الجمهـــوريـــــة الجزائـــريـــــة الديمقـــراطيـــة الشـعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التـــعلـــيـــــم العـــــالـــــي والبـــحـــــث العـلمـــــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن احمد
Université Oran 2 Mohamed Ben Ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle

Polycopié de cours

ASSERVISSEMENT ET REGULATION

Auteur : Dr BELKACEM Belkacem

2ème année Licence

2019/2020

Avant-propos

Ce document de cours est destiné à être un support pédagogique aux étudiants de la licence en maintenance en électromécanique de l'institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle IMSI. Le cours d'Asservissement-Régulation, vise à familiariser l'étudiant avec les propriétés et les structures de commande des systèmes asservis linéaires continus et invariants (SLCI).

L'objectif visé par l'asservissement ou la régulation d'un procédé, est de garantir son fonctionnement parfait selon des critères prédéfinis par un cahier des charges. Ce dernier définit des critères de performances qualitatifs à imposer qui sont traduits le plus souvent par des critères quantitatifs, on citera dans ce polycope ceux de stabilité, de précision, et de rapidité.

Les connaissances préalables nécessaires pour le suivi de ce cours sont : les concepts de base en physique, et en mathématiques, spécialement le calcul différentiel et intégral de base. Les connaissances qui dépassent le niveau de l'étudiant seront exposées, notamment la transformée de Laplace.

Au terme de ce cours, l'étudiant devrait être capable :

- de connaître les définitions et les concepts liés aux SLCI ;
- de déterminer les performances statiques et dynamiques des SLCI ;
- de connaître les techniques classiques de représentation des SLCI ;
- d'analyser des systèmes de base dans le domaine temporel et fréquentiel ;
- d'étudier la stabilité d'un SLCI.

Enfin toute critique objective de la part de mes collègues enseignants sera la bienvenue.

Table des matières

CHAPITRE 1 : TERMINOLOGIE DES SYSTEMES DE COMMANDE.....

1.1 INTRODUCTION A L'AUTOMATIQUE 2

1.1.1 Bref historique 2

1.1.2 Définition de l'automatique 2

1.1.3 Domaines d'application de l'automatique 3

1.2 NOTION DE SYSTEME 3

1.2.1 Définition 3

1.2.2 Classification des systèmes 4

1.2.3 Système linéaire : 4

CHAPITRE 2 : NOTIONS D'ASSERVISSEMENT.....

2.1 GENERALITES SUR LES SYSTEMES ASSERVIS..... 7

2.1.1 Définition 7

2.1.2 Propriétés des systèmes linéaires 7

2.1.3 Classification des systèmes asservis..... 8

2.2 MODELISATION DES SYSTEMES ASSERVIS..... 8

2.2.1 Schéma physique..... 9

2.2.2 Schéma fonctionnel..... 9

2.2.3 Modèle mathématique..... 10

CHAPITRE 3 : FORMALISME DE LAPLACE .....

3.1 TRANSFORMATION DE LAPLACE 12

3.1.1 Généralités 12

3.1.2 Définition 12

3.2 PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE 13

3.2.1 Unicité de la transformée de Laplace..... 14

3.2.2 Linéarité de la transformée de Laplace 14

3.2.3 Transformée de Laplace de la dérivée 14

3.2.4 Transformée de Laplace de l'intégrale..... 14

3.2.5 Théorème du retard 15

3.2.6 Théorème de changement d'échelle..... 15

3.2.7 Théorèmes des limites 15

3.2.8 Théorème de plancherel 15

CHAPITRE 4 : NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT .....

4.1 DETERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT..... 18

4.1.1 Définition 18

4.1.2 Formes canoniques de la fonction de transfert 19
4.1.3 Schémas fonctionnels (schémas blocs) 19
4.2 ALLURES DE LA FONCTION DE TRANSFERT 19
4.2.1 Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) 19
4.2.2 Inconvénients des systèmes en boucle ouverte 20
4.2.3 Cas où la commande en boucle ouverte est possible 20
4.2.4 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) 21
4.3 ORGANISATION FONCTIONNELLE D'UN SYSTEME ASSERVI EN BOUCLE FERMEE 22
4.3.1 Relations fondamentales 23
4.3.2 Fonction de transfert d'un système multi boucles 24
4.3.3 Règles de transformation et algèbre des schémas blocs 24
4.4 MODELISATION DES SYSTEMES ASSERVIS 26
4.4.1 Modélisation de systèmes électriques 26
4.4.2 Modélisation de systèmes mécaniques 27
4.4.3 Modélisation de systèmes hydrauliques 28
4.4.4 Modélisation de systèmes thermiques 29
CHAPITRE 5 : PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS .....
5.1 GENERALITES 31
5.2 ENTREES CANONIQUES 31
5.2.1 Impulsion unitaire 31
5.2.2 Echelon unité ou existence u(t) 32
5.2.3 Echelon de vitesse (rampe) 32
5.2.4 Entrée sinusoïdale ou harmonique 33
5.3 PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS 33
5.3.1 Stabilité 34
5.3.2 Précision 34
5.3.3 Rapidité 35
5.3.4 Amortissement 36
CHAPITRE 6 : REPONSE TEMPORELLE DES SYSTEMES .....
6.1 REPONSE TEMPORELLE DES SYSTEMES 39
6.1.1 Comportement temporel des systèmes proportionnels (Gains purs K) 39
6.1.2 Comportement temporel des systèmes dérivateurs 40
6.1.3 Comportement temporel des systèmes Intégrateurs 40
6.2 ETUDE D'UN SYSTEME DE PREMIER ORDRE 41
6.2.1 Définition 41
6.2.2 Exemples : 42

6.2.3 Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre 42
6.2.4 Réponse à un échelon d'un système de premier ordre 42
6.2.5 Réponse à une rampe d'un système de premier ordre 44
6.3 ETUDE D'UN SYSTEME DE DEUXIEME ORDRE 45
6.3.1 Définition 45
6.3.2 Réponse impulsionnelle d'un système de deuxième ordre 46
6.3.3 Réponse indicielle d'un système de deuxième ordre 48
6.3.4 Réponse d'un système du second ordre à une rampe 52
CHAPITRE 7 : DIAGRAMME DE BODE ET DE NYQUIST DES SYSTEMES .....
7.1 ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYSTEMES 56
7.1.1 Modélisation fréquentielle des systèmes linéaires continus 56
7.1.2 Réponse harmonique des systèmes linéaires 56
7.2 DIAGRAMME DE BODE 57
7.2.1 Approche méthodique du tracé des diagrammes de Bode 58
7.2.2 Courbes de Bode et diagrammes asymptotiques de systèmes élémentaires 58
7.2.3 Réponse harmonique du système du 1er ordre 59
7.2.4 Réponse harmonique du système du 2ème ordre 60
7.2.5 Méthode de construction du diagramme de Bode pour les systèmes d'ordre quelconque 61
7.3 DIAGRAMME DE NYQUIST 63
7.3.1 Définition 63
7.3.2 Représentation de Nyquist d'un système de 1er ordre 63
7.3.3 Représentation de Nyquist d'un système de 2ème ordre 64
CHAPITRE 8 : ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS .....
8.1 NOTION DE STABILITE 67
8.1.1 Définition 67
8.1.2 Conditions de stabilité d'un système asservi 67
8.1.3 Enoncé du critère des pôles : 67
8.2 CRITERE ALGEBRIQUE DE ROUTH-HURWITZ 69
8.2.1 Enoncé du critère algébrique de Routh Hurwitz 69
8.2.2 Construction du tableau de Routh 69
8.3 CRITERE GRAPHIQUE OU DE REVERS DANS LE PLAN DE NYQUIST 72
8.3.1 Théorème de Cauchy 72
8.3.2 Cas d'une fonction rationnelle Fp 72
8.3.3 Contour de Nyquist 73
8.3.4 Application à l'étude de la stabilité d'un système bouclé 74

8.4 CRITERE DU REVERS DANS LE PLAN DE NYQUIST 75
8.5 CRITERE DU REVERS DANS LE PLAN DE BODE 76
8.6 NOTIONS DE MARGES DE GAIN ET DE PHASE 76
8.6.1 Marge de phase 77
8.6.2 Marge de gain 77
Références bibliographiques.....79
Annexe (Table des transformées de LAPLACE).....80

CHAPITRE 1 : TERMINOLOGIE DES SYSTEMES DE COMMANDE

1.1 INTRODUCTION A L'AUTOMATIQUE

1.1.1 Bref historique

L'automatique existe depuis l'antiquité, et pour compenser son manque de capacité physique, l'homme s'est rapidement attaché à contrôler les sources d'énergie disponibles dans son environnement, comme le vent, l'eau…etc.

L'automatique s'est développée, au début du 20e siècle avec les travaux fondateurs d'ingénieurs et mathématiciens tel qu'Harold Black, Nathaniel Nichols, Hendrik Bode ou encore Harry Nyquist. La régulation et l'asservissement des systèmes s'est beaucoup développée, aussi bien d'un point de vue théorique que du point de vue applications.

L'électronique moderne et l'informatique, ont permis de concevoir et déployer à moindre cout l'automatisation de systèmes complexes, nécessitant d'être asservis. L'automatique intervient aujourd'hui dans tous les domaines de notre quotidien, on peut trouver des systèmes automatisés dans des jouets pour enfants comme dans des avions de chasse.

1.1.2 Définition de l'automatique

Un système automatisé est une combinaison de théories, de techniques, et d'outils permettant de rendre les systèmes autonomes, et indépendants de l'intervention humaine, ceci dans le but d'accroître la précision, et de remplacer les commandes répétitives, pénibles, complexes ou impossibles à réaliser par l'homme.

L'automatique est capable de traiter plusieurs volets ;

- **Modélisation** : Elle est effectuée à partir des lois de la physique ou d'observations empiriques, l'automaticien qui connait ces lois, prédit le fonctionnement du système, et procède à sa mise en équation.
- **Identification** : Parfois, les connaissances à priori sont insuffisantes, il faut donc étudier la réponse du système à des sollicitations (ou par des essais expérimentaux) pour l'identifier à travers un modèle, où les valeurs de ses paramètres seront connues.
- **Analyse**. Après avoir correctement modélisé et/ou identifié le système, l'étape de l'analyse consiste à l'étude complète de son fonctionnement. Il en ressort ses propriétés essentielles.
- **Asservissement**. L'objectif majeur d'un système asservi est de remplacer l'homme dans une tâche de régulation d'une grandeur, le régulateur ajuste alors automatiquement la commande afin de maintenir la grandeur de sortie à une valeur souhaitée.

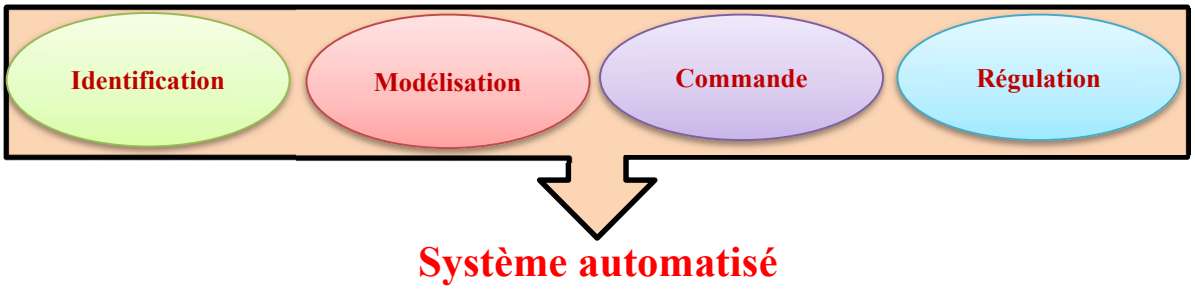


Figure 1.1. Objet d'un système automatique

1.1.3 Domaines d'application de l'automatique

Les systèmes automatiques sont classés en fonction de la nature de leurs informations de commande et de mesure. On distingue deux domaines d'intervention de l'automatique :

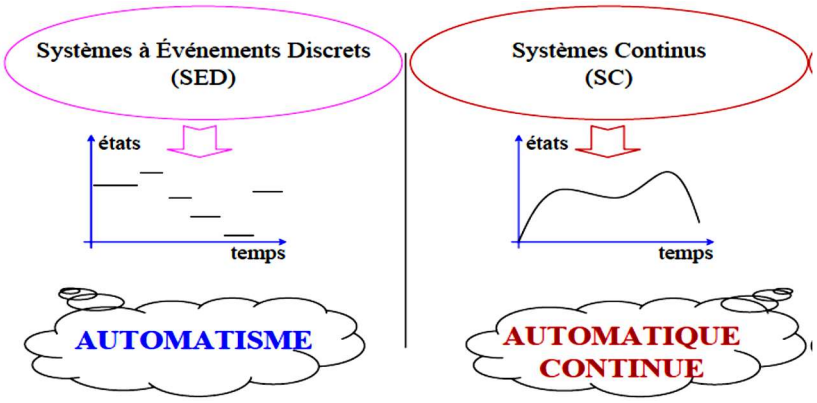


Figure 1.2. Domaines d'intervention de l'automatique

1.1.3.1 Systèmes à Événements Discrets

Dans les systèmes à événements discrets, on parle d'**automatisme** (séquence d'actions dans le temps). Une information discrète est constituée d'un nombre fini de valeurs. Elle peut être **une information logique** du type « vrai/faux, 0/1 ou Tout Ou Rien (TOR) », ou **une information numérique** sous forme d'un mot binaire, constitué de plusieurs bits (variables binaires 0/1).
Exemples d'applications : Les distributeurs automatiques, les ascenseurs, le montage automatique dans le milieu industriel, les feux de croisement...etc.

1.1.3.2 Systèmes Continus

Dans les systèmes continus, les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné.
Exemples d'application : L'angle d'une fusée, la position du bras d'un robot, le pilotage automatique d'un avion…etc.

1.2 NOTION DE SYSTEME

1.2.1 Définition

Un système peut être défini comme un ensemble d'éléments exerçant collectivement une fonction déterminée. On schématise un système par un bloc possédant une ou plusieurs **entrées** et une ou plusieurs **sorties**. Les autres grandeurs ayant une action non désirée sont appelées des **perturbations** (ou entrées parasites).

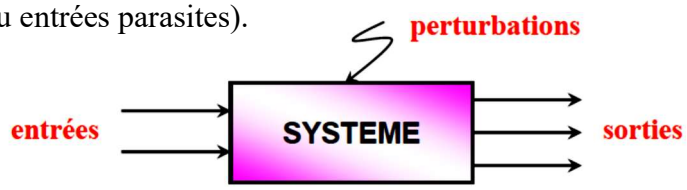


Figure 1.3. Schéma général d'un système automatique

1.2.2 Classification des systèmes

- **Système monovariable :** Un système monovariable (ou scalaire) possède une seule entrée e(t) et une seule sortie s(t).
- **Système multivariable :** Un système possédant plusieurs grandeurs d'entrée et/ou de sortie est dit multivariable.

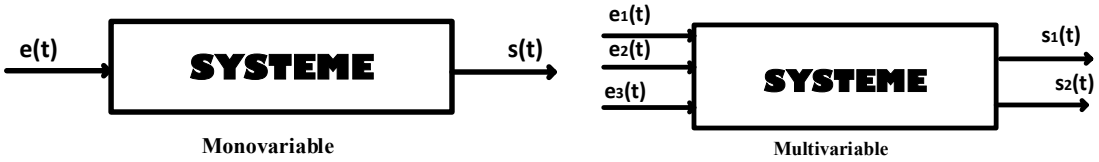
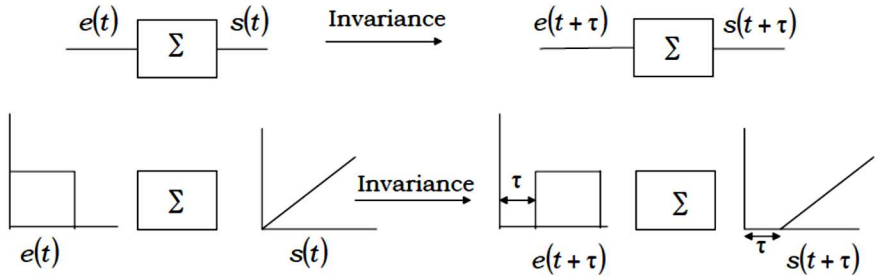


Figure 1.4. Système automatique

- **Système à modèle déterministe :** Si le comportement d'un système est parfaitement prévisible en avance, on parle de modèle déterministe. Si on ne peut pas prédire ceci, le système est à modèle stochastique.
- **Système invariant :** Un système est dit invariant (stationnaire) si sa réponse à une entrée x(t) différé d'un temps τ est la même que la réponse y(t) mais qui soit aussi différée du temps τ.



$$\begin{cases} \text{Entrée} : \boldsymbol{e(t)} \longrightarrow \text{Sortie} : \boldsymbol{s(t)} \\ \text{Entrée} : \boldsymbol{e(t+\tau)} \longrightarrow \text{Sortie} : \boldsymbol{s(t+\tau)} \end{cases}$$

Figure 1.5. Système invariant

- **Système causal :** Un système d'entrée $\boldsymbol{e(t)}$ et de sortie $\boldsymbol{s(t)}$ est dit causal si :

$$\text{à } \boldsymbol{t < 0}\,, \boldsymbol{e(t) = 0} \Rightarrow \boldsymbol{s(t) = 0}$$

La réponse du système ne précède jamais son excitation ; la cause précède toujours l'effet, une réponse impulsionnelle par exemple ne commence pas avant l'impulsion.

1.2.3 Système linéaire :

Un système est dit linéaire lorsque ses grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants.

$$\mathbf{a}_0 e(t) + \mathbf{a}_1 \frac{de(t)}{dt} + \mathbf{a}_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \cdots + \mathbf{a}_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = b_0 s(t) + \mathbf{b}_1 \frac{ds(t)}{dt} + \mathbf{b}_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \cdots + \mathbf{b}_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

Où les coefficients $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{b}_j$ sont constants ; ce sont les paramètres du système, ils représentent diverses constantes de temps et divers coefficients de proportionnalité accessibles à la mesure.

L'ordre du système est déterminé à partir du degré le plus élevé de la dérivée sur $\boldsymbol{s(t)}$. L'équation différentielle décrit le comportement du régime dynamique du système, mais aussi du régime permanent ou statique. Le régime permanent est décrit en annulant les dérivées : la relation entre la sortie $\boldsymbol{s(t)}$ et l'entrée $\boldsymbol{e(t)}$ est linéaire. On analyse le plus souvent les sorties des systèmes en différents régimes :

- **Le régime statique**, lorsque la sortie est constante.
- **Le régime permanent**, lorsque la sortie est constante ou périodique.
- **Le régime transitoire**, lorsque le système est en train de s'adapter à une nouvelle entrée et tend vers le régime permanent.

Exemple :

Essayons de trouver la relation entre les signaux d'entrée et de sortie d'un système électrique constitué d'un circuit électrique RC.

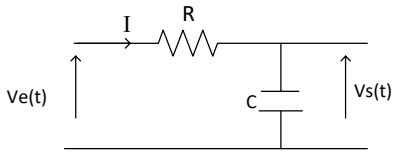


Figure 1.6. Circuit RC

Solution :

Les lois des mailles donnent :

$$\begin{cases} \mathbf{V_e(t) = RI(t) + V_s(t)} \\ \mathbf{V_s(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt \Rightarrow I(t) = C\frac{dV_s(t)}{dt}} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{RC\frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)}$$

CHAPITRE 2 : NOTIONS D'ASSERVISSEMENT

2.1 GENERALITES SUR LES SYSTEMES ASSERVIS

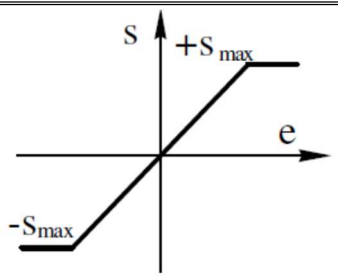
2.1.1 Définition

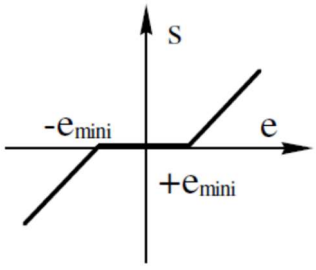
Un système est dit asservi lorsque la grandeur de sortie suit aussi précisément que possible les variations de la grandeur d'entrée (ordre ou consigne) quels que soient les effets de perturbations extérieurs.

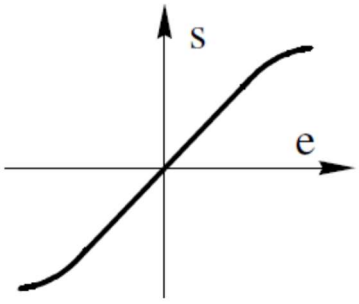
2.1.2 Propriétés des systèmes linéaires

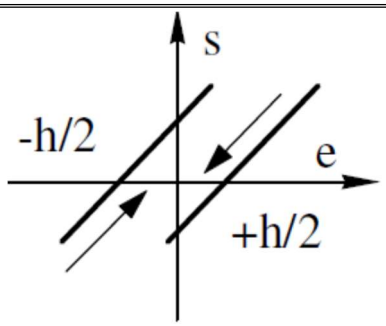
Toute modélisation, faisant le plus souvent intervenir des équations différentielles, aboutit à une représentation des phénomènes par un modèle, c'est-à-dire un ensemble d'équations régissant le fonctionnement du système. A tout modèle est associé un domaine de validité dans lequel ce dernier est jugé fiable et utile. Des non-linéarités sont souvent présentes, comme des seuils, des saturations, des hystérésis et toute fonction non linéaire. On se limite dans ce cours aux systèmes linéaires, les systèmes étudiés ne comportent donc aucune non-linéarité.

2.1.2.1 Exemples de non Linéarité

<table>
<tr>
<td>

Saturation
▪ Subie (saturation d'un transistor, butée mécanique).
▪ Provoquée pour éviter la dégradation d'un composant.</td>
<td>

Seuil
▪ Dû à des pertes de mouvement mécaniques (jeux, fuites).
▪ Provoquée pour éliminer des bruits de fond.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Courbure
Emergence à amplitude élevée de nouveaux phénomènes</td>
<td>

Hystérésis
Dû aux frottements internes ou aux phénomènes électromagnétiques</td>
</tr>
</table>

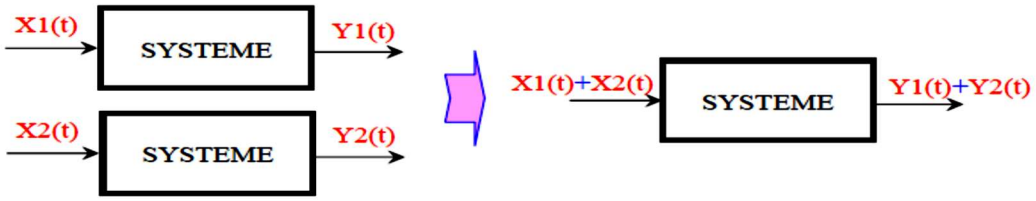
Quand un système est linéaire, il jouit de propriétés importantes comme le « principe de superposition linéaire » qui se traduit par les relations suivantes :

2.1.2.2 Proportionnalité (Homogénéité) :

L'effet est proportionnel à la cause.

$$\begin{cases} \text{Entrée} : \boldsymbol{X(t)} \longrightarrow \text{Sortie} : \boldsymbol{Y(t)} \\ \text{Entrée} : \boldsymbol{\lambda . X(t)} \longrightarrow \text{Sortie} : \boldsymbol{\lambda . Y(t)} \end{cases}$$

2.1.2.3 Additivité (superposition) :



$$\begin{cases} \text{Entrée} : \boldsymbol{X1(t)} \longrightarrow \text{Sortie} : \boldsymbol{Y1(t)} \\ \text{Entrée} : \boldsymbol{X2(t)} \longrightarrow \text{Sortie} : \boldsymbol{Y2(t)} \end{cases} \Rightarrow \text{Entrée} : \boldsymbol{X1(t) + X2(t)} \longrightarrow \text{Sortie} : \boldsymbol{Y1(t) + Y2(t)}$$

2.1.3 Classification des systèmes asservis

On distingue 2 classes de systèmes :

2.1.3.1 Régulation

La consigne d'entrée est fixe, on requiert dans ces types de systèmes que la sortie suive au mieux cette consigne malgré une présence de perturbations (Exemples : climatiseur, régulation de température, régulation de débit …)

2.1.3.2 Asservissement

Dans un système asservi, la sortie doit suivre au mieux la consigne qui varie et suit un profil déterminé. (Exemples : commander la poursuite d'une cible par un missile, asservissement de position…).
Un système asservi est aussi appelé système suiveur.

2.2 MODELISATION DES SYSTEMES ASSERVIS

Un système automatique est généralement représenté par son **Schéma physique** composé de signaux d'entrée et de sortie. On fait appel alors aux connaissances scientifiques (physiques, électromécaniques, chimiques …) pour écrire les équations qui régissent entre les entrées (causes ou variables de commande) et les sorties (effets ou variables d'observation) ; l'ensemble de ces relations conduit au **Modèle mathématique** du système.
L'approche de l'automaticien consiste à isoler et à identifier les entrées et les sorties du système. Son but est de déterminer le signal de commande optimal à appliquer au système qui lui permettra de prévoir l'évolution du système.

2.2.1 Schéma physique

Le schéma physique permet d'analyser le système. Ce type de schéma utilise la normalisation de chaque technologie. Le tableau 1.1 illustre quelques exemples simples :

Systèmes électriques		
Résistance	I R Ve	$V_e(t) = RI(t)$
Inductance	i(t) Ve(t)	$V_e(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
Condensateur	i(t) Ve(t) C	$V_e(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$
Systèmes mécaniques		
Masse	f_M M f_M x	$f_M = M\frac{dx^2(t)}{dt^2}$
Ressort	f_k K x_1 x_2 f_k	$f_K = K(x_1 - x_2)$
Amortisseur	f_B B x_1 x_2 f_B	$f_B = B(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt})$

Tableau 1.1. Quelques exemples simples de schémas physiques

2.2.2 Schéma fonctionnel

On peut représenter graphiquement la structure d'un système asservi, par un diagramme ou schéma fonctionnel ; 05 composants de base sont utilisés :

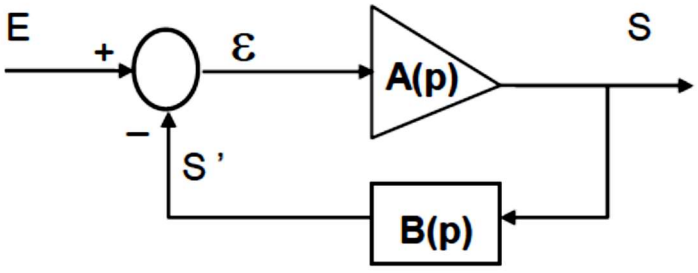


Figure 2.1. Schéma fonctionnel d'un système

- Le **rectangle** qui regroupe un ou plusieurs éléments du système.
- Le **triangle** où on trouve une constante ou un gain pur.

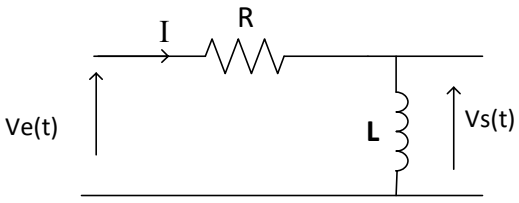
- La **flèche** qui désigne le sens de passage de la grandeur physique (entrée ou sortie).
- Le **comparateur** (différence) ou le somateur.
- Le **branchement** pour le prélèvement d'information (même information dans chaque branche). La figure 2.1 illustre un exemple simple de schéma fonctionnel :

2.2.3 Modèle mathématique

Pour réaliser une commande automatique d'un système, il est nécessaire d'établir les relations existantes entre les entrées et les sorties. L'ensemble de ces relations conduit au modèle mathématique du système.

