



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Republique algérienne démocratique populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
Université oran 2 mohamed ben ahmed

معهد الصيانة والأمن الصناعي
Institut de maintenance et sécurité industrielle

Département de Maintenance en Electromecanique

MÉMOIRE

Pour Obtenir Le Diplome De Master

Filière : Electromécanique

Spécialité : Maintenance Industrielle En Electromécanique

Thème

Comportement en flexion des plaques en matériaux à gradient fonctionnel

Présenté Et Soutenu Publiquement Par :

Boudahra Abdelbaset

Devant Le Jury Composé De :

Nom Et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
HEMMAMI ZINEB	MCA	IMSI	Présidente
ACHACH HBIB	Pr	IMSI	Examineur
ADJELOUA ABDELAZIZ	MCA	IMSI	Encadrant

Année 2025/2026

Dédicace

Je dédie ce travail :

À mes chers parents, pour leurs sacrifices, leur soutien permanent et leurs encouragements tout au long de mon parcours universitaire.

À mes proches, pour leur appui moral et leur confiance.

À tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation académique et scientifique.

Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu le Tout-Puissant de m'avoir donné la force, la patience et le courage pour mener ce travail à terme.

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon encadreur monsieur **Adjeloua Abdelaziz** pour son accompagnement, ses conseils précieux et sa disponibilité durant l'élaboration de ce mémoire.*

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer ce travail.

*Je remercie aussi l'ensemble des enseignants du département de **maintenance en électromécanique** pour la qualité de la formation reçue.*

Enfin, j'adresse ma profonde gratitude à ma famille et à toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Ce mémoire présente une analyse statique de plaques rectangulaires en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) de type $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$, dont les propriétés mécaniques varient continûment à travers leur épaisseur selon une loi de puissance. Le modèle proposé est étendu aux FGM, cas où les matériaux présentent une variation continue mais sont dépourvus des discontinuités interfaciales caractéristiques des composites conventionnels. La modélisation analytique repose sur la théorie de déformation par cisaillement sinusoïdal d'ordre supérieur (SSDT) de Zenkour, développée sous MATLAB et validée par une simulation par éléments finis tridimensionnelle avec ABAQUS et des éléments C3D20R. Cinq configurations de conditions aux limites (SSSS, CCCC, SCSC, SSSC, SFSF) sont étudiées sous chargement transversal uniforme. Les résultats obtenus sont comparés à quatre références bibliographiques et présentent une excellente concordance, avec des écarts inférieurs à 2 % pour la flèche adimensionnelle et à 4 % pour la contrainte. L'analyse paramétrique montre que l'indice de gradation n est le facteur ayant le plus d'influence sur la rigidité : une augmentation de n de 0 à 10 accroît la flèche maximale d'un facteur 3,4 et décale l'axe neutre vers la face métallique. Les rapports géométriques a/b et a/h indiquent respectivement une stabilisation de la flèche pour $a/b \geq 3$ et une convergence vers le régime des plaques minces pour $a/h \geq 50$.

Mots-clés : Matériaux à gradient fonctionnel (FGM) · Flexion statique · HSDT ·
Éléments finis · ABAQUS · Étude paramétrique

Abstract

This memoir presents a static analysis of rectangular plates made of Al/Al₂O₃ functionally graded materials (FGMs), whose mechanical properties vary continuously through their thickness according to a power-law relationship. The proposed model is extended to FGMs, in which the materials exhibit continuous property variation without the interfacial discontinuities characteristic of conventional composites. The analytical modeling is based on Zenkour's higher-order sinusoidal shear deformation theory (SSDT), implemented in MATLAB and validated through three-dimensional finite element simulation using ABAQUS with C3D20R elements. Five boundary condition configurations (SSSS, CCCC, SCSC, SSSC, SFSF) are investigated under uniform transverse loading. The results are compared against four references from the literature and demonstrate excellent agreement, with deviations of less than 2% for the dimensionless deflection and less than 4% for the stresses. The parametric study reveals that the gradation index n is the most influential parameter governing plate stiffness: increasing n from 0 to 10 amplifies the maximum deflection by a factor of 3.4 and shifts the neutral axis toward the metal-rich face. The geometric ratios a/b and a/h indicate, respectively, a stabilization of deflection for $a/b \geq 3$ and a convergence toward the thin-plate regime for $a/h \geq 50$.

Keywords: Functionally Gradient Materials (FGM) · Static Bending · HSDT · Finite Element Analysis · ABAQUS · Parametric Study

SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES.....	IX
LISTE DES TABLEUX.....	XII
NOMENCLATURE.....	XIII
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
CHAPITRE 1 : LES MATÉRIAUX À GRADIENT FONCTIONNEL (FGM)	
1.1 Introduction	4
1.2 Origine et développement des FGM	4
1.3 Motivations et avantages des FGM	5
1.4 Caractéristiques et propriétés des FGM	6
1.4.1 Structure et composition.....	6
1.4.2 Propriétés mécaniques.....	7
1.4.3 Propriétés thermiques	8
1.5 Lois de distribution des propriétés matérielles.....	9
1.5.1 Loi puissance — P-FGM.....	10
1.5.2 Loi exponentielle — E-FGM	11
1.5.3 Loi sigmoïdale — S-FGM (règle des mélanges double puissance)	12
1.6 Méthodes de fabrication des FGM	13
1.6.1 Techniques de dépôt.....	13
1.6.2 Métallurgie des poudres	14
1.6.3 Fabrication additive	15
1.7 Applications industrielles	15
1.7.1 Secteur aérospatial.....	16
1.7.2 Industrie militaire	17
1.7.3 Domaine biomédical.....	17
1.7.4 Applications automobiles	18

1.7.5 Autres applications	18
1.8 Conclusion.....	19
Références bibliographiques.....	20
CHAPITRE 2: PLAQUES FGM EN FLEXION STATIQUE : DE LA THÉORIE SSDT À LA SIMULATION NUMÉRIQUE	
2.1. Introduction	23
2.2. Flexion sous charge transversale	23
2.2.1. Types de chargement :	23
2.2.2. Charge uniformément répartie :	24
2.2.3. Charge ponctuelle :	24
2.2.4. Charge sinusoïdale :	24
2.3. Formulation analytique du problème de flexion	25
2.3.1. Équations d'équilibre :	25
2.3.2. Forces et moments résultants :	25
2.3.3. Coefficients de rigidité :	26
2.4. Méthodes de résolution analytique	26
2.4.1. Méthode de Navier (séries doubles de Fourier) :	26
2.4.2. Méthode de Lévy (séries simples) :	28
2.5. Distribution des contraintes et déformations	29
2.5.1. Contraintes normales :	29
2.5.2. Contraintes de cisaillement.....	29
2.5.3. Déformations dans l'épaisseur :	29
2.5.4. Contraintes de von Mises :	30
2.5.5. Contraintes adimensionnelles :	30
2.6. Flèche adimensionnelle et déformée de la plaque FGM	31
2.7. Démarche de simulation numérique sous Abaqus	32
2.7.1. Type d'éléments de maillage :	34
2.7.2. Conditions aux limites utilisées dans la simulation	36

2.8. Conclusion.....	37
Références bibliographiques.....	38

CHAPITRE 3 : ETUDE PARAMETRIQUE ET RESULTATS NUMERIQUES

3.1. Introduction	40
3.2. Description du modèle FGM et propriétés matérielles	40
3.2.1. Géométrie et hypothèses	40
3.2.2. Gradient de matériau : loi puissance et loi des mélanges.....	41
3.3. Modélisation par éléments finis	42
3.3.1. Configuration du modèle.....	42
3.3.2. Stratégie de discrétisation.....	43
3.3.3. Conditions aux limites.....	44
3.4. Analyse de la déflexion adimensionnelle	44
3.4.1. Champ de déflexion.....	44
3.4.2. Profil de déflexion selon la ligne centrale	47
3.4.3. Influence de l'indice de gradation n sur la déflexion maximale	47
3.5. Analyse du champ de contraintes	49
3.5.1. Distribution spatiale de $\bar{\sigma}_{xx}$ pour $z = h/2$	49
3.5.2. Distribution spatiale de $\bar{\sigma}_{yy}$ pour $z = h/3$	52
3.6. Analyse paramétrique.....	56
3.6.1. Influence de l'indice de gradation n.....	56
3.6.2. Influence du rapport d'élancement a/b.....	58
3.6.3. Influence du rapport a/h	63
3.7. Synthèse des résultats et tendances générales	66
3.8. Conclusion du chapitre.....	66
Références bibliographiques.....	67
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE	68

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Exemple d'une plaque FGM - transition progressive céramique/métal	4
Figure 1.2: Classification des structures de FGM	7
Figure 1.3: Variation continue de la microstructure FGM: (a) schématisée; (b) photographie MEB	7
Figure 1.4: Géométrie et système de coordonnées d'une structure FGM	9
Figure 1.5: Influence de l'exposant p sur la variation du module de Young loi P-FGM	10
Figure 1.6: Variation du module de Young selon la loi E-FGM	11
Figure 1.7: Variation du module de Young selon la loi S-FGM	12
Figure 1.8: Représentation schématique du procédé CVD appliqué aux FGM	14
Figure 1.9: Procédé de fabrication par métallurgie des poudres (SPS)	14
Figure 1.10: Fabrication additive de FGM par procédé DED	15
Figure 1.11: Domaines d'application des FGM	16
Figure 1.12: Pièces et applications des FGM dans le domaine aérospace	16
Figure 1.13 : Gilets pare-balles et blindages de véhicules militaires en FGM	17
Figure 1.14: Vue schématique d'un implant dentaire FGM (gradient HA/Ti).....	17
Figure 1.15 : Pièces et applications des FGM dans le domaine automobile	18
Figure 2.1: charge répartie uniformément sur une plaque simplement appuyée	24
Figure 2.2: charge ponctuelle sur une plaque simplement appuyée	24
Figure 2.3: Dimensions de la plaque	27
Figure 2.4.: Organigramme de simulation	33
Figure 2.5 : Élément fini C3D20R hexaèdre quadratique à 20 nœuds et intégration réduite (8 points de Gauss $2 \times 2 \times 2$).....	35
Figure 2.6 : Représentation schématique des cinq configurations de conditions aux limites. Les triangles indiquent un appui simple (S), les hachures un encastrement (C) et les tirets un bord libre (F)	37
Figure 3.1: Plaque en matériau FGM avec système de coordonnées et variation des propriétés	41

Figure 3.2: Évolution de la fraction volumique en fonction des indices de puissance n.	42
Figure 3.3: Plaque en matériau FGM avec détail des couches discrétisées.	43
Figure 3.4 Plaque FGM avec conditions aux limites et charge répartie appliquée	44
Figure 3.5: Champ de déflexion adimensionnelle $\bar{W}$ pour chaque condition aux limites(UDL, n=2, a/b=1,a/h=10)	46
Figure 3.6: Profil de déflexion adimensionnelle $\bar{W}$ le long de $\bar{y}=0,5$ pour différents n.	47
Figure 3.7: Évolution de $\bar{W}$ en fonction de n comparaison MEF / Analytique / Références.	48
Figure 3.8: Contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xx}$ à $z= +h/2$ (UDL, SSSS, différent indice gradient n, a/b=1, a/h=10)	51
Figure 3.9: Variation de $\bar{\sigma}_{xx}$ en fonction de n MEF vs Analytique vs Références (UDL, SSSS, a/b = 1, a/h = 10).	52
Figure 3.10: Contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{yy}$ à $z=+h/3$ (UDL, SSSS, différent indice gradient n, a/b=1, a/h=10)	54
Figure 3.11: Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{yy}$ en fonction de n à $z = +h/3$ MEF vs Analytique vs Références (UDL, SSSS, a/b = 1, a/h = 10).	55
Figure 3.12: Influence des conditions aux limites sur $\bar{W}$ différents n (UDL, a/b = 1, a/h = 10).	57
Figure 3.13: Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de n (SSSS, UDL).	58
Figure 3.14: Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de n (SSSS, UDL).	54
Figure 3.15: Influence du rapport a/b sur $\bar{W}$ pour n = 5 (UDL, a/h = 10, SSSS).	59
Figure 3.16: : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/b.	59
Figure 3.17: : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{yy}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/b.	60
Figure 3.18: Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/b.	61

Figure 3.19: Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/b	62
Figure 3.20: Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/h	64
Figure 3.21: Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/h	65

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1: Principales étapes du développement des FGM	5
Tableau 1.2: Comparaison des propriétés mécaniques composite classique vs FGM.....	8
Tableau 1.3: Propriétés thermiques caractéristiques des FGM.....	9
Tableau 1.4: Comparaison des lois de distribution des propriétés dans les FGM	13
Tableau 2.1 : Caractéristiques de l'élément C3D20R utilisé dans la simulation Abaqus.....	35
Tableau 2.2 : Conditions aux limites appliquées sur chaque bord pour les cinq configurations..... étudiées (S : simplement appuyé, C : encastré, F : libre).	36
Tableau 3.1: Propriétés mécaniques et physiques des constituants Al/Al ₂ O ₃	41
Tableau 3.2 Déflexions adimensionnelle $\bar{W}$ en fonction de l'indice n (UDL, SSSS, a/b = 1, a/h = 10).....	48
Tableau 3.3: Contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_{xx}$ à z = +h/2 — plaque carrée sous charge uniforme (a/h = 10).....	51
Tableau 3.4: Contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_{yy}$ à z = +h/3 — plaque carrée sous charge uniforme (a/h = 10).....	55
Tableau 3.5: Influence des conditions aux limites sur $\bar{W}$ pour différents indices n (UDL, a/b = 1, a/h = 10).....	56
Tableau 3.6: Influence du rapport a/b sur $\bar{W}$ pour n = 5 (UDL, a/h = 10).....	58
Tableau 3.7: Influence du rapport a/h sur $\bar{W}$ pour n = 5 (UDL, a/h = 10).....	63

NOMENCLATURE

a, b	: Longueurs des côtés de la plaque (m)
h	: Épaisseur de la plaque (m)
z	: Coordonnée dans l'épaisseur
n	: Indice de gradient — loi de puissance FGM
$q(x, y)$	: Charge de distribution transversale (Pa)
q_0	: Intensité de la charge uniforme ou sinusoïdale (Pa)
P_0	: Intensité de la charge ponctuelle (N)
q_{mn}	: Coefficient de Fourier de la charge
$\delta(x - x_0)$	: Fonction de Dirac
$E(z)$	: Module d'Young effectif — variable selon z (Pa)
E_c	: Module d'Young de la céramique — $z = +h/2$ (Pa)
E_m	: Module d'Young du métal — $z = -h/2$ (Pa)
ν	: Coefficient de Poisson
D	: Rigidité en flexion de la plaque (N·m)
u_0, v_0	: Déplacements dans le plan (m)
w	: Déplacement transversal — flèche (m)
w_b	: Composante de flexion pure — type Kirchhoff (m)
w_s	: Composante due au cisaillement transverse (m)
$\bar{w}$	: Flèche adimensionnelle normalisée
$W_{mn}, W_{b,mn}, W_{s,mn}$	: Amplitudes modales de la flèche
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	: Déformations normales dans le plan
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$	: Déformations membranaires (plan moyen)
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	: Déformations de cisaillement
k_{xb}, k_{yb}, k_{xyb}	: Courbures de flexion pure
k_{xs}, k_{ys}, k_{xys}	: Courbures dues au cisaillement HSDT
σ_x, σ_y	: Contraintes normales dans le plan (Pa)
σ_z	: Contrainte normale transversale ≈ 0 (Pa)
τ_{xy}	: Contrainte de cisaillement dans le plan (Pa)
τ_{yz}, τ_{xz}	: Contraintes de cisaillement transverses (Pa)
$\sigma_{eq} = \sigma_{VM}$	: Contrainte équivalente de von Mises (Pa)
$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$	: Contraintes normales adimensionnelles

$\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$	:	Contraintes de cisaillement adimensionnelles
N_x, N_y, N_{xy}	:	Efforts membranaires résultants (N/m)
M_{xb}, M_{yb}, M_{xyb}	:	Moments de flexion pure résultants (N·m/m)
M_{xs}, M_{ys}, M_{xys}	:	Moments de cisaillement HSDT résultants (N·m/m)
S_{xz}, S_{yz}	:	Efforts tranchants transverses résultants (N/m)
A_{ij}	:	Rigidités membranaires (N/m)
B_{ij}	:	Rigidités de couplage membrane-flexion (N)
D_{ij}	:	Rigidités de flexion (N·m)
$B_{ijs}, D_{ijs}, H_{ijs}$	:	Rigidités HSDT d'ordre supérieur
A_{44s}, A_{55s}	:	Rigidités de cisaillement transverse (N/m)
m, n	:	Nombres de mode
λ	:	Paramètre de série de Fourier selon x
μ	:	Paramètre de série de Fourier selon y
k_{ij}	:	Coefficients de la matrice de rigidité
$[K]$	:	Matrice de rigidité du système
$\{A\}$	:	Vecteur des inconnues nodales
$\{F\}$	:	Vecteur des forces extérieures

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont des matériaux composites avancés présentant une variation continue de leur composition et de leurs propriétés physico-mécaniques à travers leur épaisseur, sans discontinuité interfaciale. Contrairement aux composites multicouches classiques, les FGM éliminent les concentrations de contraintes aux interfaces. Ces concentrations provoquent habituellement le délaminage et la rupture prématurée. Grâce à cette suppression, les FGM offrent des performances thermiques et mécaniques bien supérieures. Cette ouvre de nombreuses possibilités d'utilisation dans les secteurs aérospatial, nucléaire, biomédical et automobile.

Parmi les éléments structuraux les plus répandus, les plaques occupent une place centrale dans les systèmes mécaniques et industriels. L'étude de leur comportement en flexion est un sujet de recherche majeur, car la variation continue des propriétés à travers l'épaisseur — décrite par une loi puissance (P-FGM), exponentielle (E-FGM) ou sigmoïdale (S-FGM) — induit un couplage entre efforts membranaires et moments de flexion, nécessitant des modèles théoriques adaptés. Dans ce travail, la théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement (SSDT) est adoptée ; elle décrit avec précision le profil de cisaillement transversal sans facteur de correction, et s'avère particulièrement adaptée aux plaques FGM épaisses à modérément épaisses.

Ce mémoire étudie la flexion statique de plaques rectangulaires FGM de type $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ sous chargement transversal uniformément réparti. Une formulation analytique basée sur la SSDT et résolue par la méthode de Navier est développée, complétée par une

simulation éléments finis sous ABAQUS (éléments C3D20R) pour cinq configurations de conditions aux limites (SSSS, CCCC, SCSC, SSSC, SFSF). L'influence de l'indice de gradation n , des rapports a/b et a/h est analysée, et les résultats sont validés par comparaison aux références de Zenkour (2006), Neves et al. (2013), Tran Minh et al. (2017) et Afsal et al. (2024).

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Le Chapitre 1 présente les FGM : origine, propriétés mécaniques et thermiques, lois de distribution (P-, E- et S-FGM), procédés de fabrication (SPS, CVD/PVD, fabrication additive) et principales applications industrielles.

Le Chapitre 2 développe la formulation analytique de la flexion statique des plaques FGM dans le cadre de la théorie SSDT. Les équations d'équilibre, les coefficients de rigidité, les méthodes de Navier et de Lévy, les expressions des contraintes adimensionnelles et de la flèche sont établies. La démarche de simulation sous ABAQUS est également décrite.

Le Chapitre 3 présente les résultats numériques et l'étude paramétrique portant sur l'influence de n , a/b et a/h sur la déflexion et la distribution des contraintes, pour les cinq configurations de conditions aux limites, avec validation par rapport à la littérature.

Enfin, le présent travail s'achève par une conclusion générale comportant un résumé de l'ensemble de ce mémoire.

CHAPITRE 1 :

LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL (FGM)

1.1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux de structure dont la composition et les propriétés mécaniques varient de façon continue à travers l'épaisseur, sans discontinuité interfaciale. Ces matériaux éliminent les concentrations de contraintes aux interfaces, contrairement aux composites multicouches classiques, et offrent de meilleures performances thermomécaniques [1].

Ce chapitre présente les bases conceptuelles et technologiques des FGM. Il aborde successivement leur origine historique, leurs motivations et avantages, leurs propriétés mécaniques et thermiques, les lois de distribution — puissance (P-FGM), exponentielle (E-FGM) et sigmoïdale (S-FGM) —, les procédés de fabrication, ainsi qu'une revue des applications industrielles.

1.2 Origine et développement des FGM

La notion de matériaux à gradient de propriétés répond à une question centrale en ingénierie des matériaux : comment intégrer dans une même pièce des caractéristiques souvent contradictoires — par exemple rigidité et ductilité, isolation thermique et conductivité, ou compatibilité biologique et résistance mécanique. Les stratifiés composites offrent une solution partielle, mais les ruptures nettes aux interfaces constituent souvent une faiblesse majeure. Les FGM contournent ce problème en substituant ces discontinuités par une variation spatiale progressive des propriétés [1].

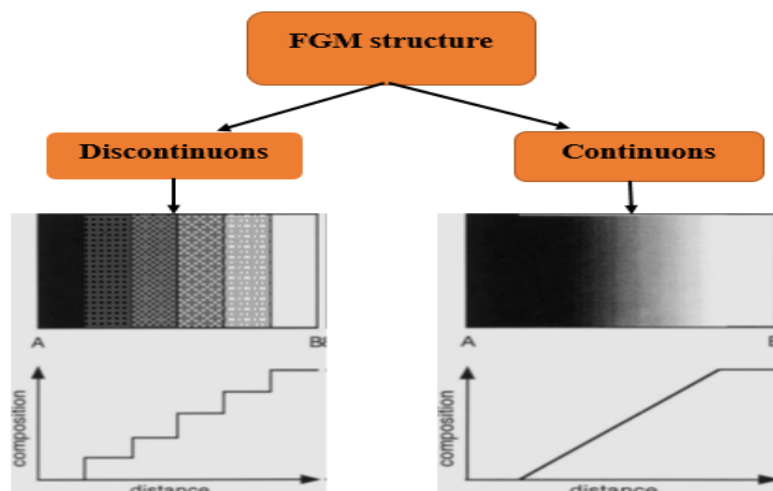


Figure 1.1 : Exemple d'une plaque FGM — transition progressive céramique/métal [4]

Dès les années 1990, es progrès des procédés de projection thermique et de la métallurgie des poudres, ainsi que les avancées de la modélisation par éléments finis, permettent de concevoir et de caractériser des FGM avec des gradients contrôlés. Dans les années 2000, sur une extension de l'usage des FGM aux domaines biomédical et électronique. L'arrivée de l'impression/fabrication additive dans les années 2010 a marqué une étape importante, car elle permet de fabriquer des dégradés multimatériaux avec une liberté géométrique nouvelle [3].

Tableau 1.1 : Principales étapes du développement des FGM

Période	Étape clé du développement	Domaine / Procédé
Années 1980	Conception initiale des FGM pour boucliers thermiques (programme spatial japonais)	Aérospatial / Nucléaire
Années 1990	Développement des techniques de dépôt ; modélisation EF avancée	Pulvérisation thermique, CVD, MEF
Années 2000	Extension au biomédical et à l'électronique ; standardisation des lois de distribution	Biomédical, électronique
Années 2010–2020+	Essor de la fabrication additive pour FGM multi-matériaux ; optimisation topologique	SLM, DED, impression 3D

1.3 Motivations et avantages des FGM

L'intérêt croissant pour les FGM tient à leur capacité unique à répondre simultanément à des exigences fonctionnelles multiples et souvent antagonistes. Les principaux avantages de FGM peuvent être résumés comme suit :

✓ **Réduction des contraintes résiduelles** : Réduction des contraintes résiduelles : la transition continue de composition supprime les différences d'impédance mécanique et thermique. Ainsi, les contraintes résiduelles à l'interface diminuent, ce qui empêche les fissures et le délaminage.

- ✓ **Optimisation thermomécanique** : les FGM combinent une forte résistance thermique des céramiques en surface avec la souplesse des métaux au cœur. Ainsi, les FGM gèrent des gradients de température supérieurs à 1 000 K sans rupture de la structure.
- ✓ **Allègement structurel** : la distribution optimisée de la matière selon les sollicitations locales diminue la masse des composants, un enjeu crucial dans le secteur aéronautique et spatial.
- ✓ **Intégration multifonctionnelle** : une seule pièce en FGM peut assurer des fonctions à la fois portantes, isolantes, conductrices ou biocompatibles, réduisant le nombre de pièces assemblées et améliorant la fiabilité globale.
- ✓ **Adaptabilité environnementale** : le profil de gradient peut être conçu spécifiquement pour les conditions de service (température, pression, irradiation, environnement biologique), conférant aux FGM une polyvalence inégalée.

1.4 Caractéristiques et propriétés des FGM

Les propriétés des FGM résultent de la synergie entre leur architecture microstructurale et leur composition chimique locale. L'absence d'interfaces abruptes leur confère des comportements mécaniques et thermiques qualitativement supérieurs à ceux des composites conventionnels [1]. Ces propriétés sont entièrement déterminées par la loi de distribution choisie, la nature des constituants et les paramètres du procédé de fabrication.

