسوبة، ولقد بين Quenouille أنه إذا كان حجم العينة كبيرا $n > 30$ فإن المعامل P_k يتبع بالتقريب التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم وانحراف معياري $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ويعرف مجال ثقة المعامل P_k كما يلي:[3]

$$P_k = \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

فإذا كانت قيمة المعامل $\hat{P}_k$ تقع خارج مجال الثقة فهذا يعني أن قيمته تختلف عن الصفر عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

تأخذ دالة الارتباط الذاتي ρ(k) أشكالا متعددة فتارة تجدها تتلاشى ببطء وتارة تجدها تتلاشى بسرعة في صورة أسية، تقترب تدريجيا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب، أو نجدها تقترب تدريجيا من الصفر في شكل توليفة من الدوال الأسية ومرة نجدها تنقطع كلية فجأة بعد عدد معين من الفجوات الزمنية.

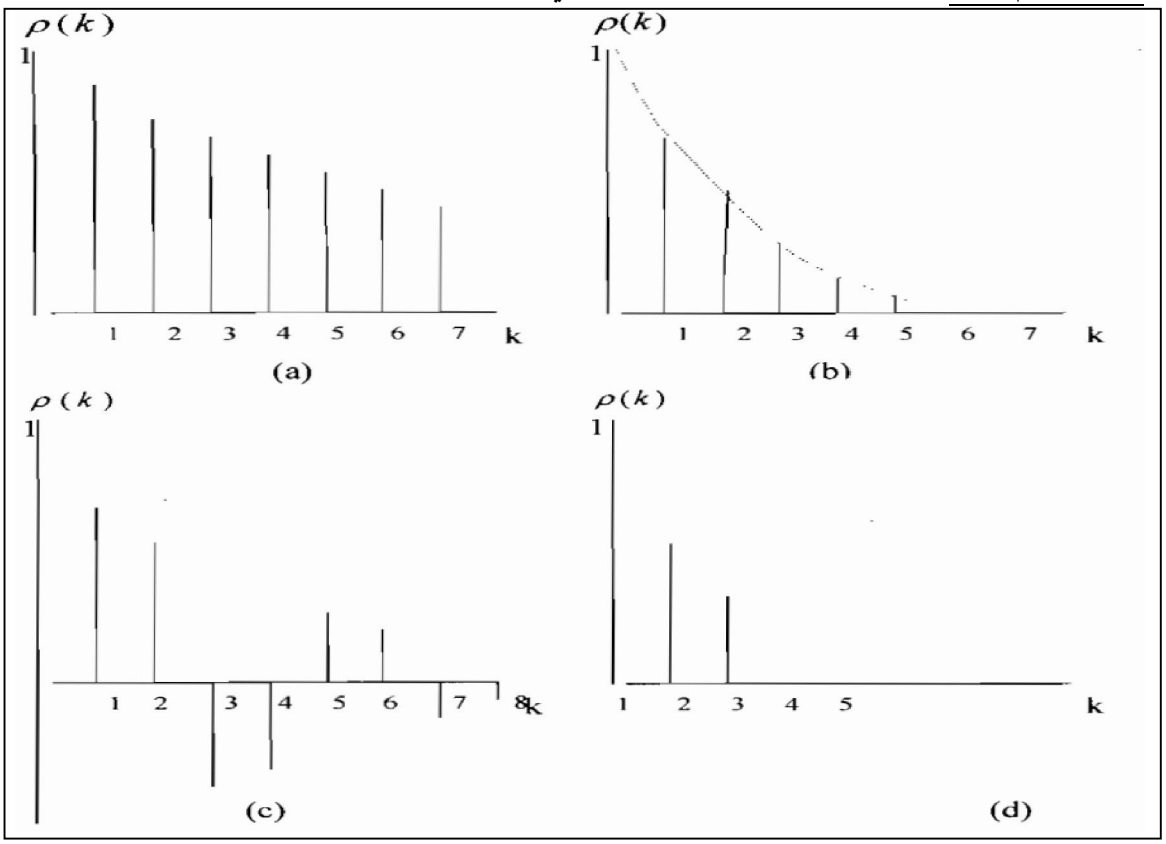
[1] حشمان مولود، 1998، مرجع سبق ذكره، ص 145.