Exemple : Circuit RL

$$\begin{cases} \mathbf{V}_e(t) = RI(t) + \mathbf{V}_s(t) \\ \mathbf{V}_s(t) = L\dfrac{d\mathbf{I}(t)}{dt} \Rightarrow \mathbf{I}(t) = \dfrac{1}{L}\int \mathbf{V}_s(t)dt \end{cases}$$



On aboutit au modèle mathématique qui lie l'entrée et la sortie de ce système :

$$\frac{d\mathbf{V}_s(t)}{dt} + \frac{R}{L}\mathbf{V}_s(t) = \frac{d\mathbf{V}_e(t)}{dt}$$

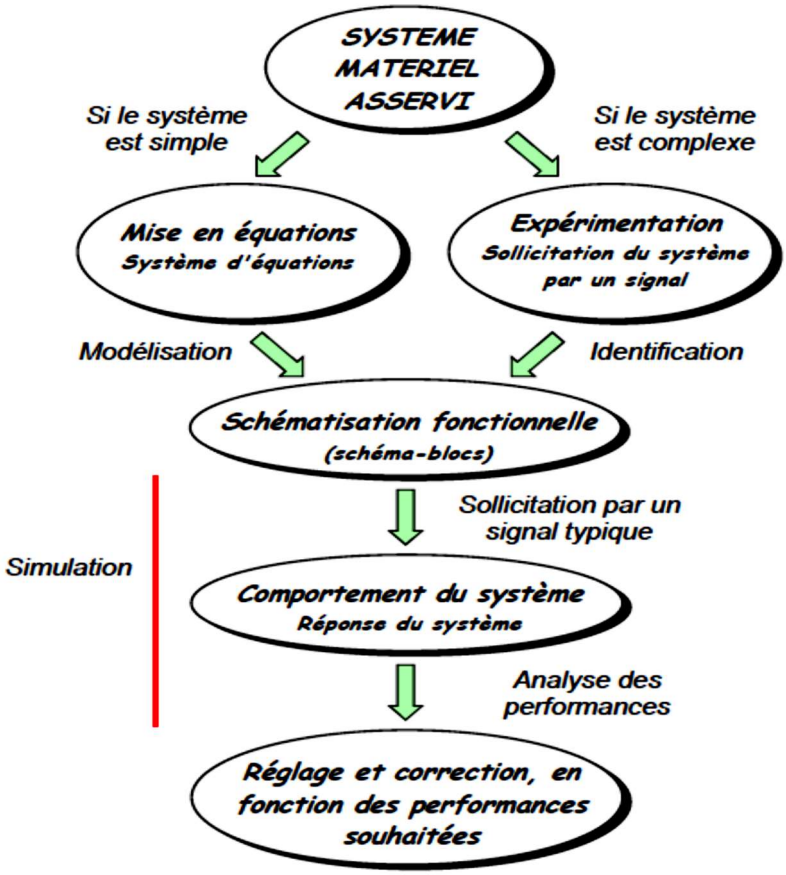


Figure 2.2. Méthodologie d'étude de systèmes asservis

CHAPITRE 3 : FORMALISME DE LAPLACE

3.1 TRANSFORMATION DE LAPLACE

3.1.1 Généralités

Les systèmes asservis sont généralement représentés sous la forme d'un schéma fonctionnel, où la liaison entre les signaux temporels d'entrée de sortie est assurée par une équation différentielle, dont la résolution est plus ou moins compliquée. La fonction mathématique du système est souvent difficile à exprimer.

.

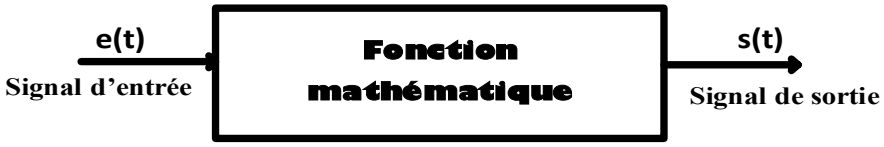


Figure 3.1. Représentation des systèmes asservis

Si un procédé industriel instrumenté comporte plusieurs systèmes élémentaires (par exemple : actionneur, procédé, capteur…) ; ceux-ci peuvent être décrits chacun par une équation différentielle. La mise en série de ces systèmes élémentaires amène à écrire une nouvelle équation différentielle qui va décrire le système complet, un problème se pose ici car on ne peut pas multiplier les équations différentielles entre elles.

Une nouvelle approche mathématique s'avère nécessaire, elle consiste à passer du comportement temporel des systèmes (caractérisé par des fonctions définies dans le temps **t**) à un domaine symbolique où la variable n'est plus le temps t mais une variable complexe symbolique appelé opérateur de Laplace, noté **p** (**s** pour les anglo-saxons). Ce passage est appelé : La transformation de Laplace. La méthode de recherche de la fonction du signal $\boldsymbol{s(t)}$ en fonction de $\boldsymbol{e(t)}$ est alors la suivante (figure 3.2).

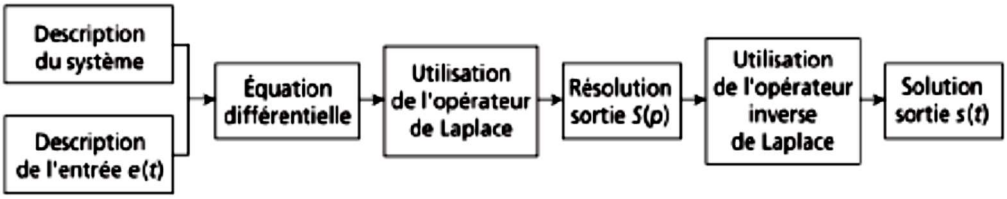


Figure 3.2. Méthode de résolution par la transformée de Laplace.

3.1.2 Définition

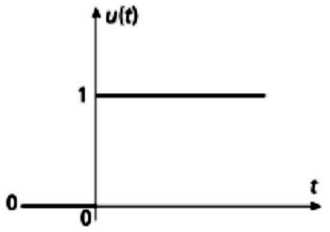
Soit $\boldsymbol{f(t)}$ une fonction de la variable temps $\boldsymbol{t}$, On appellera transformée de Laplace de $\boldsymbol{(t)}$, la fonction $\boldsymbol{F(p)}$ définie par :

$$\boldsymbol{F(p) = L[(f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt}$$

Comme il a été vu plus haut, il faudrait que la fonction $\boldsymbol{f(t)}$ soit causale, cela veut dire que :

$\begin{cases} \boldsymbol{f(t) = f(t) \ \ pour\ t \geq 0} \\ \boldsymbol{f(t) = 0 \ \ pour\ t < 0} \end{cases}$

Si ce n'est pas le cas, on introduit une fonction particulière décrite ci-dessous (figure 3.3) appelée fonction d'Heaviside ou fonction existence ou encore échelon unité $\boldsymbol{u(t)}$.



$$\begin{cases} \boldsymbol{u(t) = 1 \ \ pour\ t \geq 0} \\ \boldsymbol{u(t) = 0 \ \ pour\ t < 0} \end{cases}$$

Figure 3.3. Fonction existence ou échelon unité

Pour rendre une fonction mathématique $\boldsymbol{f(t)}$ qui n'est pas nulle *pour* $t < 0$ causale, on la multiplie par la fonction échelon unité $\boldsymbol{u(t)}$, on aura donc :

$$\boldsymbol{F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).u(t)dt}$$

$f(t)$ sera appelée transformée inverse ou originale de F(p) et sera écrite :

$$\boldsymbol{L(f(t) = L^{-1}[F(p)]}$$

Exemple :

Calculer la transformée de Laplace des fonctions

- $\boldsymbol{f_1(t) = 1.u(t)}$
- $\boldsymbol{f_2(t) = e^{-at}.u(t)}$

Réponse :

- On a : $\begin{cases} f_1(t) = 1.u(t) = 1 \ \ pour\ t \geq 0 \\ f_1(t) = 0 \ \ pour\ t < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F_1(p)} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).u(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.1.dt = \frac{-1}{p}[e^{-pt}]_0^{\infty} = \frac{-1}{p}[0-1] = \boldsymbol{\frac{1}{p}}$$

- On a : $\begin{cases} f_2(t) = e^{-at}.u(t) = 1 \ \ pour\ t \geq 0 \\ f_2(t) = 0 \ \ pour\ t < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F_2(p)} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).u(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.e^{-at}.dt = \frac{-1}{p+a}\left[e^{-(p+a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{p+a}[0-1] = \boldsymbol{\frac{1}{p+a}}$$

La transformée de Laplace est un outil trés indispensable pour l'étude des systèmes linéaires.

3.2 PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

La transformation de Laplace possède de nombreuses propriétés qui sont utiles pour la résolution de problèmes mathématiques.

Les propriétés qu'on va énoncer sont essentielles car elles permettront de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation de Laplace) les transformées de Laplace de

certains signaux.

3.2.1 Unicité de la transformée de Laplace

- A une fonction $\boldsymbol{f(t)}$ donnée, correspond une seule et unique transformée de Laplace $\boldsymbol{F(p)}$,
- A une fonction de la variable de Laplace $\boldsymbol{F(p)}$ donnée, correspond une seule et unique originale (ou transformée inverse) $\boldsymbol{f(t)}$.

3.2.2 Linéarité de la transformée de Laplace

$$\begin{cases} L[f_1(t)] = F_1(p) \Rightarrow L[af_1(t)] = aF_1(p) \\ L[f_2(t)] = F_2(p) \Rightarrow L[bf_2(t)] = bF_2(p) \end{cases} \Rightarrow L[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(p) + bF_2(p)$$

Ces propriétés peuvent se vérifier aisément à l'aide de la formule de transformée de Laplace

3.2.3 Transformée de Laplace de la dérivée

Soit : $L[f(t)] = F(p)$, essayons de chercher la transformée de Laplace de la dérivée $L[f'(t)]$:
$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} \Rightarrow L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t).dt$, on fait une intégration par parties où :

$$\begin{cases} f(t) = u(t) \Rightarrow f'(t) = u'(t)dt \\ v(t) = e^{-pt} \Rightarrow v'(t)dt = -pe^{-p} \end{cases} \quad avec\ (u.v)' = u.v' + v.u'$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t).dt = [e^{-pt}.f(t)]_0^{\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-p}\ .f(t).dt = pF(p) - f(0^+)$$

$$\boxed{\boldsymbol{L[f'(t)] = pF(p) - f(0^+)}}$$

De la même manière, on peut trouver la transformée de Laplace de la dérivée énième

$$\boxed{\boldsymbol{f^n(t) = \frac{df^n(t)}{dt^n} \Longrightarrow L[f^n(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{n-1}(0^+)}}$$

Si les conditions initiales sont nulles : $f(0^+) = f'(0^+) = \cdots f^{n-1}(0^+) = 0$, alors :

$$\boxed{\boldsymbol{L[f^n(t)] = p^n F(p)}}$$

Une dérivation dans le domaine temporel revient à une multiplication par l'opérateur p dans le domaine symbolique de Laplace.

3.2.4 Transformée de Laplace de l'intégrale

Soit : $L[f(t)] = F(p)$,essayons de chercher la transformée de Laplace de l'intégrale $\int_0^t f(t)dt$,
on pose : $\begin{cases} g(t) = \int_0^t f(t)dt \ \Rightarrow\ g'(t) = f(t) \\ L[g(t)] = G(p) \Rightarrow L[g'(t)] = F(p) \end{cases} \Rightarrow L[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t).dt$

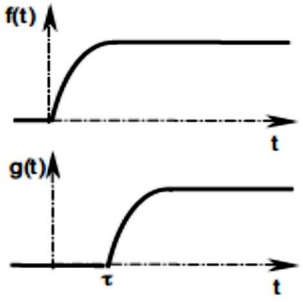
D'après la propriété de la dérivée $\Rightarrow L[g'(t)] = pG(p) - g(0^+) = F(p) \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$,
il vient alors :

$$Si\ G(p) = L\left[\int_0^t f(t)dt\right] \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

Si les conditions initiales sont nulles, La division par $\boldsymbol{p}$ dans le domaine symbolique de Laplace est équivalente à l'intégration dans le domaine temporel.

3.2.5 Théorème du retard

Soit la fonction $g(t) = f(t-\tau)$ qui retarde les valeurs prises par la fonction causale $f(t)$ d'un temps τ,



Puisque $f(t-\tau) = 0$ pour $t < \tau$ (car f est causale), alors :

$L[f(t-\tau)] = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)\, e^{-p}\ dt$, on pose $\alpha = t - \tau$

$$\Rightarrow L[f(\alpha)] = \int_0^{\infty} f(\alpha)\, e^{-(\alpha+\tau)p} d\alpha = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(\alpha)\, e^{-\alpha p} d\alpha$$

$$\Rightarrow L[f(\alpha)] = L[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} L[f(t)]$$

Le résultat final du théorème du retard est :

$$\boldsymbol{L[f(t)] = F(p) \ \Rightarrow L[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} F(p)}$$

3.2.6 Théorème de changement d'échelle

$$\boldsymbol{L[f(t)] = F(p) \ \Rightarrow L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(ap)}$$

3.2.7 Théorèmes des limites

Les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale sont utiles pour connaître la valeur du signal : $\begin{cases} \text{au début du régime transitoire } \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) \\ \text{en régime permanent } \lim\limits_{t\to\infty} f(t) \end{cases}$

Théorème de la valeur initiale	Théorème de la valeur finale
$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$

3.2.8 Théorème de plancherel

Si un système est linéaire, invariant et causal, On pourra alors décrire son fonctionnement à travers sa transformée de Laplace de son équation différentielle.

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \cdots + b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

$$\Rightarrow L\left[\mathrm{a}_0 e(t) + \mathrm{a}_1 \frac{de(t)}{dt} + \mathrm{a}_2 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + \cdots + \mathrm{a}_n \frac{d^n e(t)}{dt^n}\right] = \mathrm{L}\left[b_0 s(t) + \mathrm{b}_1 \frac{ds(t)}{dt} + \mathrm{b}_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \cdots + \mathrm{b}_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{a}_0 E(p) + \mathrm{a}_1 pE(p) + \mathrm{a}_2 p^2 E(p) + \cdots + \mathrm{a}_n p^n E(p) = b_0 S(p) + \mathrm{b}_1 pS(p) + \mathrm{b}_2 p^2 S(p) + \cdots + \mathrm{b}_m p^m S(p)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + \mathrm{b}_1 p + \mathrm{b}_2 p^2 + \cdots + \mathrm{b}_m p^m}{\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 p + \mathrm{a}_2 p^2 + \cdots + \mathrm{a}_n p^n}}$$

CHAPITRE 4 : NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT

4.1 DETERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT

Soit un système linéaire invariant, possédant une entrée e(t) et une sortie s(t) (figure. 4.1) :

Figure 4.1. Système linéaire invariant

Les modèles physiques qui traduisent la relation entre l'entrée $\boldsymbol{e(t)}$ et la sortie $\boldsymbol{s(t)}$ sont généralement décrits mathématiquement par, une équation différentielle :

$$e(t) \rightarrow \boxed{a_n\frac{d^n s(t)}{dt^n}+\cdots+a_1\frac{ds(t)}{dt}+a_0 s(t)=b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+\cdots+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t)} \rightarrow s(t)$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, et si on considère toutes les conditions initiales nulles $\begin{cases} \boldsymbol{e(0)=e'(0)=\cdots=e^m(0)=0} \\ \boldsymbol{s(0)=s'(0)=\cdots=s^n(0)=0} \end{cases}$, on obtient alors :

$$\Rightarrow a_0 S(p)+a_1 pS(p)+\cdots+a_n p^n S(p)=b_0 E(p)+b_1 pE(p)+\cdots+b_m p^m E(p)$$

Avec : $\begin{cases} \boldsymbol{L[e(t)]=E(p),\ L[e'(t)]=pE(p),\ \ldots\ L[e^m(t)]=p^m E(p)} \\ \boldsymbol{L[s(t)]=S(p),\ L[s'(t)]=pS(p),\ \ldots\ L[s^n(t)]=p^n S(p)} \end{cases}$,

En posant : $T(p)=\frac{S(p)}{E(p)}$, on aura :

$$\Rightarrow [a_0+a_1 p+\cdots+a_n p^n]S(p)=[b_0+b_1 p+\cdots+b_m p^m]E(p)$$

D'où : $$\boxed{\boldsymbol{T(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{b_0+b_1 p+\cdots+b_m p^m}{a_0+a_1 p+\cdots+a_n p^n}}}$$

$T(p)$ est appelé fonction de transfert ou transmittance du système. Cette relation est très utile pour calculer des réponses temporelles de systèmes à l'aide de la transformée de Laplace. Il suffit de calculer le transmittance du système, de prendre la transformée de Laplace du signal d'entrée et de faire le produit de ces deux grandeurs. Une transformée inverse donne enfin la réponse temporelle souhaitée.

4.1.1 Définition

On appelle fonction de transfert ou transmittance d'un système linéaire le rapport entre la transformée de Laplace de sa sortie sur celle de l'entrée, ceci est valable quand toutes les conditions initiales sont nulles.

La fonction de transfert caractérise la dynamique du système, elle ne dépend que de ses

caractéristiques physiques.

4.1.2 Formes canoniques de la fonction de transfert

Pour mettre en évidence les paramètres remarquables d'un système asservi, et selon le besoin une fonction de transfert se met sous plusieurs formes, parmi eux les formes suivantes :

- $$\boldsymbol{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1+b_1 p+\cdots+b_m p^m}{1+a_1 p+\cdots+a_n p^n}}$$
  - Le coefficient $\boldsymbol{K}$ est appelé le gain statique du système, il caractérise le régime permanent ; son unité est celle du rapport des unités de la sortie s(t) sur l'entrée e(t) ;
  - Le terme $\boldsymbol{\alpha}$ représente la classe de la fonction de transfert du système.
    - Si $= 0$, le système ne comporte pas d'intégration. Le système est dit auto-réglant, autostable, naturellement stable ou non évolutif.
    - Si $\alpha \neq 0$ alors le système comporte une intégration $(\alpha = 1)$ ou deux intégrations $(\alpha = 2)$ …etc. Le système est dit intégrateur, naturellement instable ou évolutif.
- $$\boldsymbol{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{(p-z_0)(p-z_1)\ldots(p-z_m)}{(p-p_0)(p-p_1)\ldots(p-p_n)}}$$
  - Le coefficient $\boldsymbol{K}$ est toujours appelé le gain statique du système ;
  - Le degré n du polynôme du dénominateur est appelé **ORDRE DU SYSTEME**
  - Les racines $\boldsymbol{(z_0, z_1, \ldots, z_m)}$ du numérateur sont appelées les **ZEROS** du système ;
  - Les racines $\boldsymbol{(p_0, p_1, \ldots, p_m)}$ du dénominateur sont appelées les **POLES** du système.

4.1.3 Schémas fonctionnels (schémas blocs)

L'étude théorique d'un système linéaire est facilitée en remplaçant les équations différentielles par une représentation graphique appelée schéma bloc ou fonctionnel (Figure. 4.2).
Un schéma bloc permet de représenter un système simple où la représentation externe d'un composant de la chaîne fonctionnelle de ce système peut être faite par un bloc représentant sa fonction de transfert :

$$\begin{cases} \boldsymbol{L[e(t)]} = E(p) \\ \boldsymbol{L[s(t)]} = S(p) \end{cases} \rightarrow S(p) = H(p)E(p)$$

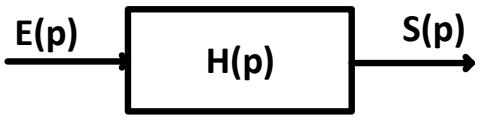


Figure 4.2. Schéma bloc

4.2 ALLURES DE LA FONCTION DE TRANSFERT

4.2.1 Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

Soit un système continu, qui est représenté sur la figure ci-contre (figure. 4.3) :

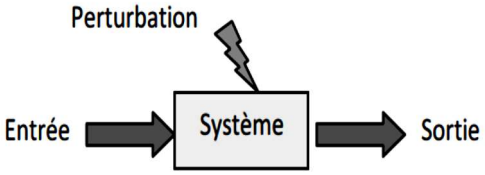


Figure 4.3. Système continu

Pour qu'un système réponde correctement aux besoins de l'utilisateur, il est important que la sortie ne varie pas quels que soient les phénomènes extérieurs qui pourraient la perturber.
Un système non bouclé (dit en **BOUCLE OUVERTE**) est un système qui n'a aucun contrôle sur Le signal de commande imposée en entrée. Le signal de commande (entrée) est indépendant du signal de sortie. Une action extérieure (**Perturbatio**n) peut alors modifier la sortie désirée du système.

Exemple :

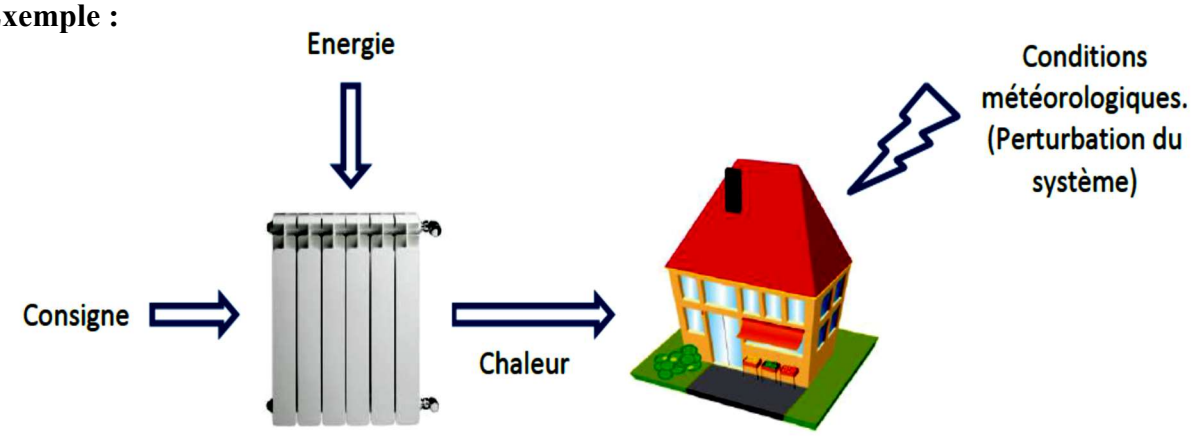


Figure 4.4. Asservissement de température sans retour d'information

Soit l'asservissement de la température θ(t) d'une pièce d'habitation chauffée par des radiateurs de chauffage central (Figure.4.4). Pour agir sur θ(t) on fait varier le débit d'eau dans les radiateurs par l'intermédiaire d'une vanne, la consigne permet de déterminer la quantité de chaleur produite. Cependant, les conditions météorologiques viennent perturber le système ; en effet, si la température extérieure varie, la quantité de chaleur à produire pour maintenir une température constante à l'intérieur de la maison n'est plus la même. Pour un tel système, dit en boucle ouverte, il est donc impossible de déterminer à priori, la valeur à donner à la consigne. Il s'agit d'une commande sans retour d'information de la grandeur de sortie.

4.2.2 Inconvénients des systèmes en boucle ouverte

- **Correction impossible :** l'opérateur n'a aucune information sur la sortie, il ne peut prévoir aucune stratégie d'ajustement pour obtenir la sortie désirée.
- **Sensibilité à la perturbation :** En admettant que la sortie soit conforme à la consigne ; une perturbation peut, à tout moment, affecter la sortie. L'opérateur "aveugle" n'a aucune information sur ce qui se passe.

4.2.3 Cas où la commande en boucle ouverte est possible

La commande en boucle ouverte est tout de même très utilisée dans des cas simples de systèmes stables avec une moindre exigence sur la sortie ; en voici quelques exemples :

- Moteurs électriques : L'entrée ou la commande d'un moteur qui entraîne une charge est une source de tension, l'ensemble "moteur + charge" tourne, pratiquement à vitesse constante ;

- Four domestique : La commande d'un four domestique (non équipé d'un thermostat) se fait par un sélecteur rotatif et la température atteint une valeur stable ;
- Système d'arrosage : Pour un réseau d'arroseurs, l'ouverture simple de la vanne principale permet d'avoir un débit stable (de l'eau par exemple).

4.2.4 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)

Exceptionnellement, un système de commande peut opérer en boucle ouverte à partir du seul signal de consigne. Mais la boucle fermée (contre réaction) est capable de :

- Stabiliser un système instable en BO ;
- Compenser les perturbations externes ;
- Compenser les incertitudes internes au processus lui-même.

Prenons toujours l'exemple l'asservissement de la température θ(t) d'une pièce d'habitation chauffée par des radiateurs de chauffage central (Figure.4.5).

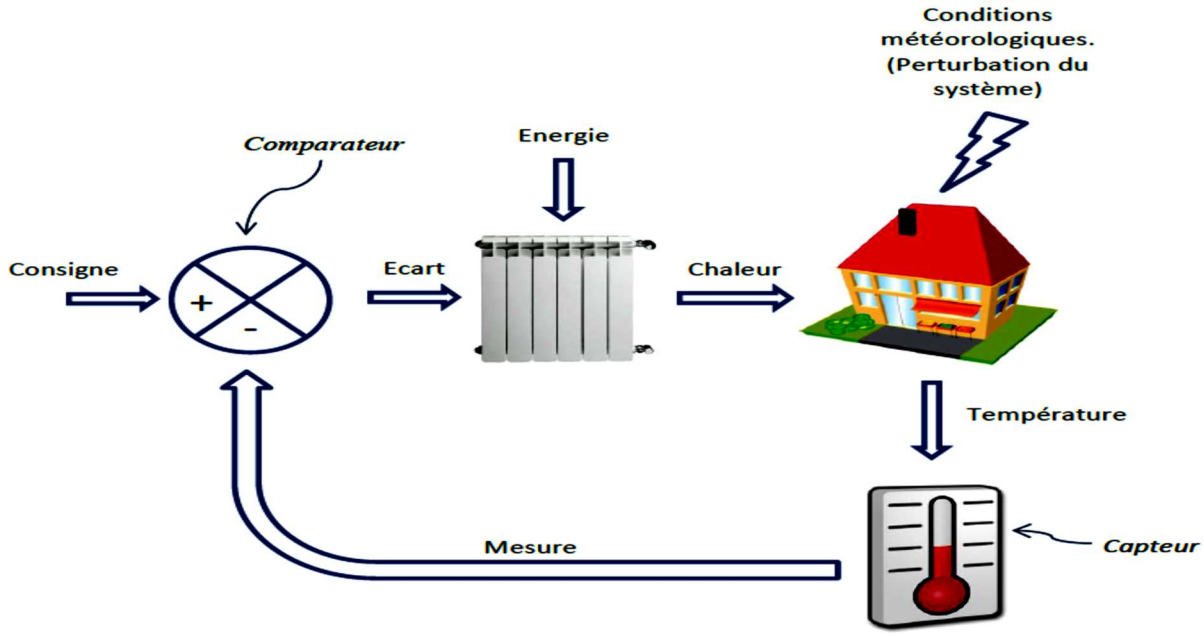


Figure 4.5. Asservissement de température avec retour d'information

Pour permettre de maintenir une température constante, même quand les conditions extérieures varient, il faut asservir la température intérieure vis-à-vis de la consigne imposée. Pour cela la quantité de chaleur produite ne sera plus directement déterminée par la consigne, mais par l'écart entre la consigne (la température souhaitée) et la température réelle à l'intérieur de la maison (température mesurée).

Cet exemple illustre un système asservi en boucle fermée, dont le but est de faire en sorte que la sortie du système suive la consigne d'entrée. La température à l'intérieur de la maison (grandeur physique à asservir) est mesurée par un capteur (ici un thermomètre), l'écart entre la consigne et la mesure est calculé par un comparateur. L'information d'erreur ainsi obtenue permet de piloter la production de chaleur.

4.3 ORGANISATION FONCTIONNELLE D'UN SYSTEME ASSERVI EN BOUCLE FERMEE

Le but d'une boucle d'asservissement est de faire en sorte que la sortie du système suive la consigne d'entrée (figure 4.6). Pour cela, au travers d'un capteur, la sortie est réinjectée à l'entrée dans un comparateur. La différence entre l'entrée et la sortie (appelée erreur ou écart) est calculée et forme ainsi le signal de commande de la chaine directe (correcteur + système). D'une manière générale, ce système comprend (Tableau 4.1) :

Système	Il correspond au système initial que l'on veut contrôler, piloter et asservir, afin de satisfaire un besoin énoncé dans le cahier des charges.
Consigne (entrée de référence)	La consigne est fixée, ou désirée par l'opérateur ; c'est la grandeur réglante du système. Sa nature peut être différente de celle de (S).
Capteur	Le capteur prélève sur le système la grandeur réglée (information physique) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur.
Mesure	Elle est fournie par le capteur, généralement la mesure doit obligatoirement être de même nature physique que la consigne.
Comparateur ou détecteur d'écart	Compare la consigne à la mesure et délivre un signal d'erreur proportionnel à la différence entre ces deux grandeurs. Ce signal d'erreur, après amplification, agira sur les organes de puissance dans un sens tel que l'erreur tendra à s'annuler.
Ecart ou erreur	L'écart (erreur), représente la différence entre la consigne et la mesure de la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables. Parfois, on trouve avant le comparateur un adaptateur qui permet d'ajuster l'entrée de consigne à la mesure effectuée par le capteur, afin de comparer deux grandeurs de même nature.
Correcteur	Elabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande, ou grandeur réglante du système. Il comporte un amplificateur et des fonctions mathématiques de traitement du signal.
Régulateur	Le régulateur est un ensemble qui comprend le comparateur et le correcteur.
Actionneur	C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet désiré. Parfois on l'associe à un pré-actionneur qui permet d'adapter l'ordre (basse puissance) et l'énergie.
Perturbation	Tout phénomène physique qui intervient sur le système et modifie l'état de la sortie est appelé perturbation. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations.
Sortie	La sortie régulée représente le phénomène physique que doit régler le système, c'est la raison d'être du système.
Chaîne directe ou d'action	Contient tous les organes de puissance (nécessitant un apport extérieur d'énergie) et qui exécute le travail. Elle comporte généralement de nombreux éléments, notamment des amplificateurs.
Chaîne de retour	Analyse et mesure le travail effectué et transmet au comparateur une grandeur physique proportionnelle à ce travail. Elle comprend généralement un capteur qui donne une mesure de la grandeur de sortie.