1.4.1 Structure et composition

La structure interne d'un FGM est définie par la distribution spatiale des phases constitutives selon une architecture unidirectionnelle, radiale ou bidirectionnelle, selon les applications visées [5]. La fraction volumique de chaque phase varie continûment de sorte que les propriétés effectives transitent progressivement d'un constituant à l'autre.

Dans le cas paradigmatique des FGM céramique/métal (Al_2O_3 /Al, ZrO_2 /Ti, TiC/Ni), la surface exposée aux hautes températures est enrichie en céramique, tandis que la surface structurelle est à dominante métallique. La morphologie des phases, la porosité résiduelle et la taille des grains jouent un rôle déterminant dans les propriétés effectives et doivent être maîtrisées lors de la fabrication [6].

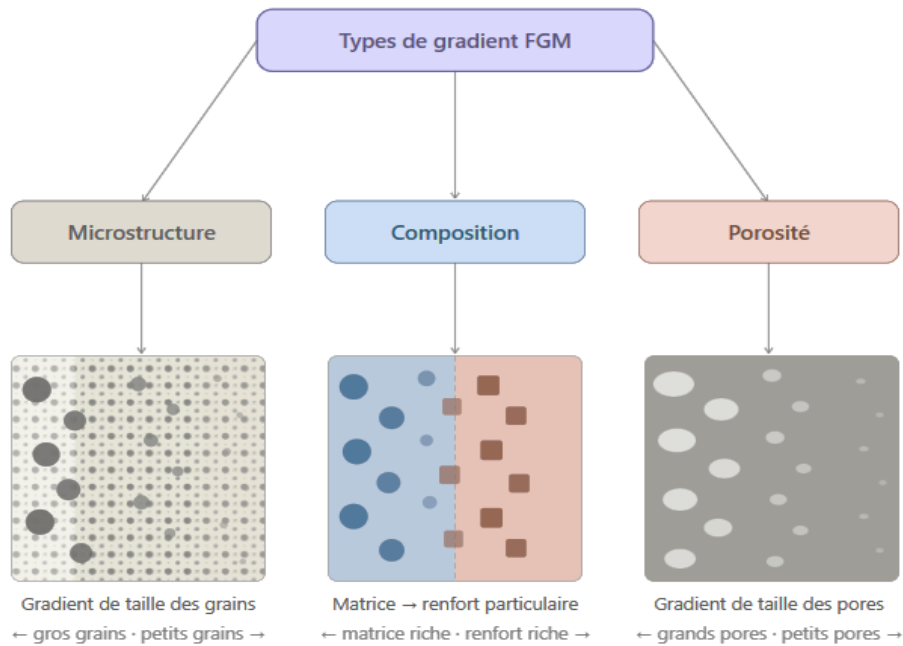


Figure 1.2 : Classification des structures de FGM [7]

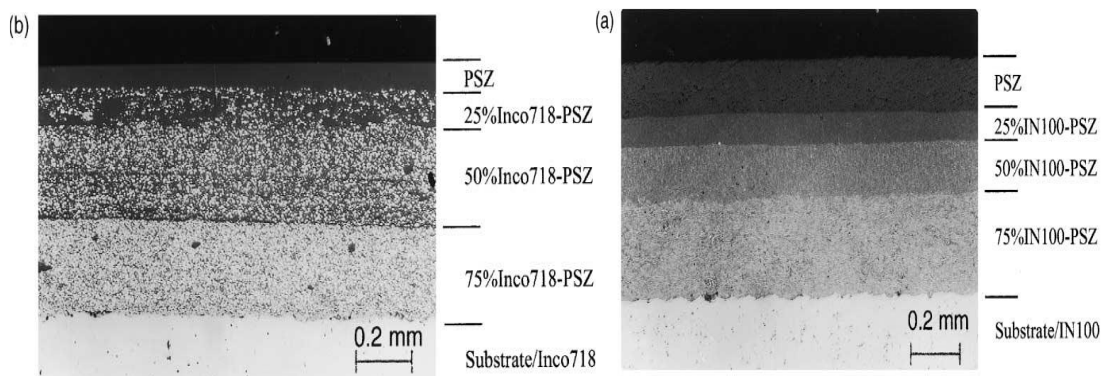


Figure 1.3 : Variation continue de la microstructure FGM : (a) schématisée ; (b) photographie MEB [8]

1.4.2 Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques des FGM : module d'élasticité $E(z)$, coefficient de Poisson $\nu(z)$, limite d'élasticité et ténacité, évoluent de façon continue selon le profil de gradient.

Cette gradation présente plusieurs avantages mécaniques fondamentaux [9] :

— **Résistance à la fatigue** : l'absence d'interfaces abruptes supprime les sites d'amorçage préférentiel des fissures de fatigue, améliorant sensiblement la durée de vie en service.

— **Tolérance aux chocs thermomécaniques** : la dissipation progressive des contraintes thermiques sur une zone de transition étendue réduit le risque de fracture brutale lors de cycles sévères.

— **Absorption d'énergie** : la variation continue de rigidité favorise une distribution plus uniforme des déformations plastiques, augmentant la capacité d'absorption d'énergie avant rupture.

Tableau 1.2 : Comparaison des propriétés mécaniques — composite classique vs FGM

Propriété	Composite classique (multicouche)	FGM (gradient continu)
Résistance mécanique	Concentrations de contrainte aux interfaces	Distribution progressive, sans singularités
Résistance à la fatigue	Faible aux interfaces — risque de délaminage	Améliorée par l'absence d'interfaces abruptes
Tolérance aux chocs	Limitée par la rigidité discontinue	Améliorée par dissipation progressive d'énergie
Module d'élasticité	Discontinu entre les couches	Variation continue selon loi puissance / exponentielle
Durabilité sous contraintes	Réduite aux zones d'interface	Optimisée sur l'ensemble de la section

1.4.3 Propriétés thermiques

Les propriétés thermiques des FGM : conductivité thermique $\lambda(z)$, coefficient de dilatation $\alpha(z)$ et capacité calorifique $c_p(z)$, varient continûment à travers l'épaisseur [10].

Deux avantages thermiques en découlent :

— **Réduction des contraintes thermiques** : la compatibilité des coefficients de dilatation entre zones adjacentes évite les tensions internes lors des cycles thermiques. Dans un composite multicouche, la discontinuité de α génère des contraintes résiduelles pouvant atteindre plusieurs centaines de MPa ; dans un FGM, ces contraintes sont distribuées et atténuées.

— **Gestion thermique optimisée** : la conductivité thermique variable permet de contrôler les flux de chaleur à travers la pièce, propriété exploitée dans les barrières thermiques et les réacteurs nucléaires.

Tableau 1.3 : Propriétés thermiques caractéristiques des FGM

Propriété thermique	Comportement dans les FGM	Avantage principal
Conductivité thermique $\lambda(z)$	Variable selon la position (gradient continu)	Dissipation maîtrisée ; barrière thermique adaptable
Dilatation thermique $\alpha(z)$	Compatible entre zones adjacentes	Réduction des contraintes et du risque de fissuration
Capacité calorifique $cp(z)$	Varie selon la composition locale	Contrôle de l'accumulation d'énergie thermique
Résistance aux chocs thermiques	Améliorée par l'absence d'interfaces abruptes	Longévité accrue sous cycles thermiques sévères
Stabilité thermique	Assurée par la maîtrise des lois de distribution	Intégrité structurelle sur le long terme

1.5 Lois de distribution des propriétés matérielles

La modélisation des FGM repose sur des lois mathématiques décrivant la variation spatiale de la fraction volumique des constituants en fonction de la coordonnée d'épaisseur $z \in [-h/2, h/2]$ [11]. Le choix de la loi conditionne directement le comportement structural du FGM et doit être guidé par les conditions de service et la géométrie de la structure [2].

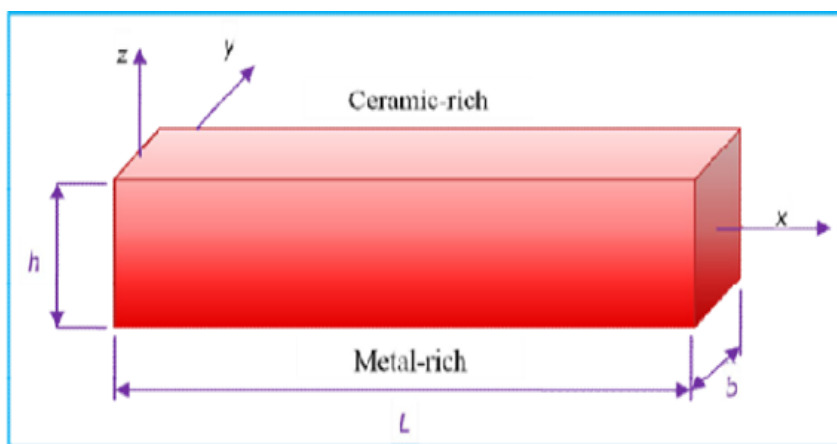


Figure 1.4 : Géométrie et système de coordonnées d'une structure FGM [2]

1.5.1 Loi puissance — P-FGM

La loi puissance est la formulation la plus répandue, en raison de sa simplicité et de sa flexibilité [2]. La fraction volumique de la phase céramique est donnée par :

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad 1.1$$

- ✓ p : le paramètre du matériau
- ✓ h : l'épaisseur de la poutre / plaque
- ✓ z : la coordonnée suivant l'épaisseur
- ✓ $E(z)$: module de Young à la position z .
- ✓ E_m : module de Young de la phase métallique.
- ✓ E_c : module de Young de la phase céramique.

Le module de Young effectif est calculé par la règle des mélanges linéaire :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V_c(z) \quad 1.2$$

L'exposant p contrôle la forme du profil : $p = 1$ correspond à une variation linéaire ; p élevé produit une transition abrupte côté céramique ; p proche de zéro donne une structure quasi-métallique.

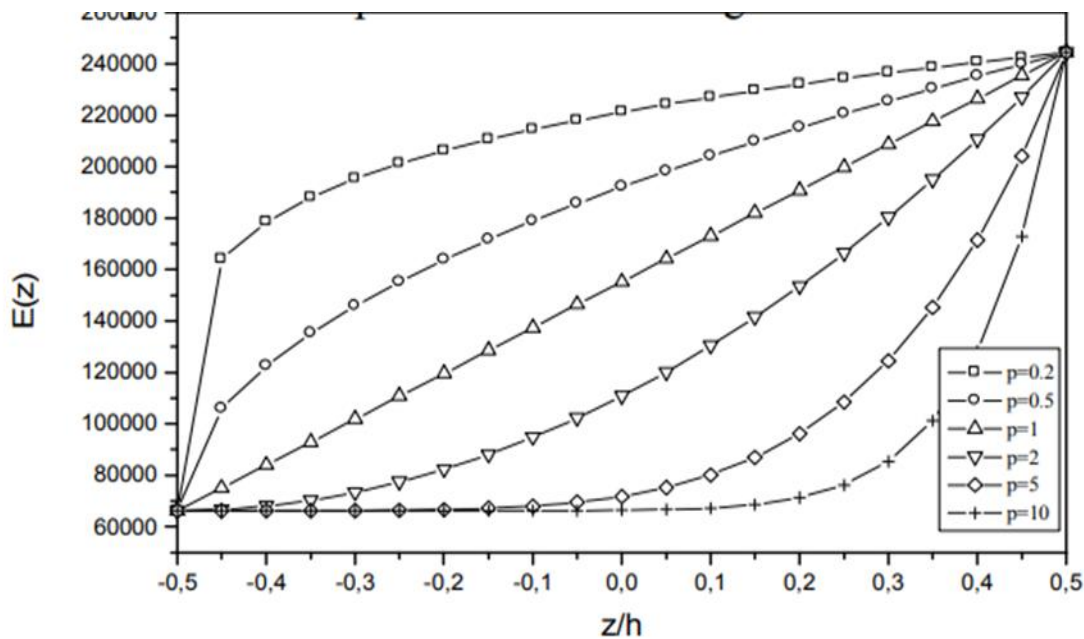


Figure 1.5 : Influence de l'exposant p sur la variation du module de Young loi P-FGM [2]

1.5.2 Loi exponentielle — E-FGM

Proposée par Delale & Erdogan [12] pour l'analyse des problèmes de fissures dans les milieux non homogènes, la loi exponentielle décrit une variation monotone du module de Young :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad 1.3$$

Le coefficient exponentiel B est déterminé par les valeurs aux deux surfaces :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad 1.4$$

où :

$E(z)$: module de Young à la position z

E_c : module de Young à la surface supérieure ($z = h/2$)

E_m : module de Young à la surface inférieure ($z = -h/2$)

B : coefficient exponentiel donné par l'équation (1.4)

Cette loi est particulièrement adaptée à la modélisation des problèmes de propagation d'ondes et de diffusion thermique, où une variation exponentielle conduit à des solutions analytiques.

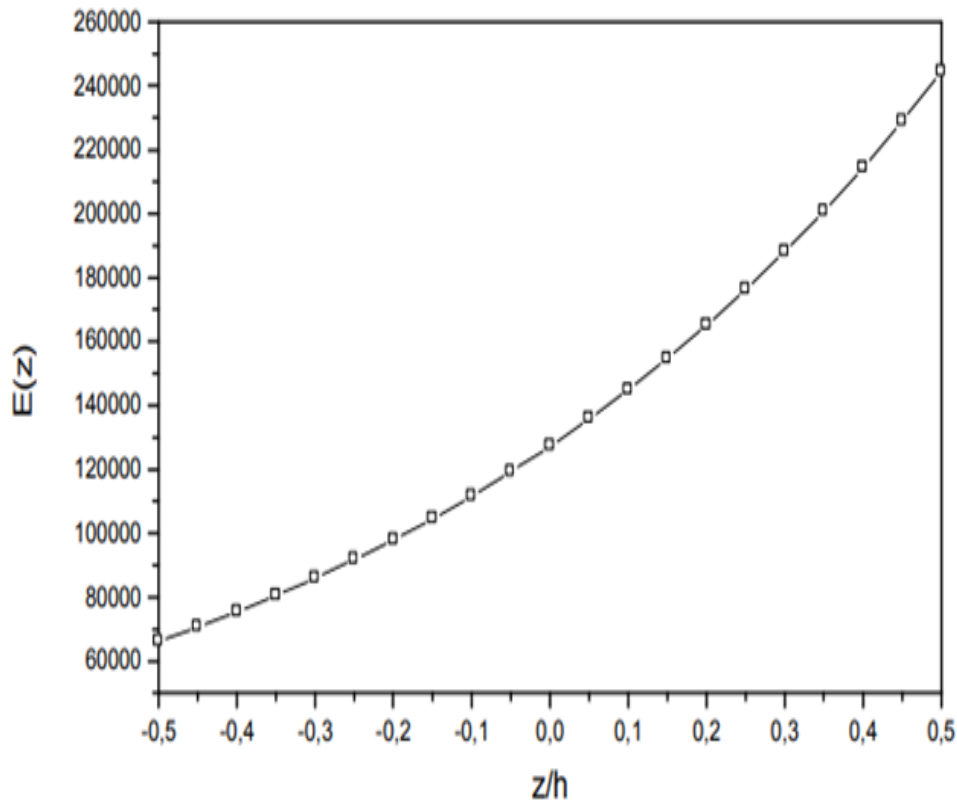


Figure 1.6 : Variation du module de Young selon la loi E-FGM [12]

1.5.3 Loi sigmoïdale — S-FGM (règle des mélanges double puissance)

La loi sigmoïdale, introduite par Chung & Chi [13], utilise deux fonctions de loi de puissance symétriques sur chaque demi-épaisseur, générant un profil en S assurant une transition douce au centre de la plaque :

$$\text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 : \quad V_c(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad 1.5$$

$$\text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 : \quad V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad 1.6$$

Le module de Young effectif est obtenu par la règle des mélanges appliquée séparément sur chaque demi-épaisseur :

$$\text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad E(z) = V_c(z) \cdot E_c + [1 - V_c(z)] \cdot E_m \quad 1.7$$

$$\text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad E(z) = V_m(z) \cdot E_c + [1 - V_m(z)] \cdot E_m \quad 1.8$$

Ce profil sigmoïde est avantageux pour les structures soumises à des sollicitations bilatérales (flexion symétrique, chargements thermomécaniques inverses), car il minimise les gradients de propriétés en surface et assure une transition continue et dérivable en $z = 0$.

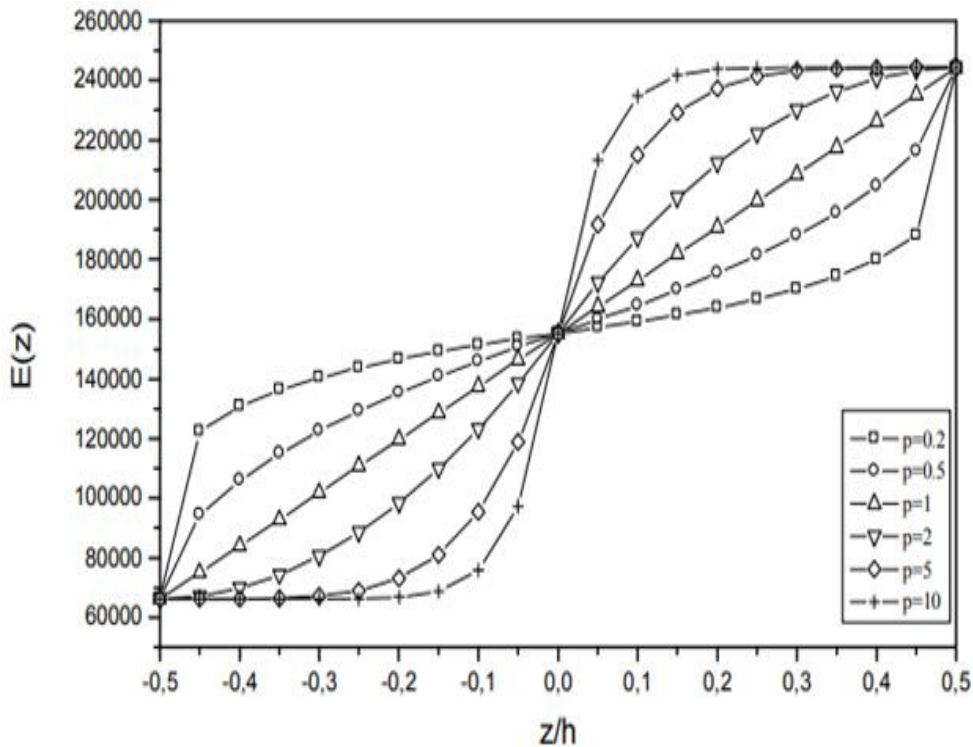


Figure 1.7 : Variation du module de Young selon la loi S-FGM [13]

Tableau 1.4 : Comparaison des lois de distribution des propriétés dans les FGM

Loi	Caractéristique mathématique	Avantage	Application typique
Loi puissance P-FGM	Profil monotone, flexible via l'exposant p	Modélisation générale ; intégration EF aisée	Flexion de poutres/plaques
Loi exponentielle E-FGM	Variation strictement monotone, solutions analytiques	Traitement analytique des problèmes de fissures	Mécanique de la rupture, diffusion thermique
Loi sigmoïdale S-FGM	Profil en S, dérivée nulle aux bords	Minimise les contraintes de surface	Flexion symétrique, sollicitations bilatérales

1.6 Méthodes de fabrication des FGM

La réalisation pratique des gradients de propriétés exige un contrôle précis de la composition et de la microstructure à l'échelle locale. Trois grandes familles de procédés sont principalement utilisées [3], dont le choix dépend de la nature des matériaux, de la complexité géométrique et des tolérances requises.

1.6.1 Techniques de dépôt

Les techniques de dépôt en phase vapeur — physique (PVD) et chimique (CVD) — permettent de construire des FGM couche par couche avec une résolution en composition à l'échelle nanométrique [14]. La composition locale est contrôlée par les paramètres opératoires : puissance de pulvérisation, pression partielle des gaz précurseurs, température du substrat et vitesse de dépôt. La pulvérisation thermique (plasma spray, HVOF) permet quant à elle de déposer des couches épaisses à gradient de composition sur des pièces de grande dimension, au prix d'une résolution spatiale moindre.

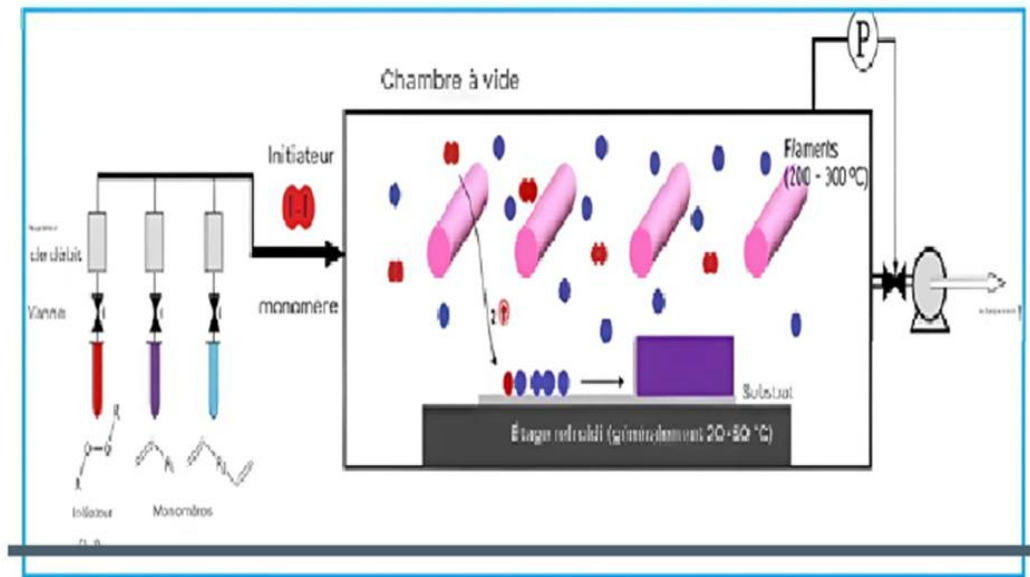


Figure 1.8 : Représentation schématique du procédé CVD appliqué aux FGM [3]

1.6.2 Métallurgie des poudres

La métallurgie des poudres constitue le procédé de référence pour la fabrication de FGM massifs [3]. Le principe consiste à préparer des mélanges de poudres à compositions progressivement variables, à les superposer dans un moule selon le profil de gradient désiré, puis à les consolider par frittage conventionnel, frittage flash (SPS — Spark Plasma Sintering) ou pressage isostatique à chaud (HIP). Le frittage SPS est particulièrement avantageux car il réduit les temps de cycle et limite la croissance des grains, préservant la microstructure fine du gradient. La compatibilité physicochimique entre poudres — mouillabilité, réactivité, coefficients de diffusion — doit être soigneusement étudiée [15].

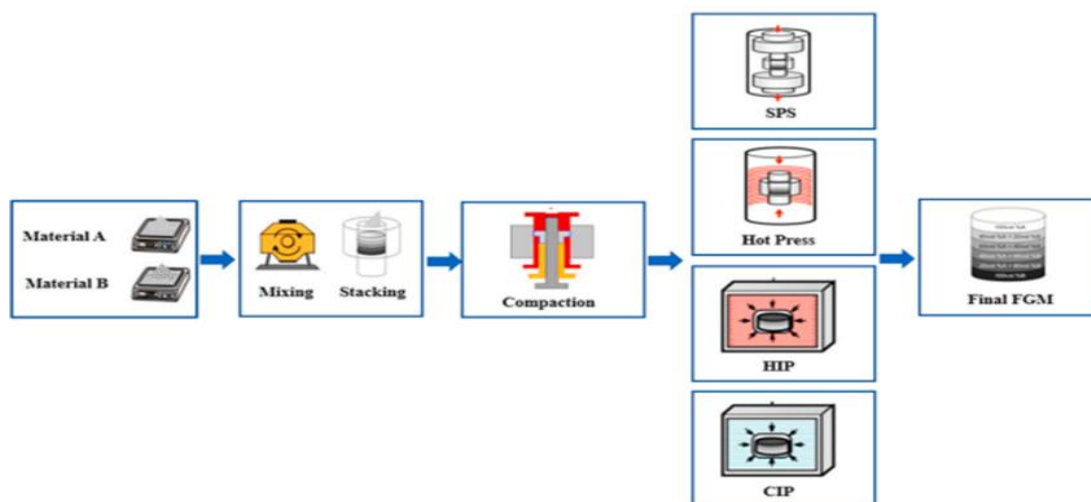


Figure 1.9 : Procédé de fabrication par métallurgie (SPS) [3]

1.6.3 Fabrication additive

La fabrication additive représente la voie la plus récente et prometteuse pour la production de FGM [3]. Les procédés SLM « **Selective Laser Melting** » et DED « **Directed Energy Deposition** » permettent de construire des pièces couche par couche en faisant varier la composition du matériau déposé. Le gradient de propriétés est programmé directement dans le fichier de fabrication, permettant une personnalisation poussée du profil. Les défis résident dans la maîtrise des contraintes résiduelles induites par les gradients thermiques lors de la solidification et dans le contrôle de la microstructure à chaque couche [16].

