



Université d'Oran 2

Méthodes Quantitatives de Management

Programme de Cours : 1^{ère} Année Master spécialité Management

Polycopie de Cours préparé par :

M. HAKKA MOHAMMED AZZEDDINE

Maitre de Conférences « A »

Année universitaire : 2025/2026

Polycopié de Méthodes Quantitatives de Management

M. HAKKA MOHAMMED AZZEDDINE

Maitre de Conférences « A »

Université d'Oran 2

Sommaire

AVANT-PROPOS	8
1. La Population Concernée	8
2. Les Objectifs de l'Ouvrage	8
3. La Structure et le Contenu	9
4. L'Approche Pédagogique.....	9
Remerciements.....	10
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	11
1. Évolution Historique : Du Management Intuitif au Management Scientifique	11
2. La Démarche Quantitative en Sciences de Gestion	11
3. Les Deux Piliers des MQM : Approches Déterministes et Stochastiques.....	12
3.1. Les modèles déterministes d'optimisation.....	12
3.2. Les modèles stochastiques et prévisionnels	12
4. Organisation du Manuscrit et Fil Conducteur	12
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION À LA PROGRAMMATION LINÉAIRE ET FORMULATION DES MODÈLES	14
Objectifs du chapitre :	14
1. Introduction et Concepts Fondamentaux.....	15
1.1. Les composantes d'un modèle mathématique.....	15
2. Méthodologie de Formulation d'un Programme Linéaire	16
3. Application Pratique : Le Cas de la PME "Oran-Meubles"	16
Résolution et Modélisation Pas à Pas.....	17
Modèle Final Synthétique (Forme Canonique)	18
Exercices d'entraînement proposés	19
CORRIGÉ DES EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT.....	20
Exercice 1 : Problème de Composition de Nutrition (Minimisation).....	20
1. Analyse textuelle et extraction des données	20
2. Modélisation pas à pas	20
Programme Linéaire Final (Exercice 1) :.....	21
Exercice 2 : Problème de Placement Financier (Arbitrage).....	21
1. Analyse textuelle et extraction des données	21
2. Modélisation pas à pas	21
Programme Linéaire Final (Exercice 2) :.....	22
CHAPITRE 2 : LA MÉTHODE DE RÉOLUTION GRAPHIQUE DES PROGRAMMES LINÉAIRES	24

Objectifs du chapitre :	24
1. Fondements Théoriques et Conditions d'Application	25
1.1. La restriction bidimensionnelle.....	25
1.2. L'espace des solutions réalisables (Le polygone de décision)	25
2. Algorithme de Résolution Graphique pas à pas	25
3. Application Pratique : Résolution du Cas "Oran-Meubles"	26
Résolution Graphique Étape par Étape	26
Conclusion et Interprétation Managériale	28
4. Les Cas Particuliers de la Résolution Graphique	28
EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT	30
EXERCICE 1 : Le cas des solutions optimales multiples	30
Énoncé du problème.....	30
Corrigé détaillé de l'Exercice 1	30
EXERCICE 2 : Le cas de l'absence de solution réalisable (Incompatibilité)	32
Énoncé du problème.....	32
Corrigé détaillé de l'Exercice 2	33
CHAPITRE 3 : L'ALGORITHME DU SIMPLEXE – FONDEMENTS ALGÈBRIQUES ET RÉSOLUTION DES MODÈLES MULTI-VARIABLES	35
Objectifs du chapitre :	35
1. Introduction : La nécessité d'un changement de paradigme	36
2. De la Géométrie à l'Algèbre : Le principe d'exploration du Simplexe	36
2.1. La logique itérative du Simplexe.....	37
3. La condition préalable : Le passage à la Forme Standard	37
3.1. Les caractéristiques de la Forme Standard.....	38
3.2. Les règles de conversion et d'introduction des variables additionnelles	38
3.3. Exemples Pratiques de Conversion.....	39
4. Construction et Structure du Tableau Initial du Simplexe (Dictionnaire de Base)	41
4.1. Le concept de Base et de Variables Hors-Base	41
4.2. Architecture standard du Tableau du Simplexe.....	42
4.3. Application : Le Tableau Initial du Cas "Oran-Meubles"	42
5. Les Règles de Transition : Pivotage, Variable Entrante et Variable Sortante	43
5.1. Règle de sélection de la Variable Entrante (Critère d'optimalité)	43
5.2. Règle de sélection de la Variable Sortante (Critère de réalisabilité)	44
5.3. Détermination du Pivot et opérations de Gauss-Jordan	44