Tableau 4.1. Organisation d'un système asservi

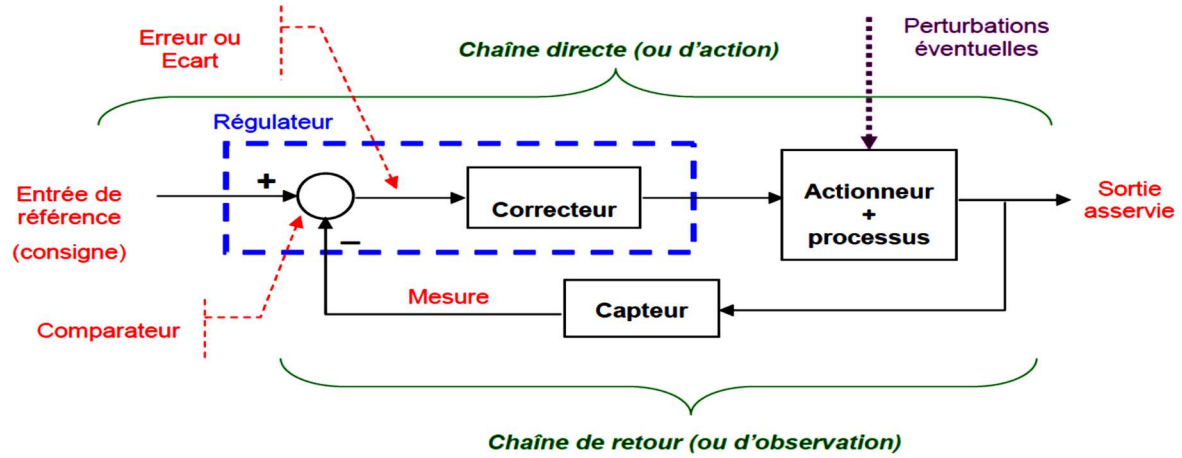


Figure 4.6. Structure générale d'un système en boucle fermée

4.3.1 Relations fondamentales

Compte tenu de l'exemple précédent [l'asservissement de la température θ(t)], on peut le traduire par un schéma fonctionnel avec un retour d'information, La fonction de transfert en boucle fermée est définie comme la fonction de transfert du système (figure 4.7), on peut écrire les relations suivantes :

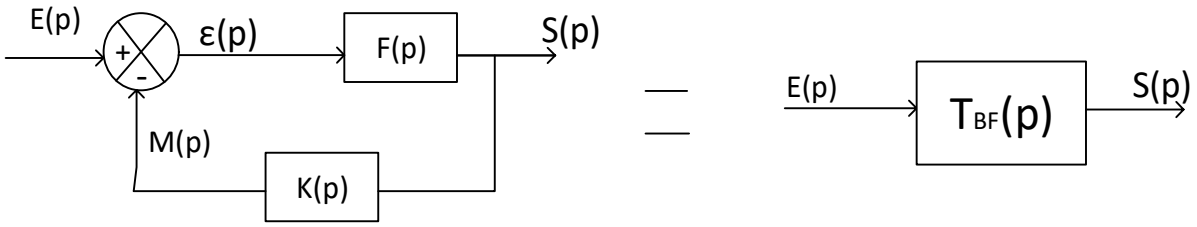


Figure 4.7. Fonction de transfert d'un système en boucle fermée

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = E(p) - M(p) \\ M(p) = S(p)K(p) \\ S(p) = \varepsilon(p)F(p) \end{cases}$$; ces relations conduisent à **:** $$\boldsymbol{T_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + K(p)F(p)}}$$

Pour un système à retour unitaire où $K(p) = 1$, on aura (figure 4.8) :

$$\boldsymbol{T_{BF}(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)}}$$

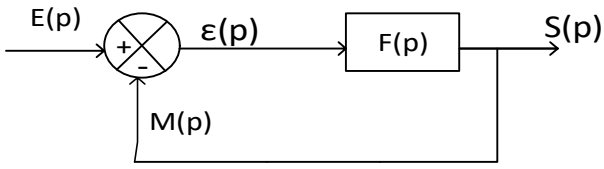
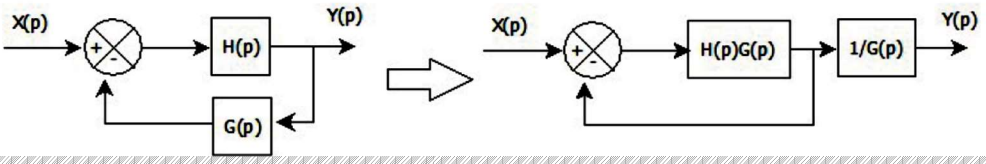


Figure 4.8. FTBF à retour unitaire



$$T_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p).G(p)} \qquad T_{BF}(p) = \frac{H(p).G(p)}{1 + H(p).G(p)} \frac{1}{G(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p).G(p)}$$

Notons bien qu'on peut transformer un système bouclé en un système à retour unitaire :

4.3.2 Fonction de transfert d'un système multi boucles

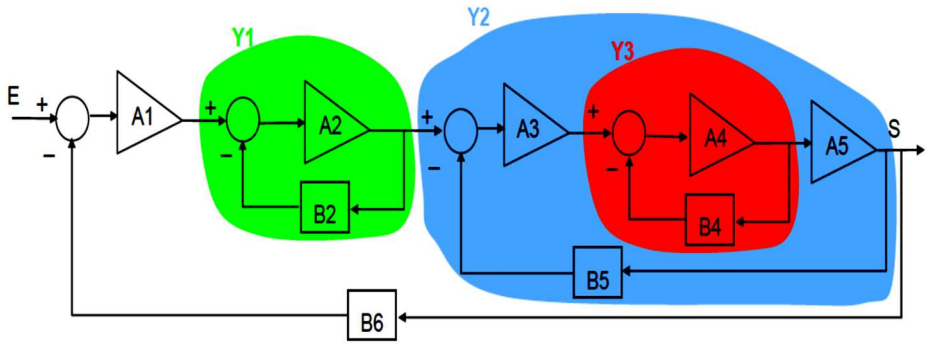


Figure 4.9. Système à boucles multiples.

Pour calculer la fonction de transfert d'un système qui présente une multitude de boucles, on procède comme suit (figure 4.9) :

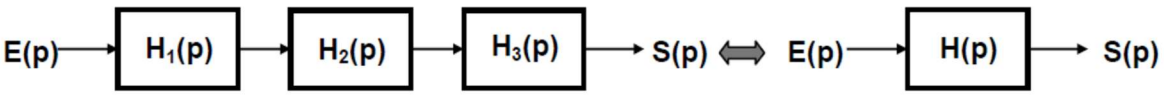
- Décomposer Le système global en plusieurs sous-systèmes (Y1, Y2, Y3…) ;
- Calculer la fonction de transfert de chaque sous-système ;
- Enfin, il sera possible de déterminer la fonction de transfert du système global.

$$\begin{cases} Y1(p) = \dfrac{A2}{1 + A2.B2} \\ Y3(p) = \dfrac{A4}{1 + A4.B4} \\ Y2(p) = \dfrac{A3.Y3.A5}{1 + A3.Y3.A5.B5} \end{cases} \Rightarrow T_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A1.Y1.Y2}{1 + A1.Y1.Y2.B6}$$

4.3.3 Règles de transformation et algèbre des schémas blocs

Il est souvent utile de pouvoir modifier la topologie d'un schéma bloc pour faciliter la lecture ou pour mettre en évidence une structure particulière ; ces schémas ne sont pas toujours de structure simple. Des manipulations permettent de réduire leur complexité et ainsi déterminer la fonction de transfert globale.
Les transformations élémentaires sont décrites ci-dessous, sachant que des transformations plus complexes s'en déduisent.

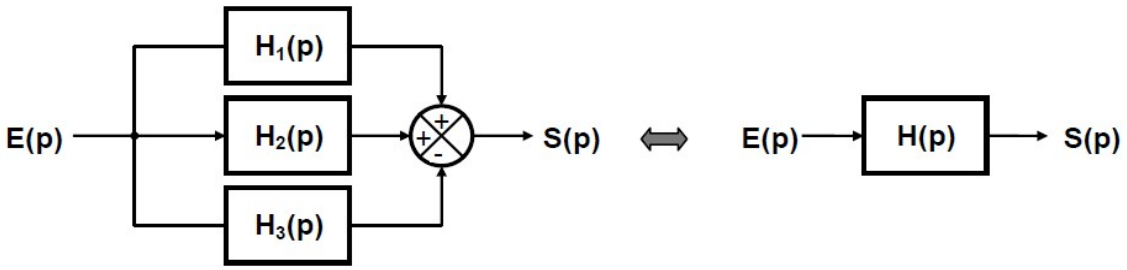
4.3.3.1 Mise en série d'éléments



$$\boldsymbol{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = H_1(p).H_2(p).H_3(p)}$$

La fonction de transfert de l'ensemble des blocs est égale au produit des fonctions de transfert de chaque bloc.

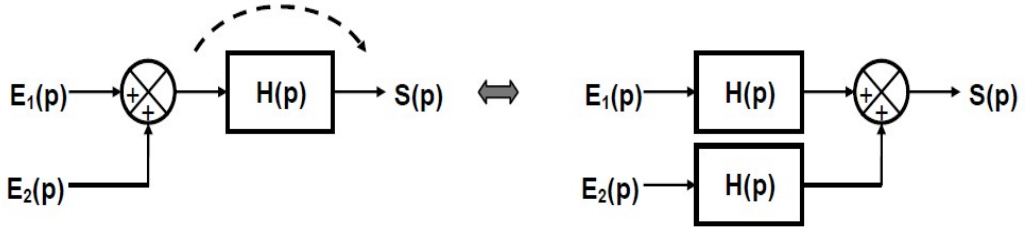
4.3.3.2 Mise en parallèle d'éléments



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)$$

La fonction de transfert de l'ensemble des blocs est égale à la somme algébrique des fonctions de transfert de chaque bloc.

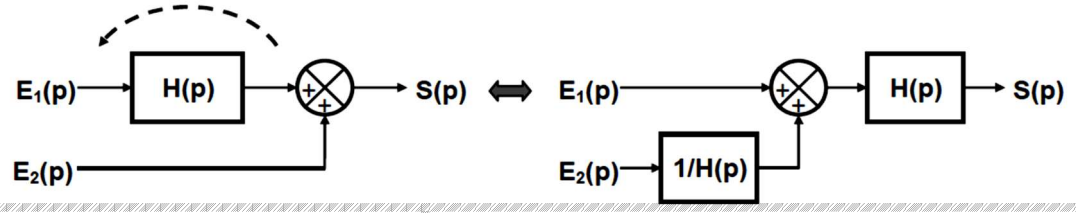
4.3.3.3 Déplacement d'un somateur en aval



$$S(p) = H(p)[E_1(p) + E_2(p)]$$

$$S(p) = H(p).E_1(p) + H(p).E_2(p) = H(p)[E_1(p) + E_2(p)]$$

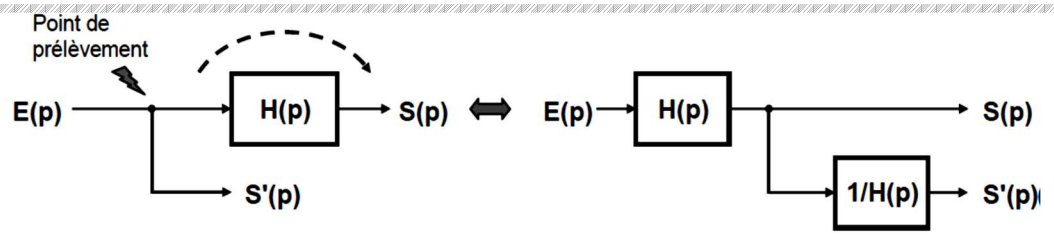
4.3.3.4 Déplacement d'un somateur en amont



$$S(p) = H(p).E_1(p) + E_2(p)$$

$$S(p) = H(p).E_1(p) + H(p)\frac{E_2(p)}{H(p)} = H(p).E_1(p) + E_2(p)$$

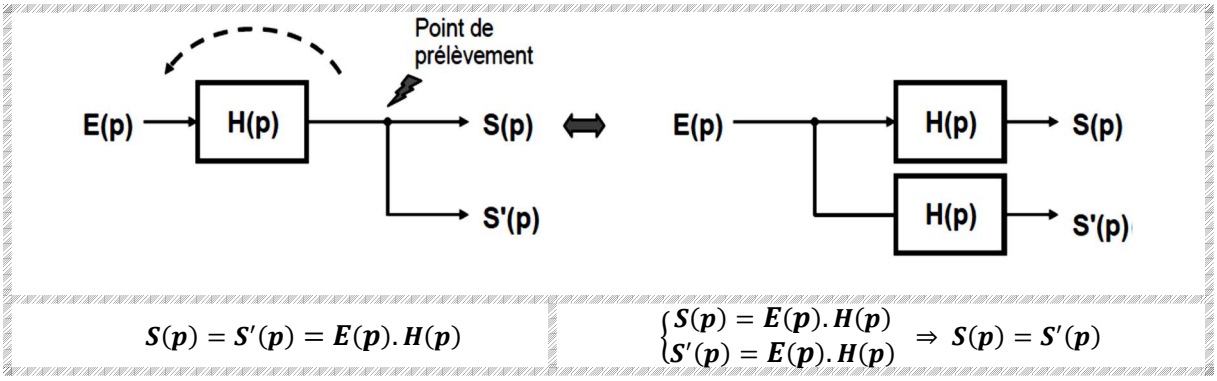
4.3.3.5 Déplacement d'une jonction (point de prélèvement) en aval



$$\begin{cases} S(p) = E(p).H(p) \\ S'(p) = E(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(p) = E(p).H(p) \\ S'(p) = E(p).H(p)\dfrac{1}{H(p)} = E(p) \end{cases}$$

4.3.3.6 Déplacement d'une jonction (point de prélèvement) en amont



$$S(p) = S'(p) = E(p).H(p)$$

$$\begin{cases} S(p) = E(p).H(p) \\ S'(p) = E(p).H(p) \end{cases} \Rightarrow S(p) = S'(p)$$

4.3.3.7 Fonction de transfert d'un système à plusieurs entrées

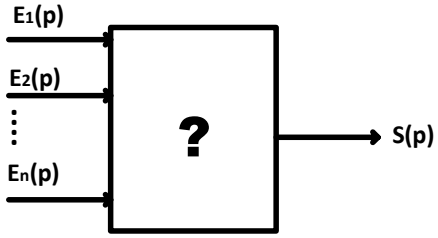


Figure 4.10. Système à n entrées

Pour déterminer la fonction de transfert d'un système à n entrées (Figure 4.10), on utilise le principe de superposition :

- On calcule la sortie pour une entrée quelquonque, à condition de considérer toutes les autres entrées nulles ;
- On répète la même opération pour toutes les autres entrées ;
- On détermine la sortie lorsque toutes les entrées sont présentes, en utilisant le principe de superposition (on additionne toutes les réponses précédentes).

$$H_1(p) = \frac{S_1(p)}{E_1(p)}\bigg|_{E_2(p)=\cdots=E_n(p)=0} ; H_2(p) = \frac{S_2(p)}{E_2(p)}\bigg|_{E_1(p)=\cdots=E_n(p)=0} ; \ldots ; H_n(p) = \frac{S_n(p)}{E_n(p)}\bigg|_{E_n(p)=\cdots=E_{n-1}(p)=0}$$

$$\Rightarrow S(p) = S_1(p) + S_2(p) + \cdots + S_n(p) = E_1(p).H_1(p) + E_2(p).H_2(p) + \cdots + E_n(p).H_n(p)$$

4.4 MODELISATION DES SYSTEMES ASSERVIS

La modélisation des systèmes physiques est une tâche plutôt difficile, car elle nécessite de l'expérience, de la pratique, et l'esprit d'être un bon connaisseur des lois physiques fondamentales.

Dans presque tous les domaines de l'ingénierie, des efforts considérables sont déployés pour acquérir des informations sur les divers aspects liés à la performance d'un système, en vue de son analyse.

4.4.1 Modélisation de systèmes électriques

Un système électrique passif fait intervenir trois éléments de base : la résistance R, l'inductance L, et la capacité C. Pour chacun de ces éléments, l'intensité du courant électrique, noté $i(t)$, et

la tension à ses bornes $u(t)$, vérifient les lois de base suivantes (Figure 4.11) :

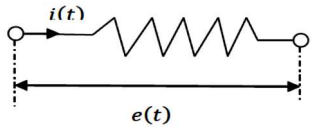
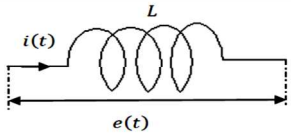
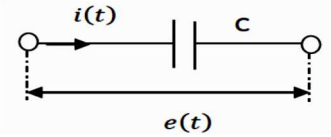
Résistance R (Ω)	Inductance L (H)	Capacité C (F).
 $e(t) = R.i(t) \xrightarrow{L} E(p) = R.I(tp)$	 $e(t) = L.\frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{L} E(p) = Lp.I(p)$	 $e(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \xrightarrow{L} E(p) = \frac{1}{Cp}.I(p)$

Figure 4.11. Système électriques

Exemple

On considère un système formé par un circuit RLC (figure 4.12), l'entrée du système est la tension $u(t)$, la sortie étant la tension $y(t)$ aux bornes du condensateur. On demande de calculer la fonction de transfert $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$ de ce système

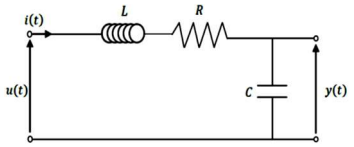


Figure 4.12. Circuit RLC

Solution :

La loi des mailles appliquée au circuit donne :

$$\begin{cases} u(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \\ y(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \end{cases} \xrightarrow{L} \begin{cases} U(p) = R.I(p) + Lp.I(P) + \frac{1}{Cp}I(p) \\ Y(p) = \frac{1}{Cp}.I(p) \Rightarrow I(p) = Cp.Y(p) \end{cases} \Rightarrow$$

$$U(p) = R.Cp.Y(p) + LCp^2.Y(p) + Y(p) \Rightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + RCp + LCp^2}$$

4.4.2 Modélisation de systèmes mécaniques

Afin d'obtenir les équations dynamiques régissant les systèmes mécaniques, on va traiter d'abord avec les systèmes mécaniques de translation, et ensuite les systèmes mécaniques de rotation. Encore une fois, on ne traitera que des systèmes localisés composés de combinaisons d'éléments mécaniques idéaux (figures 4.13 et 4.14).

4.4.2.1 Mouvement de translation

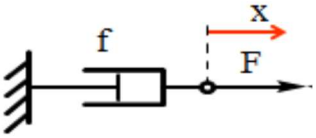
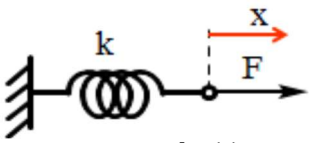
Masse M	Frottement visqueux f	Raideur de ressort k
$F = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	 $F = -f\frac{dx(t)}{dt}$	 $F = -kx(t)$

Figure 4.13. Systèmes mécaniques en translation

4.4.2.2 Mouvement de rotation

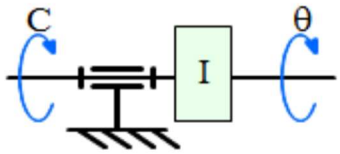
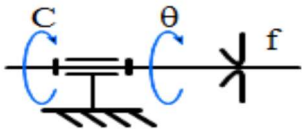
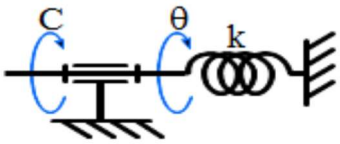
C : Couple ; I : Inertie ; θ : position angulaire	Frottement visqueux f	Raideur de ressort k
 $C = I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	 $C = -f\frac{d\theta(t)}{dt}$	 $C = -k\theta(t)$

Figure 4.14. Systèmes mécaniques en rotation

Exemple

Soit un système mécanique (Figure 4.15), composé d'un accéléromètre mécanique simple. L'entrée du système est la force $f(t)$, la sortie étant la position de la masse $x(t)$.

On demande de calculer la fonction de transfert $H(p) = \frac{X(p)}{F(p)}$ de ce système :

Solution :

On applique la loi fondamentale de la dynamique des forces :

$\sum Forces = M\gamma \Rightarrow f(t) - kx(t) - a\frac{dx(t)}{dt} = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$; On passe au domaine de Laplace :

$F(p) = kX(p) + apX(p) + Mp^2X(p)$

$\Rightarrow H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{k+ap+Mp^2}$

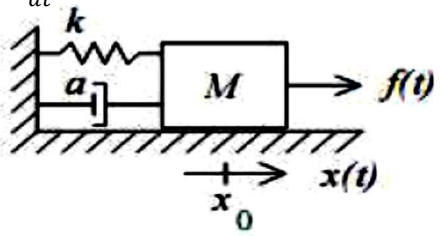


Figure 4.15. Accéléromètre mécanique

4.4.3 Modélisation de systèmes hydrauliques

La nature de distribution et le caractère non linéaire de la résistance à l'écoulement d'un fluide rend l'obtention des équations dynamiques pour les systèmes hydrauliques, difficile en général. En fait, il peut y avoir deux types de régimes de fluide, laminaire et turbulent, caractérisés par des équations dynamiques linéaires et non linéaires, respectivement (Figure 4.16).

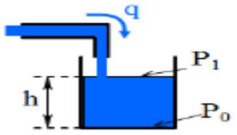
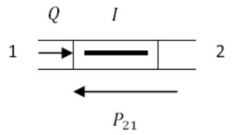
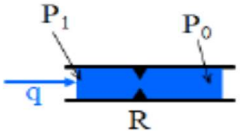
Reservoir de hauteur h	Inertie hydraulique	Résistance hydraulique R
 $P_1 - P_0 = \rho g h$	 $P_{21} = I\frac{dQ}{dt}$	 $P_1 - P_0 = Rq$

Figure 4.16. Systèmes hydrauliques

Exemple :

Trouver la fonction de transfert $F(p)$ d'un système Constitué d'un réservoir de section S (Figure 4.17). L'entrée du système est le débit $Q_e(t)$, la sortie est représentée par le niveau du réservoir $H(t)$. Une pompe volumétrique soutire un débit constant Q_s.

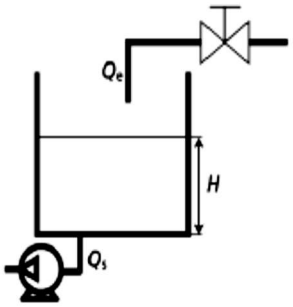


Figure 4.17. Système à réservoir

Réponse :

Essayons de trouver la relation entre l'entrée et la sortie du système : L'équation différentielle du système est :

$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{S} q_e(t)$; On passe au domaine de Laplace :

$$pH(p) = \frac{1}{S} Q_e(p) \Rightarrow F(p) = \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{1}{S.p}$$

4.4.4 Modélisation de systèmes thermiques

La modélisation mathématique des systèmes thermiques est basée sur les lois fondamentales de la thermodynamique (Figure 4.18).

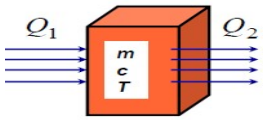
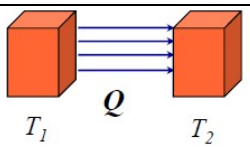
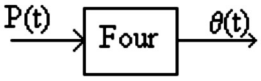
Débit de chaleur Q ; Capacité calorifique C ; Température θ ; Résistance thermique R	
 $Q = Q_1 - Q_2 = \frac{d(mcT)}{dt}$	 $T_1 - T_2 = R\frac{dQ}{dt}$

Figure 4.18. Systèmes thermiques

Exemple :

Soit un four électrique où :

- L'entrée de commande est la puissance électrique $P(t)$.
- La sortie observée est la température du four (t) .



On note que dans le bilan énergétique de l'installation, et pendant un temps dt :

- l'énergie absorbée par le système est $P(t)dt$,
- l'énergie perdue par rayonnement est proportionnelle à la température : $\alpha\theta(t)dt$,
- la différence est stockée dans la capacité calorifique C du four dont elle élève la température de $d\theta$.

On demande de calculer la fonction de transfert $F(p)$ de ce système.

Réponse :

La formule de transfert thermique dans le four est donnée par :

$Cd\theta = P(t)dt - \alpha\theta(t)dt \Rightarrow C\frac{d\theta}{dt} = P(t) - \alpha\theta(t)$ On passe au domaine de Laplace :

$$Cp\theta(p) + \alpha\theta(p) = P(p) \Rightarrow F(p) = \frac{\theta(p)}{P(p)} = \frac{1}{\alpha + \theta p}$$

CHAPITRE 5 : PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS

5.1 GENERALITES

Afin de répondre aux mieux aux besoins de l'opérateur, un système linéaire continu et invariant (SLCI) doit présenter des performances recherchées qui soient les plus proches possibles de celles définies dans un cahier des charges.

Nous avons vu auparavant, qu'il était possible, de déterminer la fonction de transfert d'un système connaissant l'équation différentielle qui le lie. Mais il existe de nombreux cas où le système est un système industriel mal défini et dont, à fortiori on ne connaît pas les équations différentielles. Or, la connaissance de sa fonction de transfert est très importante pour déterminer ses performances et surtout sa stabilité. Il est donc important de mettre au point des méthodes capables de résoudre ce problème.

En général, on applique cette procédure pour déterminer les fonctions de transfert des éléments qui entrent dans une chaîne. La connaissance expérimentale ou mathématique de toutes les fonctions de transfert des éléments permet alors de déterminer la fonction de transfert de l'ensemble.

Ces méthodes sont basées sur l'utilisation d'entrées dites canoniques, faciles à mettre en œuvre dans toutes les techniques (électrique, mécanique, hydraulique…). On en déduit alors les différentes constantes de la fonction de transfert.