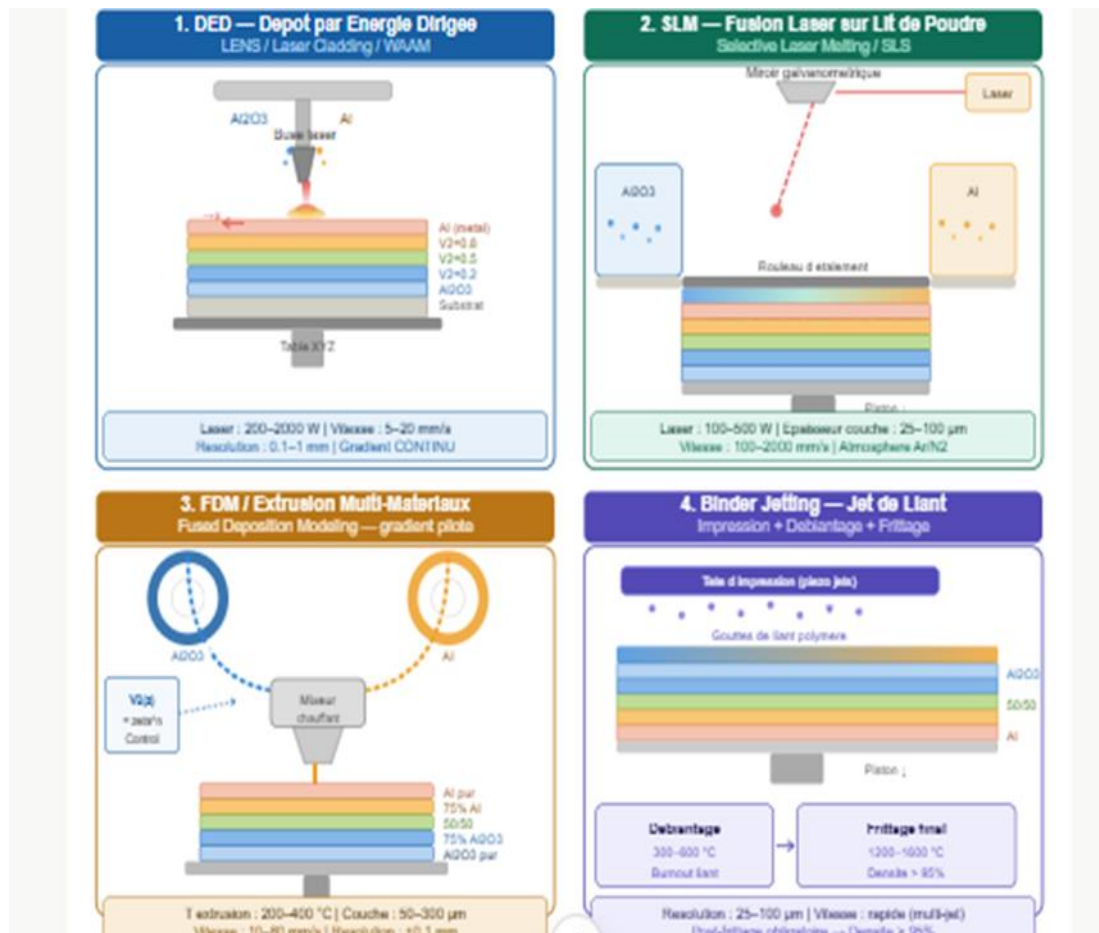


Figure 1.10 : Fabrication additive de FGM par procédé DED [3]

1.7 Applications industrielles

Les FGM ont trouvé des applications dans un large spectre de secteurs industriels, motivées par leur capacité unique à combiner des propriétés mécaniques, thermiques et physicochimiques complémentaires au sein d'une même pièce [3].

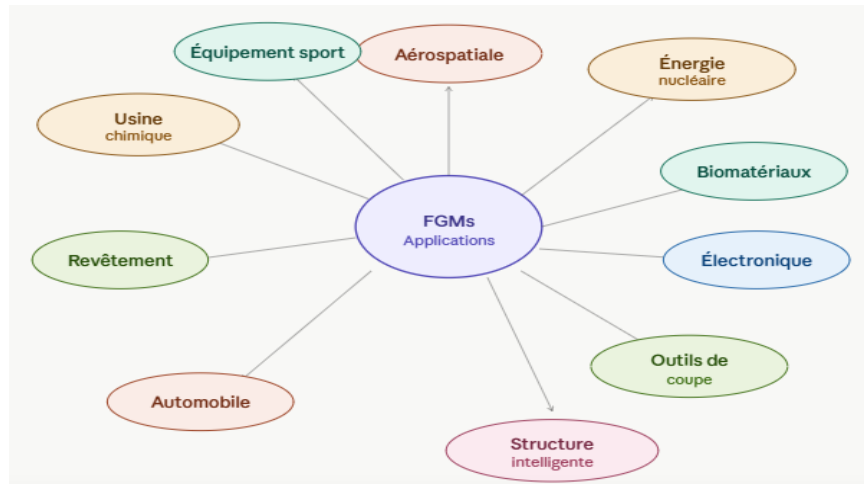


Figure 1.11 : Domaines d'application des FGM [3]

1.7.1 Secteur aérospatial

L'aérospatial constitue le secteur fondateur des FGM. Les applications les plus emblématiques concernent les systèmes de protection thermique (*Thermal Protection Systems*, TPS) des véhicules de rentrée atmosphérique et les parois de chambres de combustion, où le FGM assure la transition entre une surface céramique ultra-résistante aux flux thermiques élevés (jusqu'à 10 MW/m²) et un substrat métallique porteur [3]. À l'échelle des moteurs aéronautiques, les aubes de turbine en FGM permettent d'optimiser simultanément la résistance à l'oxydation en surface et la ductilité à la base, là où les concentrations de contrainte mécanique sont maximales [17].



Figure 1.12 : Pièces et applications des FGM dans le domaine aérospatial [3]

1.7.2 Industrie militaire

Les FGM présentent une résistance élevée à la pénétration et une capacité remarquable à entraver la propagation des fissures, ce qui en fait des matériaux particulièrement attractifs pour les applications de défense [18]. Ils sont ainsi utilisés dans la fabrication de gilets pare-balles et de blindages pour véhicules militaires (Figure 1.13).



Figure 1.13 : Gilets pare-balles et blindages de véhicules militaires en FGM [18]

1.7.3 Domaine biomédical

Le biomédical représente l'un des domaines d'application les plus actifs des FGM. Les implants osseux et dentaires en FGM (ex. : gradient hydroxyapatite/titane) reproduisent la structure naturelle de l'os cortical [19]. Cette gradation améliore l'ostéo-intégration, réduit l'effet de *stress-shielding* — phénomène par lequel un implant trop rigide décharge mécaniquement l'os environnant, provoquant sa résorption — et prolonge la durée de vie de l'implant. La fabrication additive permet la personnalisation des implants à partir de données d'imagerie médicale [20].



Figure 1.14 : Vue schématique d'un implant dentaire FGM (gradient HA/Ti) [20]

1.7.4 Applications automobiles

Dans l'industrie automobile, les FGM sont intégrés dans des composants soumis à des sollicitations thermiques et mécaniques intenses et cycliques : chemises de cylindres, pistons, soupapes, chambres de combustion et disques de frein [21]. Le gradient de composition permet d'optimiser localement la résistance à l'usure en surface tout en conservant en cœur une ductilité suffisante pour absorber les chocs et les vibrations.

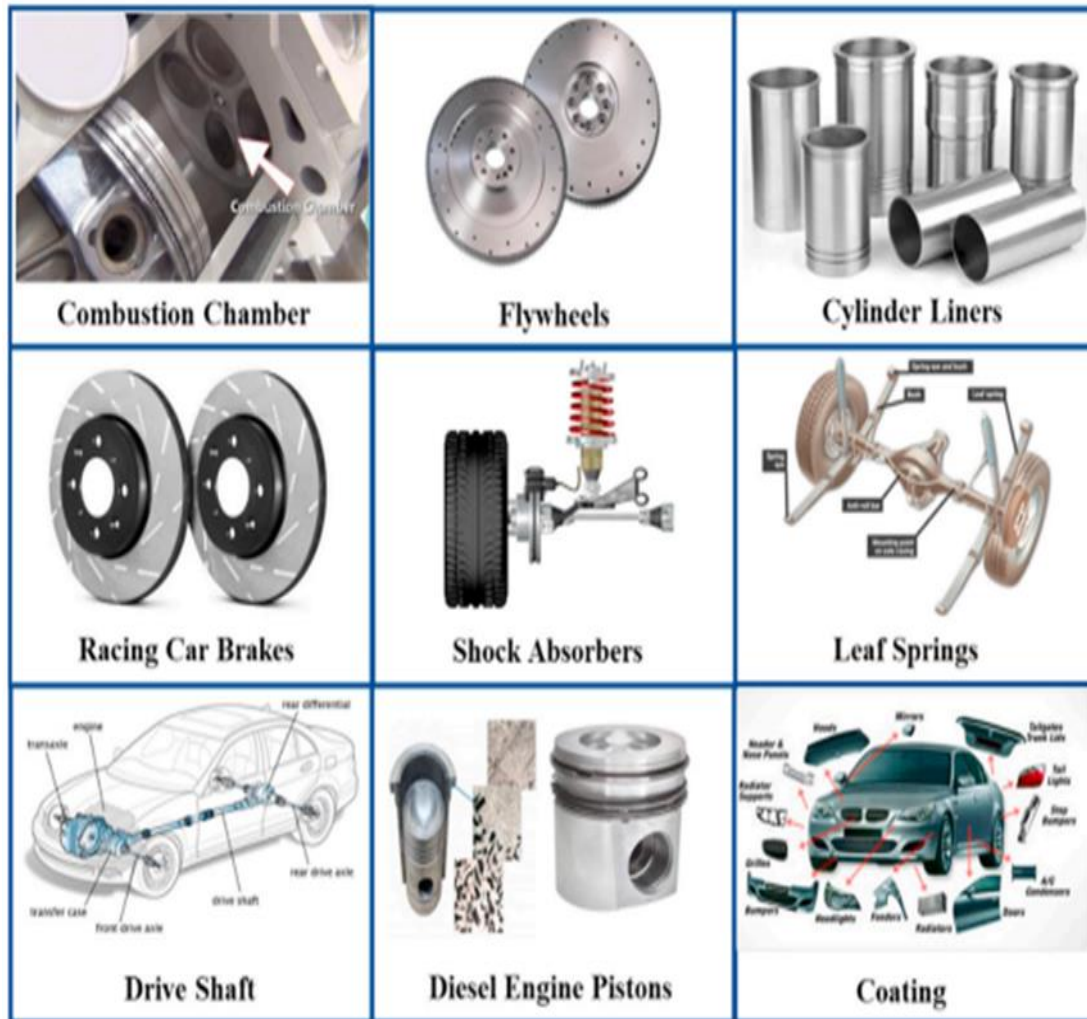


Figure 1.15 : Pièces et applications des FGM dans le domaine automobile [3]

1.7.5 Autres applications

Les FGM connaissent un développement croissant dans des domaines émergents : substrats microélectroniques à gradient de propriétés thermomécaniques, électrodes de piles à combustible à oxyde solide (SOFC), et blindages balistiques céramique/composite polymère présentant une efficacité supérieure à masse égale par rapport aux blindages monolithiques [22].

1.8 Conclusion

Les FGM se distinguent par leur variation spatiale continue de composition, qui leur confère des performances thermomécaniques supérieures aux composites conventionnels. Les lois de distribution — puissance, exponentielle et sigmoïdale — associées aux modèles d'homogénéisation, fournissent le cadre analytique de leur modélisation. Sur le plan technologique, les procédés de métallurgie, de dépôt en phase vapeur et de fabrication additive permettent de créer des gradients de composition avec une grande précision et un contrôle rigoureux. Ce chapitre est consacré au développement des fondements théoriques et technologiques qui serviront de base aux chapitres suivants, lesquels présenteront des modèles analytiques et numériques.

Références bibliographiques

- [1] Mahamood, R. M., & Akinlabi, E. T. (2017). *Functionally Graded Materials*. Springer, Cham.
- [2] Reddy, J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1–3), 663–684.
- [3] Saleh, B., Jiang, J., Fathi, R., Al-hababi, T., Xu, Q., Wang, L., Song, D., & Ma, A. (2020). 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, applications and future challenges. *Composites Part B: Engineering*, 201, 108376. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>.
- [4] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., & Ford, R. G. (Eds.) (1999). *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>.
- [5] Shen, H.-S. (2009). *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press, Boca Raton.
- [6] Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., & Reddy, J. N. (2003). A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(3), 519–539. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00058-4).
- [7] Zrinej, S., Laghzale, N. E., & Bouzid, H. A. (2023, November). Classifications of FGMs, their conventional and additive manufacturing methods. In *International Conference on Advanced Materials for Sustainable Energy and Engineering* (pp. 424-439). Cham: Springer Nature Switzerland.
- [8] Kawasaki, A., & Watanabe, R. (2002). Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(14–16), 1713–1728. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00054-1](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00054-1).
- [9] Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1–2), 1–4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9).
- [10] Noda, N. (1999). Thermal stresses in functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*, 22(4–5), 477–512. <https://doi.org/10.1080/014957399280841>.
- [11] Vel, S. S., & Batra, R. C. (2002). Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA Journal*, 40(7), 1421–1433. <https://doi.org/10.2514/2.1805>.
- [12] Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50(3), 609–614. <https://doi.org/10.1115/1.3167098>.

- [13] Chung, Y.-L., & Chi, S.-H. (2001). The residual stress of functionally graded materials. *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, 13(1), 1–9.
- [14] Kieback, B., Neubrand, A., & Riedel, H. (2003). Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering A*, 362(1–2), 81–106. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1).
- [15] Tokita, M. (1999). Trends in advanced SPS spark plasma sintering systems and technology: Functionally gradient materials and unique synthetic processing methods from next generation of powder technology. *Journal of the Society of Powder Technology Japan*, 30(11), 790–804. <https://doi.org/10.4164/sptj.30.790>.
- [16] Yan, L., Chen, Y., & Liou, F. (2020). Additive manufacturing of functionally graded metallic materials using laser metal deposition. *Additive Manufacturing*, 31, 100901. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2019.100901>.
- [17] Schulz, U., Peters, M., Bach, F.-W., & Tegeder, G. (2003). Graded coatings for thermal, wear and corrosion barriers. *Materials Science and Engineering A*, 362(1–2), 61–80. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00579-3](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00579-3).
- [18] Pompe, W., Worch, H., Eppe, M., Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P., Hempel, U., Scharnweber, D., & Schulte, K. (2003). Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering A*, 362(1–2), 40–60. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00580-X](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00580-X).
- [19] Watari, F., Yokoyama, A., Omori, M., Hirai, T., Kondo, H., Uo, M., & Kawasaki, T. (2004). Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Composites Science and Technology*, 64(6), 893–908. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2003.09.005>.
- [20] Mehrali, M., Shirazi, F. S., Mehrali, M., Metselaar, H. S. C., Kadri, N. A. B., & Osman, N. A. A. (2013). Dental implants from functionally graded materials. *Journal of Biomedical Materials Research Part A*, 101(10), 3046–3057. <https://doi.org/10.1002/jbm.a.34588>.
- [21] Kaysser, W. A., & Ilschner, B. (1995). FGM research activities in Europe. *MRS Bulletin*, 20(1), 22–26. <https://doi.org/10.1557/S0883769400048879>.
- [22] Müller, E., Drašar, Č., Schilz, J., & Kaysser, W. A. (2003). Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Materials Science and Engineering A*, 362(1–2), 17–39. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00581-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1).

CHAPITRE 2 :

PLAQUES FGM EN FLEXION STATIQUE : DE LA THÉORIE SSDT À LA SIMULATION NUMÉRIQUE

2.1. Introduction

La flexion des plaques représente un problème de base en mécanique des structures. Dans le cas des plaques à gradient de propriétés (FGM), ce problème revêt une complexité particulière raison de la variation continue des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur. Dans ce cas, un couplage entre les forces membranaires et les moments de flexion est induit. La compréhension et la modélisation précises de la flexion des plaques sont indispensables pour prévoir la réponse mécanique des matériaux sous différents types de chargements transversaux.

Ce chapitre porte sur la flexion statique des plaques FGM rectangulaires simplement appuyées sous différentes charges transversales. La formulation analytique repose sur la théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement SSDT ; cette théorie intègre une variation sinusoïdale des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur sans ajouter de facteur de correction. Les méthodes de Navier et de Lévy résolvent les équations gouvernantes et donnent les expressions des contraintes, des déformations et de la flèche adimensionnelle. La partie numérique décrit les étapes de simulation par éléments finis sous Abaqus. Le modèle volumique utilise les éléments quadratiques C3D20R. Les éléments quadratiques C3D20R reproduisent le gradient de propriétés à travers l'épaisseur. Cinq configurations de conditions aux limites sont étudiées. L'étude des cinq configurations permet d'évaluer l'effet des cinq configurations sur le comportement en flexion de la plaque.

2.2. Flexion sous charge transversale

2.2.1. Types de chargement :

L'équation aux dérivées partielles régissant la plaque soumise à une charge de distribution transversale $q(x, y)$ sur sa surface supérieure $z=-h/2$ peut s'écrire dans ce cas comme suit :

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y) - 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad 2.1$$

Où D représente la rigidité en flexion de la plaque à gradient de propriétés (FGM : Functionally Graded Material) à épaisseur variable :

$$D = \frac{E(z)h^3}{12(1-\nu^2)} \quad 2.2$$

Où $E(z)$ et ν sont les paramètres élastiques du matériau, respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson [1].

2.2.2. Charge uniformément répartie :

La charge est constante sur toute la surface :

$$q(x, y) = q_0 \quad 2.3$$

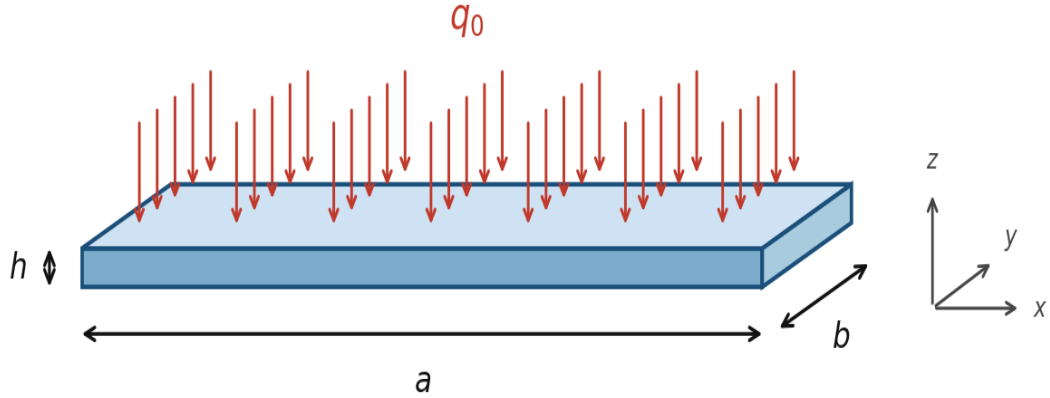


Figure 2.1: charge répartie uniformément sur une plaque simplement appuyée. [2]

2.2.3. Charge ponctuelle :

La charge est appliquée en un point précis

$$P(x, y) = P_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad 2.4$$

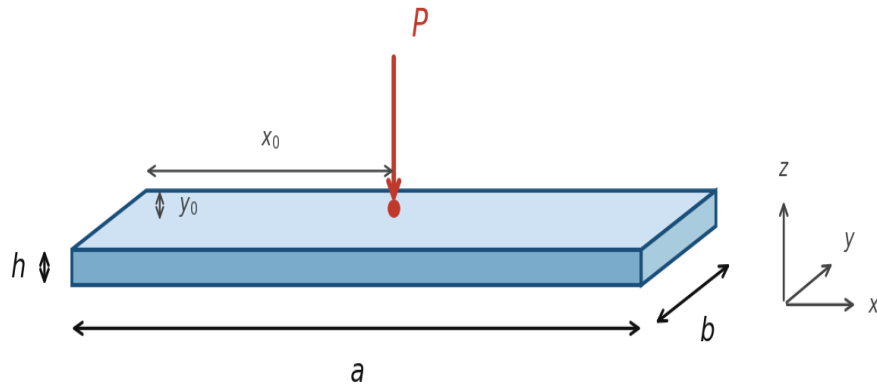


Figure 2.2: charge ponctuelle sur une plaque simplement appuyée. [2]

2.2.4. Charge sinusoïdale :

La charge varie de manière périodique. [3]

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad 2.5$$

2.3. Formulation analytique du problème de flexion

2.3.1. Équations d'équilibre :

Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe de travail virtuel, qui peut être écrit comme suit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad 2.6$$

Où Ω est la surface supérieure.

L'équation (2.6) peut être réécrite comme :

$$\int_{\Omega} \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] d\Omega - \int_{\Omega} q (\delta w_b + \delta w_s) d\Omega = 0 \quad 2.7$$

Nous pouvons obtenir l'équation d'équilibre associée à la théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement (SSDT) [4] :

$$\delta u = \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad 2.8$$

$$\delta v = \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad 2.9$$

$$\delta w_b = \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \quad 2.10$$

$$\delta w_s = \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial M_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^s}{\partial y} + q = 0 \quad 2.11$$

2.3.2. Forces et moments résultants :

Où les efforts résultants N , M , et S sont définis par :

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}) dz \quad 2.12$$

$$(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}) z dz \quad 2.13$$

$$(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}) f dz \quad 2.14$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz} + \tau_{yz}) g dz \quad 2.15$$

En substituant les relations déformations-déplacements dans les équations de forces et moments résultants, on obtient : [4]

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad 2.16$$

Où :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t; \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t; \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad 2.17$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t; \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t; \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad 2.18$$

2.3.3. Coefficients de rigidité :

Les coefficients de rigidité A_{ij} et B_{ij} , sont définis comme : [4]

$$\begin{Bmatrix} A_{11}B_{11}D_{11}B_{11}^sD_{11}^sH_{11}^s \\ A_{12}A_{12}D_{12}B_{12}^sD_{12}^sH_{12}^s \\ A_{66}B_{66}D_{66}B_{66}^sD_{66}^sH_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} Q_{11}^{(n)} (1, z, f, zf(z), f(z)^2) \begin{Bmatrix} 1 \\ V^{(n)} \\ \frac{1-V^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} z^2 dz \quad 2.19$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad 2.20$$

$$Q_{11}^{(n)} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad 2.21$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \frac{\sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} E}{2(1-\nu)} g(z)^2 dz \quad 2.22$$

2.4. Méthodes de résolution analytique

2.4.1. Méthode de Navier (séries doubles de Fourier) :

La méthode de Navier repose sur le développement du champ de déplacement et du chargement en doubles séries de Fourier. Les coefficients de ces séries sont déterminés analytiquement en substituant les développements dans les équations d'équilibre, ce qui ramène le problème à la résolution d'un système d'équations algébriques. Cette approche est applicable aux plaques simplement appuyées sur leurs quatre bords (SSSS), condition qui assure la compatibilité des fonctions de forme avec les conditions aux limites.

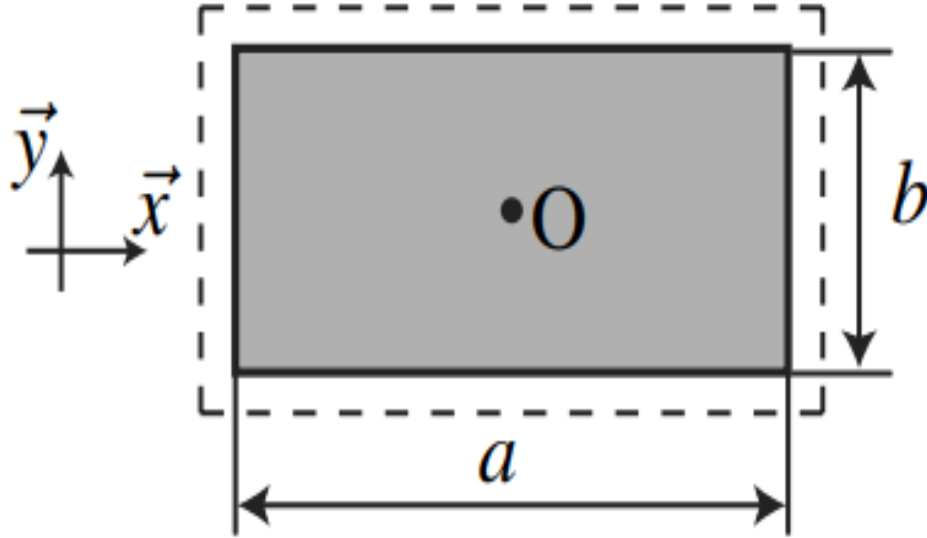


Figure 2.3 : Dimensions de la plaque [2]

Ainsi, dans le cas d'une plaque FGM rectangulaire en appui sur chacun de ses bords (simplement appuyée), le champ de déplacement vertical harmonique est décrit par une expression de la forme :

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad 2.23$$

- a et b représentent les longueurs des côtés de la plaque.
- w_{mn} est le coefficient déterminé par la méthode de Fourier.
- m et n sont des nombres de mode.