[2] Bourbonnais.R, 2004,op cit, p 228 - 229.

[3] Mélard.G, 1985, p 96.

ففي الشكل a تتناقص دالة الارتباط الذاتي ببطء أما في الشكل b تتناقص برتابة وبسرعة في صورة أسية، بينما في الشكل c تقترب تدريجيا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب بينما في الشكل d تنقطع كلية فجأة بعد الفجوة الزمنية الثانية.

الشكل رقم 02: بعض أشكال دوال الارتباط الذاتي المشهورة.



المصدر:سمير مصطفى شعراوي، مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية، مركز النشر العلمي جامعة الملك عبد العزيز، جدة، 2005، الطبعة الأولى،ص:116.

4. اختبارات الاستقرارية:

تعتبر دراسة استقرارية السلاسل الزمنية أحد الشروط المهمة عند دراسة التكامل المتزامن لأن غيابها كما سبق وذكرنا يتسبب في العديد من المشاكل القياسية، وتكمن أهميتها في التحقق من استقرار أو عدم استقرار السلسلة الزمنية بالإضافة إلى معرفة نوع عدم الاستقرار. وتعد اختبارات جذر الوحدة كفيلة بإجراء اختبارات الاستقرارية، وهناك العديد من الطرق المستخدمة في اختبار استقرارية السلسلة الزمنية وهي إما كيفية أو كمية:

- الاختبارات الكيفية: تتم عن طريق الاستعانة بالرسم البياني لمنحنى دالة الارتباط الذاتي Corrélogramme لكنه قد لا يعطي نتائج قاطعة بشأن طبيعة وخصائص السلسلة الزمنية، بالإضافة إلى فحص دالة الارتباط الذاتي AC ودالة الارتباط الذاتي الجزئي ACF حيث تقترب هذه الأخيرة من الواحد الصحيح إذا كانت السلسلة غير ساكنة وتتناقص بالتدريج مع زيادة الفجوة الزمنية، ويسمح هذا

الاختبار بالكشف عن المركبة الموسمية، اختبار استقرار السلسلة الزمنية والكشف عن وجود الارتباط بين المتغيرات الداخلة[4].

- الاختبارات الكمية: هي اختبارات أكثر دقة في تحديد استقرارية السلسلة الزمنية، ومن أهم هذه الاختبارات نجد اختبار ADF ديكي فولر الموسع، PP فيليبس بيرون، اختبار KPSS واختبار Mizrach، وتعمل هذه الاختبارات على تحديد الاستقرارية بالإضافة إلى خصائص السلسلة الزمنية.

ويوجد نوعين من السلاسل الزمنية غير المستقرة[5]: السلاسل الزمنية غير المستقرة من نوع TS والسلاسل غير المستقرة من النوع DS:

⇦ **السلاسل الزمنية من النوع TS**: Tendance Stationnaire هذه النماذج غير مستقرة وتبرز عدم استقرارية تحديدية، وهي غير مستقرة كون الوسط الحسابي مرتبط بالزمن وتأخذ الدالة شكل $y_t = f(t) + \varepsilon_t$ حيث أن $f(t)$ كثير حدود في الزمن و ε_t خطأ أبيض، وأكثر هذه النماذج انتشارا يأخذ شكل كثير حدود من الدرجة الأولى كما يلي: $y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$ ولجعله مستقرا نستعين بالطريقة الانحدارية فنقوم بتقدير المعالم a_0 و a_1 بطريقة MCO ونطرح القيمة $\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$ من y_t وتكون بذلك سلسلة البواقي ε_t سلسلة خالية من الاتجاه العام، كما انه في حالة تعرض لصدمة عشوائية في لحظة زمنية معينة يكون مفعولها عابرا أي أنه يختفي بمرور الزمن وتسمى هذه الميزة بعدم إصرار الصدمات Propriété de non persistance des chocs وهذا يعني أن بأن المسار طويل المدى للسلسة لا يتأثر بالتحولات الظرفية..