5.2 ENTREES CANONIQUES

Afin d'analyser le comportement d'un système dynamique, on étudie la forme de sa sortie en lui appliquant des signaux d'entrée causales dites **entrées canoniques**. Parmi ceux-ci, on cite :

5.2.1 Impulsion unitaire

L'impulsion de Dirac (figure.5.1), notée $\boldsymbol{\delta(t)}$ est une fonction du temps de durée très courte mais dont l'amplitude est suffisamment grande pour que l'effet en soit sensible. L'impulsion est dite unitaire si la surface est égale à 1. En pratique on ne peut que générer une impulsion proche du Dirac, qui modélise alors une action qui s'exerce pendant un temps très court (Choc, secousse…). La réponse à une impulsion de Dirac, est appelée : **Réponse impulsionnelle.**

La fonction de transfert d'un système n'est autre que sa réponse impulsionnelle.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \ \ pour\ t \leq 0\ et\ \ t \geq \tau \\ \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{\tau} \ \ \ pour\ \ 0 < t < \tau \end{cases}$$

La transformée de Laplace de L'impulsion de Dirac, vaut :

$$L[\delta(t)] = 1$$

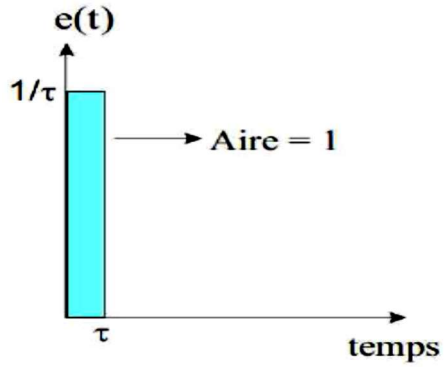


Figure. 5.1 : Impulsion unitaire

5.2.2 Echelon unité ou existence u(t)

Appelée aussi fonction d'Heaviside. Elle correspond à un changement brusque de consigne (saut), et passe très rapidement de 0 à 1. On définit cette fonction par (figure.5.2) :

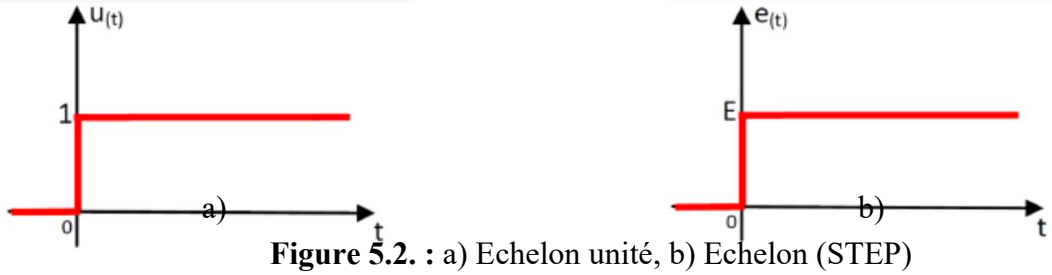


Figure 5.2. : a) Echelon unité, b) Echelon (STEP)

$$u(t) = \begin{cases} 1 \ \ pour \ \ t \geq 0 \\ 0 \ \ pour \ \ t < 0 \end{cases} \qquad e(t) = Eu(t) = \begin{cases} E \ \ pour \ \ t \geq 0 \\ 0 \ \ pour \ \ t < 0 \end{cases}$$

La fonction échelon est très utile pour caractériser un système asservi, généralement on compare le comportement des systèmes sur ce type d'entrée en valeur relative. La réponse à un échelon est appelée **Réponse indicielle**.

Lorsqu'on applique un échelon à l'entrée d'un système, il s'agit d'une variation brutale, où il y'a un passage de zéro à une certaine amplitude ***E***. La sortie du système ne peut suivre instantanément cette brusque variation, on observe ainsi une phase transitoire, qui met en évidence certaines caractéristiques du système qu'on veut asservir.

Par ailleurs, on peut étudier le comportement en régime établi, et définir ainsi d'autres caractéristiques du système, telles que la stabilité, la précision …etc.

La transformée de Laplace de l'échelon vaut :

$$L[e(t)] = L[Eu(t)] = \int_0^{+\infty} Eu(t)e^{-pt}dt = \frac{E}{p}$$

5.2.3 Echelon de vitesse (rampe)

La rampe de pente ***a*** est la primitive de l'échelon de hauteur a. Elle est définie par (figure 5.3) :

$$e(t) = \begin{cases} a.t.u(t) \ \ pour \ \ t \geq 0 \\ 0 \ \ pour \ \ t < 0 \end{cases}$$

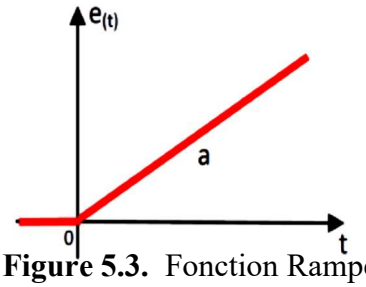


Figure 5.3. Fonction Rampe

Cette fonction est appelée échelon de vitesse ou rampe, ce signal va permettre d'observer la façon dont le système suit l'évolution du signal d'entrée, et mettre ainsi en évidence le phénomène de vitesse qui est très utile pour caractériser les systèmes suiveurs.

On vérifie facilement que la transformée de Laplace d'une rampe vaut :

$$L[e(t)] = L[a.t.u(t)] = \int_0^{+\infty} a.t.u(t)e^{-pt}dt = \frac{a}{p^2}$$

5.2.4 Entrée sinusoïdale ou harmonique

Soit le signal sinusoïdal défini ci-contre (figure 5.4) :

$$e(t) = \begin{cases} A \sin \omega t \,.\, u(t) \;\; pour \;\; t \geq 0 \\ 0 \;\; pour \;\; t < 0 \end{cases}$$

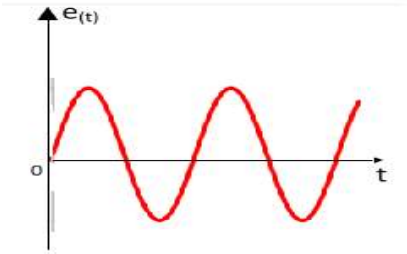


Figure 5.4. Signal harmonique

L'hypothèse de système linéaire, garantit que la sortie de ce système sollicité par une entrée sinusoïdale, est également sinusoïdale ; néanmoins elle présente une amplitude différente, ainsi qu'un déphasage par rapport au signal d'entrée. Il s'agit d'une analyse harmonique dont le domaine fréquentiel doit être adapté au système. La réponse est appelée **réponse fréquentielle ou harmonique**.

On démontre aisément que la transformée de Laplace d'un signal sinusoïdal vaut :

$$\begin{cases} L[e(t)] = L[A \sin \omega t \,.\, u(t)] = \int_0^{+\infty} A \sin \omega t \,.\, u(t) e^{-pt} dt = \dfrac{A\omega}{p^2 + \omega^2} \\ L[e(t)] = L[A \cos \omega t \,.\, u(t)] = \int_0^{+\infty} A \cos \omega t \,.\, u(t) e^{-pt} dt = \dfrac{Ap}{p^2 + \omega^2} \end{cases}$$

5.3 PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS

Un système régulé est dit idéal s'il possède un comportement **stable**, une bonne précision ainsi qu'un régime transitoire rapide et bien amorti.

Prenons l'exemple de la régulation du système de chauffage d'une pièce de maison. Imaginons que lors de la mise en route du système, la température de la pièce soit de l'ordre de 15 °C et que la valeur de consigne soit égale à 22 °C.

Nous nous attendons alors à ce que le dispositif nous fournisse une température ambiante la plus voisine possible de 22 °C. Plus la température réelle sera voisine de la valeur de consigne, plus le système sera **précis**.

Nous nous attendons également à avoir une température de 22 °C le plus vite possible. Il n'est pas question d'attendre des heures pour disposer d'un confort thermique acceptable. Plus la valeur de consigne est atteinte **rapidement** en sortie du système, plus le dispositif est rapide. Autrement dit, il nous intéresse de disposer d'un système caractérisé par un régime transitoire le plus court possible.

La durée n'est pas la seule caractéristique du régime transitoire. Il nous faut aussi nous intéresser à sa forme, notamment à un phénomène dit **d'amortissement** (ou dépassement) : on peut très bien imaginer que la température finale de 22 °C soit atteinte après un régime transitoire au cours duquel la température passe par un pic à 25 °C. Ceci n'est bien évidemment pas admissible.

A travers cet exemple, les critères permettant de qualifier et quantifier les performances du système seront :

- La stabilité,
- La précision,
- La rapidité,
- L'amortissement.

Tout l'art de l'automaticien est de réaliser une partie commande permettant de respecter au mieux ces critères

5.3.1 Stabilité

Un système est stable si :

- Il reste au repos en absence d'excitation.
- Ecarté de sa position d'équilibre, il y revient.
- Toute entrée bornée produit une sortie bornée.
- Sa réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Le bouclage d'un système peut rendre celui-ci instable. Les courbes ci-dessous illustrent les deux cas de figure (figures 5.5 et 5.6).

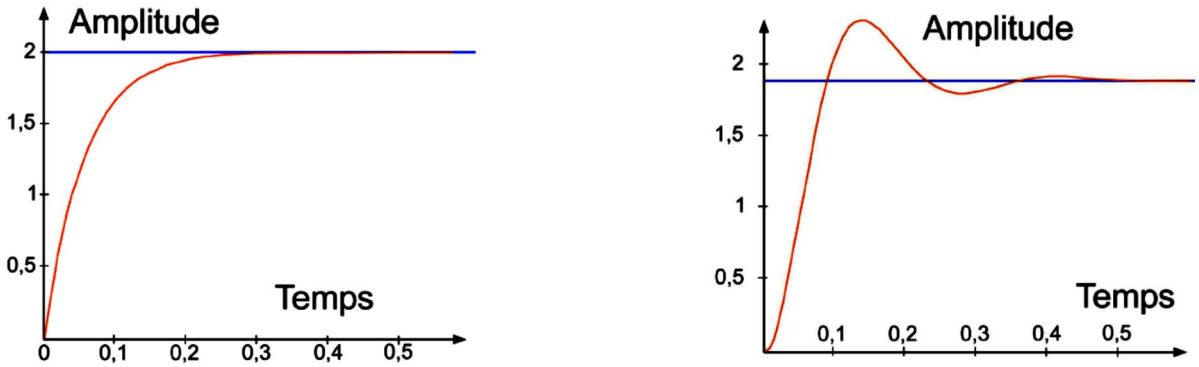


Figure 5.5. Systèmes stables (Réponse indicielle)

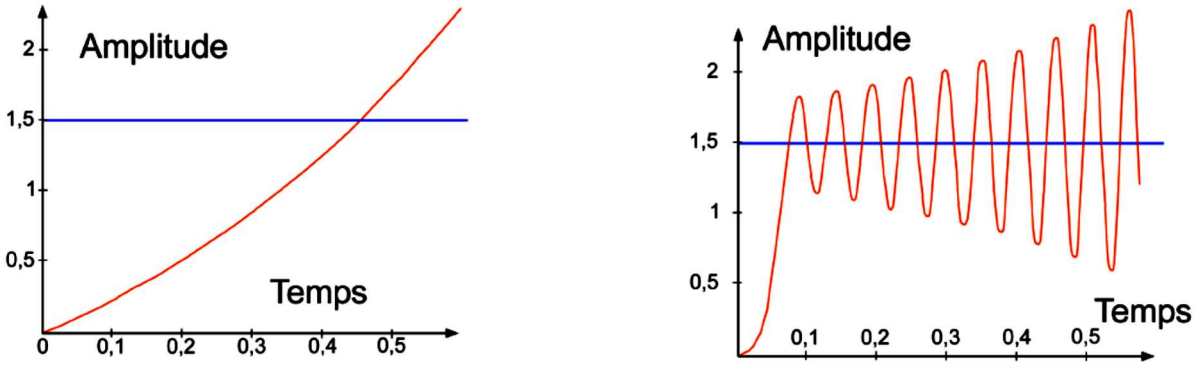


Figure 5.6. Systèmes instables (Réponse indicielle)

5.3.2 Précision

La précision caractérise l'aptitude d'un système à atteindre la valeur de sortie souhaitée. L'écart (ou erreur) entre la consigne (sortie espérée) et la sortie réelle se caractérise par :

$\boldsymbol{\varepsilon(t) = e(t) - s(t)}$, On distingue deux types d'erreurs :

5.3.2.1 Erreur statique

C'est l'écart en régime permanent entre la sortie mesurée et la consigne lorsque le système asservi ou régulé est dans son état permanent. L'erreur statique est donnée par :

$\boldsymbol{\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to 0} p\varepsilon(p)}$ (Théorème de la valeur finale).

Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques :

- **Erreur indicielle :**

Dans le cas où l'entrée est constante (échelon) on définira l'erreur indicielle comme la différence entre la sortie demandée et la sortie obtenue en régime permanent (figure 5.7). L'erreur peut être constante, nulle ou tendre vers l'infini.

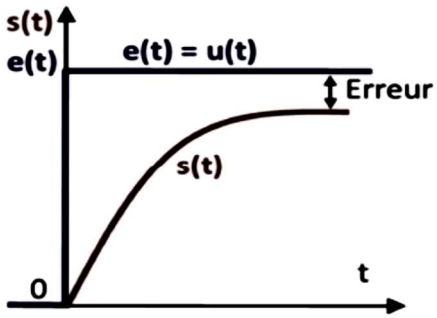


Figure 5.7. Erreur indicielle

- **Erreur de traînage :**

La réponse à une rampe $e(t) = a.t.u(t)$, permet la mise en évidence de l'erreur de traînage (ou erreur en poursuite) d'un système suiveur, que l'on observe en régime permanent (figure 5.8). L'erreur de traînage ou erreur en vitesse, participe aussi à la précision d'un système.

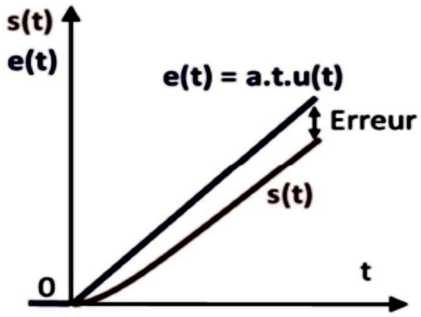


Figure 5.8. Erreur de traînage

5.3.2.2 Erreur dynamique

L'erreur dynamique représente l'écart instantané entre la sortie et l'entrée pendant leur évolution. Un écart transitoire apparaît à chaque changement de consigne ou suite à une perturbation.

5.3.3 Rapidité

La rapidité d'un système est caractérisée par le temps que met sa sortie pour atteindre une zone encadrant sa valeur finale et ne plus en sortir. Cette zone est généralement donnée à **± n%**. Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique (système stable). En pratique, on utilise le temps de réponse à 5% (Tr5%) appelé aussi temps d'établissement, comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système (figure 5.9).
Le temps de réponse à 5% caractérise la durée de la phase transitoire. C'est une des caractéristiques importantes des systèmes bouclés. On cherchera souvent à diminuer ce temps de réponse, sans que cela soit au détriment d'autres performances.

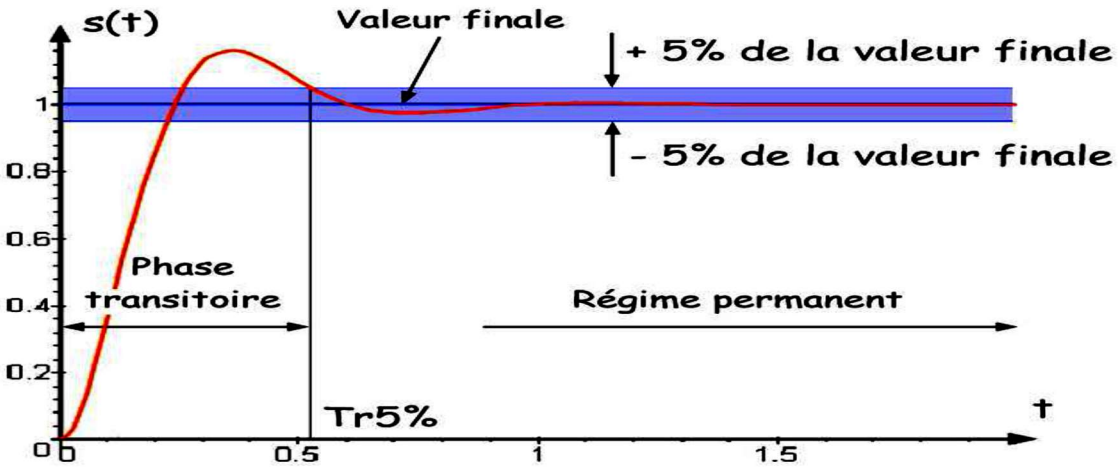


Figure 5.9. Critère de rapidité d'un système

La détermination du temps de réponse à 5% sur les courbes de réponses ci-contre montre que :

- le système 2 présente le temps de réponse le plus faible (Réponse la plus rapide),
- le système 1 présente le temps de réponse le plus long (Réponse la moins rapide),

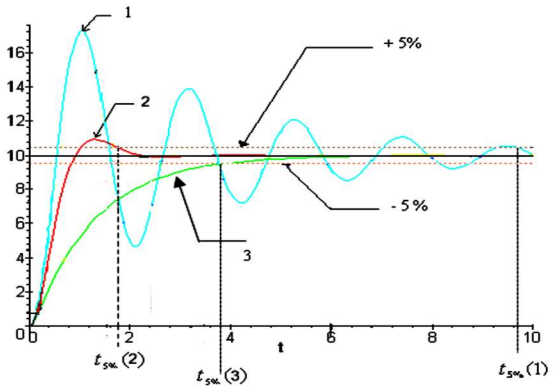


Figure 5.10. Critère de rapidité d'un système

5.3.4 Amortissement

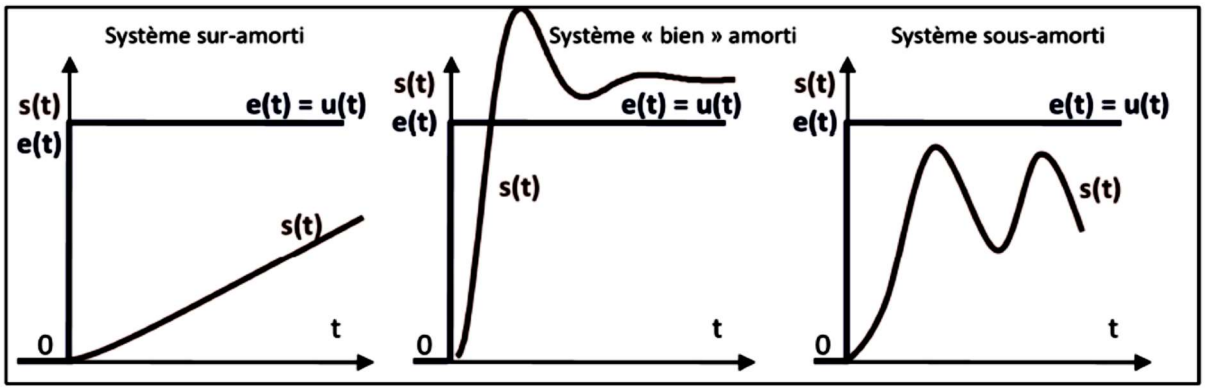


Figure 5.11. Critères d'amortissement d'un système

L'amortissement (figure 5.11) est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie. Plus ces oscillations s'atténuent rapidement, plus le système est amorti. Un critère efficient de la stabilité des systèmes asservis est le dépassement D qui est défini comme étant la différence entre la valeur maximale et la valeur finale de la sortie.

Le taux de dépassement, caractérise l'amplitude maximale des oscillations.
On exprime le dépassement en % :

$$\boldsymbol{D_1\% = 100\frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty)}}$$

Avec :

- $\boldsymbol{D_1}$: Premier dépassement,
- $\boldsymbol{t_1}$: Temps du premier dépassement,
- $\boldsymbol{s(\infty)}$: Valeur asymptotique de la sortie en régime permanent.

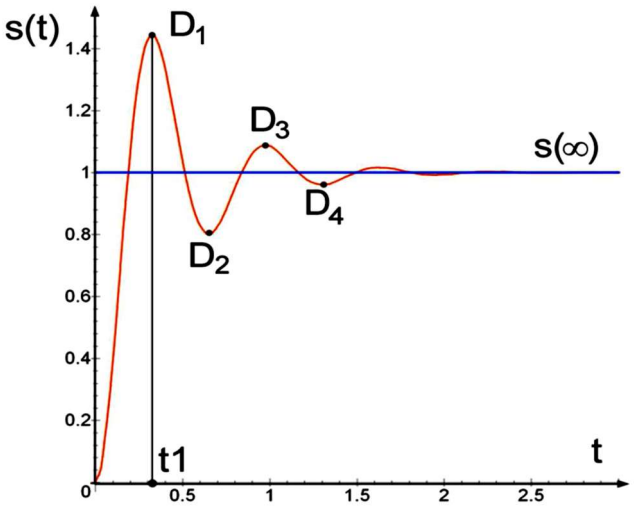


Figure 5.12. Dépassements d'un système

Pour un système c'est le premier dépassement qui est le plus pénalisant (figure 5.12). C'est lui qui est donc pris en compte. Dans certaines applications industrielles, le dépassement doit être nul ou très faible. La raison est généralement liée à la sécurité du personnel et du matériel.

CHAPITRE 6 : REPONSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les réponses des systèmes linéaires, continus et invariants dans le domaine temporel. Ces systèmes seront caractérisés d'une part, par leur fonction de transfert, et d'autre part, par leur comportement dans le temps. Ce dernier peut être mis en évidence par la réponse $s(t)$ à une entrée donnée $e(t)$. La connaissance des réponses temporelles des systèmes fondamentaux permet :

- d'étudier leurs performances lorsque les équations du système sont établies ;
- d'identifier un système (et ses grandeurs caractéristiques) à partir de sa réponse temporelle.

Les signaux tests (entrées canoniques) de ces systèmes sont généralement :

- l'impulsion de Dirac : la réponse du système s'appellera : **Réponse impulsionnelle** ;
- l'échelon : On parlera de : **Réponse indicielle** ;
- la rampe : **Réponse en rampe ou en vitesse**.

Dans ce qui suivra, on étudiera les systèmes simples tels que : les systèmes proportionnels (gains purs), les systèmes intégrateurs et dérivateurs ; ensuite les systèmes de premier ordre et de second ordre.

6.1 REPONSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

6.1.1 Comportement temporel des systèmes proportionnels (Gains purs K)

Un système est dit à ACTION PROPORTIONNELLE (figure 6.1) ou GAIN PUR si sa fonction de transfert peut se mettre sous la forme : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K$; où K est le **GAIN STATIQUE** du système (sans unité si $e(t)$ et $s(t)$ de même nature).

Figure 6.1. Système proportionnel

6.1.1.1 Réponse à un échelon

Si l'entrée est un échelon, alors :

$$\begin{cases} e(t) = Eu(t) \Rightarrow L[e(t)] = \frac{E}{p} \\ S(p) = E(p)H(p) = \frac{KE}{p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}[S(p)] = KEu(t)$$

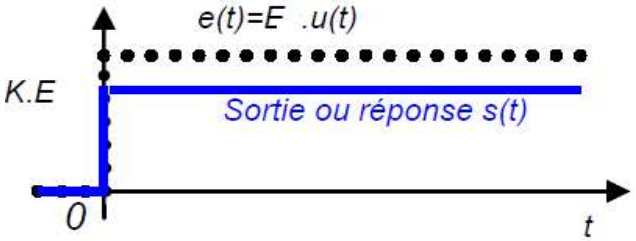


Figure 6.2. Réponse en échelon d'un système proportionnel

- **Exemples**

Eléments de transmission de puissance, Exemple : réducteur à roue et vis sans vis, à engrenages...	
Préactionneurs, Exemple : variateur de vitesse, hacheur, servovalve…	
Capteurs dans la limite de leur domaine d'emploi (course, tension…). Exemple : potentiomètre, génératrice tachymétrique, capteur de température…	

6.1.2 Comportement temporel des systèmes dérivateurs

Un système est dit Dérivateur si sa fonction de transfert peut se mettre sous la forme :
$\boldsymbol{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K.p}$ où K est le gain statique du système (unité=1/s si e(t) et s(t) de même nature), (figure 6.3).

Figure 6.3. Système dérivateur

6.1.2.1 Réponse à une rampe

$$\begin{cases} e(t) = a.t.u(t) \Rightarrow E(p) = L[e(t)] = \dfrac{a}{p^2} \\ S(p) = E(p)H(p) = \dfrac{Ka}{p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{s(t) = L^{-1}[S(p)] = Ka.u(t)}$$

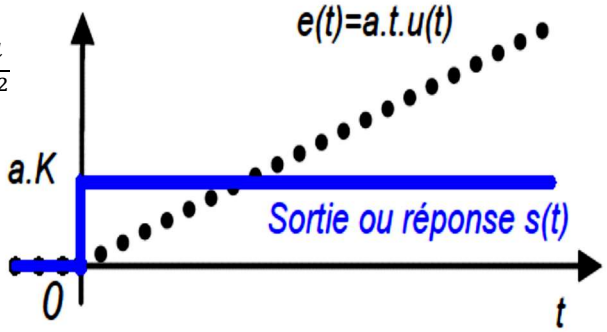


Figure 6.4. Réponse à une rampe d'un système dérivateur

6.1.3 Comportement temporel des systèmes Intégrateurs

Un système est dit Intégrateur si sa fonction de transfert peut se mettre sous la forme :
$\boldsymbol{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}}$: où K est le gain statique du système (unité = seconde si e(t) et s(t) de même nature), (figure 6.4).

Figure 6.5. Système intégrateur

6.1.3.1 Réponse à une impulsion

$$\begin{cases} e(t) = \delta(t).u(t) \Rightarrow L[e(t)] = 1 \\ S(p) = E(p)H(p) = \dfrac{K}{p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}[S(p)] = K.u(t)$$

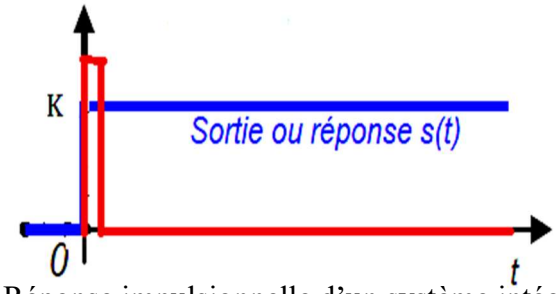


Figure 6.6. Réponse impulsionnelle d'un système intégrateur

6.1.3.2 Réponse à un échelon

$$\begin{cases} e(t) = Eu(t) \Rightarrow L[e(t)] = E(p) = \dfrac{E}{p} \\ S(p) = E(p)H(p) = \dfrac{KE}{p^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}[S(p)] = KE.t.u(t)$$

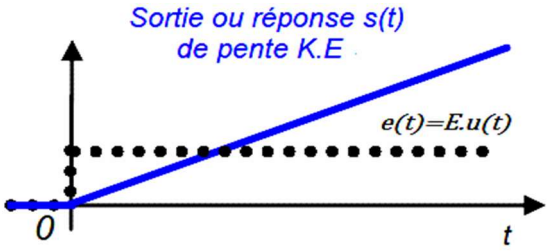


Figure 6.7. Réponse en échelon d'un système intégrateur

6.2 ETUDE D'UN SYSTEME DE PREMIER ORDRE

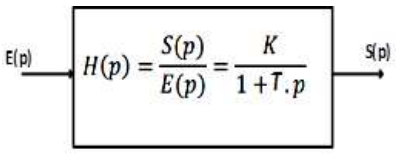
Les systèmes de premier ordre sont très répandus, du fait de leur simplicité. Ils permettent de modéliser, avec réalisme, un grand nombre de systèmes dont la sortie "suit" l'entrée, avec un certain temps de réponse. Dans ce cas, le système est caractérisé, par le temps de réponse et l'amplification de l'entrée sur la sortie.

6.2.1 Définition

Tout système dont le fonctionnement est régi, dans le cadre de certaines hypothèses (linéarisation, continuité invariance...), par une équation différentielle linéaire de premier ordre à coefficients constants, est appelé : **Système de premier ordre**.

$$T\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t), \quad \text{où} : \begin{cases} T : \ appelée\ Constante\ de\ temps\ en\ (s) \\ K : Gain\ statique \end{cases}$$

Ce qui correspond à une transmittance : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+Tp}$



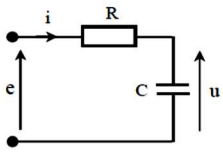
6.2.2 Exemples :

Circuit RC série

$e(t) = RC\frac{du(t)}{dt} + u(t)$

$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+Tp}$

Avec : $\begin{cases} K = 1 \\ T = RC \end{cases}$



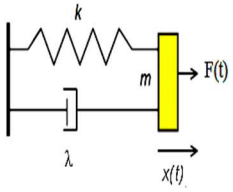
Système masse-ressort

$F(t) = F_k(t) + F_\lambda(t)$; en négligeant m :

$F(t) = k.x(t) + \lambda\frac{dx(t)}{dt}$

$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{K}{1+Tp}$

Avec : $\begin{cases} K = {}^1/_k \\ T = {}^\lambda/_k \end{cases}$



6.2.3 Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre

La réponse impulsionnelle est obtenue avec une entrée impulsion de Dirac :

$$\begin{cases} e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1 \\ S(p) = E(p)H(p) = \dfrac{K}{1+Tp} \end{cases}$$

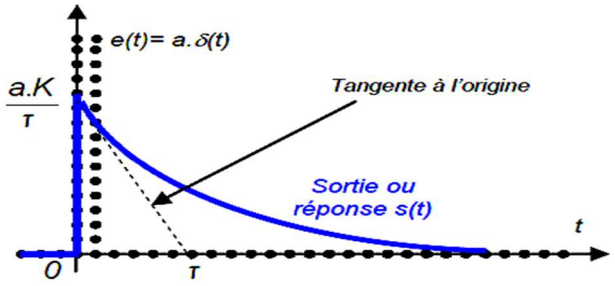


Figure 6.8. Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre

6.2.3.1 Calcul de la réponse temporelle :

$$\begin{cases} L^{-1}\left[\dfrac{1}{p+a}\right] = e^{-a}.u(t) \ : \textit{voir table des transformées de Laplace en annexe} \\ s(t) = L^{-1}[S(p)] = L^{-1}[S(p)] = L^{-1}\left[\dfrac{K}{1+Tp}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{K}{T(p+{}^1/_T)}\right] = \left(\dfrac{K}{T}e^{-{}^t/_T}\right).u(t) \end{cases}$$

6.2.3.2 Caractéristiques de la réponse impulsionnelle :

- La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses au temps $t = T$,
- $s(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} s(t) = \lim\limits_{p\to 0} pS(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\frac{K}{p(T+{}^1/_p)} = 0$

6.2.4 Réponse à un échelon d'un système de premier ordre

On applique à l'entrée du système un échelon d'amplitude E_0.