La force extérieure sous la forme d'une double série trigonométrique :

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad 2.24$$

Pour le cas d'une charge sinusoïdale, nous avons : $m=n=1$; $q_{mn}=q_0$

, dans les distributions de charge uniforme nous avons : $q_{mn} = 16q_0 / (mn\pi^2)$

q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque [4] [5].

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \sum_{m,n} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ Y_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \end{Bmatrix} \quad 2.25$$

On obtient l'équation suivante :

$$[P]\{D\} = \{F\} \quad 2.26$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} & P_{45} \\ P_{15} & P_{25} & P_{35} & P_{45} & P_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 2.27$$

Avec $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$:

$$\begin{aligned} P_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ P_{12} &= -(A_{12} + A_{66})\lambda\mu \\ P_{13} &= \lambda \cdot [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ P_{14} &= -(B_{11}^s\lambda^2 + B_{66}^s\mu^2) \\ P_{15} &= -(B_{12}^s + B_{66}^s)\lambda\mu \\ P_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{11}\mu^2) \\ P_{23} &= \mu \cdot [B_{11}\mu^2 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2] \\ P_{24} &= -(B_{12}^s + B_{66}^s)\lambda\mu \quad (= P_{15}) \\ P_{25} &= -(B_{66}^s\lambda^2 + B_{11}^s\mu^2) \\ P_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{11}\mu^4) \\ P_{34} &= \lambda \cdot [D_{11}^s\lambda^2 + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)\mu^2] \\ P_{35} &= \mu \cdot [D_{11}^s\mu^2 + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2] \\ P_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^2 + H_{66}^s\mu^2) - A_{55}^s \\ P_{45} &= -(H_{12}^s + H_{66}^s)\lambda\mu \\ P_{55} &= -(H_{66}^s\lambda^2 + H_{11}^s\mu^2) - A_{44}^s \end{aligned} \quad 2.28$$

2.4.2. Méthode de Lévy (séries simples) :

Lévy propose des séries simples qui permettent d'améliorer la convergence et de traiter d'autres types de conditions aux limites. Ainsi, dans le cas d'une plaque FGM en appui sur deux côtés opposés, les deux autres restant libres, le déplacement harmonique vertical est cherché sous la forme [4] :

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad 2.29$$

La charge q sous forme unitaire peut être présentée sous la forme d'une seule série de Fourier :

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad 2.30$$

Par exemple, dans les distributions de charge transversales, en particulier la distribution uniforme ($q(x, y)=q_0$) nous avons :

$$q_m = \frac{4q_0}{m\pi^2} \quad 2.31$$

2.5. Distribution des contraintes et déformations

2.5.1. Contraintes normales :

La contrainte normale transversale dans le sens de l'épaisseur peut être négligée. [4]

$$\sigma_z=0 \quad 2.32$$

La contrainte en état de contrainte plane pour une plaque FGM est : [6]

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - z[k_x + \nu k_y] \} ; \sigma_x = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left\{ \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \quad 2.33$$

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_y + \nu \varepsilon_x - z[k_y + \nu k_x] \} ; \sigma_y = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left\{ \varepsilon_y + \nu \varepsilon_x - z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\} \quad 2.34$$

2.5.2. Contraintes de cisaillement :

La relation contrainte de cisaillement pour un état de contrainte plane pour une plaque FGM est : [6]

$$\tau_{xy} = \frac{E(z)}{2(1-\nu)} \{ \gamma_{xy} - z[k_{xy}] \} \quad 2.35$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left\{ \gamma_{xy} - z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} \quad 2.36$$

La contrainte de cisaillement transverse varie de façon parabolique à travers l'épaisseur : [4]

$$\tau_{yz} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \{ \gamma_{yz} \} \quad 2.37$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \{ \gamma_{xz} \} \quad 2.38$$

2.5.3. Déformations dans l'épaisseur :

Les composantes des déformations transversales sont négligeables : [4][6]

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_z = 0 \quad 2.39$$

Dans cette hypothèse, les déformations de la plaque FGM sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x = \varepsilon_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad 2.40$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y = \varepsilon_y^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2.41$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} = \gamma_{xy}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad 2.42$$

Théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement (SSDT).

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_{xb} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \kappa_{xs} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial w^{b2}}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial w^{s2}}{\partial x^2} \quad 2.43$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\kappa_{yb} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \kappa_{ys} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial w^{b2}}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial w^{s2}}{\partial y^2} \quad 2.44$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xyb} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \kappa_{xys} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial w^{b2}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial w^{s2}}{\partial x \partial y} \quad 2.45$$

$$\gamma_{yz} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \gamma_{yz}^s ; \quad \gamma_{xz} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \gamma_{xz}^s \quad 2.46$$

2.5.4. Contraintes de von Mises :

La contrainte de von Mises permet d'évaluer la limite d'élasticité des plaques FGM ; elle combine les contraintes principales en une contrainte équivalente, donnée par l'équation suivante. [7]

$$\sigma_{eq} = \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad 2.47$$

Dans les matériaux à gradient, nous calculons la contrainte de von Mises sur l'épaisseur car les propriétés changent avec z et les contraintes diffèrent entre les surfaces supérieure et inférieure.

2.5.5. Contraintes adimensionnelles :

Afin de comparer les résultats indépendamment de la géométrie et du chargement, les contraintes sont normalisées conformément à la convention de Zenkour (2006)[4]. Le facteur de normalisation commun à toutes les composantes de contrainte est :

$$\bar{\sigma} = \sigma \cdot h / (q_0 \cdot a) \quad 2.48$$

où σ est la contrainte dimensionnelle calculée, h l'épaisseur de la plaque, q_0 l'intensité de la charge appliquée et a la longueur de la plaque. Ce facteur est identique pour toutes les composantes ($\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\tau}_{xz}$, $\bar{\tau}_{yz}$) et permet une comparaison directe avec les valeurs de référence

de Zenkour (2006)[4]. Les contraintes adimensionnelles sont évaluées aux points spécifiques suivants :

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x(a/2, b/2, h/2) \cdot h / (q_0 \cdot a) \quad 2.49$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y(a/2, b/2, h/3) \cdot h / (q_0 \cdot a) \quad 2.50$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}(0, 0, -h/3) \cdot h / (q_0 \cdot a) \quad 2.51$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}(0, b/2, 0) \cdot h / (q_0 \cdot a) \quad 2.52$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz}(a/2, 0, h/6) \cdot h / (q_0 \cdot a) \quad 2.53$$

Le choix de ces points d'évaluation est justifié par la physique du problème : $\bar{\sigma}_x$ est maximale à $z = h/2$ (face céramique, la plus rigide) ; $\bar{\sigma}_y$ est évaluée à $z = h/3$, point représentatif du profil ; $\bar{\tau}_{xy}$ est maximale au coin $(0, 0)$ et à $z = -h/3$; les contraintes de cisaillement transverses $\bar{\tau}_{xz}$ et $\bar{\tau}_{yz}$ sont évaluées respectivement aux bords libres $(0, b/2, 0)$ et $(a/2, 0, h/6)$, où leur distribution est maximale selon la théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement (SSDT : Sinusoidal Shear Deformation Theory). [4]

2.6. Flèche adimensionnelle et déformée de la plaque FGM

La flèche maximale représente le déplacement vertical (ou transversal) maximal d'un point appartenant à la surface médiane de la plaque selon l'axe z . Elle constitue le paramètre fondamental pour évaluer la rigidité en flexion d'une plaque FGM. [8]

Pour permettre une comparaison indépendante de la géométrie et du chargement, la flèche est exprimée sous forme adimensionnelle (normalisée) conformément à la convention de Zenkour (2006) [4]:

$$\bar{w} = (10 E_c \cdot h^3 \cdot w) / (q_0 \cdot a^4) \quad 2.54$$

où E_c est le module d'Young de la céramique pure (couche supérieure, $z = +h/2$), h l'épaisseur de la plaque, w le déplacement transversal au centre, q_0 l'intensité de la charge appliquée et a la longueur de la plaque. Ce facteur de normalisation permet de comparer directement les résultats FGM aux valeurs de référence de Zenkour, indépendamment des paramètres géométriques et du chargement. [4]

Par la méthode de Navier, le champ de déplacement transversal de la plaque FGM (SSSS : simplement appuyée sur les quatre côtés, SSDT) est décomposé en deux contributions :

$$w(x, y) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad 2.55$$

$$w_b(x, y) = \sum_m \sum_n W_{b,mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad 2.56$$

$$w_s(x, y) = \sum_m \sum_n W_{s,mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad 2.57$$

où $W_{b,mn}$ est l'amplitude de la flèche de flexion pure (type Kirchhoff) et $W_{s,mn}$ celle due au cisaillement transverse. Ces deux amplitudes sont extraites de la troisième inconnue $W_{mn} = W_{b,mn} + W_{s,mn}$, déterminée par la résolution du système SSDT (équation 2.25). Les coefficients de rigidité sont calculés à partir du module effectif $E(z)$ de la plaque FGM, avec E_m le module du métal ($z = -h/2$) et E_c le module de la céramique ($z = +h/2$) : [4]

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) (z/h + 1/2)^n \quad 2.58$$

Les rigidités de flexion et de cisaillement SSDT s'obtiennent par intégration de $E(z)$ sur l'épaisseur :

$$A = \int E(z) dz \quad ; \quad B = \int E(z) \cdot z dz \quad ; \quad D = \int E(z) \cdot z^2 dz \quad 2.59$$

$$\begin{aligned} C &= \int E(z) \cdot f(z) dz \quad ; \quad F = \int E(z) \cdot z \cdot f(z) dz \quad ; \\ G &= \int E(z) \cdot f^2(z) dz \quad ; \quad H = \int E(z) \cdot g^2(z) dz \end{aligned} \quad 2.60$$

avec les fonctions de forme SSDT : $f(z) = (h/\pi) \cdot \sin(\pi z/h)$ et $g(z) = \cos(\pi z/h)$. Ces intégrales sont calculées numériquement sur l'épaisseur. La solution en flèche s'écrit alors : [4]

$$W_{mn} = [P]^{-1} \{0, 0, q_{mn}, 0, 0\}^T \quad (3\text{ème composante}) \quad 2.62$$

où $[P]$ est la matrice de rigidité du système SSDT (équation 2.25), $q_{mn} = 16q_0 / (mn\pi^2)$ le coefficient de la charge (double série de Fourier, UDL : Uniformly Distributed Load) et les inconnues $\{U, V, W_{mn}, X, Y\}$ sont respectivement les amplitudes des déplacements plans, de la flèche totale, et des rotations de cisaillement. La flèche adimensionnelle $\bar{w}$ augmente avec l'indice de gradient n : une plaque entièrement métallique ($n \rightarrow \infty$) fléchit davantage qu'une plaque entièrement céramique ($n = 0$), ce qui reflète la réduction du module effectif $E(z)$ lorsque la proportion métallique ($E_m < E_c$) croît. [4][8]

2.7. Démarche de simulation numérique sous Abaqus

La simulation numérique des plaques FGM est conduite à l'aide du logiciel Abaqus 2020 via un script Python automatisé qui orchestre l'ensemble de la chaîne de calcul en quatre étapes successives. L'organigramme suivant présente la démarche adoptée :

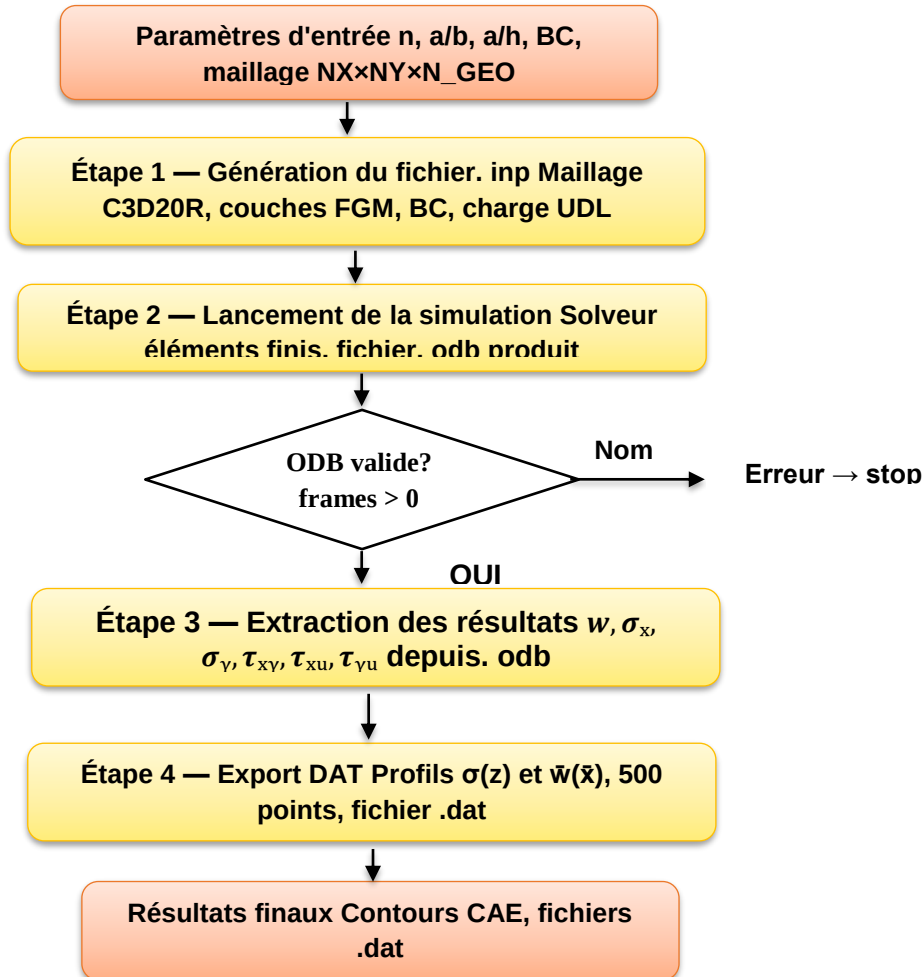


Figure 2.4. Organigramme de simulation

Étape 1 — Génération du fichier .inp. À partir des paramètres d'entrée (indice de gradient n , rapport a/b , rapport a/h , conditions aux limites BC), le script génère automatiquement le fichier d'entrée Abaqus (.inp). Le maillage est constitué d'éléments volumiques à vingt nœuds (C3D20R) répartis en $NX \times NY \times N_GEO$ couches, avec une loi de puissance $E(z) = E_m + (E_c - E_m)(z/h + 1/2)^n$ affectée couche par couche. La charge uniformément répartie (UDL) est appliquée sur la face supérieure.

Étape 2 — Lancement de la simulation. Le solveur Abaqus est appelé en ligne de commande avec le nombre de processeurs paramétré (CPUS). Le calcul produit un fichier résultat binaire (.odb). Une vérification automatique contrôle que l'ODB est valide (présence de frames de résultat) ; en cas d'échec, la procédure est interrompue.

Étape 3 — Extraction des résultats normalisés. Via l'interface Python odbAccess, le script lit le dernier frame de l'ODB et extrait les six quantités normalisées: la flèche $\bar{w}$ et les cinq contraintes $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\tau}_{xz}$, $\bar{\tau}_{yz}$, évaluées aux points caractéristiques définis à la section 2.5.5.

Étape 4 — Export DAT. Le script exporte les profils $\sigma(z)$ et $\bar{w}(\bar{x})$ sous forme de fichiers tabulaires .dat (500 points par profil), utilisables pour la comparaison directe avec les courbes analytiques ou pour tout post-traitement ultérieur.

2.7.1. Type d'éléments de maillage :

Le maillage de la plaque FGM est réalisé avec des éléments volumiques **C3D20R** de la bibliothèque Abaqus/Standard. L'élément C3D20R est un hexaèdre à 20 nœuds — huit aux sommets et un au milieu de chaque arête — intégré en schéma réduit. Son nom se lit ainsi : **C** pour élément continu, **3D** pour tridimensionnel, **20** pour le nombre de nœuds, et **R** pour l'intégration réduite, qui utilise 8 points de Gauss ($2 \times 2 \times 2$) au lieu des 27 d'une intégration complète.

Les fonctions d'interpolation de cet élément sont **quadratiques** (ordre 2), ce qui lui confère une aptitude naturelle à reproduire des champs de déplacements et de contraintes à variation non linéaire à travers l'épaisseur. Cette propriété est particulièrement adaptée à l'analyse des plaques FGM dont les propriétés mécaniques (module d'Young $E(z)$, coefficient de Poisson ν) évoluent continûment selon la loi de puissance :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) (z/h + 1/2)^n \quad 2.63$$

Le choix de cet élément repose sur plusieurs raisons fondamentales :

- **Précision de l'interpolation quadratique** : contrairement aux éléments linéaires (C3D8), le C3D20R capture avec précision les gradients de contraintes à travers l'épaisseur avec un nombre de couches réduit, ce qui est déterminant dans les plaques FGM où les propriétés varient de façon continue selon z .
- **Absence de verrouillage en cisaillement (*shear locking*)** : l'intégration réduite (R) atténue le phénomène de rigidité parasitaire en flexion qui affecte les éléments à intégration complète. Ce point est crucial pour la simulation de plaques minces à modérément épaisses soumises à une charge transversale, comme dans le présent travail.
- **Compatibilité avec la discrétisation en couches FGM** : l'épaisseur de la plaque est subdivisée en N_GEO couches d'éléments C3D20R, chacune possédant un module $E(z)$ constant évalué au niveau de sa couche médiane. La nature quadratique de l'interpolation permet ainsi de reconstituer la variation continue du champ de déplacement avec un nombre raisonnable de couches.

— **Référence dans la littérature** : le C3D20R est l'élément de référence recommandé par Abaqus pour les analyses de flexion de structures volumiques. Il est couramment utilisé dans les travaux portant sur la modélisation numérique des plaques FGM, garantissant une comparaison cohérente avec les résultats publiés dans la littérature scientifique.

En résumé, la combinaison interpolation quadratique + intégration réduite fait du C3D20R un choix optimal pour capturer à la fois les gradients de propriétés dans l'épaisseur et le comportement en flexion des plaques FGM, tout en maintenant un coût de calcul raisonnable. Le tableau ci-après récapitule les caractéristiques principales de cet élément.

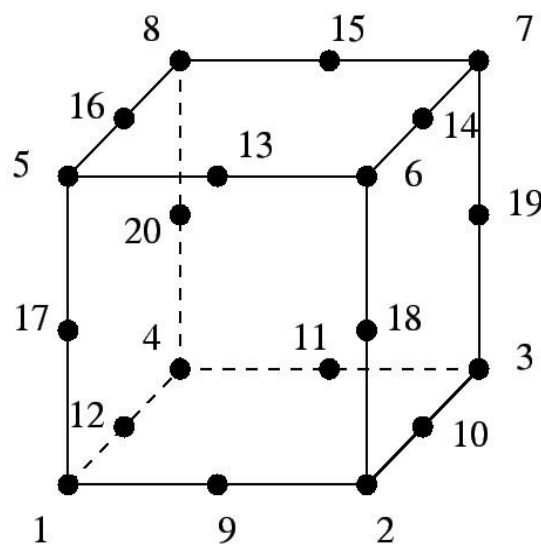


Figure 2.5 : Élément fini C3D20R — hexaèdre quadratique à 20 nœuds et intégration réduite (8 points de Gauss $2 \times 2 \times 2$).

Tableau 2.1 : Caractéristiques de l'élément C3D20R utilisé dans la simulation Abaqus.

Caractéristique	Description
Famille	Élément volumique continu 3D (Continuum)
Géométrie	Hexaèdre (brique) à 20 nœuds
Interpolation	Quadratique (ordre 2) — fonctions de forme sérendipité
Intégration	Réduite — schéma de Gauss $2 \times 2 \times 2$ (8 points)
DDL par nœud	3 (translations u, v, w)
Avantage principal	Pas de verrouillage en cisaillement ; précision élevée en flexion

Caractéristique	Description
Application ici	Maillage $N_X \times N_Y \times N_{\text{GEO}}$ couches — plaque FGM sous charge UDL

2.7.2. Conditions aux limites utilisées dans la simulation :

Dans la simulation numérique des plaques FGM, cinq configurations de conditions aux limites sont considérées : **SSSS**, **CCCC**, **SCSC**, **SSSC** et **SFSF**. Dans cette notation, chaque lettre désigne la condition appliquée à l'un des quatre bords de la plaque dans l'ordre : $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. La lettre **S** désigne un appui simple (*Simply Supported*), **C** un encastrement (*Clamped*), et **F** un bord libre (*Free*). Les cinq configurations sont illustrées à la Figure 2.6.

SSSS — Plaque simplement appuyée sur les quatre bords. Les quatre bords sont simplement appuyés : le déplacement transversal w est bloqué ($w = 0$) sur chaque bord, tandis que la rotation dans le plan du bord reste libre. Les déplacements dans le plan sont également bloqués perpendiculairement à chaque bord afin de prévenir tout mode de corps rigide.

CCCC — Plaque entièrement encastree. Les quatre bords sont rigidement encastres : tous les déplacements et les rotations sont bloqués. Cette condition impose la nullité du déplacement transversal ainsi que de sa dérivée en tout point des bords.

SCSC — Bord $x = 0$ simplement appuyé, bord $x = a$ encastree, bord $y = 0$ simplement appuyé, bord $y = b$ encastree. Cette configuration mixte alterne des bords encastres et des bords simplement appuyés : les bords $x = 0$ et $y = 0$ sont encastres (déplacements et rotations bloqués), tandis que les bords $x = a$ et $y = b$ sont simplement appuyés (seul le déplacement transversal est bloqué, la rotation reste libre).

SSSC — Trois bords simplement appuyés, un bord encastree ($y = b$). Les bords $x = 0$, $x = a$ et $y = 0$ sont simplement appuyés (déplacement transversal bloqué, rotation libre), tandis que le bord $y = b$ est entièrement encastree (tous les déplacements et la rotation bloqués). Cette configuration introduit une dissymétrie structurale selon l'axe y .

SFSF — Bords $x = 0$ et $x = a$ simplement appuyés, bords $y = 0$ et $y = b$ libres. Les bords $x = 0$ et $x = a$ sont simplement appuyés, tandis que les bords $y = 0$ et $y = b$ sont entièrement libres, sans aucune condition cinématique imposée.

Le tableau ci-après récapitule les conditions imposées sur chaque bord pour les cinq configurations :

Tableau 2.2 : Conditions aux limites appliquées sur chaque bord pour les cinq configurations étudiées (S : simplement appuyé, C : encastré, F : libre).

Configuration	$x = 0$	$x = a$	$y = 0$	$y = b$
SSSS	S	S	S	S
CCCC	C	C	C	C
SCSC	C	S	C	S
SSSC	S	S	S	C
SFSF	S	S	Libre	Libre

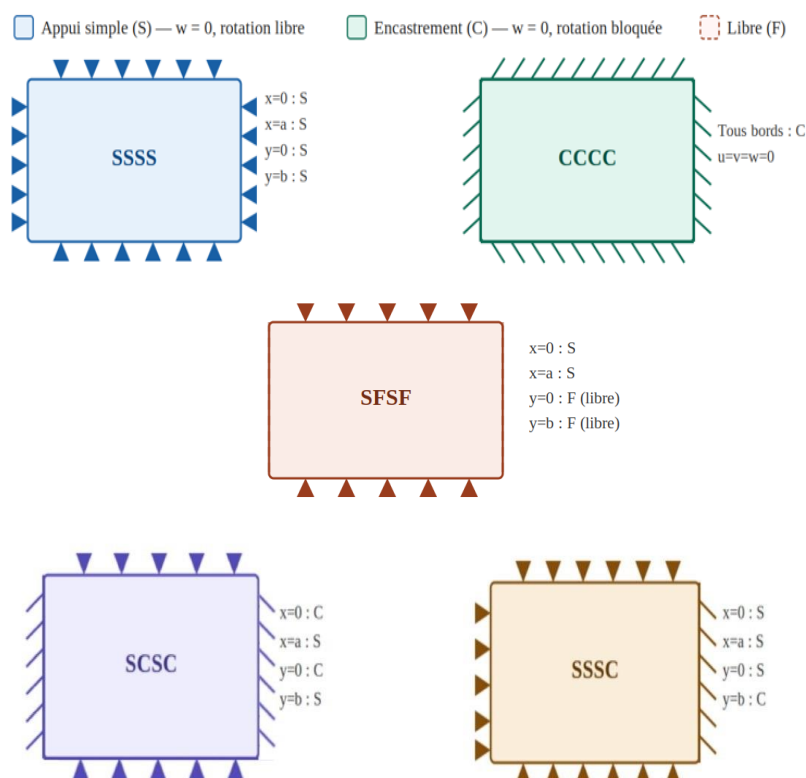


Figure 2.6 : Représentation schématique des cinq configurations de conditions aux limites. Les triangles indiquent un appui simple (S), les hachures un encastrement (C) et les tirets un bord libre (F).