⇦ **السلاسل الزمنية من النوع DS**: Différence Stationnaire هذه النماذج أيضا غير مستقرة، وتبرز عدم استقرار عشوائي وتسمى كذلك بسلاسل السير العشوائي إذ تكون علاقة الاتجاه العام غير واضحة وذلك لعدم تبات التباين عبر الزمن، وتكتب بالصيغة التالية: $y_t = y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$ ولإرجاع هذه السلسة مستقرة نستعمل طريقة الفروق كما يلي:

$(1 - D)^d y_t = \beta + \varepsilon_t$ حيث أن D تمثل معامل التأخر و d تعبر عن رتبة الفروق، ونستعمل طريقة الفروق من الرتبة الأولى للتوضيح d=1:

$$(1 - D)y_t = \beta + \varepsilon_t \Leftrightarrow y_t = y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

☜ إذا كان B=0 يسمى نموذج DS بدون مشتقة $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ وهذا النموذج كثير الاستعمال في دراسة كفاءة الأسواق المالية ويسمى بنموذج المشي العشوائي Random Walk Model ولإرجاعه مستقرا يكفي تطبيق الفرق من الدرجة الأولى.

☜ إذا كان B≠0 يسمى النموذج DS مع مشتقة، ويكتب وفق الشكل $y_t = y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$ ولإرجاعه مستقرا نطبق الفرق من الدرجة الأولى كذلك. وفي هذه النماذج فإن صدمة في وقت معين تؤثر في مسار

[4] مولود حشمان، السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ القصير المدى، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثالثة، 2010، ص: 145.
[5] Régis Bourbonnais, Opcit, p : 231.

الاتجاه المستقبلي للسلسة الزمنية وتسمى هذه الخاصية بخاصية إصرار الصدمات وتعني أن المسار لا يعود لحالته الأولى بسبب الصدمة، كما أن أغلبية سلاسل Macroéconomiques هي من النوع DS.

❶ .**اختبار** Dickey–Fuller **المبسط**:

يرمز له بالرمز DF قدم هذا الاختبار لأول مرة من قبل Fuller سنة 1976 و قد تم مواصلة البحث من قبل Dickey و Fuller عام 1979، ويسمح هذا الاختبار بمعرفة أن السلسلة الزمنية مستقرة أم لا وكذلك بتحديد نوع السلسلة الزمنية غير المستقرة TS أو DS، ويرتكز هذا الاختبار على الفرضيتين التاليتين لاختبار النماذج الثلاث:

$$\begin{cases} H_0: \phi_1 = 1 & \text{الفرضية العدمية} \\ H_1: |\phi_1| < 1 & \text{الفرضية البديلة} \end{cases}$$

إذا تحققت الفرضية العدمية يعني أن السلسلة تحتوي على الجذر الأحادي وبالتالي هي غير مستقرة، أما إذا تحققت الفرضية البديلة فيعني ذلك عدم وجود الجذر الأحادي وبالتالي تكون السلسلة الزمنية مستقرة، ونقوم بتطبيقي الفرضيتين على النماذج الثلاثة التالية[6]:

$$[1]\ y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$[2]\ y_t = \phi_1 y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$
$$[3]\ y_t = \phi_1 y_{t-1} + bt + c + \varepsilon_t$$

بحيث أن: [1] نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الأولى.

[2] نموذج انحدار ذاتي مع ثابت.

[3] نموذج انحدار ذاتي مع اتجاه عام وثابت.