Lorsque $E_0 = 1 \Rightarrow e(t) = u(t)$, on parle de réponse indicielle.

$e(t) = E_0u(t) \Rightarrow L[e(t)] = E(p) = \frac{E_0}{p} \Leftrightarrow S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K}{1+Tp}$

6.2.4.1 Calcul de la réponse temporelle :

$$\begin{cases} L^{-1}\left[\dfrac{a}{p(p+a)}\right] = (1-e^{-at}).u(t) \ : \textit{voir table des transformées de Laplace en annexe} \\ s(t) = L^{-1}[S(p)] = L^{-1}\left[\dfrac{E_0}{p}\dfrac{K}{1+Tp}\right] = L^{-1}\left[KE_0\dfrac{{}^{1}/_{\tau T}}{p(p+{}^{1}/_{T})}\right] = KE_0\left(1-e^{-{}^{t}/_{T}}\right).u(t) \end{cases}$$

Pour $t = T \Rightarrow s(\tau) = KE_0\left(1-e^{-{}^{T}/_{T}}\right) = KE\left(1-e^{-1}\right) = 0{,}63KE_0$

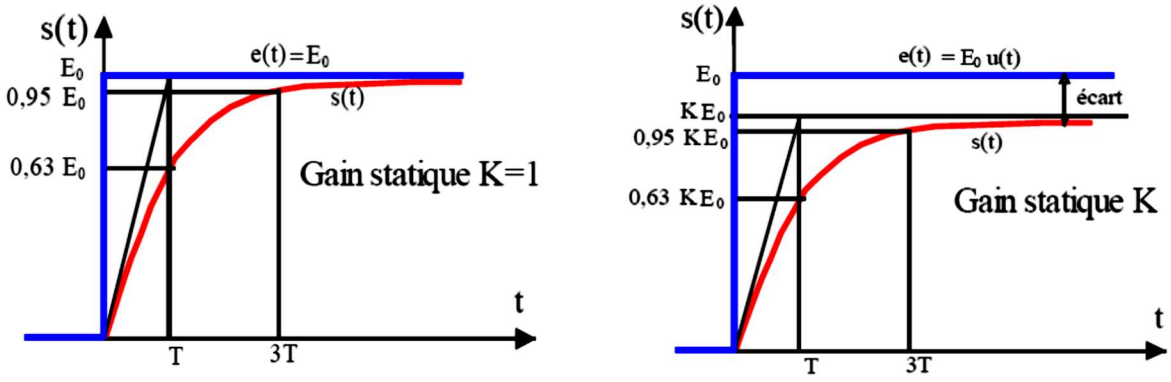


Figure 6.9. Réponse en échelon d'un système de premier ordre

6.2.4.2 Propriétés remarquables

Si les conditions initiales sont nulles, on aura :

- **Valeur finale de $s(t)$:**

$$s(\infty) = \lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{E_0}{p}\frac{K}{1+Tp} = KE_0$$

Le système a une asymptote horizontale $s(\infty) = KE_0$; Le gain statique caractérise le comportement du système en régime permanent

- **Tangente à l'origine :**

$$s'(0) = \lim_{t\to 0} s'(t) = \lim_{p\to\infty} pS'(p) = \lim_{p\to\infty} p^2 S(p) = \lim_{p\to\infty} p^2\frac{E_0}{p}\frac{K}{1+Tp} = \frac{KE_0}{T}$$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote finale $s(\infty) = KE_0$ au temps $t = T$

- **Temps de réponse :**

Le temps de réponse $\boldsymbol{tr_{5\%}}$ (ou de stabilisation) est défini comme étant le temps au bout duquel la réponse du système ne dépasse pas les $\pm 5\%$ de son état permanent ; on cherche donc :

$$\begin{cases} s(\infty) - s(tr_{5\%}) = 5\%s(\infty) \Rightarrow s(tr_{5\%}) = 95\%s(\infty) \\ KE_0\left(1-e^{-{}^{tr_{5\%}}/_{T}}\right) = 0{,}95KE_0 \end{cases} \Rightarrow tr_{5\%} = 3T$$

Le temps de réponse $\boldsymbol{tr_{5\%}}$ caractérise la fin du régime transitoire

➢ **Temps de montée :**

Le temps au bout duquel la réponse du système atteigne 90% de la valeur finale (régime permanent), est appelé temps de montée $\boldsymbol{t_m}$:

$$90\%(KE_0) = 0{,}9.KE_0 = KE_0\left(1 - e^{-t_m/T}\right) \Rightarrow t_m = 2{,}3T$$

6.2.4.3 Influence des paramètres :

- Le système est d'autant plus rapide que la constante de temps T est faible,
- Pour augmenter la précision d'un système, il suffit d'accroitre la valeur du gain statique K.

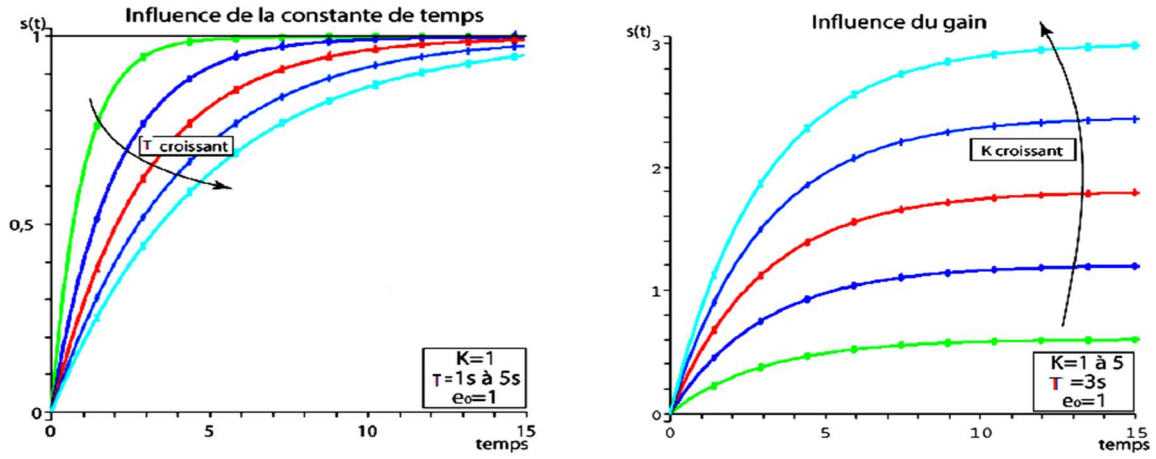


Figure 6.10. Influence des paramètres d'un système de premier ordre

6.2.5 Réponse à une rampe d'un système de premier ordre

Si un système de premier ord est excité par une rampe de type : $e(t) = at.u(t)$, on parle donc de réponse en vitesse ou réponse à une rampe :

$$\begin{cases} e(t) = at.u(t) \Rightarrow L[e(t)] = E(p) = \dfrac{a}{p^2} \\ S(p) = E(p)H(p) = \dfrac{aK}{p^2(1+Tp)} = K\left(\dfrac{a}{p^2} - \dfrac{aT}{p} + \dfrac{aT^2}{1+Tp}\right) \end{cases}$$

6.2.5.1 Calcul de la réponse temporelle

En consultant la table des transformées de Laplace, il est aisé de déduire la transformée inverse de $S(p)$:

$$\begin{cases} L^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right] = u(t)\ ;\ L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2}\right] = t.u(t)\ ;\ L^{-1}\left[\dfrac{1}{p+a}\right] = e^{-at}.u(t) \\ s(t) = L^{-1}[S(p)] = L^{-1}\left[K\left(\dfrac{a}{p^2} - \dfrac{aT}{p} + \dfrac{aT^2}{1+Tp}\right)\right] = aK\left(t - T + Te^{-t/T}\right).u(t) \end{cases}$$

Le gain K de la fonction de transfert influe énormément sur l'allure de la réponse temporelle :

- pour K = 1, la rampe de sortie suit celle de la commande ; dans ce cas, et en régime établi, il apparaît un écart appelé erreur de traînage ε_v ; On dit que la sortie "suit" l'entrée avec un retard T.
- pour une valeur quelconque du gain, la sortie ne suit pas l'entrée ; on dit qu'elle traîne. L'écart s'agrandit régulièrement et à la limite devient infini :
  - si K < 1, la pente de la réponse diverge à droite de celle de la commande, l'erreur entre l'entrée et la sortie augmente.
  - si K > 1, la pente de la réponse coupe celle de la commande et diverge à gauche, l'erreur entre l'entrée et la sortie diminue, s'annule, puis augmente.

6.2.5.2 Notion d'écart (ou erreur) de traînage

L'erreur de traînage représente un critère de précision pour une réponse en vitesse d'un système de premier ordre dont le gain statique est unitaire (K = 1), c'est l'écart entre la sortie et l'entrée du système :

$$\varepsilon_v = \lim_{t\to\infty}[e(t) - s(t)] = \lim_{p\to 0} p[E(p) - S(p)] = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{a}{p^2} - \left(\frac{a}{p^2} - \frac{aT}{p} + \frac{aT^2}{1+Tp}\right)\right] = aT$$

Nottons qu'on a utilisé le théorème de la valeur finale pour trouver ce résultat.

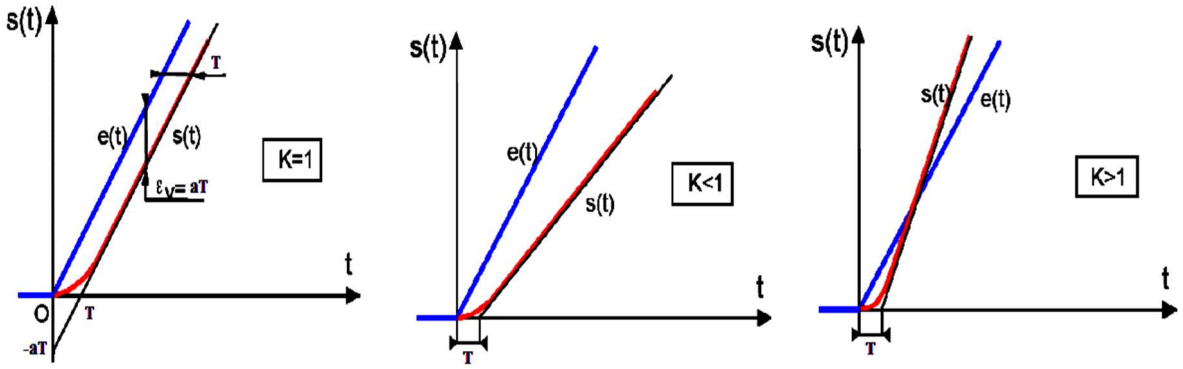


Figure 6.11. Réponse en vitesse d'un système de premier ordre

6.3 ETUDE D'UN SYSTEME DE DEUXIEME ORDRE

Les systèmes du second ordre, permettent de modéliser des systèmes aux comportements plus variés : suivi de consigne avec retard, oscillations entretenues ou amorties.

6.3.1 Définition

On appelle système de deuxième ordre, tout système dont le fonctionnement est régi, dans le cadre de certaines hypothèses (linéarisation, continuité invariance...), par une équation différentielle linéaire de second ordre à coefficients constants :

$$\boldsymbol{b\frac{d^2s(t)}{dt^2} + a\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)},$$

Essayons d'écrire cette équation sous forme canonique pour faire apparaître trois paramètres dont l'importance sera mise en évidence.

$\frac{1}{\omega_0{}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=Ke(t)$, Où :

$$\begin{cases} K: gain\ statique\ du\ système; sans\ unité\ si\ e(t)\ et\ s(t)\ sont\ de\ meme\ nature \\ \omega_0 : pulsation\ propre\ du\ système, (notée\ parfois\ \omega_n)\ en\ {}^{rad}/_{s} \\ z\ :\ Coeficient\ ou\ facteur\ d'amortissement, (noté\ parfois\ \xi\ ou\ m),\ \ sans\ unité \end{cases}$$

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K\,\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2+2z\omega_0 p+p^2}=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\left(\frac{1}{\omega_0{}^2}\right)p^2}$$

Exemple :

Soit à modéliser un système mécanique représenté par un amortisseur d'une voiture. L'entrée de ce système est la force $F_e(t)$, tandis que $x(t)$ indique la sortie qui correspond à la position du châssis mesurée par rapport à la position d'équilibre. L'amortisseur est constitué d'un ressort dont le coefficient de raideur est k et d'un amortisseur visqueux dont le coefficient est f ; M représente la masse de la voiture (figure 6.12).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on montre que : $F_e(t)-k.x(t)-f.\frac{dx(t)}{dt}=M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$

On demande de calculer la fonction de transfert de ce système sous sa forme canonique

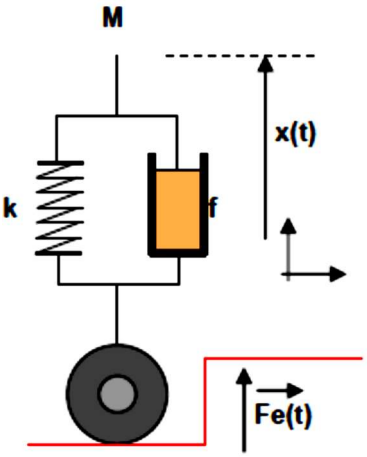


Figure 6.12. Système de 2ème ordre

Réponse :

On applique la transformation de Laplace sur l'équation différentielle, on trouve :

$F_e(p)-kX(p)-fpX(p)=Mp^2X(p)$ où : $\begin{cases} F_e(p)=L[F_e(t)] \\ X(p)=L[x(t)] \end{cases}$

La fonction de transfert $H(p)=\frac{X(p)}{F_e(p)}=\frac{1}{k+fp+M^{\ 2}}$; par identification on trouve :

$$\begin{cases} H(p)=\frac{1}{k+fp+M^{\ 2}}=\frac{{}^1/_k}{1+\left({}^f/_k\right)p+\left({}^M/_k\right)p^2} \\ H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\left(\frac{1}{\omega_0{}^2}\right)p^2} \end{cases} \text{ Donc : } K={}^1/_k\ ;\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{M}}\ ;\ z=\frac{f}{2\sqrt{kM}}$$

6.3.2 Réponse impulsionnelle d'un système de deuxième ordre

Pour une entrée de type impulsion de Dirac, on aura :

$$\begin{cases} e(t)=\delta(t)\Rightarrow E(p)=1\ ; \\ H(p)=\frac{K\,\omega_0{}^2}{p^2+2z\omega_0 p+\omega_0{}^2} \end{cases} \Rightarrow\ S(p)=\ E(p)H(p)=\frac{K\,\omega_0{}^2}{p^2+2z\omega_0 p+\omega_0{}^2}\frac{K\,\omega_0{}^2}{D(p)}$$

6.3.2.1 Calcul de la réponse temporelle à une impulsion :

On remarque que l'équation du dénominateur $D(p)$ de $S(p)$ peut avoir plusieurs solutions suivant la valeur du coefficient d'amortissement $\boldsymbol{z}$. Trois cas sont possibles :

$D = p^2 + 2z\omega_0 p + {\omega_0}^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4z^2.{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(z^2 - 1)$

- **1er cas : $z = 1$**

$\Rightarrow \Delta = 4{\omega_0}^2(z^2 - 1) = 0$; C'est le régime apériodique critique : Le système est amorti. $S(p)$ possède un pôle double tel que :

$$p_0 = -z\omega_0 \quad \Rightarrow S(p) = \frac{K\,{\omega_0}^2}{(p - p_0)^2} \quad \Rightarrow s(t) = L^{-1}\,[S(p)] = [K\,{\omega_0}^2.t.e^{-z\omega_0.t}]u(t)$$

- **2ème cas : $z > 1$**

$\Rightarrow \Delta = 4{\omega_0}^2(z^2 - 1) > 0$; C'est le régime apériodique : Le système est hyperamorti. $S(p)$ possède deux pôles réels tels que :

$$\begin{cases} p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \\ p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow S(p) = \frac{K\,{\omega_0}^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{K\,\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right)$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\,[S(p)] = \frac{K\,\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}}[e^{p_2.t} - e^{p_1.t}]u(t)$$

- **3ème cas : $0 < z < 1$**

$\Rightarrow \Delta = 4{\omega_0}^2(z^2 - 1) < 0$; C'est le régime oscillant pseudopériodique : Le système est faiblement ou sous-amorti. $S(p)$ possède deux pôles complexes conjugués tels que :

$$\begin{cases} p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - z^2} \\ p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - z^2} \end{cases} \Rightarrow S(p) = \frac{K\,{\omega_0}^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

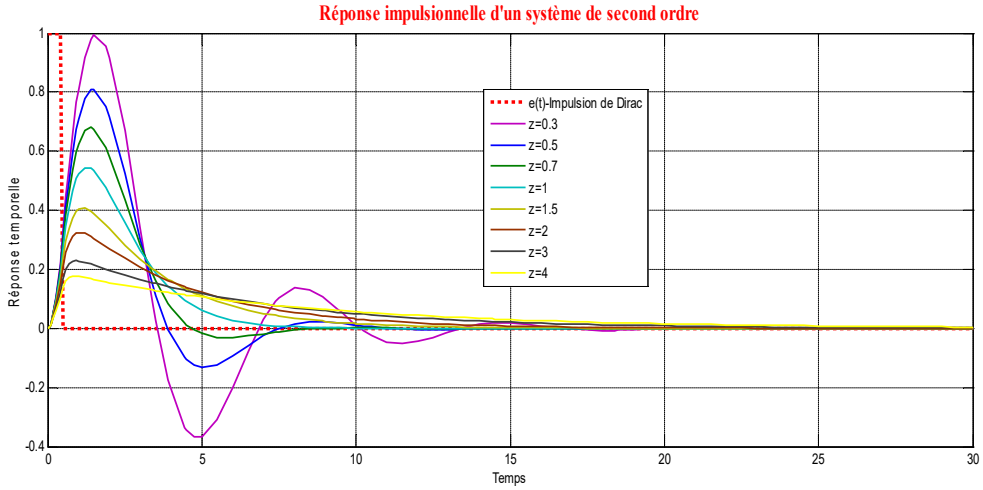


Figure 6.13. Influence du coeficient d'amortissement sur la réponse impulsionnelle d'un système de 2ème ordre

Après décomposition et consultation de la table des transformées de Laplace, on obtient :

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\,[S(p)] = \frac{K\,\omega_0}{\sqrt{1-z^2}}\left[e^{-z\omega_0.t}.\sin\left(\omega_0.t\sqrt{1-z^2}\right)\right]u(t)$$

6.3.3 Réponse indicielle d'un système de deuxième ordre

On se propose de déterminer la réponse d'un système de second ordre à un échelon d'amplitude E_0 : $e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow L[e(t)] = E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\begin{cases} E(p) = \frac{E_0}{p} \\ H(p) = \frac{K\,{\omega_0}^2}{p^2+2z\omega_0 p+{\omega_0}^2} \end{cases} \Rightarrow S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K\,{\omega_0}^2}{p^2+2z\omega_0 p+{\omega_0}^2}$$

6.3.3.1 Caractéristiques de la réponse indicielle

- **Réponse finale $s(\infty)$**

$$\boldsymbol{s(\infty)} = \lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0}\frac{E_0}{p}\frac{K\,{\omega_0}^2}{p^2+2z\omega_0 p+{\omega_0}^2} = \boldsymbol{KE_0}$$

On remarque que les termes z et ω_0 n'interviennent que dans le régime transitoire. Le régime établi ne dépend que du gain statique K.

- **Tangente à l'origine**

$$\boldsymbol{s'(0^+)} = \lim_{t\to 0} s'(t) = \lim_{p\to+\infty} p[pS(p)-s(0)] = \lim_{p\to+\infty}[p^2S(p)] = \boldsymbol{0}$$

La tangente à l'origine a donc une pente nulle (droite horizontale), ce qui diffère des systèmes du 1er ordre.

6.3.3.2 Calcul de la réponse temporelle

Dans ce cas de réponse, il existe aussi trois cas suivant le régime de fonctionnement :

- **Régime apériodique ($z > 1$)**

Dans ce cas, $D(p)$ possède 2 racines réelles notées p_1 et p_2 avec $p_1 < p_2 < 0$:

$$\begin{cases} p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2-1} \\ p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2-1} \end{cases} \Rightarrow S(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K\,{\omega_0}^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{K\,E_0\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p-p_1}-\frac{1}{p-p_2}\right)$$

Après la décomposition en éléments simples de $S(p)$, et en consultant la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\,[S(p)] = \left[K + \frac{K\,\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{e^{p_2.t}}{p_2} - \frac{e^{p_1.t}}{p_1}\right)\right]E_0.u(t)$$

La réponse est non oscillatoire, dès qu'on s'éloigne de t = 0, le système du second ordre est

semblable à celui du premier ordre.

- **Régime apériodique critique $(z = 1)$**

Ce régime est un cas particulier du régime apériodique. Dans ce cas, $D(p)$ possède une racine réelle double : $p_0 = -\omega_0$: $\Rightarrow S(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K\,{\omega_0}^2}{(p+\omega_0)^2}$.

La réponse temporelle est :

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\,[S(p)] = KE_0[1 - (1 + \omega_0.t)e^{-\omega_0.t}]u(t)$$

L'allure de la réponse est similaire à celle du régime amorti. Elle est non oscillante, c'est le régime apériodique le plus rapide.

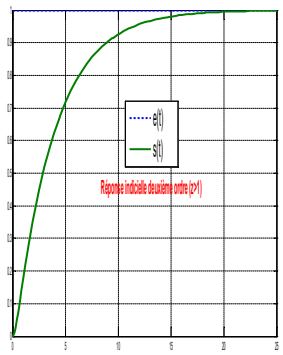
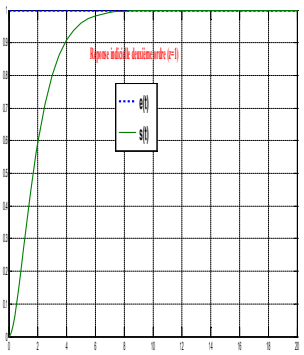
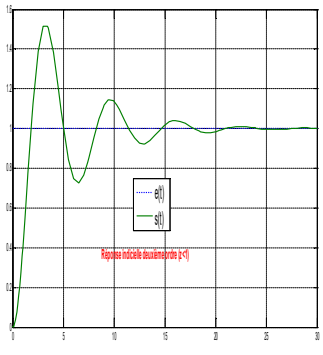
- **Régime pseudopériodique $(z < 1)$**

$D(p)$ possède 2 racines complexes conjuguées p_1 et p_2

$$\begin{cases} p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{z^2-1} \\ p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{z^2-1} \end{cases} \Rightarrow S(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K\,{\omega_0}^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{K\,E_0\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2}\right)$$

En décomposant $S(p)$ en éléments simples et en consultant la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\,[S(p)] = KE_0\left[1 + \frac{\omega_0}{\omega_p}e^{-z\omega_0.t}\sin(\omega_p.t + \varphi)\right].u(t), avec \begin{cases} \omega_p = \omega_0\sqrt{1-z^2} \\ \varphi = arc\cos z \end{cases}$$

Régime apériodique $(z > 1)$	Régime apériodique critique $(z = 1)$	Régime pseudopériodique $(z < 1)$
		

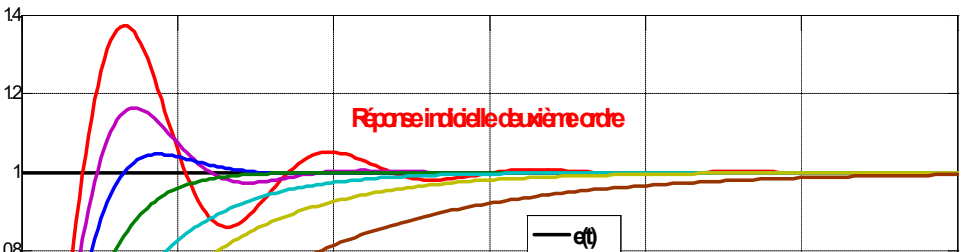


Figure 6.14. Evolution de la réponse indicielle d'un système de 2ème ordre
En fonction du coeficient d'amortissement

6.3.3.3 Paramètres remarquables de la réponse ($z < 1$)

La réponse indicielle oscillatoire amortie ($\boldsymbol{z < 1}$), est caractérisée par cinq paramètres :

- **La pseudo-période : T_p**

C'est le temps qui sépare deux maximums successifs (ou deux minimums successifs) :
$\boldsymbol{T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}}$ où : $\boldsymbol{\omega_p}$ est la pseudo-pulsation.

- **Le temps de montée : t_m**

C'est le temps qui met le système pour atteindre la valeur finale de $s(t_m) = KE_0$ pour la première fois.

$\Rightarrow s(t_m) = KE_0\left[1 + \frac{\omega_0}{\omega_p}e^{-z\omega_0.t}\sin(\omega_p.t+\varphi)\right]$, ceci est vrai si : $\sin(\omega_p.t+\varphi) = 0$

$\Rightarrow \sin(\omega_p.t+\varphi) = 0 \Rightarrow \omega_p.t+\varphi = a\pi \Rightarrow t_m = \frac{a\pi}{\omega_p} - \frac{\varphi}{\omega_p} = \frac{a\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} - \frac{arc\cos z}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$

- **Le temps de réponse : t_r**

Le temps de réponse à n% représente le temps au bout duquel le signal de sortie peut être contenu dans un intervalle de ±n% autour de sa valeur finale.
Le temps de réponse à 5%($\boldsymbol{t_{r5\%}}$), durée au-delà de laquelle la réponse reste comprise dans l'intervalle $\boldsymbol{\mp 5\%}$ de la réponse finale $\boldsymbol{s}(\infty)$, ce temps varie suivant la valeur du facteur d'amortissement :

- $z \ll 1$, l'amortissement est faible, les oscillations sont mal amorties, le temps de réponse est grand.
- $z = 0.69$, le système présente un dépassement faible, égal à 5%, avec le temps de réponse le plus faible.
- $z = 1$, le système ne présente pas de dépassement au sens mathématique, il ne correspond pas au minimum absolu du temps de réponse, il s'agit cependant du système sans dépassement le plus rapide.
- $z \gg 1$, il n'y a pas de dépassement, mais le système est hyper amorti, donc le temps de réponse est grand.