2.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi la formulation analytique de la flexion des plaques FGM basée sur la théorie SSDT, en dérivant les équations d'équilibre, les expressions des contraintes, des déformations et de la flèche adimensionnelle. Les méthodes de Navier et de Lévy ont été appliquées pour trois types de chargements transversaux. Sur le plan numérique, le modèle

Abaqus utilisant les éléments C3D20R a été décrit, justifié et configuré pour cinq conditions aux limites (SSSS, CCCC, SCSC, SSSC, SFSF). Ces développements constituent le socle analytique et numérique sur lequel s'appuiera l'analyse et la validation des résultats présentés dans le chapitre suivant.

Références bibliographiques

- [1] Ghorbanhosseini, S., Jokar, M. H., & Najafizadeh, M. M. (2025). A new solution for FGM thin rectangular plate bending with variable thickness. *Discover Mechanical Engineering*, 4, 76. <https://doi.org/10.1007/s44245-025-00165-9>
- [2] Delaplace, A., Gatuingt, F., & Ragueneau, F. (2008). *Mécanique des structures*. Dunod.
- [3] Reddy, J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1–3), 663–684.
- [4] Zenkour, A. M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*, 30(1), 67–84.
- [5] Boudierba, B. (2014). Etude de la flexion des plaques épaisses FGM en utilisant une nouvelle théorie à ordre élevé. *Journal of Materials Processes and Environment*, 2(2), 86–92.
- [6] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells : Theory and analysis* (2e éd.). CRC Press.
- [7] Alashkar, A., Elkafrawy, M., Hawileh, R., & AlHamaydeh, M. (2022). Buckling analysis of functionally graded materials (FGM) thin plates with various circular cutout arrangements. *Journal of Composites Science*, 6(9), 277. <https://doi.org/10.3390/jcs6090277>
- [8] Huang, S., Zheng, H., Yu, X., Li, Z., & Pan, Z. (2026). Bending analysis of functionally graded material and cracked homogeneous thin plates using meshfree numerical manifold method. *Computers, Materials & Continua*, 146(3). <https://doi.org/10.32604/cmes.2026.075929>

CHAPITRE 3 :

ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

ET

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

3.1 Introduction

Ce chapitre expose les résultats numériques de l'analyse statique de plaques en matériau à gradient fonctionnel (FGM) $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$, obtenus grâce à deux approches complémentaires : une simulation tridimensionnelle par éléments finis sous ABAQUS, utilisant des éléments C3D20R à intégration réduite (Présent Travail MEF), et une solution analytique basée sur la théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement (SSDT) de Zenkour, mise en œuvre sous MATLAB (Analytique MATLAB).

Les deux méthodes sont validées par comparaison avec quatre références bibliographiques : Zenkour [1], Neves et al. [2], Tran Minh et al. [3] et Afsal et al. [4]. Cette validation permet d'évaluer la fiabilité et la précision des modèles proposés, tout en examinant l'influence des paramètres géométriques et ceux du matériau sur le comportement en flexion des plaques FGM.

L'étude paramétrique se concentre sur trois facteurs clés : l'indice de gradation n , le rapport d'élancement a/b et le rapport d'aspect a/h . Pour chaque paramètre, la déflexion adimensionnelle maximale $\bar{w}_{max}$ et les composantes de contraintes adimensionnelles sont analysées pour cinq configurations de conditions aux limites : SSSS, CCCC, SCSC, SSSC et SFSF.

3.2 Description du modèle FGM et propriétés matérielles

3.2.1 Géométrie et hypothèses

On considère une plaque rectangulaire FGM de dimensions $a \times b \times h$, dont le plan médian est situé à $z = 0$ dans un repère cartésien (x, y, z) , soumise à un chargement transversal uniforme q_0 appliqué sur la face supérieure. Le matériau est supposé linéaire élastique, et la variation des propriétés mécaniques suivant l'épaisseur est décrite par une loi puissance.

Le modèle FGM considéré est composé d'un alliage d'aluminium (Al) comme phase métallique et d'alumine (Al_2O_3) comme phase céramique. Les propriétés mécaniques et physiques de ces deux constituants sont reportées dans le Tableau 3.1. Le coefficient de Poisson est supposé constant dans toute l'épaisseur de la plaque et égal à $\nu = 0,3$.

Tableau 3.1 : Propriétés mécaniques et physiques des constituants Al/Al₂O₃

Matériau	E (GPa)	ρ (kg/m ³)
Aluminium (Al)	70	2 700
Alumine (Al ₂ O ₃)	380	3 960
Rapport Al ₂ O ₃ /Al	5,43	1,47

La géométrie de la plaque et le système de coordonnées sont illustrés dans la Figure 3.1. La face inférieure ($z = -h/2$) est entièrement métallique et la face supérieure ($z = +h/2$) est entièrement céramique, avec une variation continue des propriétés entre ces deux faces.

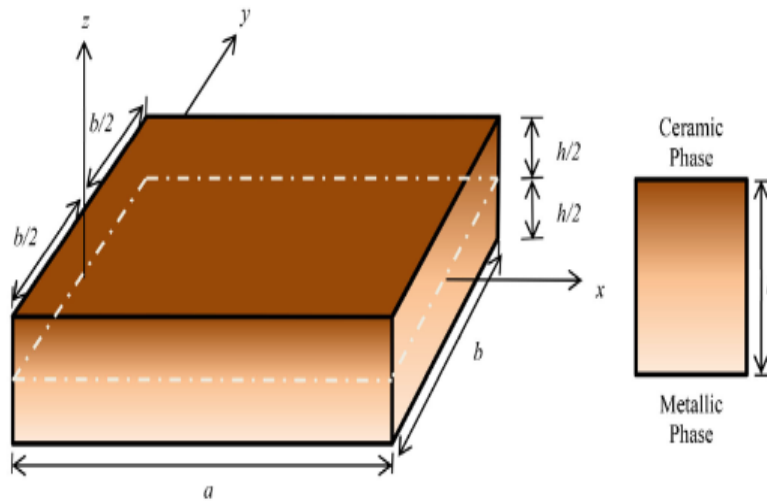


Figure 3.1 : Plaque en matériau FGM avec système de coordonnées et variation des propriétés.

3.2.2 Gradient de matériau : loi puissance et loi des mélanges

La propriété effective $P(z)$ à la position z dans le sens de l'épaisseur évolue selon une loi puissance entre la face inférieure métallique et la face supérieure céramique, conformément à la formulation de Zenkour (2006) :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad 3.1$$

Où P_m et P_c sont respectivement les valeurs de la propriété pour le métal pur et la céramique pure, h est l'épaisseur totale, et n est l'indice de puissance (ou indice de gradation) qui contrôle la distribution du gradient de matériau. Pour $n = 0$, la plaque est entièrement céramique ; pour $n \rightarrow \infty$, elle est entièrement métallique.

La propriété effective peut également être obtenue selon la loi des mélanges, en faisant intervenir les fractions volumiques du métal $V_m(z)$ et de la céramique $V_c(z)$ à la position z :

$$P(z) = V_m(z)P_m + V_c(z)P_c \quad 3.2$$

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n, V_m(z) = 1 - V_c(z) \quad 3.3$$

Cette formulation assure une transition continue du métal (face inférieure) vers la céramique (face supérieure) lorsque z varie de $-h/2$ à $+h/2$. L'évolution de la fraction volumique pour différents indices de puissance est représentée dans la Figure 3.2. On observe clairement que les valeurs faibles de n induisent une prédominance céramique, tandis que les valeurs élevées correspondent à une prédominance métallique.

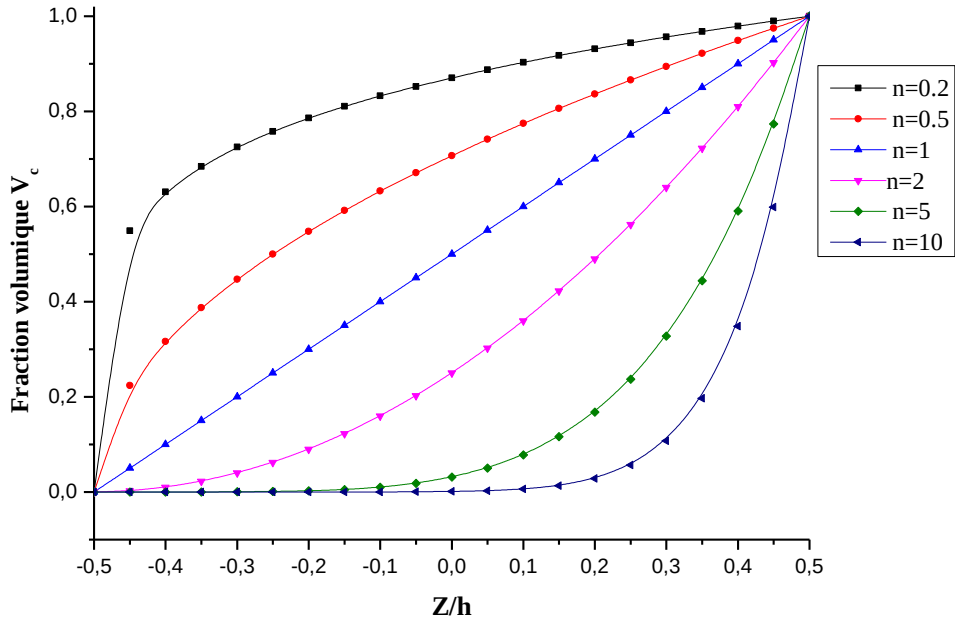


Figure 3.2 : Évolution de la fraction volumique en fonction des indices de puissance n .

3.3 Modélisation par éléments finis

3.3.1 Configuration du modèle :

Le modèle par éléments finis est généré par le script Python, compatible avec ABAQUS 2020. On considère une plaque FGM rectangulaire de dimensions $a \times b$ et d'épaisseur uniforme h , soumise à un chargement transversal uniformément réparti d'intensité q_0 . Le module de

Young varie de E_m (face inférieure, aluminium) à E_c (face supérieure, alumine) selon la loi puissance définie à l'équation (3.1).

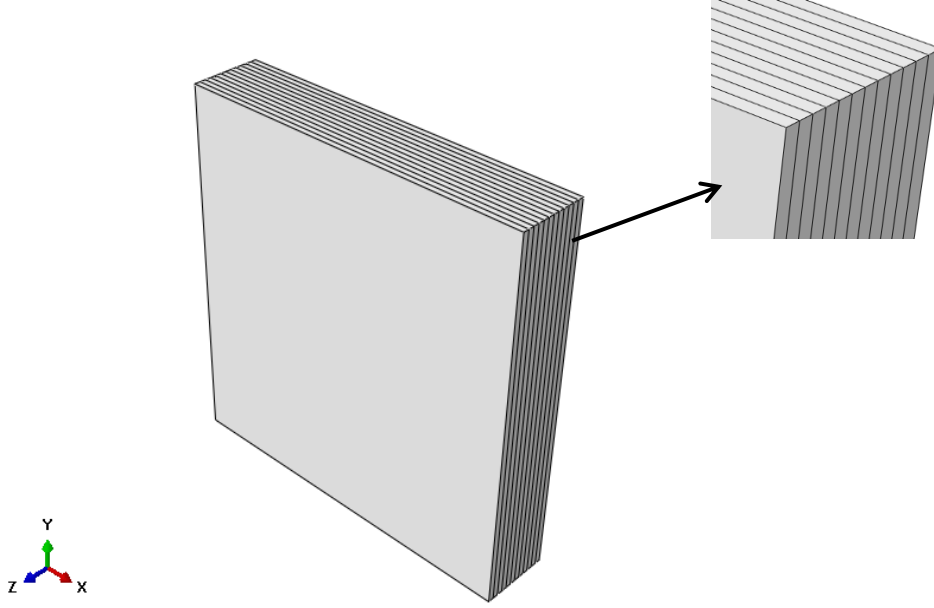


Figure 3.3 : Plaque en matériau FGM avec détail des couches discrétisées.

3.3.2 Stratégie de discrétisation :

Le modèle utilise des éléments volumiques quadratiques à intégration réduite de type C3D20R (20 nœuds, 8 points de Gauss). Le maillage total comprend entre 4800 et 14400 éléments répartis sur $20 \times 20 \times N_GEO$ divisions dans les directions x, y et z respectivement. La variation continue des propriétés du matériau est approximée par une approche multicouche : l'épaisseur totale est divisée en N_GEO couches, et à chaque couche on attribue les propriétés du matériau évaluées en son centre, conformément à la distribution en loi puissance.

La normalisation des résultats suit la convention de Zenkour (2006) [1] :

$$\bar{w} = 10 E_c h^3 w / (q_0 a^4) \quad 3.4$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \cdot h / (q_0 \cdot a) \quad 3.5$$

Où : w est la déflexion physique au centre de la plaque,

σ_{ij} sont les composantes du tenseur des contraintes aux positions spécifiées.

3.3.3 Conditions aux limites

Cinq configurations de conditions aux limites sont analysées dans la présente étude, couvrant les cas les plus représentatifs des applications pratiques :

- **SSSS** : Simplement appuyée sur les quatre bords (Simply Supported)
- **CCCC** : Encastrée sur les quatre bords (Clamped)
- **SCSC** : Alternance de bords simplement appuyés et encastrés
- **SSSC** : Trois bords simplement appuyés, un bord encastré
- **SFSF** : Deux bords simplement appuyés, deux bords libres (Free)

Pour chaque configuration, des conditions cinématiques appropriées sont appliquées aux bords de la plaque, et la charge répartie q_0 est appliquée sur toute la surface supérieure, comme illustré sur la Figure 3.4.

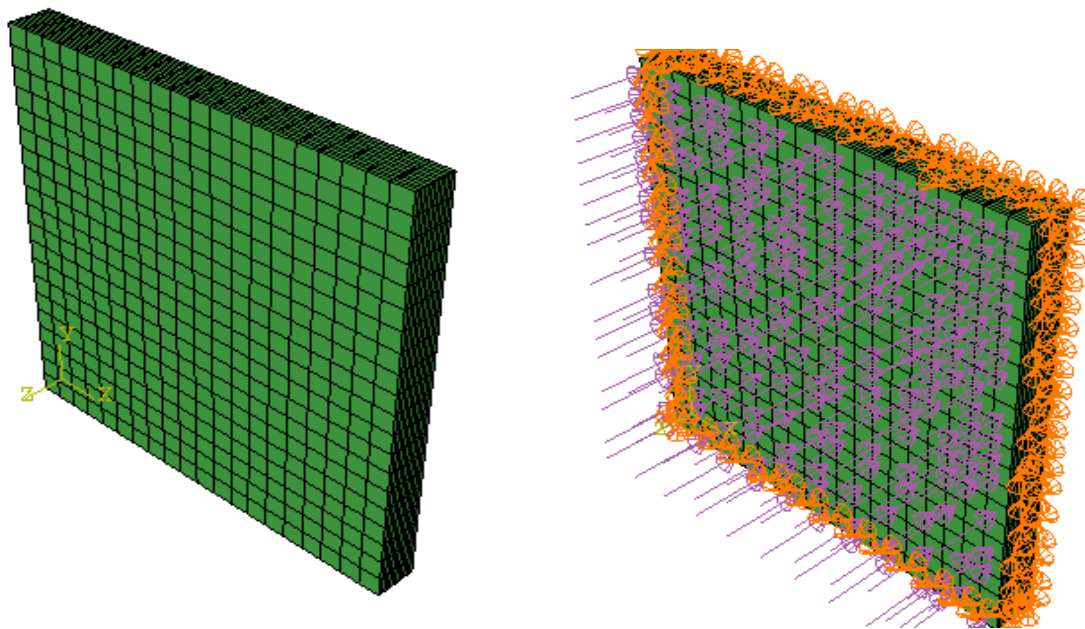


Figure 3.4 : Plaque FGM avec conditions aux limites et charge répartie appliquée.

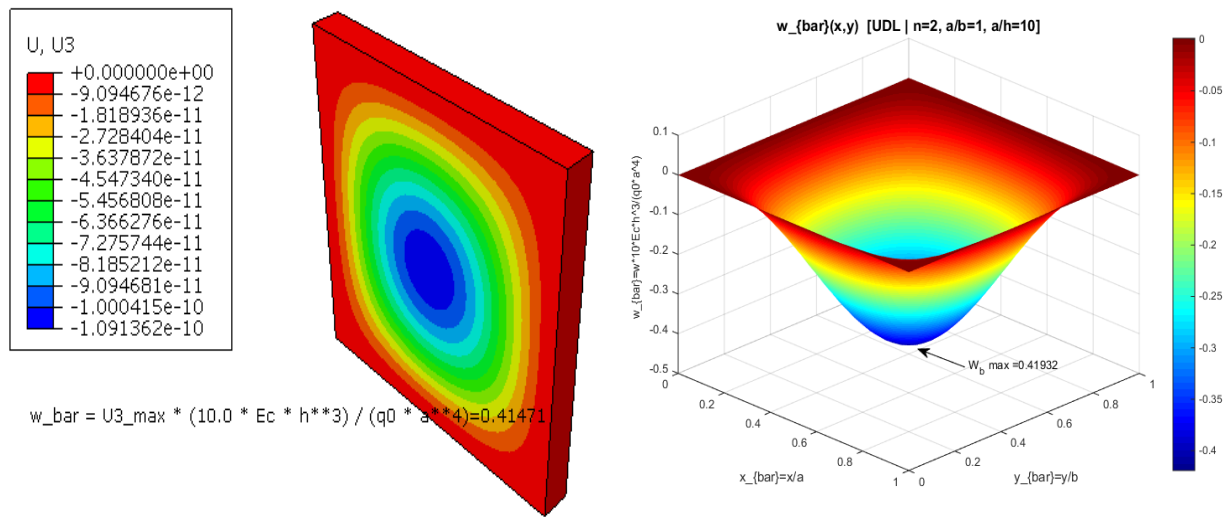
3.4 Analyse de la déflexion adimensionnelle

3.4.1 Champ de déflexion

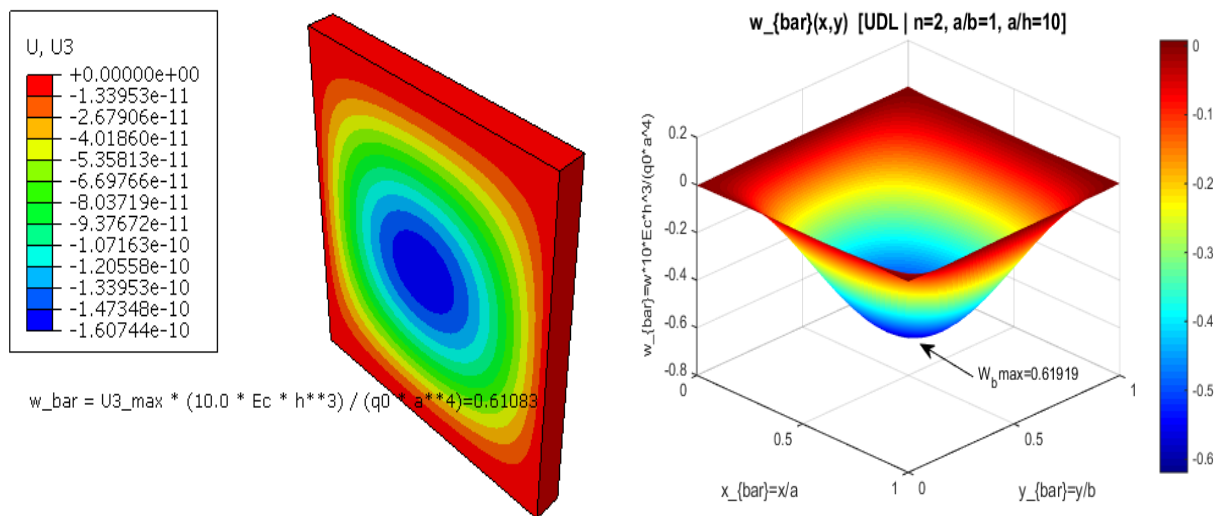
La Figure 3.5 présente les cartographies de déflexion adimensionnelle $\bar{w}(x, y)$ obtenues par éléments finis pour les cinq configurations de conditions aux limites, pour $n = 2$, $a/b = 1$ et

$a/h = 10$ sous chargement uniforme (UDL). On observe clairement l'influence des conditions aux limites sur la distribution spatiale de la déflexion : la configuration SFSF conduit aux déflexions les plus élevées en raison de la liberté de rotation aux bords libres, tandis que CCCC présente les déflexions les plus faibles grâce à l'encastrement complet.

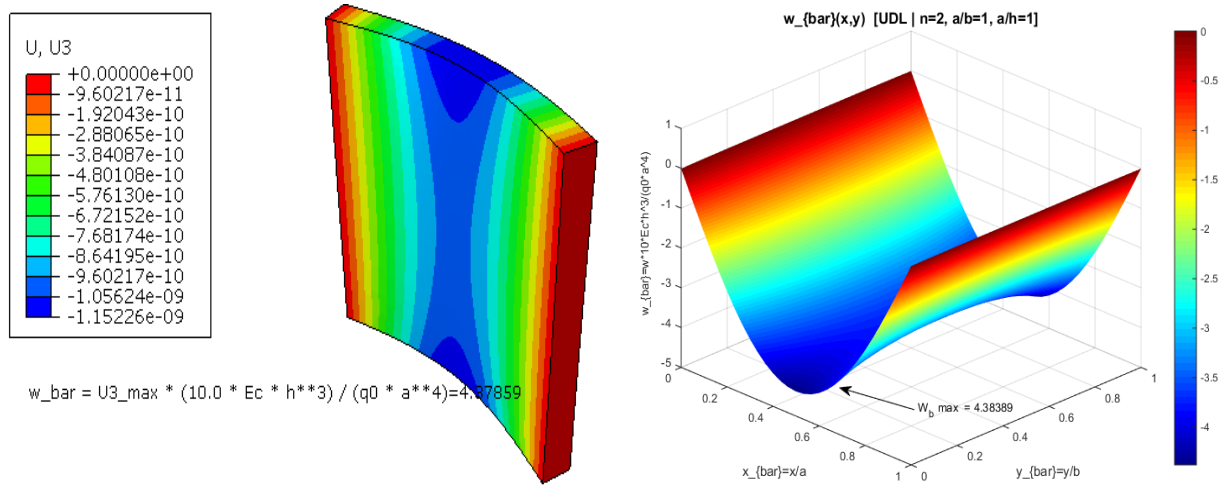
La symétrie du champ de déflexion est parfaitement respectée pour les configurations SSSS, CCCC et SCSC, confirmant la cohérence du maillage et de l'application des conditions aux limites dans le modèle ABAQUS.