☜ في النموذج الثالث إذا قبلنا بالفرضية البديلة H_1 وإذا كان المعامل b يختلف جوهريا عن الصفر، فنقول بأن السلسلة الزمنية غير مستقرة من النوع TS ونستطيع جعله مستقرا بحساب البواقي بالنسبة للاتجاه العام المقدر باستعمال طريقة المربعات الصغرى. أما إذا قبلنا بالفرضية العدمية H_0 وكان $b\neq0$ فتكون السيرورة تكون من النوع DS.

☜أما في النموذج الثاني إذا قبلنا بالفرضية العدمية وكان B يختلف جوهريا عن الصفر فإن السلسلة الزمنية تكون غير مستقرة ومن النوع DS . أما إذا قبلنا بالفرضية البديلة فإن السلسلة الزمنية تكون مستقرة.

☜ أما بالنسبة للنموذج الأول فإذا قبلنا بالفرضية البديلة فتكون السلسلة الزمنية مستقرة، أما إذا رفضنا الفرضية البديلة فتكون السلسلة غير مستقرة ومن النوع DS.

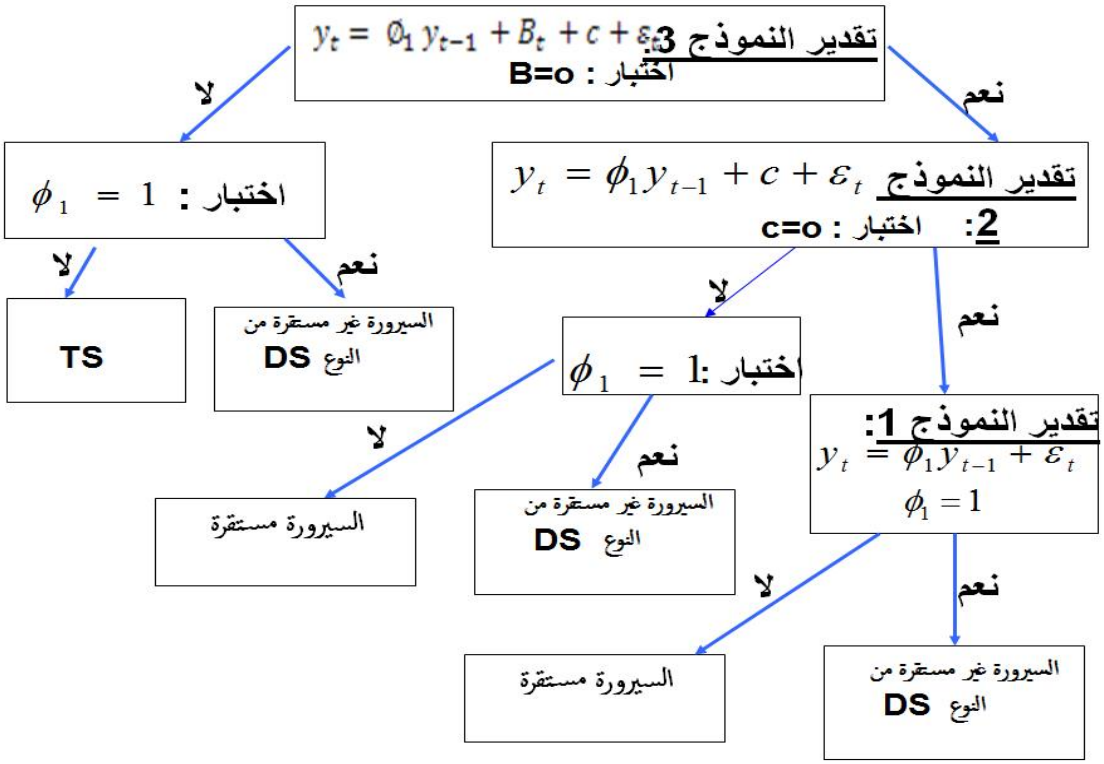
[6] Régis Bourbonnais, Opcit, p : 233.

إذا كانت $\phi 1 \geq t_{tab}$ نقبل بالفرضية العدمية وهذا يعني وجود جذر وحدي وبالتالي تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة، وتأخذ قيم t_{tab} من جدول أعده كل من Dickey&Fuller .