A noter qu'il n'y a pas d'expression simple pour déterminer la valeur exacte de ($t_{r5\%}$). Une courbe appelée abaque (figure 6.15) donne une valeur approximative du **temps de réponse réduit** ($\omega_0 . t_{r5\%}$)en fonction du facteur d'amortissement **z**. On remarque sur cette abaque que :

- pour **z > 0.7**, le temps de réponse augmente lorsque z augmente ;
- pour **z < 0.7**, le temps de réponse augmente lorsque z diminue ;
- Le temps de réponse est minimal pour **z = 0.7**

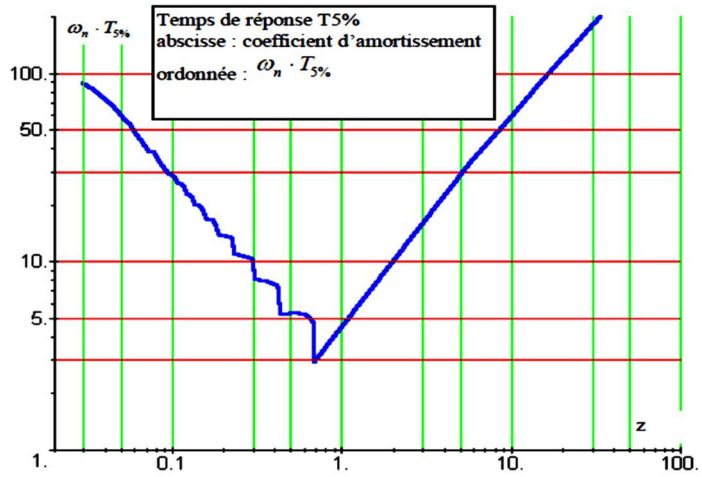


Figure 6.15. Abaque du temps de réponse réduit d'un système de 2ème ordre
En fonction du coeficient d'amortissement

- **Le temps de pic : t_{pic}**

Le temps de pic correspond au temps du premier dépassement de la réponse :

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \frac{T_p}{2}$$

En généralisant, on peut dire que pour un $k^{ième}$ dépassement D_k correspond un temps t_k:

$$t_k = \frac{k.\pi}{\omega_p} = \frac{k.\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = k\frac{T_p}{2}$$

➢ **Dépassement absolu D_k et Dépassement relatif $D_{k\%}$**

Le $k^{ième}$ dépassement D_k, représente l'amplitude du $k^{ième}$ maximum sur la valeur finale de la sortie : $\begin{cases} D_k = s(t_k) - s(\infty) = KE_0.\ e^{\frac{-\pi.z}{\sqrt{1-z^2}}} : \text{Dépassement absolu} \\ D_{k\%} = \frac{s(t_k)-s(\infty)}{s(\infty)}100 = 100.e^{\left(\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}\right)} : \text{Dépassement relatif} \end{cases}$

Récapitulatif de la réponse indicielle d'un système de 2ième ordre lorsque $z < 1$	
$s(t) = L^{-1}[S(p)] = KE_0\left[1 + \frac{\omega_0}{\omega_p}e^{-z\omega_0.t}\sin(\omega_p.t + \varphi)\right].u(t), avec \begin{cases}\omega_p = \omega_0\sqrt{1-z^2} \\ \varphi = arc\cos z\end{cases}$	
Pseudo-période : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$	Temps de pic : $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \frac{T_p}{2}$
Temps de montée : $t_m = \frac{a\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} - \frac{arc\cos z}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$	Temps de réponse : $t_r = \pm 5\%.s(\infty)$
Dépassement absolu : $D_k = KE_0.\ e^{\frac{-\pi.z}{\sqrt{1-z^2}}}$	Dépassement relatif : $D_{k\%} = 100.e^{\left(\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}\right)}$

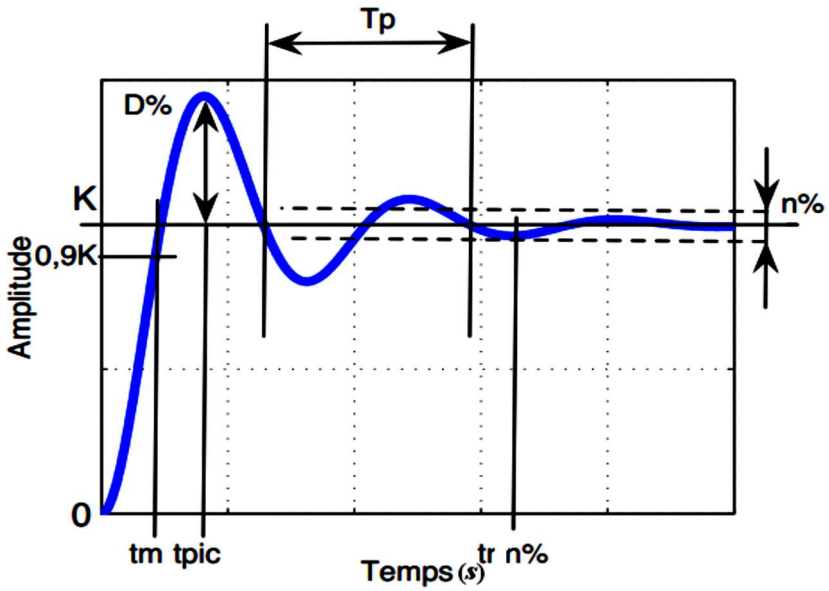


Figure 6.16. Paramètres d'un système de 2ème ordre avec $z < 1$

6.3.4 Réponse d'un système du second ordre à une rampe

L'entrée est une rampe de pente a :

$$\begin{cases} e(t) = a.t.u(t) \Rightarrow L[e(t)] = E(p) = \frac{a}{p^2} \\ H(p) = \frac{K\,{\omega_0}^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + {\omega_0}^2} \end{cases} \Rightarrow S(p) = E(p)H(p) = \frac{a}{p^2}\frac{K\,{\omega_0}^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + {\omega_0}^2}$$

Après décomposition en éléments simples, et transformation inverse de Laplace ; on remarque

aussi dans ce cas de réponse que suivant la nature des racines du polynôme du dénominateur, la décomposition en éléments simples sera différente. Il existe trois cas :

6.3.4.1 Réponse à une rampe en régime apériodique (z > 1)

Dans ce cas, $D(p)$ possède 2 racines réelles. Après la décomposition en éléments simples de $S(p)$, et en consultant la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$\Rightarrow \begin{cases} S(p) = \dfrac{K\,a}{p^2(1+T_1.p)(1+T_2.p)} \; avec \; : \; T_1 = \dfrac{1}{\omega_0\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)} \; et \; T_2 = \dfrac{1}{\omega_0\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)} \\ s(t) = L^{-1}\left[S(p)\right] = Ka\left[t - T_1 - T_2 - \dfrac{1}{T_2 - T_1}\left({T_1}^2.e^{-t/T_1} - {T_2}^2.e^{-t/T_2}\right)\right].u(t) \end{cases}$$

6.3.4.2 Réponse à une rampe en régime apériodique critique (z =1)

$D(p)$ possède 2 racines réelles. Après la décomposition en éléments simples de $S(p)$, et en consultant la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$\Rightarrow \begin{cases} S(p) = \dfrac{K\,a}{p^2(1+T.p)^2} \; avec \; : \; T = \dfrac{1}{\omega_0} \\ s(t) = L^{-1}\left[S(p)\right] = Ka\left[t - 2T + (t+2T)e^{-t/T}\right].u(t) \end{cases}$$

On remarque que le régime apériodique critique est un cas particulier du régime apériodique

6.3.4.3 Réponse à une rampe en régime oscillatoire (z < 1)

$$\Rightarrow \begin{cases} S(p) = \dfrac{a}{p^2}\dfrac{K\,{\omega_0}^2}{\left(p^2 + 2z\omega_0 p + {\omega_0}^2\right)} \; ; on\,pose \; : \; \varphi = arc\,\text{tang}\left(\dfrac{2z\sqrt{1-z^2}}{1-2z^2}\right) \\ s(t) = L^{-1}\left[S(p)\right] = Ka\left[t - \dfrac{2z}{\omega_0} + \dfrac{1}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t + \varphi\right)\right].u(t) \end{cases}$$

6.3.4.4 Comportement du système à une entrée en rampe :

- $\boldsymbol{z \geq 1}$**:** La réponse ressemble à celle d'un système de 1er ordre.
- $\boldsymbol{z < 1}$: La réponse transitoire est oscillante autour de l'asymptote ; puis ressemble à celle d'un 1er ordre en régime permanent.
- Dans tous les cas, pour K = 1, l'asymptote est parallèle à la rampe d'entrée. L'erreur de trainage est proportionnelle au facteur d'amortissement, elle vaut **:** $\boldsymbol{\varepsilon_T = \frac{2za}{\omega_0}}$

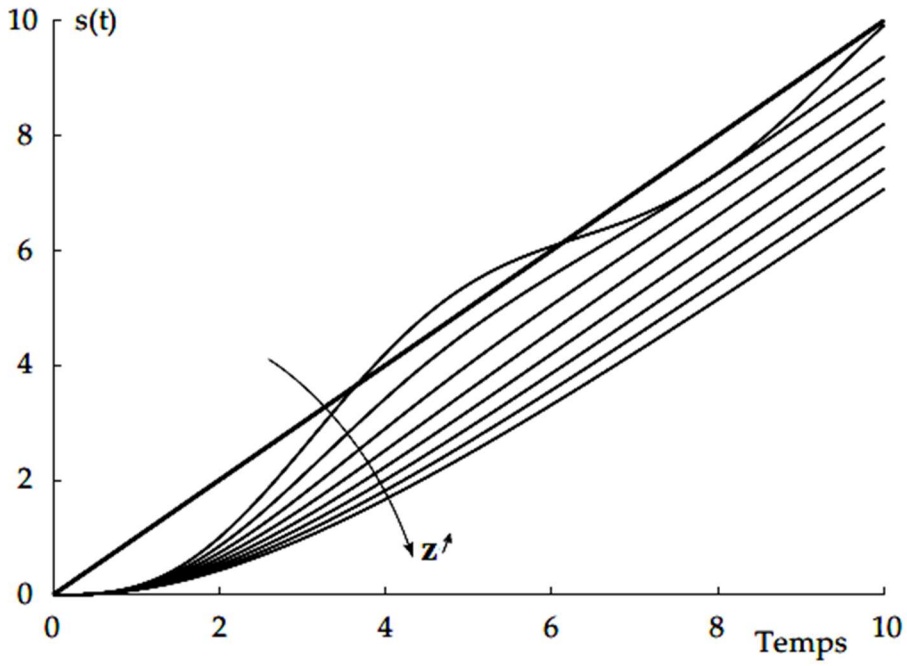


Figure 6.17. Réponse d'un système du second ordre à une rampe unitaire pour $K = 1;\ \omega_0 = 1$ et différentes valeurs de z

CHAPITRE 7 : DIAGRAMME DE BODE ET DE NYQUIST DES SYSTEMES

7.1 ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYSTEMES

L'analyse temporelle des systèmes linéaires continus et invariants nous renseigne sur leur nature, et nous fournit déjà un certain nombre d'éléments qui vont permettre d'entrevoir leur comportement.

Cependant, elle ne suffit pas à expliquer un certain nombre de leurs propriétés. Une étude harmonique des systèmes, ou l'analyse de leur comportement dans le domaine fréquentiel est un outil complémentaire grâce à des techniques qui vont prédire leurs aspects, spécialement dans l'étude de l'automatique en général.

7.1.1 Modélisation fréquentielle des systèmes linéaires continus

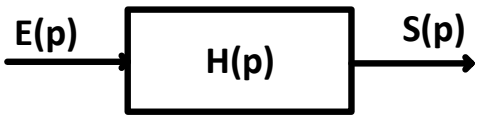
Le signal réel en entrée d'un système est rarement un signal simple (échelon, rampe…). Une analyse théorique développée par Fourier permet de considérer que tout signal (périodique ou non) peut se décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences et d'amplitudes différentes.

L'étude harmonique (fréquentielle) d'un système linéaire consiste à analyser son comportement, en régime permanent, lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée sinusoïdal d'amplitude **A** et de pulsation **ω**.

7.1.2 Réponse harmonique des systèmes linéaires

Soit un système linéaire continu et invariant d'entrée e(t) et de sortie s(t) régi par une équation différentielle à coefficients constants :

$$\mathbf{a_0}\boldsymbol{e(t)} + \mathbf{a_1}\frac{\boldsymbol{de(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \mathbf{a_2}\frac{\boldsymbol{d^2e(t)}}{\boldsymbol{dt^2}} + \cdots + \mathbf{a}_n\frac{\boldsymbol{d^ne(t)}}{\boldsymbol{dt^n}} = \boldsymbol{b_0 s(t)} + \mathbf{b_1}\frac{\boldsymbol{ds(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \mathbf{b_2}\frac{\boldsymbol{d^2s(t)}}{\boldsymbol{dt^2}} + \cdots + \mathbf{b}_m\frac{\boldsymbol{d^ms(t)}}{\boldsymbol{dt^m}}$$



Une étude mathématique approfondie du comportement de ce type de systèmes, montre que la réponse d'un tel système à une entrée sinusoïdale d'amplitude $\boldsymbol{A}$ de pulsation $\boldsymbol{\omega}$ s'obtient directement à partir de la fonction de transfert dans laquelle on remplace la variable $\boldsymbol{p}$ par $j\boldsymbol{\omega}$.

On appelle réponse harmonique, la sortie $\boldsymbol{s(t)}$ en régime permanent d'un système soumis à une entrée $\boldsymbol{e(t)}$ périodique (sinusoïdale par exemple).

$$\begin{cases} \boldsymbol{e(t) = A\sin(\omega t)} \\ \boldsymbol{s(t) = B\sin(\omega t + \varphi)} \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{S(p) = H(p)E(p)}$$ En posant : $p = j\omega \Longrightarrow \boldsymbol{H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}}$

On peut caractériser l'effet du système avec deux grandeurs qui sont :

- Le rapport des amplitudes $\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$ appelé **Gain** du système.
- Le déphasage (phase) du système : qui représente le décalage de $\boldsymbol{s(t)}$) par rapport à $\boldsymbol{e(t)}$.

L'objet d'une étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du gain et de la phase, en fonction de la variation de la valeur de la pulsation $\boldsymbol{\omega}$ du signal d'entrée, sur la réponse harmonique du système.

Si on associe à tous les signaux une représentation complexe, L'analyse fréquentielle d'un système consistera principalement à déterminer sa fonction de transfert harmonique, puis en l'étude de son module $|\boldsymbol{H(j\omega)}|$ et son argument $\boldsymbol{\varphi(j\omega)}$, en fonction de la pulsation ou de la fréquence :

$$\begin{cases} \boldsymbol{G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{B}{A}} \ \textit{représente le module de la fonction de transfert } \boldsymbol{H(j\omega)} \\ \boldsymbol{\varphi(\omega) = \varphi} \ \ \textit{représente l'argument de la fonction de transfert } \boldsymbol{H(j\omega)} \end{cases}$$

7.2 DIAGRAMME DE BODE

Le diagramme de Bode décrit l'évolution d'une fonction de transfert $\boldsymbol{H(j\omega)}$ à travers une représentation graphique. Il consiste à tracer deux graphes correspondant respectivement au module $\boldsymbol{G(\omega)}$ et l'argument $\boldsymbol{\varphi(\omega)}$ de $\boldsymbol{H(j\omega)}$.

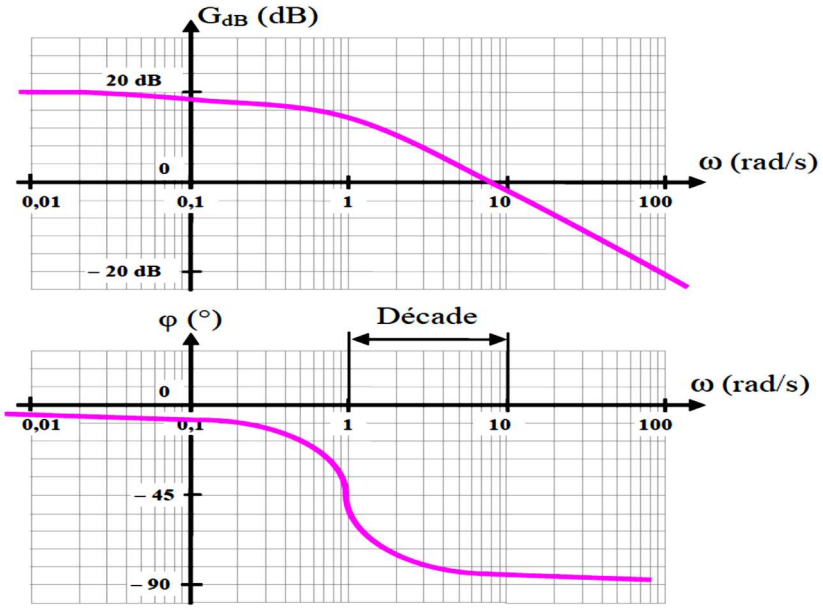


Figure 6.1. Tracés du diagramme de Bode

Afin de pouvoir caractériser la réponse d'un système linéaire à tout type de signaux, dont les spectres peuvent s'étendre des très basses aux très hautes fréquences, il est indispensable de connaître son comportement harmonique pour une très large gamme de fréquences. Pour compresser cette gamme dynamique, la représentation graphique de Bode utilise une échelle logarithmique pour l'axe des abscisses correspondant à la pulsation $\boldsymbol{\omega}$ ou à la fréquence.

L'amplitude de la réponse peut également s'étendre sur plusieurs ordres de grandeur. On utilise donc également une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées qui est gradué en décibels.

7.2.1 Approche méthodique du tracé des diagrammes de Bode

Une fonction de transfert peut se décomposer en un produit de fonctions de transfert élémentaires (ou canoniques). Le tracé du diagramme de Bode est alors obtenu en effectuant une somme graphique de chaque gain et chaque phase (ou argument) des fonctions de transferts élémentaires constituant la fonction de transfert du système étudié :

$$\boldsymbol{H(j\omega) = K[\pi_m(1 + T_m.j\omega)]\left[\pi_m\left(1 + \frac{2z_n}{\omega_{0n}}.j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0n}}.j\omega\right)^2\right)\right]\left[\frac{1}{(j\omega)^\alpha}.\frac{1}{[\pi_p(1 + T_p.j\omega)]}.\frac{1}{\left[\pi_k\left(1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}}.j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}}.j\omega\right)^2\right)\right]}\right]}$$

On remarque que $\boldsymbol{H(j\omega)}$ est le produit de fonctions de transfert élémentaires tels que :

- $\boldsymbol{K}$: Gain pur ;
- $\boldsymbol{\frac{1}{j\omega}}$: Intégrateur ;
- $\boldsymbol{1 + T_m.j\omega}$: Inverse d'une FT de 1er ordre ;
- $\boldsymbol{1 + \frac{2z_n}{\omega_{0n}}.j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0n}}.j\omega\right)^2}$: Inverse d'une FT de 2ème ordre ;
- $\boldsymbol{\frac{1}{1+T_m.j\omega}}$ **:** FT de 1er ordre ;
- $\boldsymbol{\frac{1}{1+\frac{2z_k}{\omega_{0k}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0k}}.j\omega\right)^2}}$ **:** FT de 2ème ordre.

Le module de $\boldsymbol{H(j\omega)}$ est alors le produit des modules de chaque fonction de transfert élémentaire. L'argument est la somme des arguments de chaque fonction de transfert élémentaire.

L'échelle en dB permet de transformer le produit des modules en une somme. On peut alors tracer séparément les diagrammes de Bode de chaque fonction de transfert élémentaire, puis faire la somme des modules et des arguments afin d'obtenir le diagramme de Bode final qui correspondra au comportement fréquentiel du système $\boldsymbol{H(j\omega)}$:

$\boldsymbol{H(j\omega) = H_1(j\omega).H_2(j\omega) \ldots H_n(j\omega)}$ Alors :

$$\boldsymbol{G_{dB}(\omega) = 20log|H(j\omega)| = 20log|H_1(j\omega)| + 20log|H_2(j\omega)| + \cdots + 20log|H_n(j\omega)|}$$

7.2.2 Courbes de Bode et diagrammes asymptotiques de systèmes élémentaires

Il est souvent utile d'étudier le comportement aux limites des très basses fréquences (limite statique) et des très hautes fréquences du comportement d'un système. En échelle logarithmique cela correspond aux deux limites de l'axe des abscisses :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega \to 0} & \boldsymbol{\Longrightarrow log\omega \to -\infty} \\ \boldsymbol{\omega \to \infty} & \boldsymbol{\Longrightarrow log\omega \to +\infty} \end{cases}$$

On cherche systématiquement ces deux asymptotes pour toute fonction de transfert. On appelle diagrammes asymptotiques les diagrammes de Bode réduits à leurs asymptotes.

L'abscisse $\boldsymbol{\omega_c}$ du point d'intersection de deux asymptotes de la courbe de gain, lorsqu'il existe, constitue une pulsation de cassure.

7.2.2.1 Gain pur :

$H(j\omega) = K > 0$	
Gain en dB :	$G_{dB}(\omega) = 20logK$
Phase en degrés :	$\varphi(\omega) = 0°$

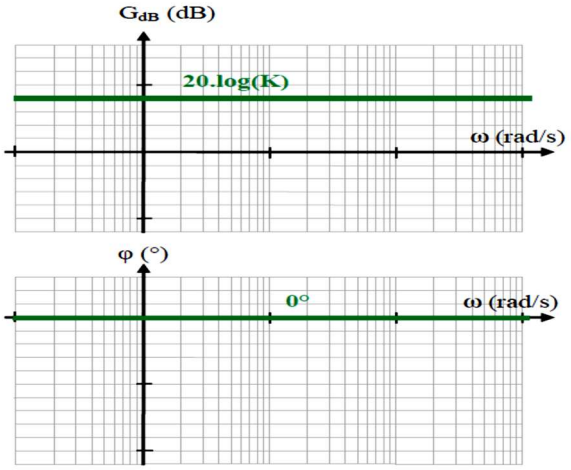


Figure 6.2. Tracés du diagramme de Bode d'un gain proportionnel

7.2.2.2 Intégrateur :

$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	
Gain en dB :	$G_{dB}(\omega) = 20log\left(\frac{K}{j\omega}\right)$ $= 20logK - 20log\omega$
Phase en degrés :	$\varphi(\omega) = -90°$

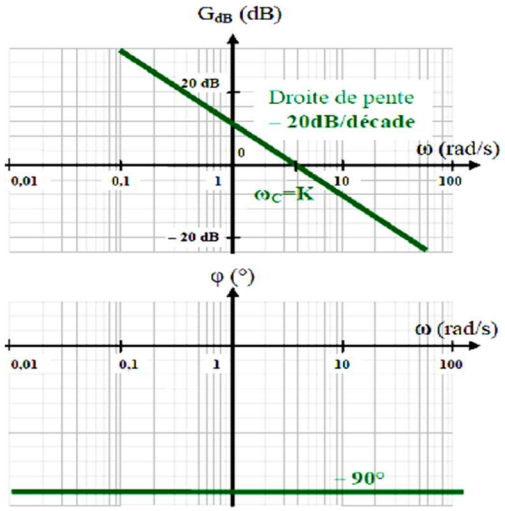


Figure 6.3. Tracés du diagramme de Bode d'un intégrateur

7.2.3 Réponse harmonique du système du 1er ordre

Le système du 1er ordre a pour fonction de transfert :

$H(p) = \frac{K}{1+Tp} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{1+Tj\omega}$	
Gain en dB :	$G_{dB}(\omega) = 20log\lvert H(j\omega)\rvert = 20logK - 20log\sqrt{1+(T\omega)^2}$
Phase en degrés :	$\varphi(\omega) = -Arg(1+Tj\omega) = -arctg\ (T\omega)$

7.2.3.1 Asymptotes du diagramme de Bode :

❖ Pour $w \longrightarrow 0, H(j\omega) \approx K$. (comportement de gain pur)

$G_{dB} = 20log\lvert H(j\omega)\rvert \approx 20logK$

$\varphi(w) = Arg\big(H(j\omega)\big) \approx 0^0$

❖ Pour $\omega \longrightarrow \infty, H(j\omega) \approx \frac{K}{Tj\omega}$.

(Comportement d'intégrateur)

$G_{dB}(\omega) = 20log|H(j\omega)| \approx 20log\frac{K}{T} - 20log\omega$

$(Droite\ de\ pente\ -20dB/décade$

$\varphi(\omega) = Arg\big(H(j\omega)\big) \approx -90^0$

7.2.3.2 Valeurs particulières :

La **Pulsation de cassure** (ω_c) du diagramme de Bode w_c vaut : $\omega_c = \frac{1}{T}$

$G_{dB}(\omega_c) = 20log\frac{K}{\sqrt{2}} = 20logK - 3dB$

$\varphi(w) = Arg\big(H(j\omega)\big) - arctg(1) = -45^0$

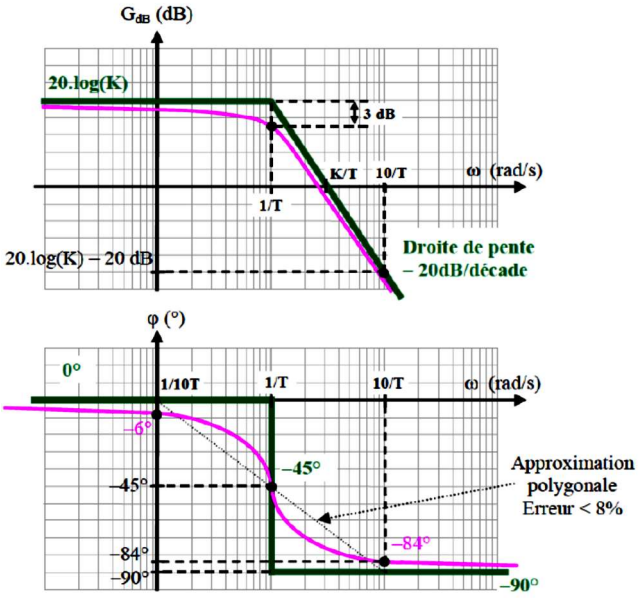


Figure 6.4. Tracés du diagramme de Bode d'un système de 1er ordre

7.2.4 Réponse harmonique du système du 2ème ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}j\omega + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2}$$

7.2.4.1 Cas $z > 1$ *ou* $z = 1$

La FT présente 2 pôles réels $p_1 et p_2$, (ou pole double p)

- $\mathbf{z > 1}$, le système peut être considéré comme le produit de deux systèmes de 1er ordre de constantes de temps : $\begin{cases} T_1 = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$

$$H(j\omega) = K\frac{1}{(1 + T_1 j\omega)}\frac{1}{(1 + T_2 j\omega)}$$

Pour $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$, la courbe de phase passe toujours par −90°.

Le tracé asymptotique se construit en ajoutant les tracés du gain des deux systèmes du premier ordre construits séparément dans un premier temps.

- $\boldsymbol{z = 1}$, la fonction de transfert devient un carré parfait : $H(j\omega) = K\frac{1}{(1+T_1 j\omega)^2}$.

Le tracé asymptotique (pole double) est représenté en pointillés sur la courbe ci-contre.

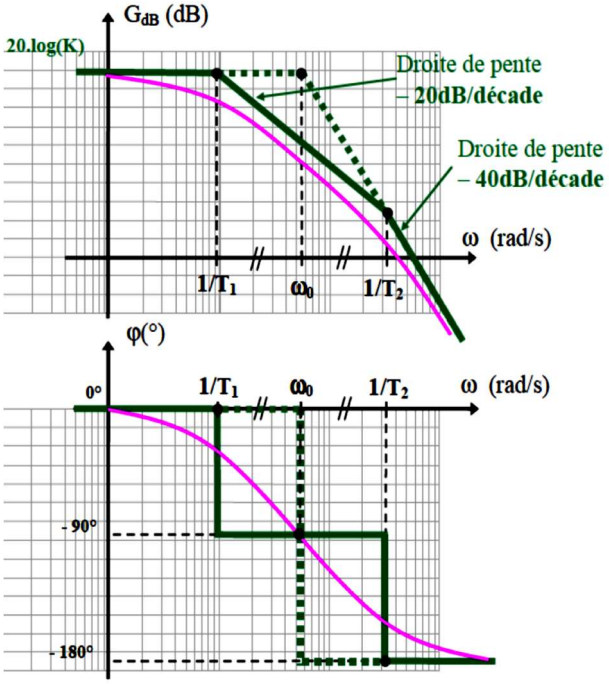


Figure 6.5. Tracés du diagramme de Bode d'un système de 2ème ordre pour $\boldsymbol{z \geq 1}$

7.2.4.2 Cas $z < 1$:

Dans ce cas, les pôles sont complexes conjugués.

$$G_{dB}(\omega) = 20log|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+4z^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \; ; \; \varphi = -arctg\left(2z\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

La courbe de gain peut présenter un maximum suivant les valeurs de z. Ce maximum, s'il existe, est obtenu pour la pulsation ω_R telle que : $\frac{dG}{d\omega}(\omega_R) = 0$, soit : $\left[\frac{d\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4z^2\omega_0^2\omega^2\right)}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_R} = 0$

On obtient si $z < \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$ Cette pulsation est appelée : **pulsation de résonance.**

Ce maximum est alors caractérisé par le **coefficient de surtension Q:**

$$Q = \frac{|H(j\omega_R)|}{|H(j0)|} = \frac{1}{2z\sqrt{1-2z^2}}$$

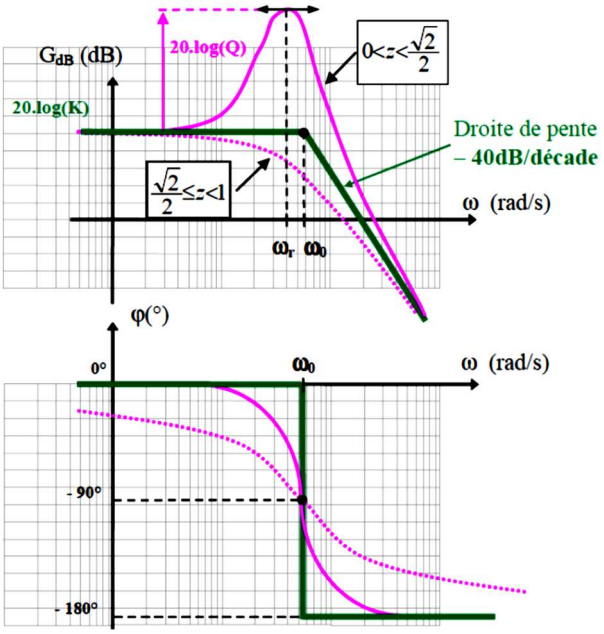


Figure 6.6. Tracés du diagramme de Bode d'un système de 2ème ordre pour $z < 1$

7.2.5 Méthode de construction du diagramme de Bode pour les systèmes d'ordre quelconque

Une fonction de transfert quelquonque peut se mettre en général sous la forme :

$$H(j\omega) = K[\pi_m(1+T_m.j\omega)]\left[\pi_m\left(1+\frac{2z_n}{\omega_{0n}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0n}}.j\omega\right)^2\right)\right]\left[\frac{1}{(j\omega)^\alpha}.\frac{1}{[\pi_p(1+T_p.j\omega)]}.\frac{1}{\left[\pi_k\left(1+\frac{2z_k}{\omega_{0k}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0k}}.j\omega\right)^2\right)\right]}\right]$$

Généralement on procède comme suit :

- $H(j\omega)$ apparaît comme la mise en cascade d'un gain, d'intégrateurs multiples, d'éléments simples du 1er et 2ème ordre, et de leurs inverses.
- On classe les constantes de temps dans un ordre décroissant, c'est-à-dire les pulsations de cassure ($\frac{1}{T_i}$ pour un 1er ordre, et ω_0 pour un 2ème ordre) correspondantes dans un ordre croissant. Les cassures du tracé asymptotique correspondront alors à ces pulsations.
- Construire le diagramme de Bode de $\left(H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha}\right)$, puis successivement en avançant vers les pulsations croissantes.
- Faire intervenir les pôles et les zéros selon l'ordre précédent en utilisant les constructions asymptotiques.