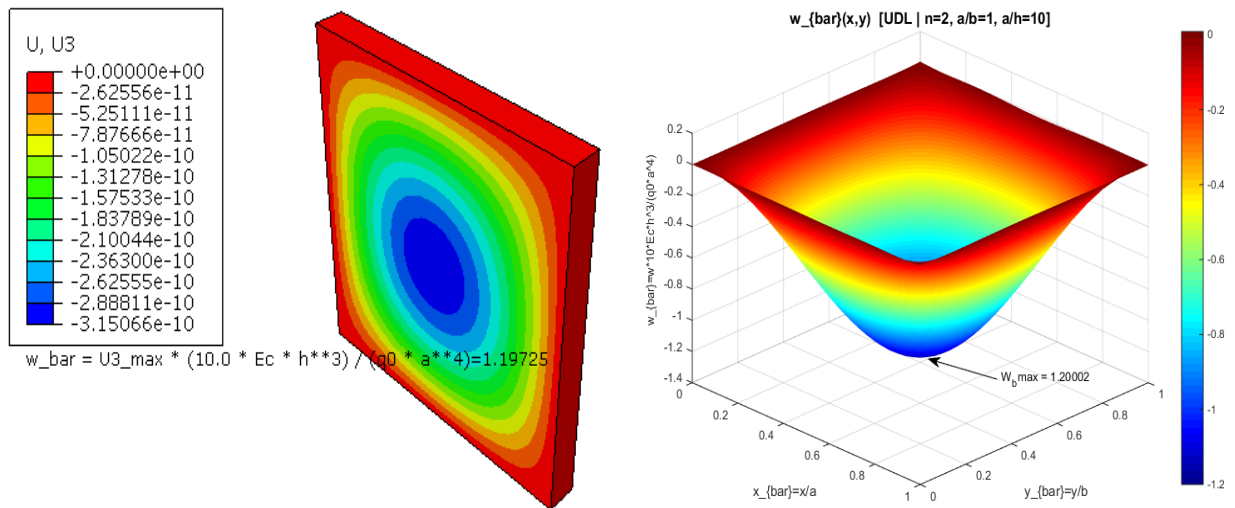
a) CCCC



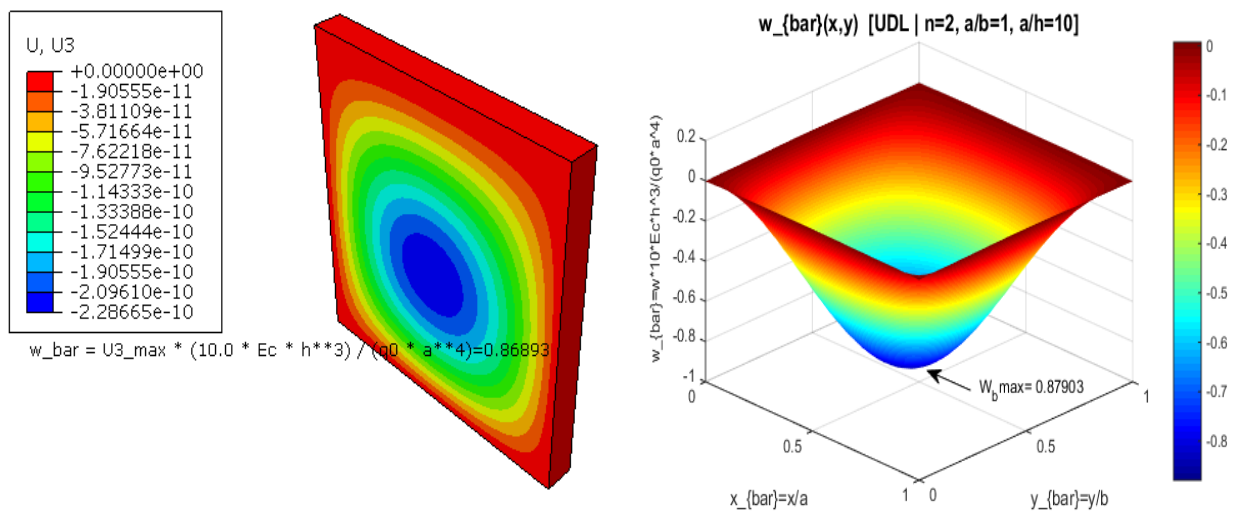
b) SCSC



c) SFSF



d) SSSS



e) SSSC

Figure 3.5 : Champ de déflexion adimensionnelle $\bar{w}$ pour différents conditions aux limites (UDL,n=2, a/b=1, a/h=10).

3.4.2 Profil de déflexion selon la ligne centrale

La Figure 3.6 illustre l'évolution du profil de déflexion adimensionnelle $\bar{W}$ le long de la ligne centrale $\bar{y} = 0,5$ pour différentes valeurs de l'indice de gradation n , en conditions SSSS et pour $a/b = 1$, $a/h = 10$. L'augmentation de n provoque une augmentation monotone de la déflexion maximale, ce qui s'explique par la réduction de la rigidité effective de la plaque à mesure que la fraction métallique (plus souple) augmente. Cette tendance est cohérente avec les prédictions de la solution analytique MATLAB basée sur la théorie SSDT.

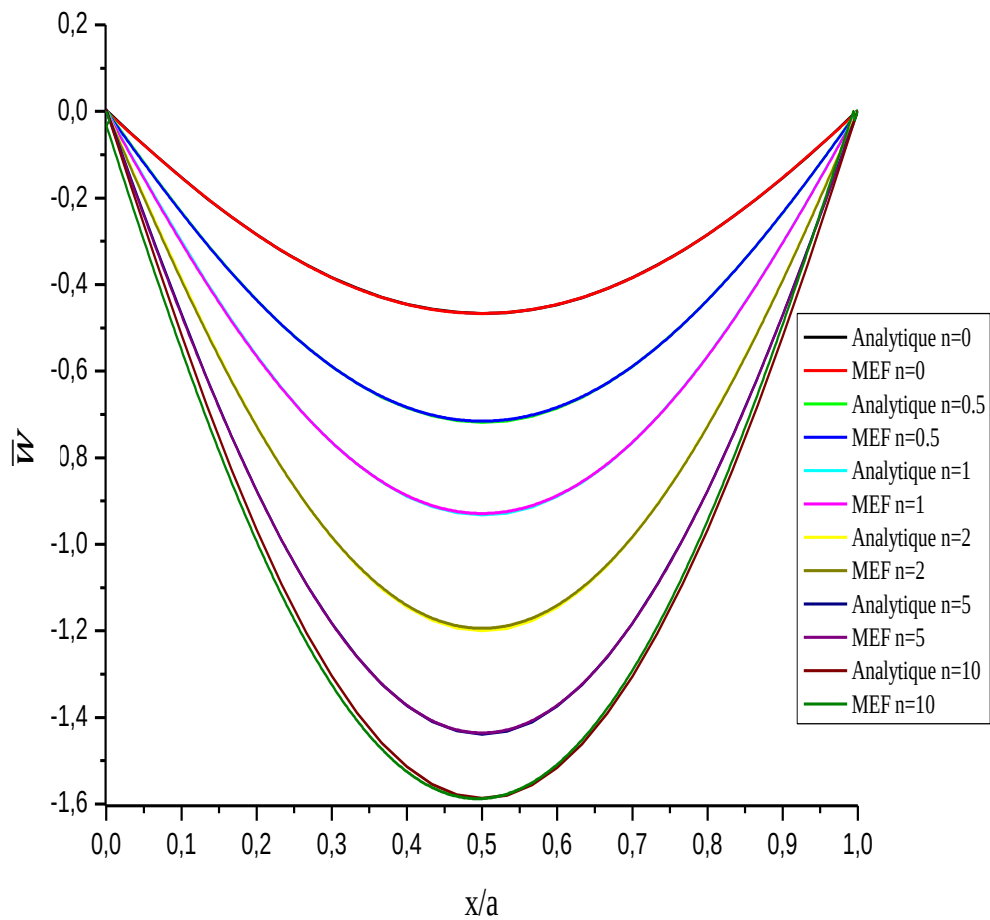


Figure 3.6 : Profil de déflexion adimensionnelle $\bar{W}$ le long de $\bar{y}=0,5$ pour différents n .

3.4.3 Influence de l'indice de gradation n sur la déflexion maximale

Le Tableau 3.2 compare les valeurs de déflexion adimensionnelle maximale $\bar{w}$ obtenues par le modèle MEF et la solution analytique MATLAB aux résultats des quatre références pour différentes valeurs de n , en configuration SSSS sous chargement uniforme ($a/b = 1$, $a/h = 10$).

Tableau 3.2 : Déflexions adimensionnelle $\bar{w}$ en fonction de l'indice n (UDL, SSSS, $a/b = 1$, $a/h = 10$)

n	Présent Travail MEF	Analytique MATLAB	Zenkour (2006) [1]	Neves (2013) [2]	Tran Minh (2017) [3]
0	0,4640	0,4667	0,4665	0,4666	0,4640
0,5	0,7074	0,7182	—	—	—
1	0,9251	0,9322	0,9287	0,9288	0,9266
2	1,1973	1,2000	1,1940	1,1909	1,1925
5	1,4385	1,4386	1,4356	1,4205	1,4338
10	1,5898	1,5869	1,5876	1,5697	1,5847

L'analyse du Tableau 3.2 révèle une excellente concordance entre les résultats du modèle MEF, la solution analytique MATLAB et les données de la littérature. L'écart maximal observé entre le présent travail MEF et la référence Zenkour [1] est inférieur à **0,5 %** pour $n = 0$ et à **0,7 %** pour $n = 10$, ce qui valide la précision du modèle éléments finis développé. La solution analytique MATLAB présente des écarts légèrement plus faibles ($< 0,3$).

On note également que $\bar{w}$ augmente de manière monotone avec n : la déflexion pour $n = 10$ est environ 3,4 fois supérieure à celle pour $n = 0$ (plaque entièrement céramique), ce qui reflète la réduction progressive de la rigidité en flexion à mesure que la fraction métallique augmente.

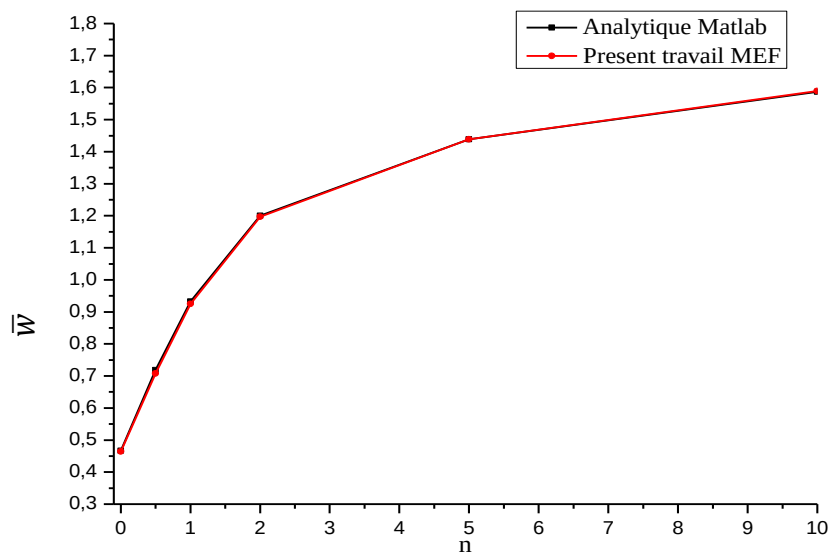
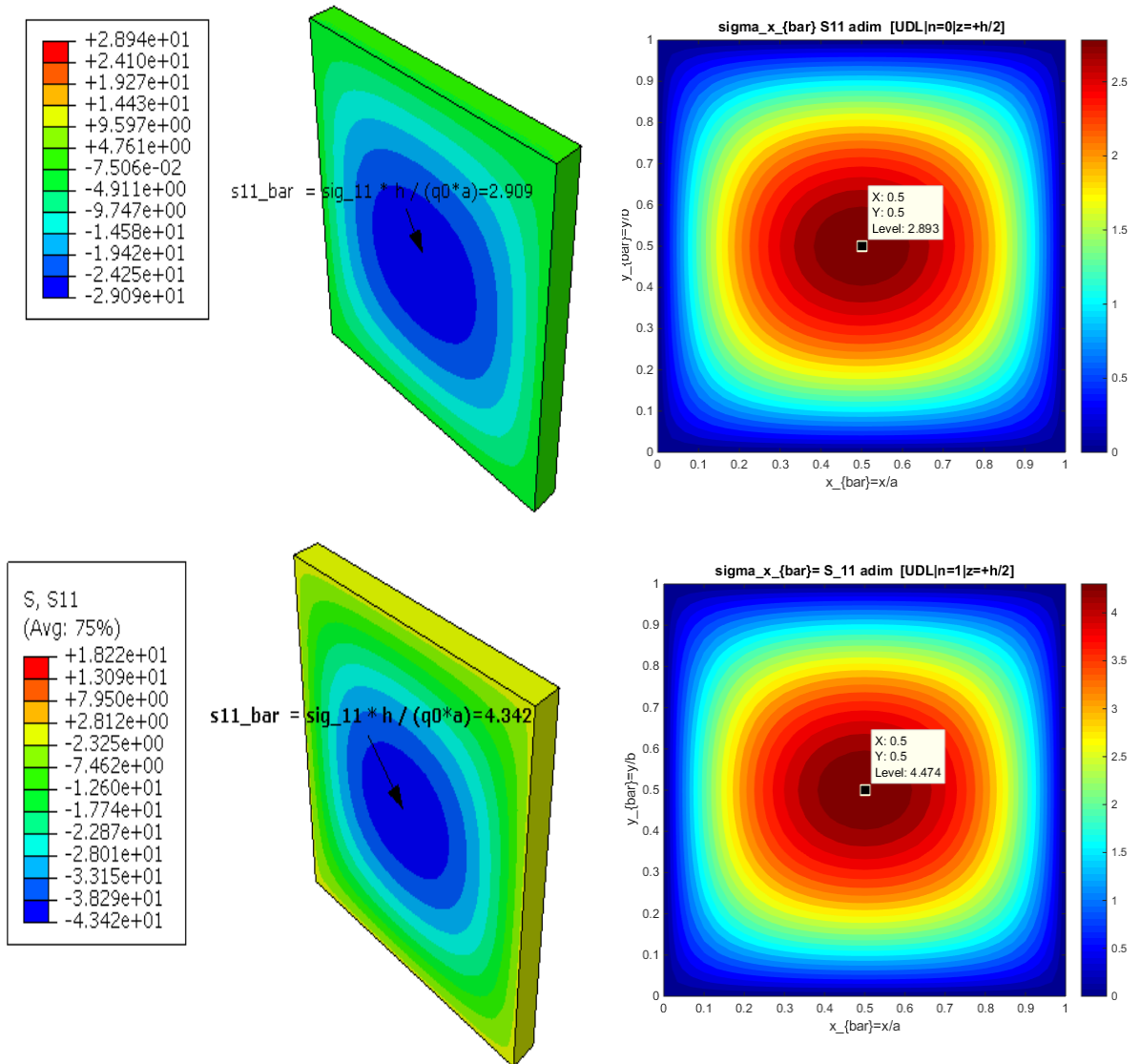


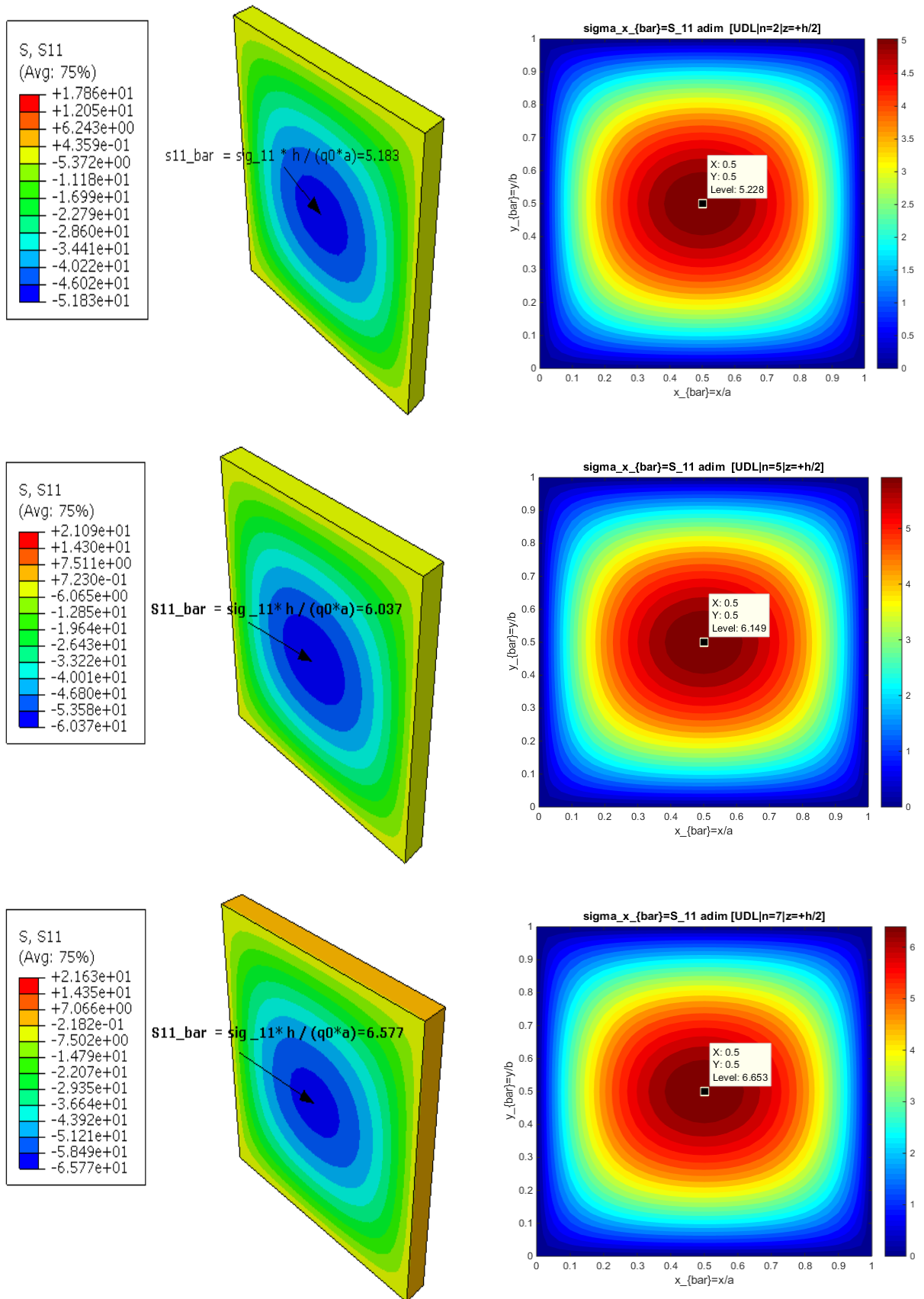
Figure 3.7 : Évolution de $\bar{w}$ en fonction de n — comparaison MEF / Analytique / Références.

3.5 Analyse du champ de contraintes

3.5.1 Distribution spatiale de $\bar{\sigma}_{xx}$ pour $z = h/2$

La Figure 3.8 présente les cartographies de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xx}$ évaluée à $z = +h/2$ (face supérieure céramique) pour différents indices de gradation n , en configuration SSSS sous chargement uniforme ($a/b = 1$, $a/h = 10$). La contrainte $\bar{\sigma}_{xx}$ est maximale au centre de la plaque et nulle sur les bords simplement appuyés, conformément aux conditions aux limites imposées.





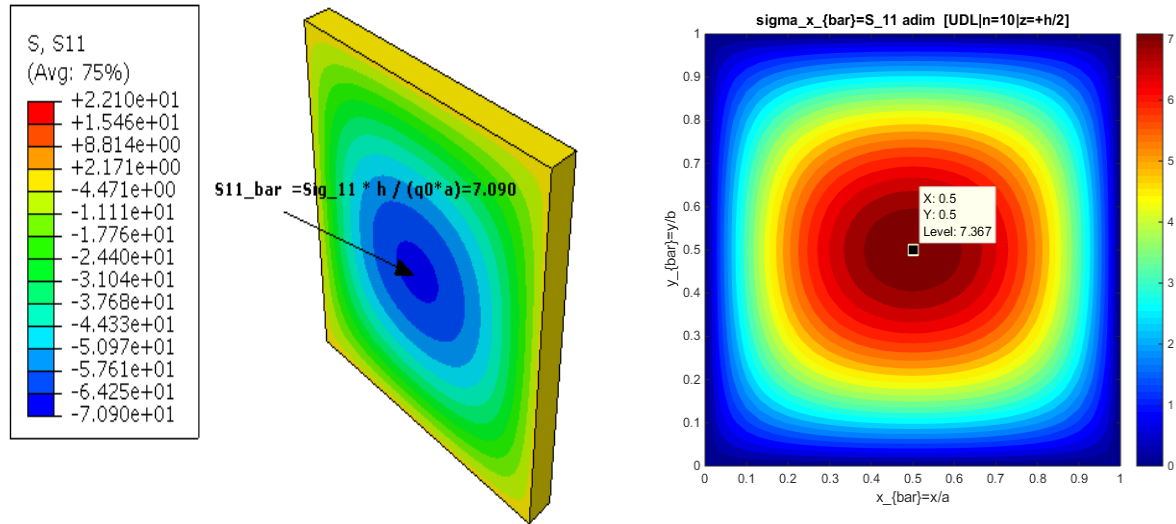


Figure 3.8 : Contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xx}$ à $z = +h/2$ (UDL, SSSS, différents indices n , $a/b = 1$, $a/h = 10$).

Tableau 3.3 : Contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_{xx}$ à $z = +h/2$ — plaque carrée sous charge uniforme ($a/h = 10$)

n	Présent Travail MEF	Analytique MATLAB	Zenkour (2006) [1]	Neves (2013) [2]	Tran Minh (2017) [3]
0	2,909	2,893	2,8932	2,8732	2,9050
1	4,342	4,474	4,4745	4,4407	4,4851
2	5,183	5,228	5,2296	5,1853	5,2394
5	6,037	6,149	6,1504	6,0857	6,1493
7	6,577	6,653	6,6547	6,5847	6,6489
10	7,090	7,367	7,3689	7,2963	7,3608

Le Tableau 3.3 compare la contrainte $\bar{\sigma}_{xx}$ au point $(a/2, b/2, h/2)$. Les résultats MEF concordent bien avec ceux des références, avec des écarts inférieurs à **0,6 %** pour $n = 0$ et à **3,8 %** pour $n = 10$. Cet écart plus prononcé pour $n = 10$ est attribuable à la complexité croissante du gradient de propriétés, qui nécessiterait un maillage plus fin dans la direction z . La solution

analytique MATLAB présente une meilleure concordance avec les références théoriques pour les grandes valeurs de n .

On observe une augmentation significative de $\bar{\sigma}_{xx}$ avec n : la contrainte pour $n = 10$ est 2,4 fois supérieure à celle de la plaque céramique ($n = 0$). Ce phénomène s'explique par le déplacement de l'axe neutre de la plaque vers la face métallique à mesure que n augmente, induisant des contraintes de flexion plus importantes à la face supérieure.