إن المبادئ العامة للاختبار تتمثل فيما يلي:

- تقدير المعلمة ϕ_1 باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية للنماذج الثلاثة.
- تقدير المعالم والانحراف المعياري للنموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية وهو ما يشكل احصاءة $t_{\hat{\phi}_1}$ المماثلة لإحصاء *Student* ثم مقارنتها بالقيمة الجدولية .

الشكل رقم 03:استراتيجية اختبار جذر الوحدة DF.



❷**اختبار** Dickey-Fuller ***المطور*** *(Augmenté)*:

ويرمز له ب ADF، حاء هذا الاختبار عام 1981 ليأخذ بعين الاعتبار فرضية الخطأ الأبيض أي عدم وجود ارتباط في الأخطاء وهذا من بين النقائص التي ظهرت في اختبار DF، ويقوم اختبارADF على أساس فرضيتين هما:

$$\begin{cases} H_0: \phi_1 = 1 & \text{الفرضية العدمية} \\ H_1: |\phi_1| < 1 & \text{الفرضية البديلة} \end{cases}$$

وتقدير النماذج الثلاثة التالية بواسطة طريقة المربعات الصغرى MCO.

$$[4]\ \Delta y_t = \rho y_{t-1} - \sum_{j=2}^{\rho} \phi_j \Delta y_{t-j+1} + \varepsilon_t$$

$$[5]\ \Delta y_t = \rho y_{t-1} - \sum_{j=2}^{\rho} \phi_j \Delta y_{t-j+1} + c + \varepsilon_t$$

$$[6]\ \Delta y_t = \rho y_{t-1} - \sum_{j=2}^{\rho} \phi_j \Delta y_{t-j+1} + c + bt + \varepsilon_t$$

يشير ρ إلى رقم التأخر الذي يتم تحديده عن طريق تدنية المعيارين Akaike و Shiwarz ، والمبادئ العامة لهذا الاختبار مماثلة لاختبار DF.

إن هذا الاختبار يتم بنفس طريقة الاختبار السابق مع وجود اختلاف في الجداول الإحصائية المستعملة ويمكن تحديد قيمة p حسب معيار *Akaike* ويقدر النموذج بـ $p-1$ تأخر ثم $p-2$ تأخر حتى الوصول إلى المعامل المعنوي p

❸ اختبار Phillips perron:

يرمز له بالرمز PP، من النقائص التي ظهرت في اختبار ADF هي مشكلة عدم تبات التباين للحد العشوائي وهذا ما أدى إلى ظهور اختبار PP سنة 1988، والذي يعالج هذه المشكلة وتتمثل خطوات هذا الاختبار فيما يلي:

- تقدير بواسطة طريقة المربعات الصغرى النماذج الثلاثة ل DF وذلك من أجل تقدير الباقي e_t .
- تقدير التباين في المدى القصير $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n} e_t^2$
- تقدير التباين في المدى الطويل

$$S_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2 + 2\sum_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{i}{l+1}\right)\frac{1}{n}\sum_{t=i+1}^{n} e_t e_{t-1}$$

ومن أجل تقدير هذا التباين في المدى الطويل من المهم تحديد رقم التأخر L ويساوي بالتقريب $L = 4\left(\frac{n}{100}\right)^{2/9}$

بحيث أن n تمثل عدد المشاهدات

- حساب الإحصائية $PP: t^*_{\hat{\phi}_1} = \sqrt{K}\frac{(\hat{\phi}_1 - 1)}{\hat{\sigma}_{\phi_1}} + \frac{n(K-1)\hat{\sigma}_{\phi_1}}{\sqrt{K}}$ حيث $K = \frac{\hat{\sigma}^2}{S_t^2}$ وتقارن هذه الإحصائية مع القيمة الجدولية من جدول MacKinnon المعروف ب Response Surface Analysis.