- Affiner le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles.

Exemple :

Tracer le diagramme asymptotique de BODE de la fonction de transfert : $T(p) = \frac{(p+1)(p+100)}{p+10}$

Réponse : $T(j\omega) = \frac{(j\omega+1)(j\omega+100)}{j\omega+} = (1+j\omega)\frac{1}{10+j\omega}(100+j\omega)$

$$\begin{cases} si\ \omega \ll 1 \Rightarrow \sqrt{\omega^2+1} \cong 1;\ \ si\ \omega \gg 1 \Rightarrow \sqrt{\omega^2+1} \cong \omega \\ si\ \omega \ll 10 \Rightarrow \sqrt{\omega^2+10^2} \cong 10;\ \ si\ \omega \gg 10 \Rightarrow \sqrt{\omega^2+10^2} \cong \omega \\ si\ \omega \ll 100 \Rightarrow \sqrt{\omega^2+100^2} \cong 100;\ \ si\ \omega \gg 100 \Rightarrow \sqrt{\omega^2+100^2} \cong \omega \end{cases}$$

ω	1	10	100	∞
$\sqrt{\omega^2+1}$	1	ω	ω	ω
$\sqrt{\omega^2+10^2}$	10	10	ω	ω
$\sqrt{\omega^2+100^2}$	100	100	100	ω
$H(\omega)$	$\frac{1.100}{10} = 10$	10ω	10	ω
$G_{dB}(\omega) = 20log\|T(\omega)\|$	$20log10 = 20dB$	$20dB + 20log\omega$	$40dB$	$20log\omega$
Pente	0	$+20dB/decade$	0	$+20dB/decade$

Traçage du diagramme avec le logiciel MATLAB

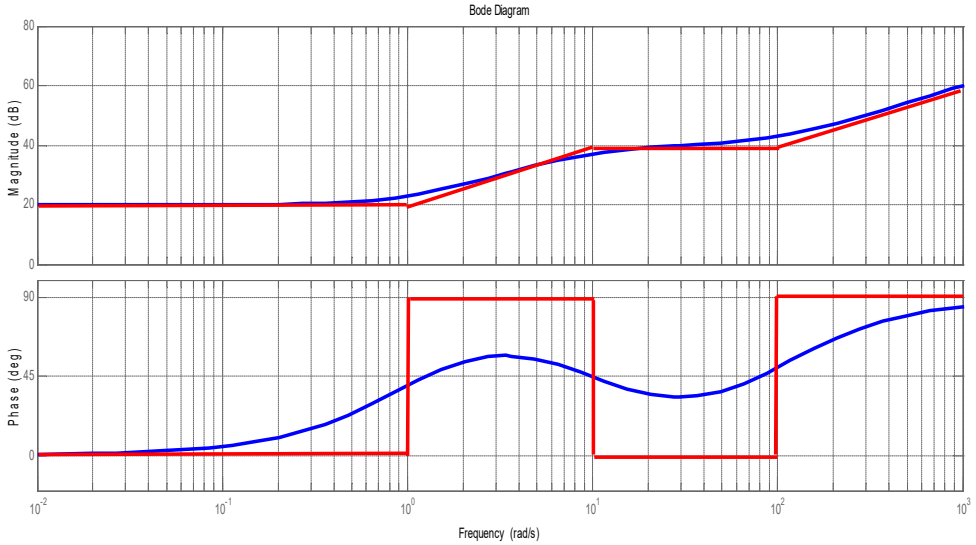


Figure 6.7. Diagramme de Bode de $T(p)$

```
>> H=tf([1 101 100],[1 10])
Transfer function:
s^2 + 101 s + 100
-----------------
    s + 10
```

>> bode(H)

7.3 DIAGRAMME DE NYQUIST

Le diagramme de Nyquist permet d'obtenir une représentation graphique du comportement fréquentiel d'un système sur un graphe unique. Plus délicat à tracer, il revêt néanmoins un intérêt primordial en automatique, notamment pour l'étude la stabilité des systèmes asservis.

7.3.1 Définition

Un diagramme de Nyquist ou lieu de Nyquist d'un système est la représentation, dans le plan complexe, de l'image de la fonction de Transfert de ce système $\boldsymbol{H(j\omega)}$ quand la pulsation $\boldsymbol{\omega}$ varie de $(0 \rightarrow +\infty)$. Il s'agit donc d'une courbe graduée en $\boldsymbol{\omega}$, on y lit directement en un point donné : $\begin{cases} Le\ gain\ G(\omega) = |H(j\omega)| \\ Le\ déphasage\ \varphi(\omega) = Arg[H(j\omega)] \end{cases}$

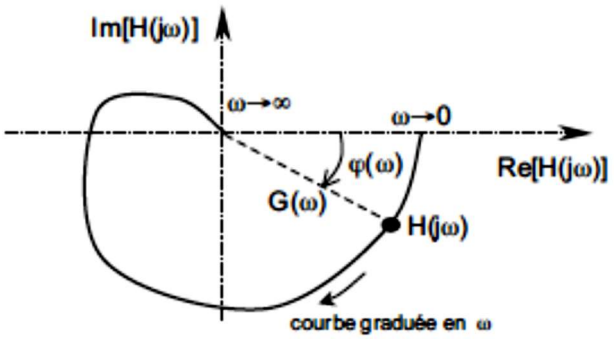


Figure 6.8. Tracé du diagramme de Nyquist

7.3.2 Représentation de Nyquist d'un système de 1er ordre

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1+Tj\boldsymbol{\omega}} = \frac{K(1-Tj\boldsymbol{\omega})}{(1+Tj\boldsymbol{\omega})(1-Tj\boldsymbol{\omega})} = \frac{K(1-Tj\boldsymbol{\omega})}{(1+T^2\boldsymbol{\omega^2})} = \frac{K}{(1+T^2\boldsymbol{\omega^2})} + j\frac{-KT\boldsymbol{\omega}}{(1+T^2\boldsymbol{\omega^2})}$$

On peut donc écrire : $G(j\omega) = X + jY\ avec \begin{cases} X = \frac{K}{(1+T^2\boldsymbol{\omega^2})} \\ Y = \frac{-KT\boldsymbol{\omega}}{(1+T^2\boldsymbol{\omega^2})} \end{cases} \Longrightarrow Y = -\boldsymbol{\omega}TX$

En combinant ces équations, on peut facilement démontrer que :

$X^2 + Y^2 - KX = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$

Ceci représente l'équation d'un cercle de centre $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ et de rayon $\left(\frac{K}{2}\right)$.

Le demi-cercle en trait plein (en bleu) correspond au fonctionnement réel du système lorsque $\boldsymbol{\omega}$ varie de $(0 \rightarrow +\infty)$; et en pointillés (en vert) pour les pulsations "négatives" de $(-\infty \rightarrow 0)$.

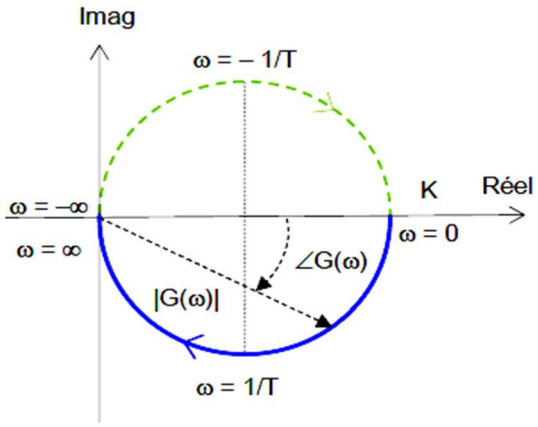


Figure 6.9. Courbe de Nyquist d'un système de 1er ordre

7.3.3 Représentation de Nyquist d'un système de 2ème ordre

$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}j\omega + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\frac{2z\omega}{\omega_0}} = \frac{K}{(1-u^2) + j2zu}$$

Le lieu de $G(j\omega)$ dans le plan complexe est le lieu du point M de coordonnées polaires où :

$$\begin{cases} G(\omega) = |G(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2zu)^2}} \\ \varphi(\omega) = ArgG(j\omega) = arc\tan\dfrac{2zu}{1-u^2} \end{cases}$$

On remarque ici que :

- pour $\omega = 0 \implies \begin{cases} G(\omega) = K \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$: A fréquence très faible, le déphasage est nul et l'amplitude est K.
- pour $\omega = \omega_0 \implies \begin{cases} G(\omega) = -j\frac{K}{2z} \\ \varphi(\omega) = -90° \end{cases}$: La pulsation de cassure ω_0 est située à l'intersection de la courbe de réponse avec l'axe des imaginaires.
- pour $\omega \to \infty \implies \begin{cases} G(\omega) \to 0 \\ \varphi(\omega) = -\pi° \end{cases}$: A haute fréquence, le gain tend vers 0 : point (0,0) sur le diagramme (ce point n'est jamais atteint puisqu'il correspond à une pulsation infinie).
- pour $\omega \to \omega_z$ $(o\grave{u}\ z < 0.7) \implies$ le module $G(\omega)$ est à son maximum.

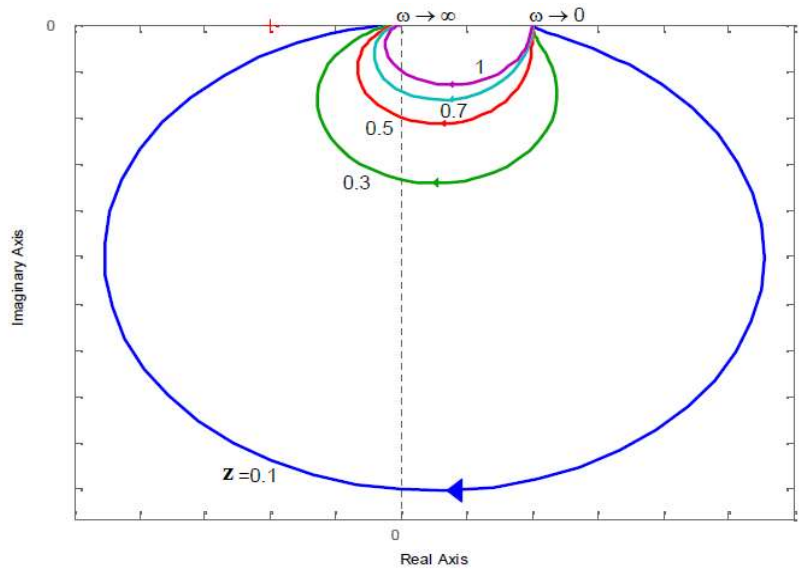


Figure 6.10. Courbe de Nyquist d'un système de 2ème ordre
Pour différentes valeurs de z

Exemple :

Tracer le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert :

$T(p) = \frac{5}{(p+1)(p+2)}$

Réponse :

Essayons d'écrire $T(p)$ sous forme complexe : $T(j\omega) = \frac{5}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$

Le module et la phase de $T(j\omega)$ seront :

$$\begin{cases} T(\omega) = |T(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(1+\omega^2)}\sqrt{(4+\omega^2)}} \\ \varphi(\omega) = arc\tan\frac{0}{5} - arc\tan\frac{\omega}{1} - arc\tan\frac{\omega}{2} = -arc\tan\frac{\omega}{1} - arc\tan\frac{\omega}{2} \end{cases}$$

On fait varier maintenant $\omega\ de\ 0 \to \infty$, on dresse les résultats dans un tableau :

ω	$Module : T(\omega)$	$Argument : \varphi(\omega)$
0	2.5	0
1	1.6	-72°
2	0.8	-108°
10	0.05	-163°
100	0.0005	-178°
∞	0	-180°

h=tf([5],[1 3 2])

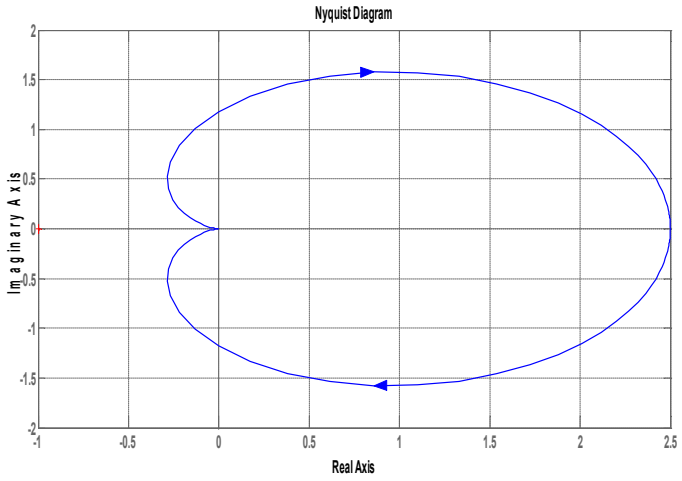
Transfer function:

5

---

s^2 + 3 s + 2

>> nyquist(h)



CHAPITRE 8 : ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS

La stabilité d'un procédé est une notion fondamentale en automatique, ceci est évident car tout système conçu par l'automaticien doit posséder cette qualité.
La stabilité est donc une performance à satisfaire en priorité pour un système, car si ce système est instable, il serait donc inutilisable.
Il est donc primordial que la régulation du procédé garantisse sa stabilité, ceci quels que soient les changements structurels intrinsèques modifiant sa fonction de transfert ou ses coefficients.
L'automaticien doit donc être conscient que l'étude de la stabilité des systèmes asservis est inévitable.
Suivant le type de la représentation choisie pour décrire le système, on peut donner plusieurs définitions mathématiques précises du concept de stabilité.

8.1 NOTION DE STABILITE

8.1.1 Définition

Qu'il soit asservi ou non, un système est stable si à une variation bornée (constante en régime permanent) du signal d'entrée correspond une variation bornée du signal de sortie.
Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie.
D'une manière plus générale, aucun signal dans une boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

8.1.2 Conditions de stabilité d'un système asservi

Considérons un système asservi quelconque représenté par sa fonction de transfert $\boldsymbol{H(p)}$, essayons d'étudier la stabilité de ce système :

$$\boldsymbol{H(p)} = \frac{\boldsymbol{S(p)}}{\boldsymbol{E(p)}} = \frac{\boldsymbol{N(p)}}{\boldsymbol{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}}$$

Avec $\boldsymbol{p_i}$: pôles de $\boldsymbol{H(p)}$ qu'ils soient réels ou complexes ; $\boldsymbol{n}$ est l'ordre de H(p)
Appliquons à l'entrée de ce système une impulsion de Dirac : $\boldsymbol{e(t) = \delta(t) \Longrightarrow E(p) = 1}$,
La réponse temporelle $\boldsymbol{s(t)}$ s'obtient en décomposant $\boldsymbol{S(p)}$ en fractions simples :

$$\begin{cases} \boldsymbol{S(p) = H(p)E(p) = \frac{A}{(p-p_1)} + \frac{B}{(p-p_2)} + \dots + \frac{K}{(p-p_n)}} \\ \boldsymbol{s(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} + \dots + Ke^{p_n t}} \end{cases}$$

La sortie $\boldsymbol{s(t)}$ est mathématiquement bornée si toutes ses exponentielles sont décroissantes, plusieurs cas sont à envisager :

- **Pôles $\boldsymbol{p_i}$ réels :** $\boldsymbol{s(t)}$ ne tend vers 0 que si tous les pôles $\boldsymbol{p_i}$ sont tous négatifs$(\boldsymbol{p_i < 0})$.
- **Pôles $\boldsymbol{p_i}$ complexes :** $\boldsymbol{s(t)}$ ne tend vers 0 que si toutes les parties réelles des pôles $\boldsymbol{p_i}$ sont tous négatifs $(\boldsymbol{p_i = \alpha_i \pm j\beta_i \implies \alpha_i < 0})$.

8.1.3 Enoncé du critère des pôles :

Un système est stable si sa fonction de transfert $\boldsymbol{H(p)}$ n'a que des pôles à partie réelle négative, c'est-à-dire situés dans la moitié gauche du plan complexe (Figure 8.1).

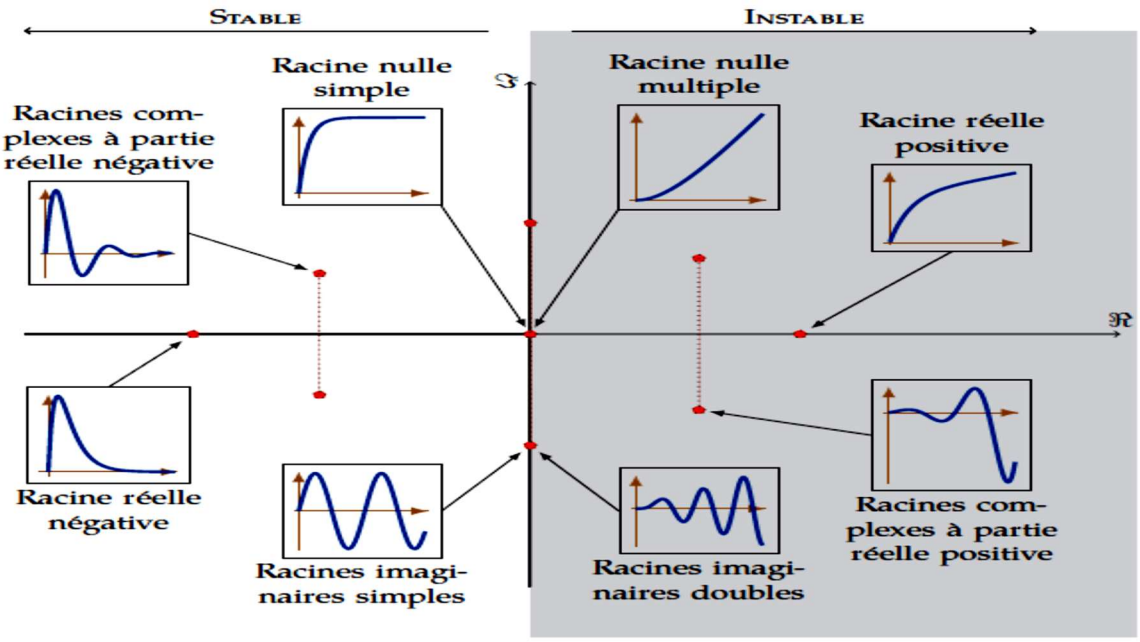


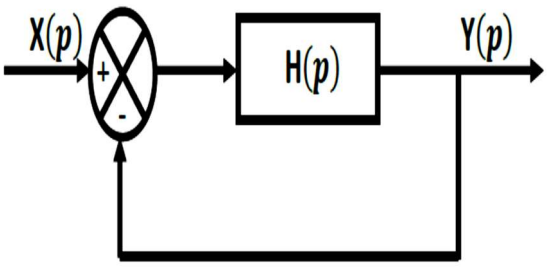
Figure 8.1. Contribution des pôles sur la stabilité d'un système

Il suffit donc d'un pôle à partie réelle positive pour rendre un système instable ; donc pour prévoir à l'avance la stabilité ou l'instabilité d'un système, il suffit de regarder où se trouvent ses pôles dans le plan complexe.
Dans le cas d'une fonction de transfert où les pôles sont imaginaires conjugués, on dit que le système est marginalement stable.

Exemple
Soit un système asservi représenté par le schéma fonctionnel ci-dessous :

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$\boldsymbol{H_{BO}(p) = \frac{1}{p^2 + p}}$$



Etudier la stabilité de ce système.

Réponse
Essayons de déterminer la fonction de transfert en boucle fermée pour un retour unitaire :

$$\boldsymbol{H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\frac{1}{p^2 + p}}{1 + \frac{1}{p^2 + p}} = \frac{1}{p^2 + p + 1}}$$

Les pôles de $\boldsymbol{H_{BF}(p)}$ sont déterminés après la résolution de l'équation :

$$\boldsymbol{p^2 + p + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ p_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}}$$

La partie réelle des deux pôles est négative, le système est donc stable.

8.2 CRITERE ALGEBRIQUE DE ROUTH-HURWITZ

8.2.1 Enoncé du critère algébrique de Routh Hurwitz

Le critère des pôles nécessite le calcul des pôles de la fonction de transfert, ce qui est une opération relativement complexe pour des ordres élèves ; par conséquent ce critère serait inexploitable.

Un deuxième critère mathématique appelé critère de Routh- Hurwitz permet de conclure à la stabilité, ou à l'instabilité, d'un système asservi à partir des coefficients de son équation caractéristique. Ce critère s'énonce comme suit :

Soit la fonction de transfert d'un système, définie par :

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \cdots + A_1 p + A_0}{B_n p^n + B_{n-1} p^{n-1} + \cdots + B_1 p + B_0}}$$

Le polynôme du dénominateur de ce système est écrit sous sa forme développée. L'étude de l'équation caractéristique de ce polynôme $\boldsymbol{D(p) = 0}$ permet de conclure sur la stabilité du système :

- Une condition nécessaire : la stabilité exige que tous les coefficients $\boldsymbol{B_i}$ soient de même signe et non nuls.
- si tous les coefficients $\boldsymbol{B_i}$ sont de même signe, l'examen de la première colonne du tableau de Routh permet de conclure à la stabilité du système.

8.2.2 Construction du tableau de Routh

On construit un tableau de n lignes, qui débute par la puissance supérieure du polynôme $\boldsymbol{D(p)}$; sur les éléments des deux premières lignes, on trouve les coefficients de puissance de $\boldsymbol{D(p)}$; pour le reste du tableau, on définit le terme placé à la i^{ème} ligne et la j^{ème} colonne :

Ecrire les coefficients de $\boldsymbol{D(p)}$	$\boldsymbol{p^n}$	$\boldsymbol{B_n}$	$\boldsymbol{B_{n-2}}$	$\boldsymbol{\dots}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_0}$
	$\boldsymbol{p^{n-1}}$	$\boldsymbol{B_{n-1}}$	$\boldsymbol{B_{n-3}}$	$\boldsymbol{\dots}$	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{0}$
Calcul de nouveaux termes	$\boldsymbol{p^{n-2}}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{\dots}$	$\boldsymbol{a_{n-1}}$	$\boldsymbol{a_n}$
	$\boldsymbol{p^{n-3}}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{\dots}$	$\boldsymbol{b_{n-1}}$	$\boldsymbol{b_n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\boldsymbol{p^2}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{\dots}$		
	$\boldsymbol{p^1}$	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	$\boldsymbol{\dots}$		
	$\boldsymbol{p^0}$	$\boldsymbol{z_1}$	$\boldsymbol{z_2}$	$\boldsymbol{\dots}$		

Il suffit de calculer tous les coefficients $\boldsymbol{(a_i\,;\, b_i\,;\, \dots\,;\, z_i)}$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{B_{n-1}B_{n-2} - B_nB_{n-3}}{B_{n-1}} \; ; \; a_2 = \dfrac{B_{n-1}B_{n-4} - B_nB_{n-5}}{B_{n-1}} \; ; \ldots \\ b_1 = \dfrac{a_1B_{n-3} - B_{n-1}a_2}{a_1} \; ; \; b_2 = \dfrac{a_1B_{n-5} - B_{n-1}a_3}{a_1} \; ; \ldots \\ z_1 = \dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{y_1} \; ; \; z_2 = \dfrac{y_1x_3 - x_1y_3}{y_1} \; ; \ldots \end{cases}$$

Routh a établi que :

- Le système est stable si tous les termes de la 1ère colonne (pivots) sont du même signe.
- Il y a autant de racines à partie réelles positives que de changement de signe.
- Si un élément de la première colonne est nul, on le remplace alors par un terme positif (par exemple ε > 0) ; on continue le calcul des coefficients du tableau. Si l'élément au-dessous de ε est négatif, il y a un changement de signe et donc il existe une racine à partie réelle positive.
- Une ligne de zéro indique l'existence de racines imaginaires pures. Dans ce cas, il faut former un polynôme auxiliaire avec les coefficients de la ligne qui est juste au-dessus de la ligne des zéros. La construction du tableau de Routh peut être poursuivie en remplaçant les zéros de la ligne nulle par les coefficients du polynôme obtenu en dérivant le polynôme auxiliaire. Il faut noter que les racines du polynôme auxiliaire sont aussi des racines du polynôme original et il faut qu'elles soient testées.

Exemples

1. Etudier la stabilité du système dont la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $\boldsymbol{H_{BF}(p) = \frac{1}{p^5+2p^4-2p^3+7p^2+p+3}}$

Solution : les coefficients associés au polynôme de Routh ne sont pas tous de même signe.
La condition nécessaire de stabilité n'est pas vérifiée ; ce système est donc instable.

2. Etudier la stabilité du système dont la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $\boldsymbol{H_{BF}(p) = \frac{1}{p^4+5p^3+3p^2+6p+1}}$

Solution : les coefficients associés au polynôme de Routh sont tous de même signe, on construit donc le tableau de Routh :

p^4	1	3	1
p^3	5	6	0
p^2	$a_1 = \frac{5.3 - 1.6}{5} = 1,8$	$a_2 = \frac{5.1 - 1.0}{5} = 1$	$a_2 = 0$
p^1	$b_1 = \frac{1,8.6 - 5.1}{1,8} = 3,2$	$b_2 = \frac{1,8.0 - 5.0}{1,8} = 0$	$b_3 = 0$
p^0	$c_1 = \frac{3,2.1 - 1,8.0}{3,2} = 1$	$c_2 = \frac{3,2.0 - 1,8.0}{3,2} = 0$	$c_3 = 0$

Les coefficients de la première colonne sont tous de même signe (positifs), le système est donc stable.

3. Etudier la stabilité du système dont la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $\boldsymbol{H_{BF}(p) = \frac{1}{p^5+2p^4+3p^3+6p^2+5p+3}}$

Solution : les coefficients associés au polynôme de Routh sont tous de même signe, on construit donc le tableau de Routh :

p^5	1	3	5
p^4	2	6	3
p^3	$a_1 = \frac{2.3-1.6}{2} = 0 \rightarrow \varepsilon > 0$	$a_2 = \frac{2.5-1.3}{2} = 3,5$	$a_3 = 0$
p^2	$b_1 = \frac{\varepsilon.6-2.3,5}{\varepsilon} = \frac{6\varepsilon-7}{\varepsilon}$	$b_2 = \frac{\varepsilon.3-2.0}{\varepsilon} = 3$	$b_3 = 0$
p^1	$c_1 = \frac{\frac{6\varepsilon-7}{\varepsilon}.3,5-3\varepsilon}{6\varepsilon-7/\varepsilon} = (-6\varepsilon^2+42\varepsilon-49) < 0$	$c_2 = \frac{\frac{6\varepsilon-7}{\varepsilon}.0-\varepsilon.0}{6\varepsilon-7/\varepsilon} = 0$	$c_3 = 0$
p^0	$d_1 = \frac{(-6\varepsilon^2+42\varepsilon-49).3-\frac{6\varepsilon-7}{\varepsilon}.0}{(-6\varepsilon^2+42\varepsilon-49)} = 3$	$d_2 = 0$	$d_3 = 0$

On remarque que $(-6\varepsilon^2+42\varepsilon-49) < 0 \ \forall \varepsilon$. L'examen de la première colonne révèle l'existence de deux changements de signe (présence de deux pôles à partie réelle positive), le système est instable.