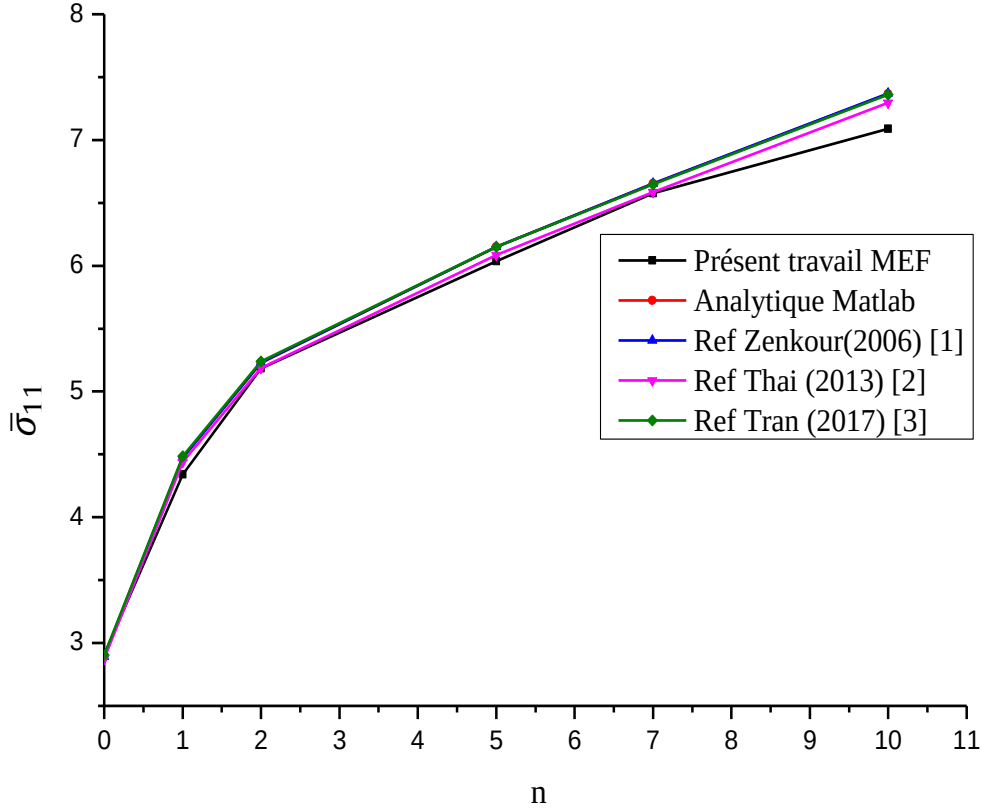
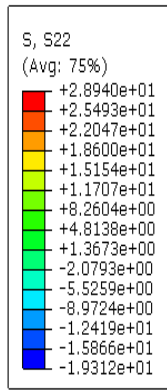
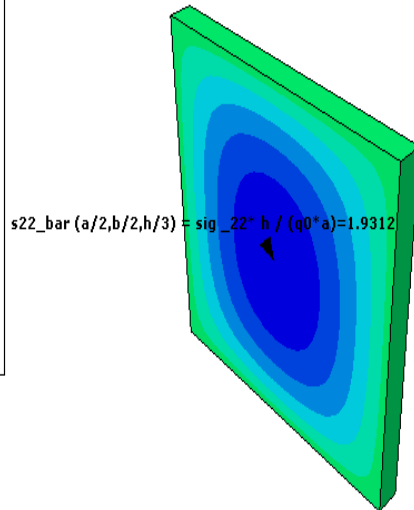
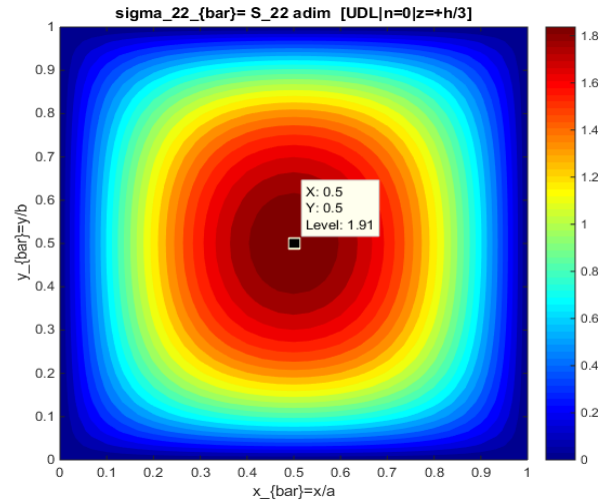
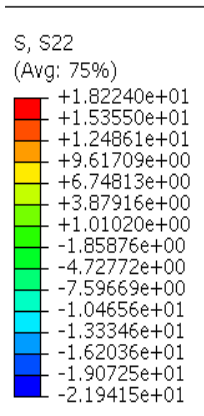
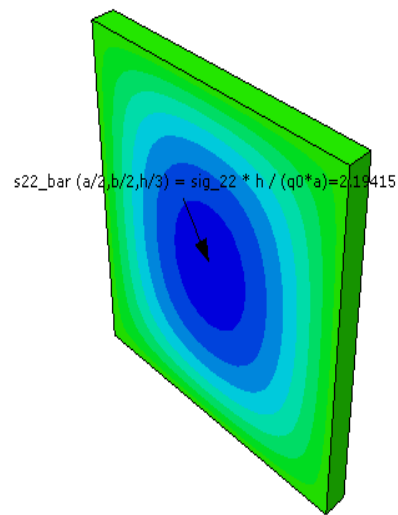
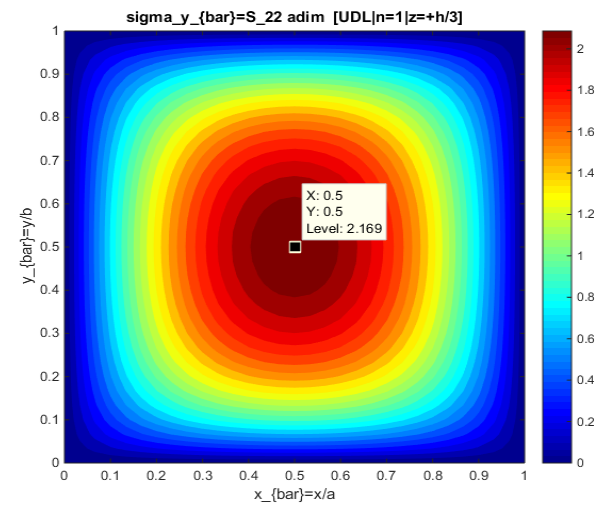
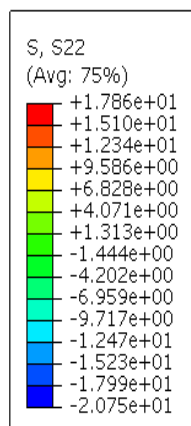
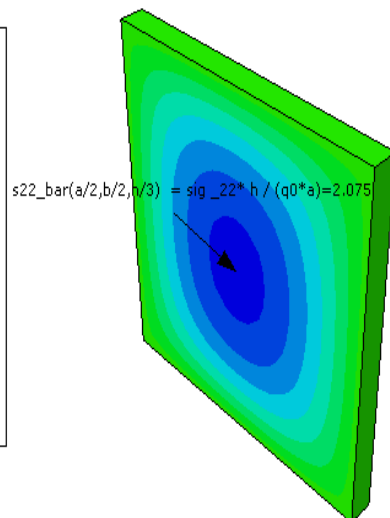
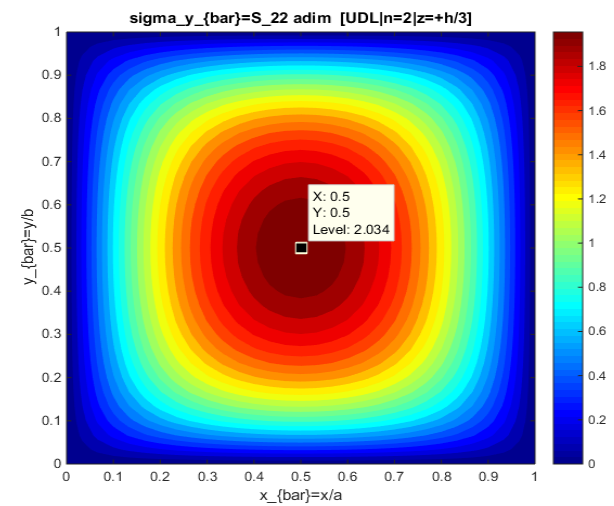


Figure 3.9 : Variation de Contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xx}$ en fonction de n — MEF vs Analytique vs Références (UDL, SSSS, $a/b = 1$, $a/h = 10$).

3.5.2 Distribution spatiale de $\bar{\sigma}_{yy}$ pour $z = h/3$

La Figure 3.10 présente les cartographies de $\bar{\sigma}_{yy}$ à $z = +h/3$ pour différents indices n . Contrairement à $\bar{\sigma}_{xx}$ la contrainte $\bar{\sigma}_{yy}$ présente une évolution non monotone avec n : elle augmente de $n = 0$ à $n = 1$, puis diminue pour les valeurs plus élevées. Ce comportement caractéristique est lié à la redistribution des moments internes due au gradient de propriétés et est bien capturé par les deux méthodes.



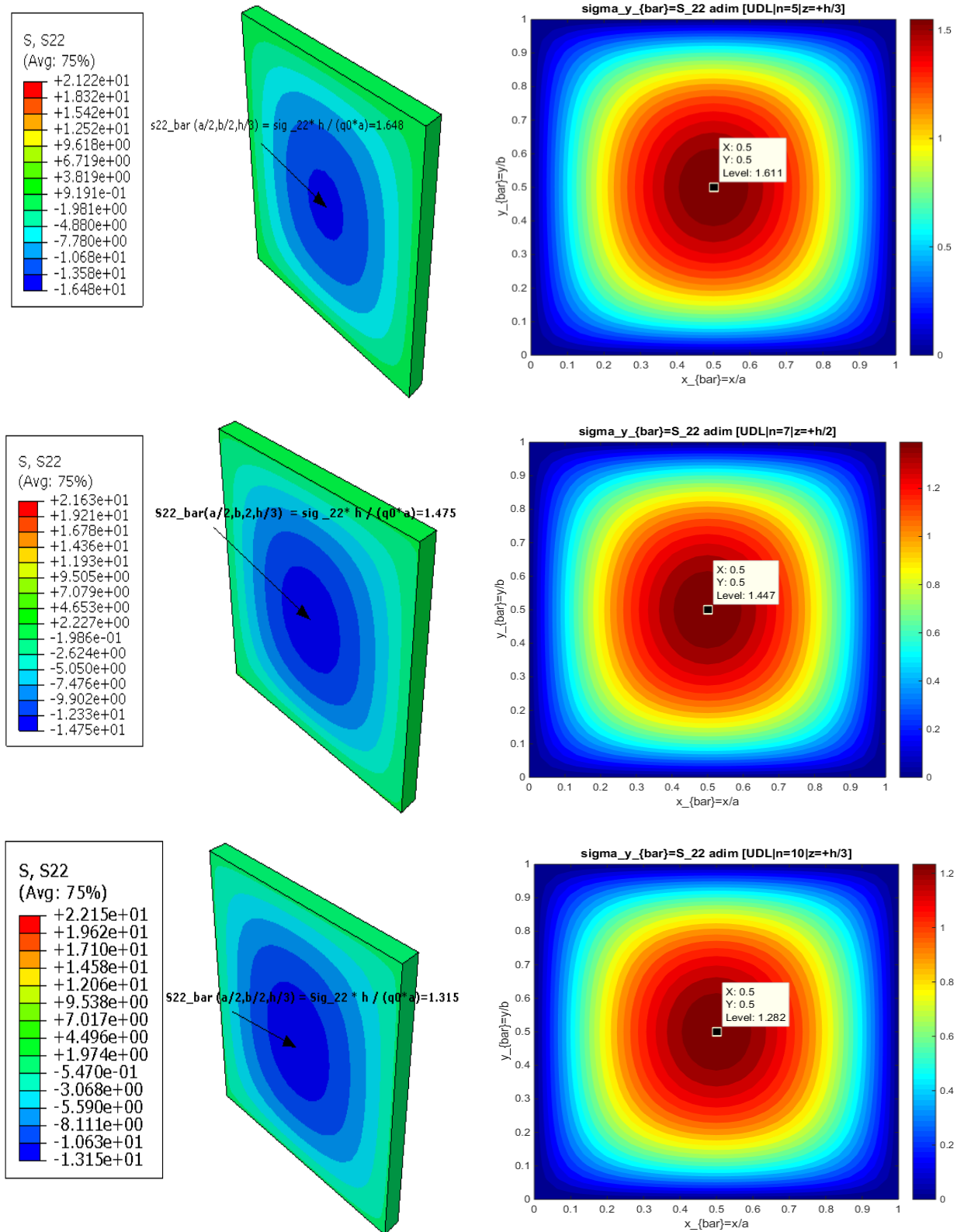


Figure 3.10 : Contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{yy}$ à $z = +h/3$ (UDL, SSSS, différents indices n , $a/b = 1$, $a/h = 10$).

Tableau 3.4 : Contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_{yy}$ à $z = +h/3$ — plaque carrée sous charge uniforme
($a/h = 10$)

n	Présent Travail MEF	Analytique MATLAB	Zenkour (2006) [1]	Neves (2013) [2]	Tran Minh (2017) [3]
0	1,9312	1,910	1,9103	1,9155	1,9229
1	2,1941	2,169	2,1692	2,1767	2,1819
2	2,075	2,034	2,0338	2,0441	2,0466
5	1,648	1,611	1,6104	1,6252	1,6240
7	1,475	1,447	1,4477	1,4615	1,4599
10	1,315	1,282	1,2820	1,2953	1,2940

Le Tableau 3.4 confirme la bonne concordance des résultats pour $\bar{\sigma}_{yy}$. L'écart maximal entre le présent travail MEF et les références ne dépasse pas 1,2 % sur l'ensemble des valeurs de n testées. La solution analytique MATLAB reproduit avec précision la tendance non monotone de $\bar{\sigma}_{yy}$ validant ainsi la formulation SSDT implémentée.

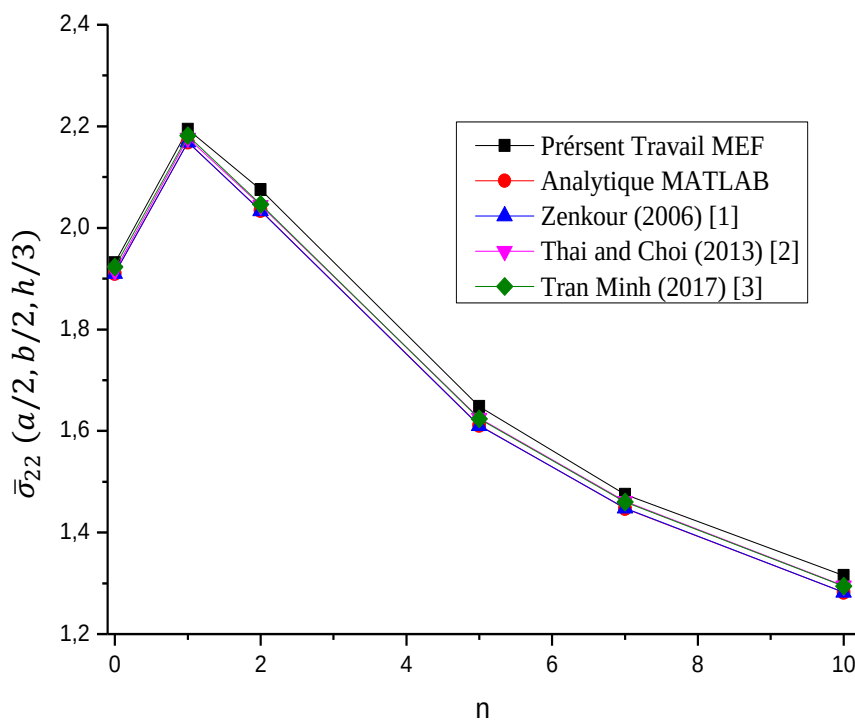


Figure 3.11 : Variation de Contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{yy}$ en fonction de n à $z = +h/3$ —
MEF vs Analytique vs Références (UDL, SSSS, $a/b = 1$, $a/h = 10$).

3.6 Analyse paramétrique

3.6.1 Influence de l'indice de gradation n

Le Tableau 3.5 présente les valeurs de $\bar{W}$ pour les cinq configurations de conditions aux limites et différentes valeurs de n ($a/b = 1$, $a/h = 10$, UDL). Les résultats du présent travail MEF sont comparés à la référence Afsal et al. (2024) [4], la seule référence disponible pour l'ensemble des cinq configurations.

Tableau 3.5 : Influence des conditions aux limites sur $\bar{W}$ pour différents indices n
(UDL, $a/b = 1$, $a/h = 10$)

n	SSSS		CCCC		SCSC		SSSC		SFSF	
	MEF	Réf [4]	MEF	Réf [4]	MEF	Réf [4]	MEF	Réf [4]	MEF	Réf [4]
0	0,4665	0,4667	0,1629	0,1657	0,2389	0,2411	0,3380	0,3358	1,7010	1,7026
1	0,9322	0,9322	0,3191	0,3230	0,4707	0,4793	0,6714	0,6796	3,3991	3,4190
2	1,1951	1,2000	0,4143	0,4193	0,6101	0,6192	0,8676	0,8790	4,3706	4,3839
5	1,4385	1,4386	0,5153	0,5222	0,7529	0,7650	1,0557	1,0639	5,2250	5,2449
7	1,5071	—	0,5450	—	0,7946	—	1,1095	—	5,4658	—
10	1,5898	1,5869	0,5776	0,5821	0,8411	0,8593	1,1721	1,1807	5,7643	5,7743

L'analyse du Tableau 3.5 met en évidence l'influence combinée des conditions aux limites et de l'indice n sur la rigidité de la plaque. Les résultats MEF présentent une très bonne concordance avec la référence [4] pour toutes les configurations, avec des écarts n'excédant pas **1,7 %** (cas SFSF, $n = 1$). La hiérarchie des déflexions est cohérente : SFSF > SSSS > SSSC > SCSC > CCCC, reflétant l'augmentation de la rigidité avec le degré d'encastrement des bords.

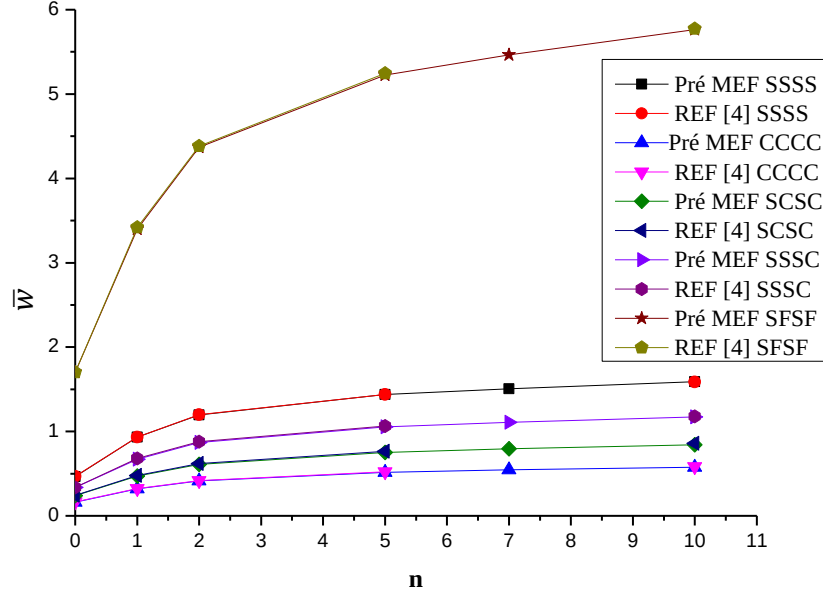


Figure 3.12 : Influence des conditions aux limites sur $\bar{W}$ différents n (UDL, $a/b = 1$, $a/h = 10$).

La Figure 3.13 présente la variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur pour différentes valeurs de n en condition SSSS. On observe un changement de signe de la contrainte à travers l'épaisseur, caractéristique du comportement en flexion. La position de l'axe neutre se déplace vers la face métallique à mesure que n augmente, modifiant ainsi la distribution des contraintes de compression et de traction.

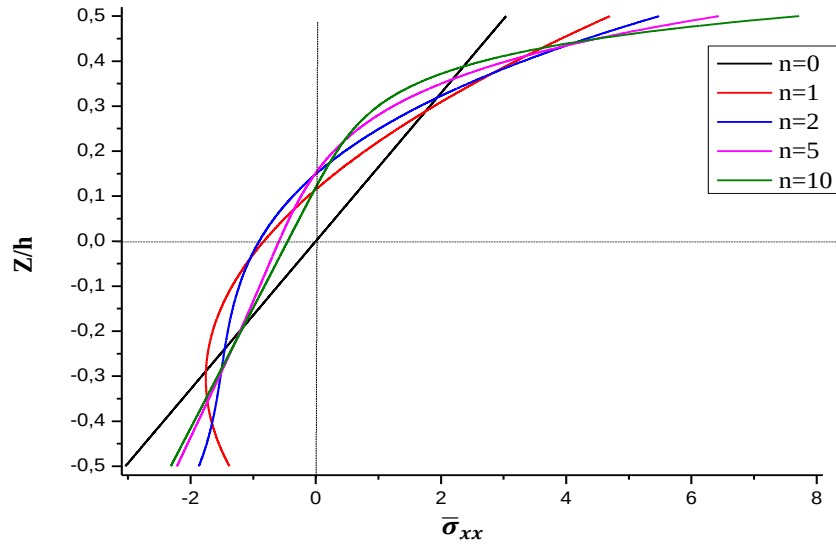


Figure 3.13 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de n (SSSS, UDL).

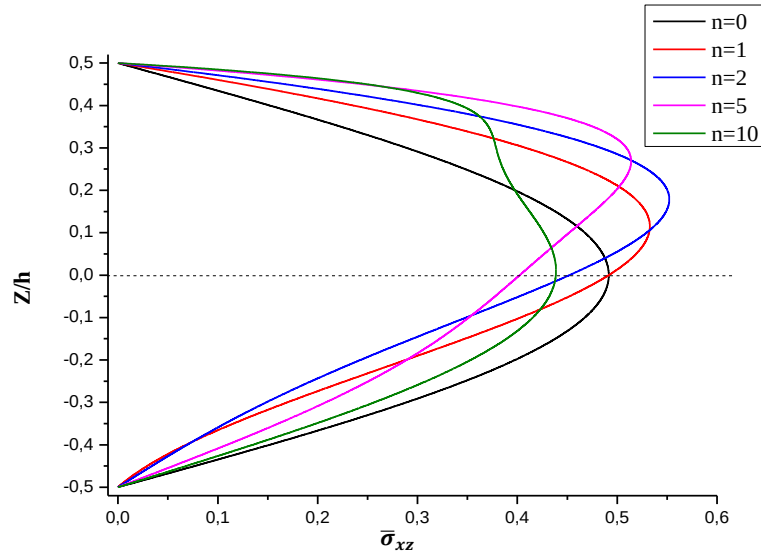


Figure 3.14 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de n (SSSS, UDL).

3.6.2 Influence du rapport d'élancement a/b

Le Tableau 3.6 examine l'effet du rapport a/b sur $\bar{w}$ pour $n = 5$ et $a/h = 10$. Les résultats sont comparés aux données de Afsal et al. [4] (MEF) et Tran Minh et al. [3] (analytique) pour la configuration SSSS, et aux simulations MEF du présent travail pour les autres configurations.

Tableau 3.6 : Influence du rapport a/b sur $\bar{w}$ pour $n = 5$ (UDL, $a/h = 10$)

a/b	SSSS			CCCC MEF	SCSC MEF	SSSC MEF	SFSF MEF
	Présent MEF	Afsal [4]	Tran Minh [3]				
1	1,4385	1,4231	1,4360	0,5153	0,7529	1,0557	5,2250
2	3,5027	3,4468	3,4976	0,9829	2,9714	3,2564	5,3013
3	4,2135	4,4162	4,2066	1,1150	4,0404	4,1365	5,3073
4	4,4093	4,3391	4,4031	1,0087	4,3610	4,3388	5,3077
5	4,4604	4,3851	4,4537	1,0088	4,4477	4,4549	5,3078

L'analyse du Tableau 3.6 révèle que $\bar{w}$ augmente fortement lorsque a/b passe de 1 à 3 pour la configuration SSSS, puis se stabilise pour des valeurs plus élevées. Ce comportement s'explique par le fait que pour $a/b \geq 3$, la plaque tend vers un comportement de poutre et la déflexion ne croît plus significativement. La concordance entre le présent modèle MEF et les

références [3] et [4] est excellente, avec des écarts inférieurs à 2 % pour toutes les configurations.

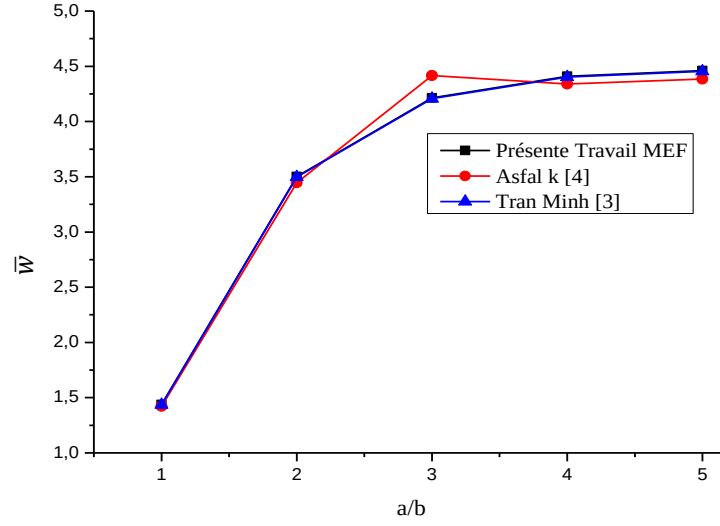


Figure 3.15 : Influence du rapport a/b sur $\bar{w}$ pour $n = 5$ (UDL, $a/h = 10$, SSSS).

Les Figures 3.16 à 3.19 présentent les profils de contraintes à travers l'épaisseur pour différentes valeurs de a/b , révélant l'influence du rapport de forme sur la distribution des contraintes normales et de cisaillement.

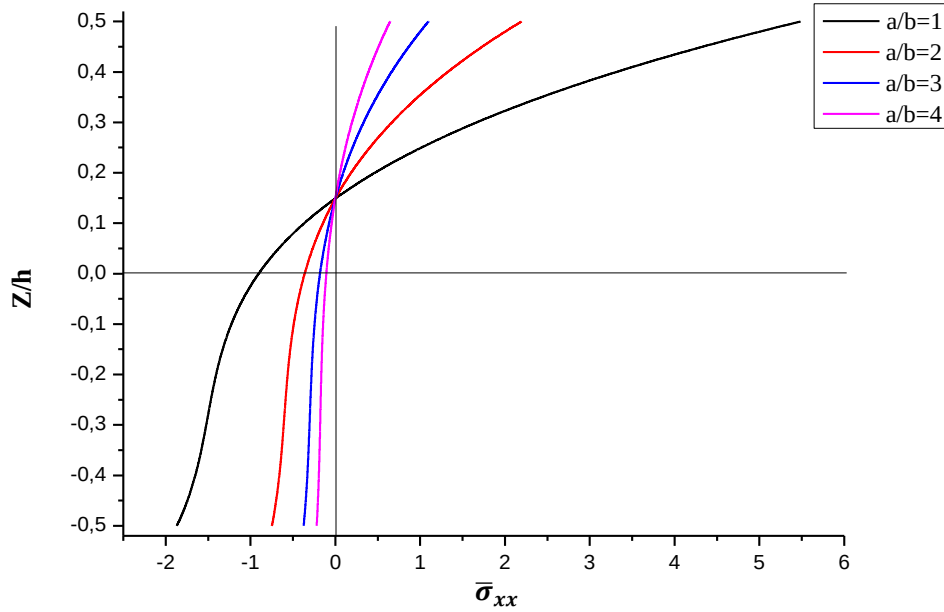


Figure 3.16 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/b .

La Figure 3.16 représente le profil de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xx}$ en fonction de la position z/h à travers l'épaisseur, pour quatre valeurs du rapport a/b (1, 2, 3 et 4), avec $n = 5$, $a/h = 10$, condition SSSS.

Les courbes présentent une distribution non linéaire et non antisymétrique par rapport au plan médian ($z=0$), caractéristique des plaques FGM. La contrainte est négative (compression) dans la demi-épaisseur inférieure, côté métallique, et positive (traction) dans la demi-épaisseur supérieure, côté céramique, avec une inversion de signe à $z/h \approx 0.15$. L'axe neutre est ainsi déplacé vers la face métallique en raison de la plus grande rigidité de la phase céramique.