❹ اختبار KPSS:

قدم هذا الاختبار[7] KiwatKowski و Phillips و Shmidt و Shin عام 1992 ، يأخذ هذا الاختبار بعين الاعتبار الحالة التي يكون فيها تباين البواقي غير ثابت عبر الزمن وكذلك في حالة تواجد أكثر من جذر وحدي، ويرتكز على استعمال مضاعف Lagrange بعدما يتم تقدير النموذج [1] و [2]، ونقوم بحساب المجموع الجزئي للبواقي باستعمال الصيغة $S_t = \sum_{i=1}^{t} e_i$ ثم نقوم بتقدير التباين في المدى الطويل بنفس الصيغة المعطاة في اختبار PP كما يلي:

$$S_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2 + 2\sum_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{i}{l+1}\right)\frac{1}{n}\sum_{t=i+1}^{n} e_t e_{t-1}$$

[7] Régis Bourbonnais, Opcit, p : 235.

وتكون إحصائية معامل Lagrange كما يلي:

$$LM = \frac{1}{S_t^2} \frac{\sum_{t=1}^{n} S_t^2}{n^2}$$

ويكون الاختبار كالآتي: إذا كانت إحصائية LM أكبر من القيمة الجدولية فإننا نرفض الفرضية العديمة H_0 أي أن السلسلة الزمنية غير مستقرة.

تعتبر النمذجة الإحصائية أداة مهمة تسهم في فهم الأنظمة المعقدة والتنبؤ بمستقبلها، وذلك من خلال إنشاء نماذج تمثل البيانات بدقة كبيرة .تتيح لنا هذه النماذج الكشف عن الأنماط والعلاقات الخفية التي قد لا تكون واضحة بدون هذه التقنيات .تقدم النمذجة الإحصائية فوائد كثيرة، فهي تساهم في اتخاذ قرارات صحيحة بناءً على تحليل البيانات، وتُساعد المؤسسات في تطوير استراتيجيات فعّالة وتوزيع الموارد بشكل أكثر ذكاء .تشمل تطبيقات النمذجة الإحصائية مجالات متعددة، مثل التمويل والصحة والتسويق. باستخدام التقنيات المناسبة، يمكن دعم أصحاب القرار في اتخاذ قرارات أفضل وأكثر إستراتيجية.

هذا ما استطعنا عليه في الوقت الراهن ونسأل الله العظيم التوفيق والسداد في إنجاز هذا المطبوعة البيداغوجية، فإن وفقنا فذلك ما كنا نود ونبتغي وإن جانبنا الصواب فيما سطرناه فلا حيلة لنا فيما كان: " **وما تشاءون إلا أن يشاء الله** ".. **والحمد لله رب العالمين**.

المراجع العربية:

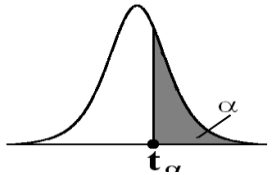
- أموري هادي كاظم الحسناوي، **طرق القياس الاقتصادي**، عمان، دار وائل للنشر، 2002 .
- جلاطو جيلالي، **الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 1999.
- شيخي محمد، **طرق الاقتصاد القياسي**، محارات وتطبيقات، الجزائر، دار الحامد، ط 1، 2011 .
- صالح تومي، **مدخل لنظرية القياس الاقتصادي الجزء الأول**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1996.
- طارق محمد الرشيد، المرشد في الاقتصاد القياسي التطبيقي، الخرطوم، جنتاون، ط 1، 2005.
- عبد القادر محمد عبد القادر عطية، **الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق**، ط 2 ،الإسكندرية: الدار الجامعية، 2000 .
- عبد القادر محمد عبد القادر، **طرق قياس العلاقات الاقتصادية مع تطبيقات على الحاسوب الإلكتروني**، الإسكندرية: دار الجامعات المصرية، 1990 .
- عبد المحمود محمد عبد الرحمان، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، عمادة شؤون المكتبات، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1995.
- عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1981 .
- مجيد حسين، عفاف سعيد، **الاقتصاد القياسي النظرية والتطبيق**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، ط1، 1998 .
- المرسى السيد الحجازي، عبد القادر محمد عطية، **مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات**، الرياض، النشر العلمي والمطابع، 2001 .
- مولود حشمان، **نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2002.
- وليد إسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد إ براهيم، **أساسيات الاقتصاد التحليلي**، دار الأهلية للنشر والتوزيع، الأردن، 2006.