4. On souhaite statuer sur la stabilité d'un système asservi dont la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $\boldsymbol{H_{BF}(p) = \frac{1}{p^5+5p^4+11p^3+23p^2+28p+12}}$

Solution : les coefficients associés au polynôme de Routh sont tous de même signe, on construit donc le tableau de Routh :

p^5	1	11	28
p^4	5	23	12
p^3	$a_1 = \frac{5.11-1.23}{5} = 6,4$	$a_2 = \frac{5.28-1.12}{5} = 25,6$	$a_3 = 0$
p^2	$b_1 = \frac{6,4.23-5.25,6}{6,4} = 3$	$b_2 = \frac{6,4.12-5.0}{6,4} = 12$	$b_3 = 0$
p^1	$c_1 = \frac{3.25,6-6,4.12}{3} = 0$	$c_2 = \frac{3.0-6,4.0}{3} = 0$	$c_3 = 0$
le polynôme auxiliaire est $Q(p) = 3p^2+12 \Rightarrow Q'(p) = 6p+12$. On dresse une nouvelle ligne p^1			
p^1	6	0	0
p^0	$d_1 = \frac{6.12-3.0}{6} = 12$	$d_2 = \frac{6.0-3.0}{6} = 0$	$d_3 = 0$

On remarque que dans la ligne des (p^1) , les coefficients sont tous nuls ; il faut donc former le polynôme auxiliaire avec les coefficients de la ligne placée au-dessus (p^2). La construction du tableau de Routh peut être poursuivie en remplaçant les zéros de la ligne nulle par les coefficients de la dérivée du polynôme auxiliaire ; à noter aussi que les racines du polynôme

auxiliaire sont aussi des racines du polynôme original et doivent être testées. Soit à résoudre l'équation du polynôme auxiliaire : $\boldsymbol{3p^2 + 12 = 0 \Longrightarrow p = \pm 2j.}$ On trouve deux pôles imaginaires conjugués ; les pivots sont tous positifs, le système est marginalement stable.

8.3 CRITERE GRAPHIQUE OU DE REVERS DANS LE PLAN DE NYQUIST

Le critère de Nyquist est une méthode graphique de stabilité d'un système asservi en boucle fermée obtenu à partir du lieu de Nyquist dd ce système en boucle ouverte. Il est une conséquence du théorème de Cauchy appliqué à une fonction de transfert.

8.3.1 Théorème de Cauchy

Soit une fonction complexe $\boldsymbol{F(p)}$ de la variable $\boldsymbol{p}$. Si le point d'affixe $\boldsymbol{p}$ décrit une courbe fermée **(γ)** du plan complexe, dans le sens horaire, le point d'affixe $\boldsymbol{F(p)}$ décrit un lieu **Γ** (image de **γ** par $\boldsymbol{F}$) de forme plus ou moins compliquée. Les lieux de **(γ)** et de **(Γ)** se correspondent point par point.

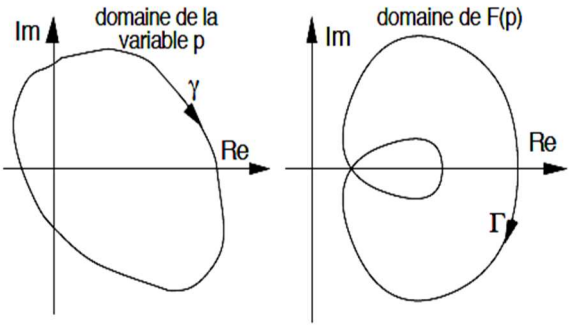


Figure 8.2. Illustration du théorème de Cauchy

On note $\boldsymbol{P}$ le nombre de pôles et $\boldsymbol{Z}$ le nombre de zéros, comptés avec leur ordre de multiplicité, situés à l'intérieur de la courbe **γ**.

- Quand un point **M** parcourt le contour **γ** dans le sens horaire (anti-trigonométrique), la variation totale de phase $\boldsymbol{\Delta\Phi}$ de $\boldsymbol{F(p)}$ comptée positivement dans le sens trigonométrique est égale à : $\boldsymbol{\Delta\Phi = 2\pi(P - Z)}$
- Le nombre de tours $\boldsymbol{T}$ effectué par le lieu **Γ** de $\boldsymbol{F(p)}$ autour de l'origine est donc égal à : $\boldsymbol{T = (P - Z)}$

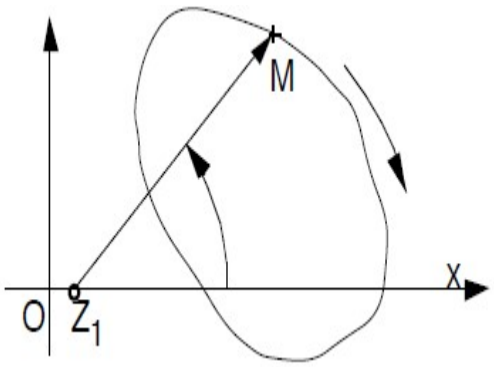
8.3.2 Cas d'une fonction rationnelle $\boldsymbol{F(p)}$

Soit $\boldsymbol{F(p)}$ une fonction rationnelle de la variable complexe p tel que le degré de numérateur soit inférieur au degré du dénominateur :

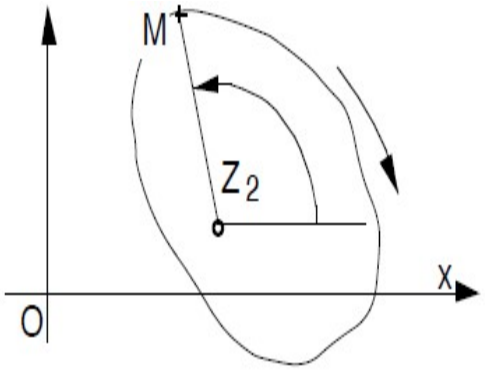
$$\boldsymbol{F(p) = \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}} \quad o\grave{u} : \begin{cases} z_i : z\acute{e}ros\ de\ F(p) \\ p_i : p\hat{o}les\ de\ F(p) \end{cases}$$

On considère un point **M** décrivant le contour **(γ)** dans le sens horaire (sens anti-trigonométrique).

Cas des zéros du numérateur

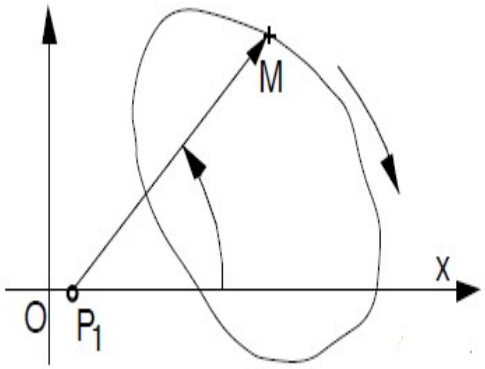


Zéros situés à l'extérieur du contour **(γ)**
La variation de l'argument $\Delta\left[(\mathbf{O},\vec{x});\ \overrightarrow{\boldsymbol{Z_1M}}\right] = \mathbf{0}$

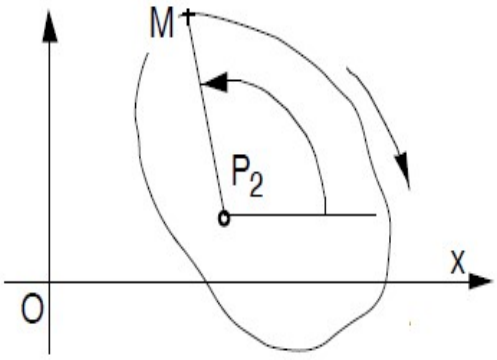


Zéros situés à l'intérieur du contour **(γ)**
La variation de l'argument $\Delta\left[(\mathbf{O},\vec{x});\ \overrightarrow{\boldsymbol{Z_1M}}\right] = -\mathbf{2\pi}$

Cas des pôles du dénominateur



Pôles situés à l'extérieur du contour **(γ)**
variation de l'argument $\Delta\left[(\mathbf{O},\vec{x});\ \overrightarrow{\boldsymbol{P_1M}}\right] = \mathbf{0}$



Pôles situés à l'intérieur du contour **(γ)**La
La variation de l'argument $\Delta\left[(\mathbf{O},\vec{x});\ \overrightarrow{\boldsymbol{P_1M}}\right] = -\mathbf{2\pi}$

Si $\boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{P}$ sont comptés avec leur ordre de multiplicité, lorsque le point $\boldsymbol{M}$ décrit le contour **γ** dans le sens anti-trigonométrique la phase **Φ** de la fonction $\boldsymbol{F(p)}$ *v*arie de la quantité :

$$\Delta\mathbf{\Phi} = \mathbf{2\pi}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Z})$$

8.3.3 Contour de Nyquist

On fait décrire au nombre complexe $\boldsymbol{p}$ le contour **γ**, ce contour enferme la totalité du demi-plan complexe situé à droite de l'axe des imaginaires (on fait tendre le rayon vers l'infini) et il évite les pôles imaginaires purs.
Quand $\boldsymbol{p}$ décrit le contour **γ**, $\boldsymbol{F(p)}$ décrit un lieu **Γ** image de **γ** dénommé contour de NYQUIST de $\boldsymbol{F(p)}$.

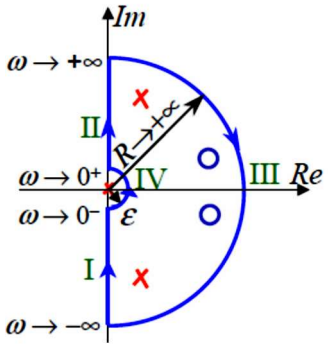


Figure 8.3. Contour de NYQUIST

Si la fonction $\boldsymbol{F(p)}$ n'a ni pôles ni zéros à l'intérieur du contour **γ**, son lieu de NYQUIST n'entoure pas l'origine.

8.3.4 Application à l'étude de la stabilité d'un système bouclé

Le critère de NYQUIST résulte du théorème de Cauchy. Il utilise une représentation graphique de la réponse fréquentielle et permet de prévoir le comportement d'un système bouclé à partir du tracé de sa fonction de transfert en boucle ouverte.

$$\begin{cases} \boldsymbol{H_{BO}(p) = G(p)M(p)} \\ \boldsymbol{H_{BF}(p) = \dfrac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}} \end{cases}$$

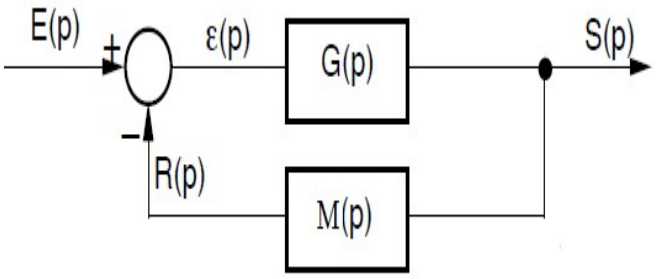


Figure 8.4. Schéma général d'une boucle de régulation.

Ce système est stable en boucle fermée si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.
Autrement dit, l'étude la stabilité du système revient à étudier les solutions de l'équation :

$$\boldsymbol{1 + H_{BO}(p) = 0}$$

Cela signifie qu'il est possible d'appréhender l'étude la stabilité d'un système en boucle fermée à partir de sa fonction de transfert en boucle ouverte. Nyquist a eu l'idée de proposer un critère de stabilité basé sur l'application du théorème de Cauchy à la fonction :
$\boldsymbol{H_{BF}(p) = H_{BO}(p) + 1}$.

D'après ce théorème, le lieu de NYQUIST de $\boldsymbol{H_{BF}(p)}$ ne doit pas entourer l'origine, si $\boldsymbol{H_{BF}(p)}$ n'a pas de pôle instable, ou ce qui est équivalent que la fonction $\boldsymbol{H_{BO}(p)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte, n'entoure pas le point de coordonnées (–1, 0) ; ce point est souvent appelé **point critique**.

Règle de Nyquist (si la fonction de transfert n'a pas pôle à partie réelle positive)

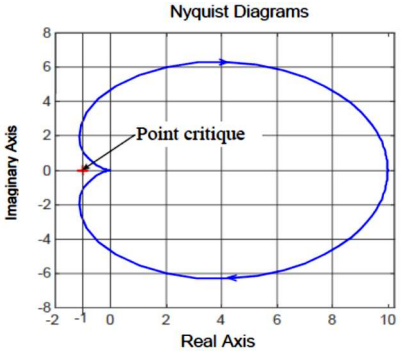
Une **condition nécessaire et suffisante** pour qu'un système asservi, dont la FTBO ne comporte pas de pôle à partie réelle positive, soit stable est que : Son lieu de transfert en boucle ouverte **n'entoure pas** le point critique (–1, 0).

Règle de Nyquist (si la fonction de transfert a des pôles à partie réelle positive)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système asservi soit stable est que :
Son lieu de transfert, en boucle ouverte parcouru de $\omega = -\infty$ à $\omega = +\infty$, **entoure dans le sens trigonométrique** le point critique (–1, 0) un nombre de fois égal au **nombre de pôles instables** de la fonction de transfert en boucle ouverte (pôles à partie réelle positive).

Exemples

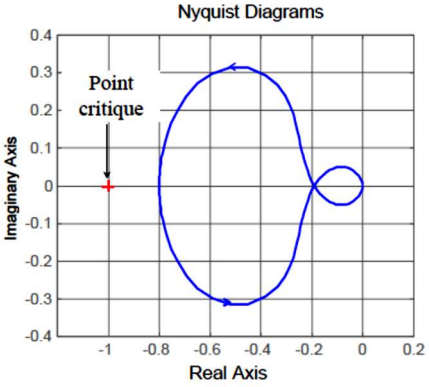
1. Soit un système asservi en boucle fermée où la transmittance en boucle ouverte est donnée par : $\boldsymbol{H_{BO}(p) = \frac{5}{(1+p)(1+0.5p)}}$; étudier la stabilité de ce système asservi en boucle fermée en utilisant le critère de Nyquist.



Solution :

$\boldsymbol{H_{BO}(p)}$ n'a pas de pôle instable $\boldsymbol{P = 0}$. Le nombre de tours autour de –1 est nul, $\boldsymbol{P = 0}$.
$\Longrightarrow$ Le système est stable en boucle fermée

2. Soit un système asservi en boucle fermée où la transmittance en boucle ouverte est donnée par : $\boldsymbol{H_{BO}(p) = \frac{20}{(p-1)(p^2+5p+25)}}$; étudier la stabilité de ce système asservi en boucle fermée en utilisant le critère de Nyquist.



Solution :

$\boldsymbol{H_{BO}(p)}$ a un pôle instable $\boldsymbol{P_1 = 1}$. Le système sera stable en boucle fermée si le diagramme de Nyquist entoure une fois le point –1 dans le sens trigonométrique. On remarque d'après le tracé que le nombre de tours autour de –1 est nul, $\boldsymbol{T = 0}$. $\Longrightarrow$ Le système est donc instable en boucle fermée

8.4 CRITERE DU REVERS DANS LE PLAN DE NYQUIST

Ce critère est une version simplifiée du critère de Nyquist. Ce critère **ne s'applique pas si la fonction de transfert en boucle ouverte comporte des pôles à partie réelle positive**.
Ce critère se représente graphiquement dans le plan de NYQUIST par les figures ci-dessous :

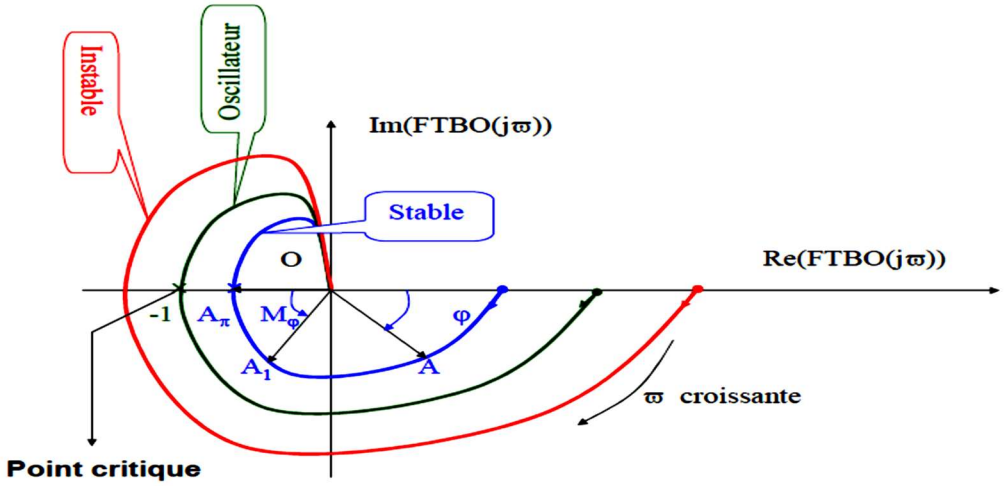


Figure 8.5. Critère du revers dans le plan de Nyquist

Énoncé du critère

Si on laisse, en décrivant le lieu de transfert (associé au système) en boucle ouverte dans le sens des fréquences croissantes :

- **le point critique (–1, 0) à gauche, le système est stable ;**
- **le point critique (–1, 0) à droite, le système est instable**.

8.5 CRITERE DU REVERS DANS LE PLAN DE BODE

Dans la représentation de BODE, le point critique **(–1, 0)** a pour module $\boldsymbol{0dB}$ et pour argument $\boldsymbol{-180°}$.

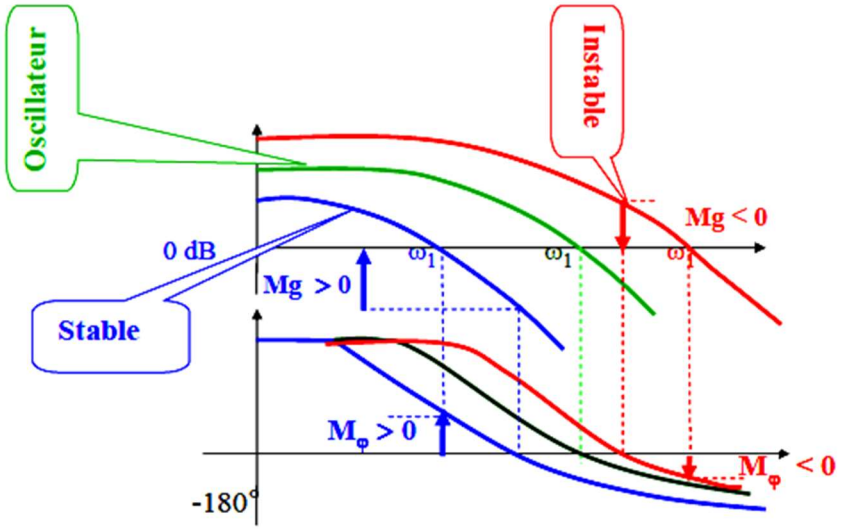


Figure 8.6. Critère du revers dans le plan de Bode

Énoncé du critère

Un système est stable en boucle fermée si :

- Pour la pulsation $\boldsymbol{\omega_0}$ définie par $\boldsymbol{Arg[H(j\omega_0)] = -180°}$, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte $\boldsymbol{|H(j\omega_0)|_{dB} < 0dB}$;
- Pour la pulsation $\boldsymbol{\omega_1}$ définie par $\boldsymbol{|H(j\omega_0)|_{dB} = 0dB}$ B le déphasage de la fonction de transfert en boucle ouverte, est supérieur en module à 180° $\boldsymbol{Arg[H(j\omega_0)] > -180°}$;

Le système est instable si :

- le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte $\boldsymbol{|H(j\omega_0)|_{dB} > 0dB}$;
- le déphasage de la fonction de transfert en boucle ouverte, est inférieur à $\boldsymbol{-180°}$.

8.6 NOTIONS DE MARGES DE GAIN ET DE PHASE

La stabilité, est pour pratiquement tous les systèmes (systèmes de mesure, de commande), une notion importante, ces systèmes doivent être stables. Telle qu'elle a été définie ci-dessus, par les divers critères, la stabilité reste une notion mathématique : ce n'est pas parce que l'on vérifie les critères de stabilité que les performances du système analysé seront satisfaisantes. En effet,

un système peut :

- n'avoir que des pôles à partie réelle négative, mais le système se stabilise trop lentement ;
- avoir un coefficient d'amortissement trop faible et le système oscille avant de se stabiliser.

En quelque sorte, on peut dire qu'une application stricte d'un critère (position de la courbe représentative d'une fonction de transfert en boucle ouverte par rapport au point critique) assure une stabilité au sens mathématique mais pas forcément " une bonne stabilité " au sens pratique. On conçoit aisément qu'une " bonne stabilité " d'un point de vue pratique peut se définir très simplement par le fait que la courbe représentative d'une fonction de transfert en boucle ouverte passe à une " distance minimale " du point critique.
Pour quantifier cette distance on utilise les notions de marge de gain et de marge de phase. Le degré de stabilité d'un système se caractérise par ses marges

8.6.1 Marge de phase

La marge de phase s'interprète comme le déphasage supplémentaire qui dans la zone de résonance fait passer la courbe représentative d'une fonction de transfert en boucle ouverte au-delà du point critique.
D'un point de vue mathématique ; c'est l'écart en phase par rapport à $-\mathbf{180°}$ lorsque le gain du système en boucle ouverte est égal à $\mathbf{1}$ $(\mathbf{0}\ \boldsymbol{dB})$

$$\boldsymbol{M\varphi = Arg[H(j\omega_A)] + \pi}\ \ avec :\ \boldsymbol{|H(j\omega_A)|_{dB}} = \mathbf{0}$$

8.6.2 Marge de gain

La marge de gain est l'augmentation maximale du gain en boucle ouverte que l'on peut s'autoriser sans provoquer l'instabilité du processus. Cette augmentation est exprimée en $\boldsymbol{dB}$ pour les représentations de Bode, et Nyquist.
D'un point de vue mathématique ; c'est l'écart en gain par rapport à $\mathbf{0}\ \boldsymbol{dB}$ lorsque le déphasage est de $\mathbf{-180°}$:

$$\boldsymbol{MG_{dB} = -20log|H(j\omega_0)| = |H(j\omega_0)|_{dB}}\ \ avec : \boldsymbol{ArgH[j\omega_0] = -180°}$$

Exemples

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $\boldsymbol{H_{BO}(p)}$ placée dans une boucle de régulation à retour unitaire : $\boldsymbol{H_{BO}(p) = \frac{5}{(1+0{,}01p)^3}}$. Calculer les marges de gain et de phase

Solution

$$\boldsymbol{H_{BO}(j\omega) = \frac{5}{(1+0{,}01j\omega)^3} \Longrightarrow MG_{dB} = |H_{BO}(j\omega_0)|_{dB}}\ \ avec :\ \boldsymbol{ArgH_{BO}[j\omega_0] = -180°}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{ArgH_{BO}[j\omega_0] = -3arctan\frac{0{,}01\omega_0}{1} = -\pi \Longrightarrow \omega_0 = 100tan\frac{-\pi}{3} = 173{,}2\ rad/_S}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{|H_{BO}(j\omega_0)| = \frac{5}{\left(\sqrt{1+(0{,}01.173{,}2)^2}\right)^3} = \frac{5}{8}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{MG_{dB} = |H_{BO}(j\omega_0)|_{dB} = 20log\frac{5}{8} = 4dB}$$

$$M\varphi = Arg[H_{BO}(j\omega_A)] + \pi \ \ avec: \ |H(j\omega_A)|_{dB} = 0 \implies |H(j\omega_A)| = 1$$

$$|H(j\omega_A)| = \frac{5}{\left(\sqrt{1 + (0,01.\omega_A)^2}\right)^3} = 1 \implies \omega_A = 138,8 \ {}^{rad}/_{S}$$

$$Arg[H_{BO}(j\omega_A)] = -3arc\,tan\frac{0,01.138,8}{1} = -162,6°$$

$$\Longrightarrow \boxed{M\varphi = -162,6 + 180 = 17.4°}$$

Références bibliographiques

[1]. Yves GRANJON. AUTOMATIQUE, Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état. Cours et exercices corrigés, éditions : Terre vivante, L'écologie pratique, 2006.

[2]. F. BINET. Asservissements, cours, préparation aux agrégations internes mécanique et génie mécanique, 2005.

[3]. Benoît Marx. Contrôle des Systèmes Linéaires Cours de deuxième année ingénieur ; Université de Lorraine.

[4]. Michel VERBEKEN, Asservissements continus, I.U.T. de Montluçon Département G.E.I.I.

[5]. Adnene TLILI, Safeyiddine KALLELI ; Cours asservissement et régulation ; ISET Nabeul ; 2014 / 2015

[6]. Djaaffar RACHED, cours et exercices de régulation, USTO-MB. 2014/2015.

[7]. Mohammed-Karim FELLAH, Automatique 1 et 2 (Asservissements Linéaires Continus) ; 2013.

[8]. Ahmed Yacine KADRI, Régulation automatique, UNIVERSITE KASDI MERBAH – OUARGLA ; 2013/14.

[9]. Hugues GARNIER, Automatique continue, Analyse temporelle et fréquentielle des systèmes ; 2018.

[10]. Samia Ainouz ZEMOUCHE. Asservissement linéaire continu ; CFI INSA de Rouen.

[11]. J.Baillou, J.P.Chemla, B. Gasnier, M.Lethiecq. Cours de Systèmes Asservis. Polytech Tours.

[12]. Lakhdar AGGOUNE. Systèmes Asservis. Université Ferhat Abbas – Sétif1.

[13]. Patrick PROVOUST. AUTOMATIQUE, contrôle et régulation. Editions DUNOD, 2010.

[14]. Javier Fernández de Cañete, Cipriano Galindo, and Inmaculada García Moral. System Engineering and Automation, an Interactive Educational Approach; Springer 2011.

[15]. Pascal Codron, Sandrine Le Ballois. Automatique systèmes linéaires et continus. Editions Dunod, 1998.

[16]. Michel VILLAIN. Systèmes asservis linéaires, Ellipses Edition Marketing S.A, 1996.

[17]. Pierre Guyenot, Thierry Hans. Régulation et Asservissement. Editions EYROLLES, 1992.

[18]. G. Dauphin-Tangug , C.Sueur, P.Borne J.P Richard F.Rotella, I.Zambettakis . Analyse et régulation des processus industriels, Editions TECHNIP, Paris, 1993.

[19]. Edouard Laroche. Asservissement des systèmes linéaires à temps continu ; Cours et Exercices. Université de Strasbourg, 2009/10.

[20]. B. SANDOZ. Automatique, systèmes linéaires continus. EDITION PROF, 2016.

[21]. Henri Bourlès. Asservissement des systèmes linéaires. CNAM, 2015.

Fonctions temporelles $s(t)$	Transformées de Laplace $S(p)$
Impulsion unitaire $\delta(t)$	1
Impulsion unitaire retardée $\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau p}$
Echelon unité $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Echelon d'amplitude $Eu(t)$	$\frac{E}{p}$
Echelon unité retardée $u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p}$
Impulsion rectangulaire $u(t)-u(t-\tau)$	$\frac{1-e^{-\tau p}}{p}$
Rampe $E.t.u(t)$	$\frac{A}{p^2}$
$t.e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$(1-e^{-at})u(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$\frac{e^{-t/\tau}}{\tau}u(t)$	$\frac{1}{1+\tau p}$
$\left(1-e^{-t/\tau}\right)u(t)$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$
$\left(t-\frac{1}{a}-\frac{e^{-at}}{a}\right)u(t)$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\left(1+\frac{b}{a-b}e^{-at}-\frac{a}{a-b}e^{-bt}\right)u(t)$	$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$(1-e^{-at}-at.e^{-at})u(t)$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$
$t^n u(t)$ n : entier	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$ n : entier	$\frac{1}{p^n}$
$\left(\frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}\right)u(t)$	$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$
$\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\right).u(t)$ $avec\ n \epsilon N^*$	$\frac{1}{(p+a)^n}$
$\left(\frac{t^{n-1}}{\tau^n(n-1)!}e^{-t/\tau}\right).u(t)$ $avec\ n \epsilon N^*$	$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$
$(\sin \omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$(\cos \omega t)u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$(e^{-at}.\sin \omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$(e^{-at}.\cos \omega t)u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$