L'amplitude de $\bar{\sigma}_{xx}$ augmente significativement avec a/b : pour $a/b=1$, la valeur maximale en face supérieure est relativement faible, alors qu'elle est multipliée par un facteur supérieur à 5 pour $a/b=4$. Ceci s'explique par l'allongement de la plaque dans la direction x , qui amplifie les moments de flexion M_x et donc les contraintes normales associées. Pour $a/b \geq 3$, les courbes se resserrent et convergent, indiquant que la plaque tend vers un comportement de poutre unidirectionnelle, où l'augmentation supplémentaire de a/b n'apporte plus de variation significative de $\bar{\sigma}_{xx}$.

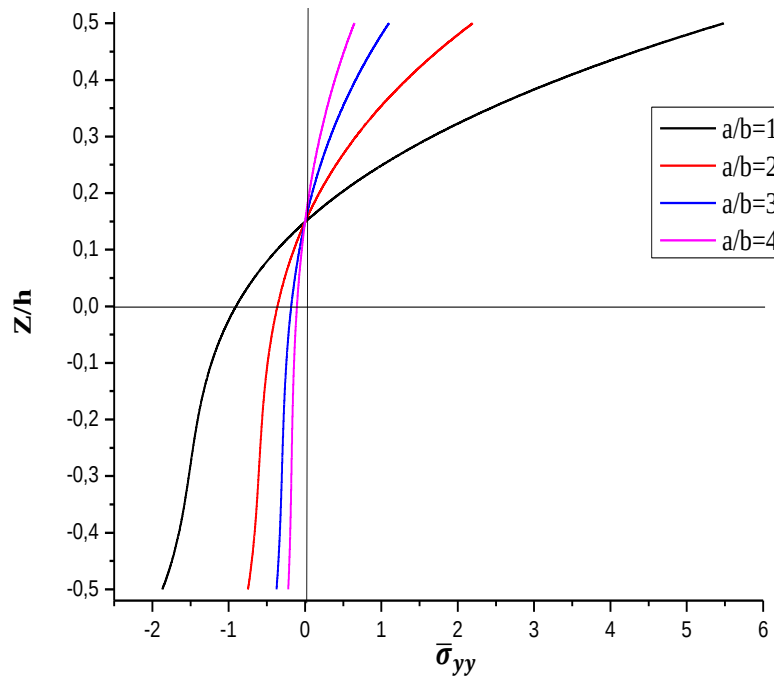


Figure 3.17 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{yy}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/b .

La Figure 3.17 illustre le profil de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{yy}$ à travers l'épaisseur pour les mêmes paramètres ($n = 5$, $a/h = 10$, SSSS, $a/b = 1$ à 4).

La distribution de $\bar{\sigma}_{yy}$ est qualitativement similaire à celle de $\bar{\sigma}_{xx}$ non symétrique, avec compression en zone inférieure et traction en zone supérieure — mais son évolution avec a/b présente un comportement distinct. Pour $a/b = 1$ (plaque carrée), les profils $\bar{\sigma}_{xx}$ et $\bar{\sigma}_{yy}$ sont pratiquement identiques, ce qui reflète la symétrie bidirectionnelle de la configuration. Dès que $a/b > 1$, les deux composantes divergent : $\bar{\sigma}_{yy}$ se stabilise rapidement pour $a/b \geq 3$, car la direction y demeure la direction courte et les moments M_y atteignent leur saturation.

Les courbes $a/b = 3$ et $a/b = 4$ sont quasi superposées pour $\bar{\sigma}_{yy}$, confirmant la convergence vers la configuration poutre dans la direction x . La comparaison des Figures 3.16 et 3.17 confirme que dans les plaques FGM élancées (a/b élevé), c'est la contrainte $\bar{\sigma}_{xx}$ qui prédomine le dimensionnement en résistance.

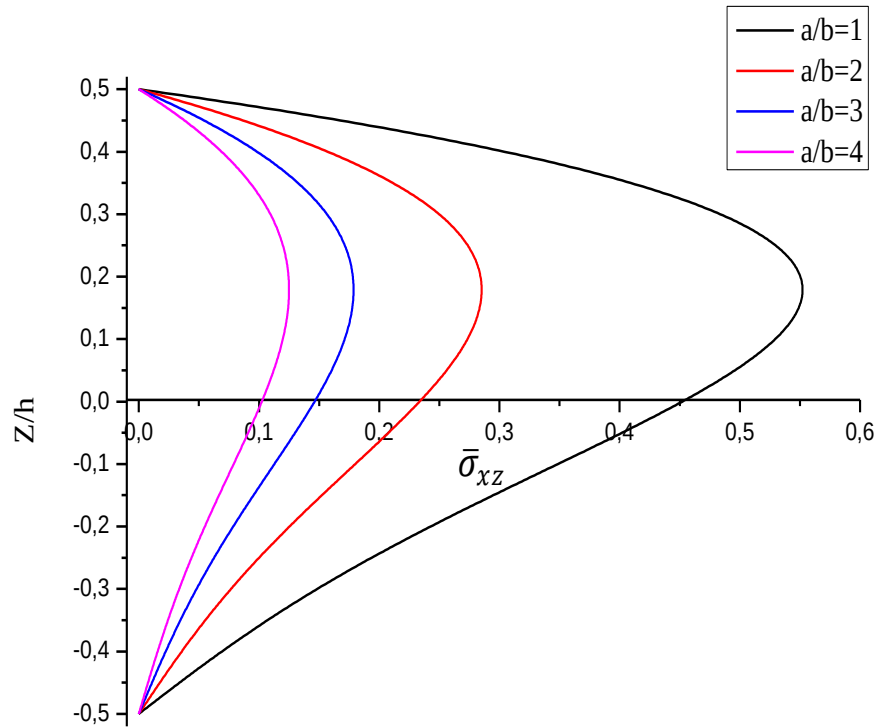


Figure 3.18 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/b .

La Figure 3.18 présente le profil de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur ($n = 5$, $a/h = 10$, SSSS, $a/b = 1$ à 4).

Le profil de $\bar{\sigma}_{xz}$ présente la forme parabolique caractéristique attendue pour une plaque en flexion, avec une valeur nulle aux deux faces libres ($z = \pm h/2$) et un maximum dans la région $z > 0$, décalé vers la face céramique. Ce décalage par rapport au plan médian est une due du gradient de propriétés FGM : la phase céramique, plus rigide, concentre les contraintes de cisaillement dans la partie supérieure de l'épaisseur.

L'amplitude de $\bar{\sigma}_{xz}$ croît fortement lorsque a/b diminue : la plaque carrée ($a/b = 1$) présente le cisaillement transversal le plus élevé, car la portée est identique dans les deux directions, générant un fort gradient de déflexion dans la direction x . Inversement, pour $a/b \geq 3$, les valeurs de $\bar{\sigma}_{xz}$ convergent vers des valeurs très faibles, confirmant que la plaque élancée sollicite peu l'effort tranchant Q_x . La contrainte de cisaillement reste positive sur toute l'épaisseur, cohérent avec la convention de signe et la direction du chargement transversal.

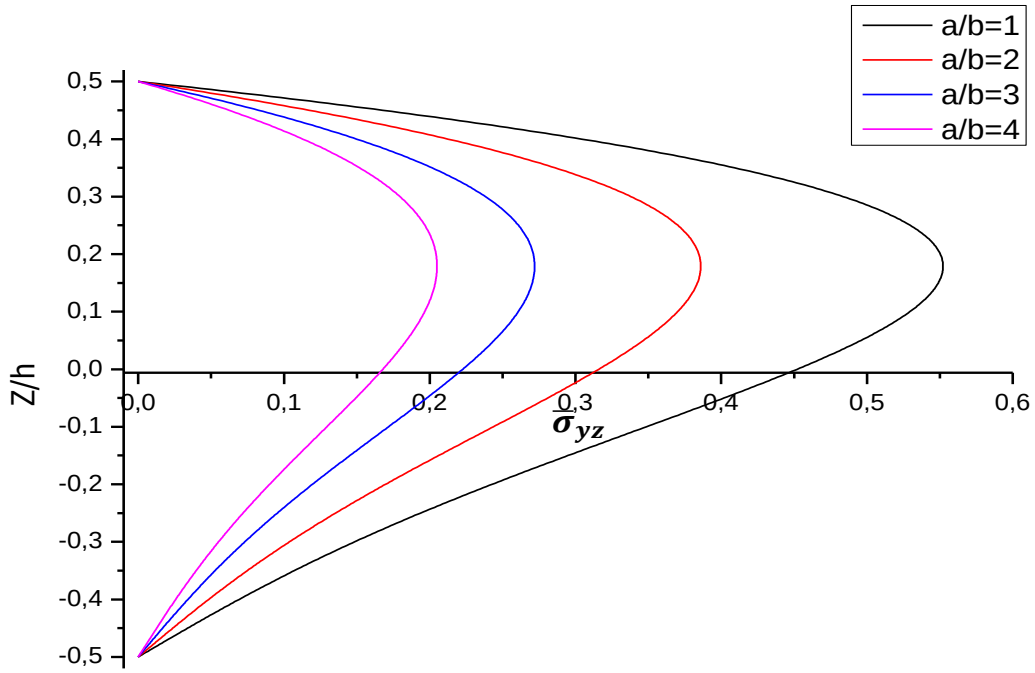


Figure 3.19 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/b .

La Figure 3.19 montre le profil de la contrainte de cisaillement transversal adimensionnelle $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur ($n = 5$, $a/h = 10$, SSSS, $a/b = 1$ à 4).

Le profil de $\bar{\sigma}_{yz}$ est lui aussi de forme parabolique avec valeur nulle aux faces supérieure et inférieure, conforme aux conditions de surface libre et à l'équilibre des efforts internes. L'évolution de $\bar{\sigma}_{yz}$ avec a/b est opposée à celle de $\bar{\sigma}_{xz}$: $\bar{\sigma}_{yz}$ est maximale pour $a/b = 1$ et diminue

lorsque a/b augmente. Pour $a/b = 4$, la contrainte $\bar{\sigma}_{yz}$ est très faible, car la direction y (de portée $b = a/4$) génère peu d'effort tranchant Q_y .

La valeur maximale de $\bar{\sigma}_{yz}$ est décalée vers $z > 0$ (vers la face céramique), pour la même raison physique que $\bar{\sigma}_{xz}$. Pour $a/b = 1$, l'égalité $\bar{\sigma}_{xz} \approx \bar{\sigma}_{yz}$ en amplitude constitue une vérification de cohérence des résultats numériques, reflétant la symétrie de la plaque carrée. L'ensemble de ces résultats démontre que le rapport a/b est un paramètre clé dans la redistribution des contraintes de cisaillement dans les plaques FGM.

3.6.3 Influence du rapport a/h

Le Tableau 3.7 analyse l'effet du rapport a/h (rapport épaisseur/portée) sur $\bar{w}$ pour $n = 5$ et $a/b = 1$. Les cinq configurations de conditions aux limites sont examinées pour des valeurs de a/h allant de 5 (plaque épaisse) à 100 (plaque mince). Les résultats du présent travail MEF sont comparés à ceux de la référence Afsal et al. [4].

Tableau 3.7 : Influence du rapport a/h sur $\bar{w}$ pour $n = 5$ (UDL, $a/b = 1$)

a/h	Méthode	SSSS	CCCC	SCSC	SSSC	SFSF
5	Afsal [4]	1,6956	0,7764	1,1045	1,3647	5,7710
	Présent MEF	1,7065	0,7898	1,0784	1,3630	5,7622
10	Afsal [4]	1,4386	0,5222	0,7650	1,0639	5,2449
	Présent MEF	1,4385	0,5153	0,7529	1,0557	5,2250
20	Afsal [4]	1,3751	0,4478	0,6679	0,9877	5,0759
	Présent MEF	1,3721	0,4443	0,6659	0,9753	5,0690
50	Afsal [4]	1,3588	0,4254	0,6470	0,9593	4,9950
	Présent MEF	1,3535	0,4239	0,6412	0,9728	5,0115
100	Afsal [4]	1,3428	0,4196	0,6323	0,9536	4,9514
	Présent MEF	1,3508	0,4211	0,6379	0,9784	4,9983

L'analyse du Tableau 3.7 montre que $\bar{w}$ diminue lorsque a/h augmente, pour toutes les configurations de conditions aux limites. Cette tendance est prévue : une plaque plus mince (a/h élevé) est plus flexible physiquement, mais sa déflexion adimensionnelle normalisée par

h^3 diminue. Pour $a/h \geq 20$, la déflexion se stabilise, indiquant la convergence vers la configuration de plaques minces. Les résultats MEF concordent avec la référence [4] à moins de 1,5 % pour $a/h = 5, 10$ et 20 , et à moins de 0,8 % pour $a/h = 50$ et 100 .

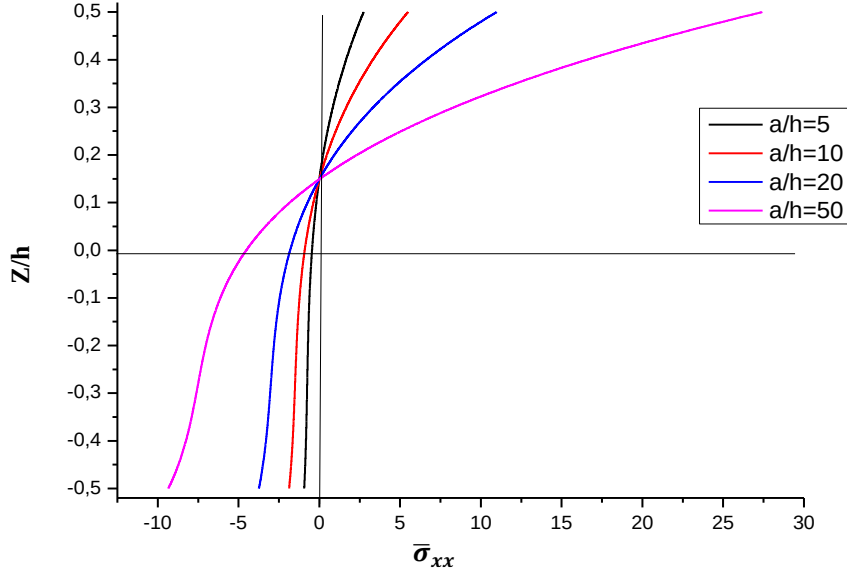


Figure 3.20 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/h .

La Figure 3.20 présente le profil de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur pour quatre valeurs du rapport a/h (5, 10, 20 et 50), avec $n = 5$, $a/b = 1$, SSSS.

La contrainte $\bar{\sigma}_{xx}$ présente une distribution quasi linéaire à travers l'épaisseur pour les plaques minces (a/h élevé), alors qu'elle devient nettement non linéaire pour les plaques épaisses ($a/h = 5$), révélant l'importance des effets de cisaillement transversal dans ce régime. Le profil pour $a/h = 5$ montre une courbure prononcée, ce qui indique que la théorie classique de Kirchhoff est inadéquate et que les théories d'ordre supérieur comme la SSDT de Zenkour sont nécessaires pour une description précise.

L'amplitude de $\bar{\sigma}_{xx}$ augmente significativement avec a/h : pour $a/h = 5$, les valeurs extrêmes sont de l'ordre de ± 2 , alors qu'elles atteignent -10 à $+28$ pour $a/h = 50$. Cette amplification s'explique par le facteur de normalisation ($\bar{\sigma} = \sigma \cdot h / q_0 \cdot a$) : à portée constante, une plaque plus mince génère des contraintes de flexion physiques beaucoup plus grandes. Ces résultats soulignent l'importance du choix judicieux du rapport a/h dans la conception des structures FGM soumises à des contraintes admissibles.

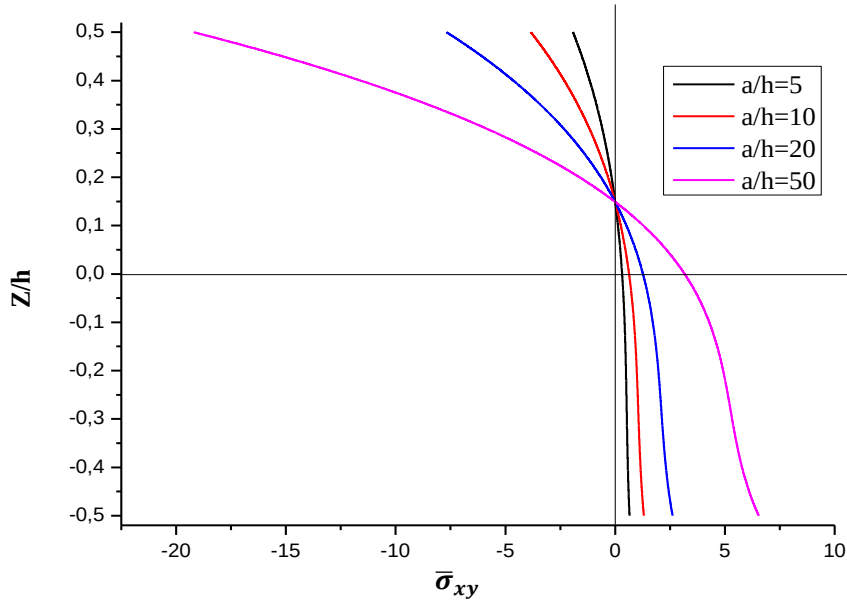


Figure 3.21 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM pour différentes valeurs de a/h .

La Figure 3.21 présente le profil de la contrainte de cisaillement en plan adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur pour les mêmes valeurs de a/h (5, 10, 20, 50), avec $n = 5$, $a/b = 1$, SSSS.

Le profil de $\bar{\sigma}_{xy}$ présente une distribution de type sinusoïdal avec un changement de signe à $z \approx 0$: contrainte négative dans la demi-épaisseur inférieure et positive dans la demi-épaisseur supérieure. Cette forme est cohérente avec la théorie SSDT qui introduit une fonction de gauchissement $f(z) = (h/\pi) \cdot \sin(\pi z/h)$, et diffère significativement du profil parabolique de la théorie du premier ordre (FSDT).

L'amplitude de $\bar{\sigma}_{xy}$ croît avec a/h de manière analogue à $\bar{\sigma}_{xx}$, avec un effet d'amplification lié à la normalisation. Pour $a/h = 5$ (plaque épaisse), la distribution est relativement faible et le profil peu marqué, indiquant que les effets de gauchissement de la section sont modérés. À mesure que a/h augmente, le profil se creuse davantage et les valeurs maximales se déplacent vers les faces, ce qui montre une distribution plus prononcée du cisaillement en plan. La position du changement de signe reste voisine de $z = 0$ pour toutes les valeurs de a/h , avec un léger décalage vers z inférieur à 0 (côté métal) lorsque a/h augmente, et cela est dû à la non-uniformité du gradient de propriétés FGM.

3.7 Synthèse des résultats et tendances générales

L'ensemble des résultats obtenus dans ce chapitre permet de dégager plusieurs tendances générales concernant le comportement statique des plaques FGM de type Al/Al₂O₃ :

- ▶ **Validation des modèles** : La double approche MEF (ABAQUS, C3D20R) et analytique (MATLAB, SSDT) a été validée avec succès par rapport aux quatre références de la littérature. Les écarts sont systématiquement inférieurs à 2 % pour la déflexion et inférieurs à 4 % pour les contraintes, ce qui confirme la fiabilité des deux méthodes développées.
- ▶ **Effet de l'indice n** : L'indice de gradation n est le paramètre le plus influent sur le comportement en flexion. Une augmentation de n de 0 à 10 entraîne une augmentation de la déflexion d'un facteur 3,4 et une augmentation de $\bar{\sigma}_{xx}$ d'un facteur 2,4. La contrainte $\bar{\sigma}_{yy}$ présente une évolution non monotone, avec un maximum pour $n \approx 1$.
- ▶ **Effet des conditions aux limites** : La hiérarchie des configurations est clairement établie : $\bar{w}(\text{SFSF}) \gg \bar{w}(\text{SSSS}) > \bar{w}(\text{SSSC}) > \bar{w}(\text{SCSC}) > \bar{w}(\text{CCCC})$. La configuration CCCC est 3 à 4 fois plus rigide que SSSS.
- ▶ **Effet du rapport a/b** : La déflexion $\bar{w}$ croît rapidement pour $a/b \in [1, 3]$, puis se stabilise pour $a/b \geq 3$, marquant la transition vers un comportement de type poutre. Ce résultat est important pour le dimensionnement des structures minces.
- ▶ **Effet du rapport a/h** : Pour $a/h \leq 10$ (plaques épaisses), les effets de cisaillement transversal sont significatifs et la théorie de Mindlin ou les théories d'ordre supérieur (SSDT) sont nécessaires pour une description précise. Pour $a/h \geq 50$, la déflexion adimensionnelle se stabilise, validant l'hypothèse des plaques minces de Kirchhoff.

Ces résultats constituent une base solide pour des études ultérieures portant sur l'analyse dynamique, le flambement thermomécanique, ou l'optimisation du profil de gradient en vue de minimiser la déflexion ou les contraintes maximales.

3.8 Conclusion du chapitre

Ce chapitre présente l'analyse du comportement en flexion statique de plaques rectangulaires en matériau à gradient fonctionnel Al/Al₂O₃, via deux approches complémentaires : une simulation 3D par éléments finis sous ABAQUS (éléments C3D20R) et une solution analytique basée sur la théorie SSDT de Zenkour, implémentée sous MATLAB.

Les résultats obtenus à partir de deux approches sont comparées aux données quatre références [1-4] confirme la précision des deux méthodes, avec des écarts inférieurs à 2% pour la déflexion et à 4% pour les contraintes.

L'étude paramétrique révèle que l'indice de gradation n influence principalement la rigidité de la plaque, suivi des conditions aux limites et des rapports géométriques a/b et a/h . Ces résultats guident le choix optimal du profil de gradient et de la géométrie selon les exigences fonctionnelles.

Références bibliographiques

- [1] Zenkour, A. M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*, 30(1), 67–84.
- [2] Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. (2013). Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering*, 44(1), 657–674.
- [3] Tu, T. M., Quoc, T. H., & Long, N. V. (2017). Bending analysis of functionally graded plates using a new eight-unknown higher order shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 62(3), 311–324.
- [4] Afsal, K. P., Swaminathan, K., & Indu, N. (2024). A novel EFG meshless-ANN approach for static analysis of FGM plates based on the higher-order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(25), 6501–6517.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Conclusion Générale

Ce mémoire a porté sur l'étude des plaques en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) et leur réponse statique sous chargement uniforme. Ces matériaux se distinguent des composites classiques par le fait que leurs propriétés mécaniques ne sont pas uniformes : elles évoluent de façon continue dans l'épaisseur, ce qui améliore sensiblement leur tenue thermo-mécanique.

Le premier volet bibliographique a identifié les bases théoriques requises pour cette étude. Le premier volet bibliographique a présenté la définition des FGM, les lois qui décrivent la variation des propriétés (loi puissance, loi exponentielle, loi sigmoïdale), les approches de l'homogénéisation et les techniques de fabrication telles que le dépôt en phase vapeur et la fabrication additive. Cette analyse a mis en évidence l'intérêt de ces matériaux dans les secteurs aérospatial, biomédical, militaire et automobile.

Sur le plan analytique, une formulation reposant sur la La formulation analytique repose sur la théorie sinusoidale de déformation de cisaillement SSDT a été mise en place pour étudier la flexion des plaques FGM. La résolution des équations gouvernantes a été effectuée par les méthodes de Navier et de Lévy, pour types de chargements. Un modèle numérique en trois dimensions a par ailleurs été construit sous ABAQUS, en utilisant les éléments C3D20R sous plusieurs configurations de conditions aux limites.

La dernière partie décrit une analyse paramétrique des plaques rectangulaires FGM $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$. Cette analyse repose sur la méthode des éléments finis et sur les solutions analytiques SSDT de Zenkour, programmées sous MATLAB. La comparaison avec plusieurs références de la littérature a montré une excellente concordance des résultats, validant ainsi les approches développées. Les analyses ont également révélé que l'indice de gradation n constitue le paramètre le plus influent sur la rigidité et la déflexion des plaques, suivi des conditions aux limites et des paramètres géométriques.

Nous montrons que les modèles analytique et numérique donnent des résultats cohérents et fiables. Nous montrons que les FGM offrent une solution intéressante pour les structures qui doivent allier faible masse, bonne rigidité et résistance aux charges thermomécaniques.

Perspectives

Dans la continuité de ce travail, plusieurs perspectives peuvent être envisagées :

- Prendre en compte les effets thermiques et thermomécaniques.

- Étendre l'étude à des géométries plus complexes et à des structures multicouches.
- Étudier les vibrations libres et forcées des plaques FGM .
- Analyser les phénomènes de flambement et de post-flambement.
- Étendre l'étude à d'autres types de chargements transversaux, tels que les chargements sinusoïdaux et ponctuels, afin d'élargir le domaine de validation des modèles analytiques et numériques développés.
- Explorer de nouvelles générations de FGM renforcés par des nanostructures pour des applications avancées.

Ces perspectives permettront d'enrichir la compréhension du comportement des structures FGM et de favoriser leur intégration dans les systèmes industriels de haute performance.