المراجع الأجنبية:

- A. Koutsyannis, **The Theory Of Economitrics**, Second Edition 1977, The Macmillan Press Ltd, London.
- BEN M'BAREK ALaya, **Séries d'exercices Corrigés d'économétrie**, Imprimere Officielle de la République Tunisienne, 2002
- Bernard PAULRE, **La Causalité en économie, signification et portée de la modélisation structurelle**, Lyon : Presse universitaire, 1985.
- Bourbonnais R, **Econométrie**, 9ème Edition, Dunod, Paris, 2015.
- Engle, Robert F. and C.W.J Ganger, **Co -integration and Error Correction: Representation Estimation and Testing**, Econometrica , 1987.
- JOHNSTON. J, DINARDO. J, **Méthodes économétrique**, Economica, Paris, 1999.
- Nelson C. and Pollser, **Trends and Random Walkes in Macroeconomic Time Series: Some Evidens and Implication**, Journal of money economics, 1989, vol. 10.
- P.A. Samualson, T.C. Copmans, **Report Of Evaluative Commitee For Econometrica, Econometric**, Vol. 02, N° 02, 1954.
- PHILIPPE Casin, **Econométrie Méthode et applications avec Eviews**, Edition TECHNIP,Paris, 2009.
- Stock, J.H. and M.W. Watson, **Interpreting the evident Money Income Causality**, Journal of econometrics,1989, vol. 40.
- Wiliam GREENES, **Econométrie**, Pearson, France, 2005.

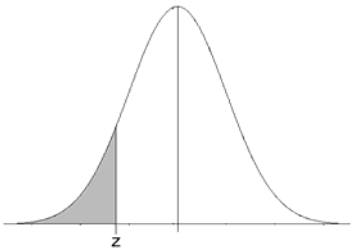
Percentage Points of the *t* Distribution; $t_{\nu,\alpha}$

$P(T > t_{\nu,\alpha}) = \alpha$



	α													
ν	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.015**	**0.01**	**0.0075**	**0.005**	**0.0025**	**0.0005**
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

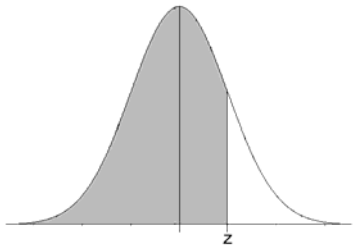
Standard Normal Cumulative Probability Table



Cumulative probabilities for NEGATIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Standard Normal Cumulative Probability Table

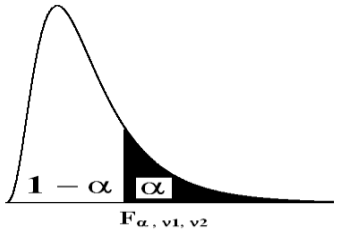


Cumulative probabilities for POSITIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Percentage Points of the *F* Distribution; $F_{0.01, \nu1, \nu2}$

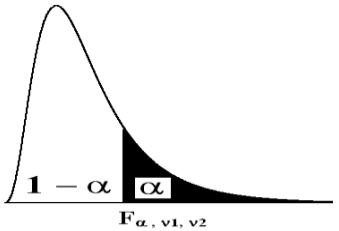
$$P(F > F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}) = \alpha$$



α = 0.01		Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)	**1**	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.7	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5	6055.9	6106.3	6157.3	6208.7	6239.8	6260.7	6286.8	6313.0	6339.4	6365.9
	2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
	3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
	4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
	5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
	6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
	7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
	8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
	9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
	10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
	11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
	12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
	13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
	14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
	15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
	16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
	17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
	18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
	19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
	20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
	21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
	22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
	23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
	24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
	25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
	26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
	27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
	28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
	29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
	30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
	40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
	60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
	120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.93	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
	∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.77	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Percentage Points of the *F* Distribution; $F_{0.025, \nu 1, \nu 2}$

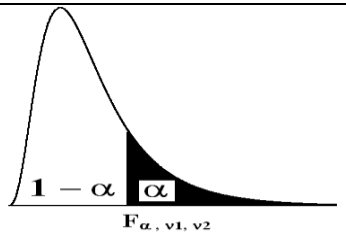
$$P(F > F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}) = \alpha$$



α = 0.025		Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)	**1**	647.8	799.5	864.2	899.6	921.9	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	998.1	1001.4	1005.6	1009.8	1014.0	1018.3
	2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
	4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
	5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.11	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
	7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
	8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
	9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
	10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
	11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
	12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
	13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
	14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
	15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
	16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
	17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
	18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
	19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
	20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
	21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
	22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
	23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.29	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
	24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
	25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
	26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.21	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
	27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.18	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
	28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.16	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
	29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.14	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
	30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
	40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
	60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.87	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
	120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.75	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
	∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.63	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Percentage Points of the *F* Distribution; $F_{0.05, \nu1, \nu2}$

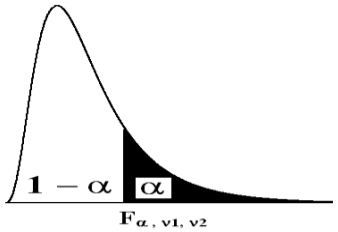
$$P(F > F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}) = \alpha$$



α = 0.05		Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)	**1**	161.5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.6	241.9	243.9	246.0	248.0	249.3	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
	26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
	27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
	28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
	29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
	40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
	∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Percentage Points of the *F* Distribution; $F_{0.10, \nu1, \nu2}$

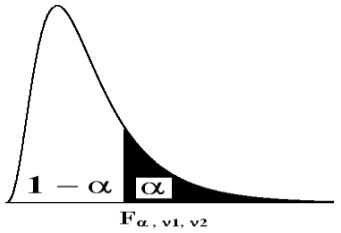
$$P(F > F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}) = \alpha$$



α = 0.10		Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)	**1**	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
	2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
	5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
	6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
	7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
	8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
	9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
	10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
	11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
	12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
	13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
	14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
	15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
	16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
	17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
	18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
	19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
	20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
	21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
	22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
	23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
	24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
	25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
	26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
	27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
	28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
	29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
	30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
	40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
	60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
	120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.44	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
	∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Percentage Points of the *F* Distribution; $F_{0.25, \nu1, \nu2}$

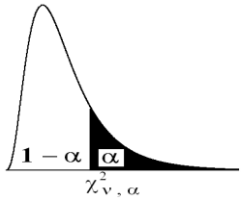
$$P(F > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}) = \alpha$$



α = 0.25		Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)	**1**	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
	2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.44	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
	3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
	4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
	6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
	7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
	8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
	9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
	10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48
	11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45
	12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42
	13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
	14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38
	15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
	16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
	17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
	18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32
	19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.30
	20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29
	21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28
	22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
	23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27
	24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26
	25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
	26	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.25
	27	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.30	1.30	1.28	1.27	1.26	1.24
	28	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24
	29	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.23
	30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.23
	40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19
	60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.23	1.22	1.21	1.19	1.17	1.15
	120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.20	1.19	1.18	1.16	1.13	1.10
	∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.17	1.16	1.14	1.12	1.08	1.00

Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{\nu,\alpha}$

$P(\chi^2 > \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$



	α														
ν	**0.001**	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.250**	**0.500**	**0.750**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**	**0.999**
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92


تم بحمد الله