5.4. Application Étape par Étape sur le Tableau Initial "Oran-Meubles"	45
6. Exécution des Calculs de Pivotage et Construction du Tableau 1	46
6.1. Détail algébrique des opérations de ligne	46
6.2. Structure et Lecture du Tableau 1	48
CHAPITRE 4 : LA PRISE DE DÉCISION EN AVENIR INCERTAIN ET FACE AU RISQUE	62
Objectifs du chapitre :	62
1. Introduction et Typologie des Environnements Décisionnels.....	63
2. Décision en Avenir Strictement Incertain : Les Critères de Choix.....	63
2.1. Le critère du Maximin (Critère de Wald ou de prudence).....	64
2.2. Le critère du Maximax (Critère de l'optimisme absolu).....	64
2.3. Le critère de Laplace (Critère de l'insuffisante raison)	64
2.4. Le critère du regret de Savage (Minimax Regret).....	64
3. Décision face au Risque : L'Arbre de Décision.....	65
3.1. Composants d'un arbre de décision	65
3.2. Règle mathématique de résolution : L'Espérance Mathématique du Gain (EMG)	65
4. Application Pratique et Modélisation Mathématique	66
Conclusion et Analyse Critique.....	66
EXERCICE D'APPLICATION : STRUCTURES SÉQUENTIELLES ET VALEUR DE L'INFORMATION	67
Énoncé du problème : Le projet "Eco-Pack"	67
Corrigé Détaillé de l'Exercice.....	68
1. Modélisation de l'arbre de décision	68
2. Résolution par induction à rebours (Calcul des EMG).....	69
3. Calcul de la Valeur de l'Information Parfaite (VIP).....	69
Interprétation Managériale	70
CHAPITRE 5 : L'ANALYSE PRÉVISIONNELLE ET LES OUTILS STATISTIQUES DE PRÉVISION DE LA DEMANDE	71
Objectifs du chapitre :	71
1. Enjeux de la Prévision dans la Gestion des Opérations	72
2. Analyse Analytique des Séries Temporelles (Chronologiques)	72
Modélisation mathématique de la composition :	72
3. Les Techniques de Lissage à Court Terme (Modèles Stationnaires).....	73
3.1. La Moyenne Mobile Simple (MMS)	73
3.2. Le Lissage Exponentiel Simple (LES).....	73

4. Modélisation de la Tendence par la Régression Linéaire	74
5. Application Pratique et Mesure de la Qualité des Prévisions.....	74
5.1. Cas d'étude : Analyse de la demande de l'unité "Oran-Plast"	74
5.2. Calcul des indicateurs d'évaluation de l'erreur	75
Conclusion Managériale	76
CHAPITRE 6 : LES MODÈLES D'OPTIMISATION DE LA GESTION DES STOCKS	77
Objectifs du chapitre :	77
1. Introduction et Enjeux Économiques de la Gestion des Stocks	78
2. Le Modèle Déterministe de Base : La Formule de Wilson (EOQ)	78
2.1. Formalisation mathématique du Coût Total.....	78
2.2. Optimisation et Dérivation de la Quantité Économique (Q*)	79
2.3. Indicateurs dérivés de l'optimum.....	79
3. Le Point de Commande (ROP - Reorder Point)	79
3.1. Cas de l'avenir certain (Délai déterministe).....	80
3.2. Cas de l'avenir risqué : Introduction du Stock de Sécurité (SS).....	80
4. Application Pratique : Optimisation à l'unité "Oran-Logistique"	80
Résolution Étape par Étape :	81
EXERCICE 1 : Application fondamentale de la formule de Wilson (EOQ)	82
Énoncé du problème	82
Corrigé détaillé de l'Exercice 1	82
EXERCICE 2 : Point de commande (ROP) et Stock de sécurité (SS)	83
Énoncé du problème	83
Corrigé détaillé de l'Exercice 2	84
EXERCICE 3 : Modèle avec remises quantitatives (Tarifs dégressifs)	85
Énoncé du problème	85
Corrigé détaillé de l'Exercice 3	86
CHAPITRE 7 : LE CHARGEMENT DES ATELIERS ET LA GESTION DES GOULOTS D'ÉTRANGLEMENT.....	88
Objectifs du chapitre :	88
1. Concepts Fondamentaux de la Capacité et du Chargement.....	89
1.1. Typologie des capacités	89
1.2. Méthodologies de chargement	89
2. La Notion de Goulot d'Étranglement et la Théorie des Contraintes	89
Les 5 étapes de la Théorie des Contraintes (TOC).....	90

3. La Logique DBR (Drum-Buffer-Rope) et la méthode OPT	90
4. Application Pratique : Optimisation du Mix-Produit sous Contrainte.....	91
Résolution Étape par Étape :	91
EXERCICE 1 : Analyse du profil de charge (Chargement infini vs fini)	93
Énoncé du problème.....	93
Corrigé détaillé de l'Exercice 1	94
EXERCICE 2 : Identification du goulot et maximisation de la marge au goulot (Le cas "Oran-Bottling").....	95
Énoncé du problème.....	95
Corrigé détaillé de l'Exercice 2	96
EXERCICE 3 : Équilibrage de ligne et optimisation par la Théorie des Contraintes (TOC)97	
Énoncé du problème.....	97
Corrigé détaillé de l'Exercice 3	98
CONCLUSION GÉNÉRALE	100
1. Synthèse de la Démarche : Un Fil Conducteur Systémique	100
2. Le Manager de Demain : Au-delà du "Feeling", l'Ère des Données.....	100
3. Perspectives : Vers l'Optimisation Globale et l'Intelligence Artificielle	101
Références Bibliographiques	102
ANNEXE	103
Résumé :	105
: ملخص.....	105
Abstract:.....	105

AVANT-PROPOS

L'enseignement des **Méthodes Quantitatives de Management** et de l'**Aide à la Décision** suscite parfois une certaine appréhension chez les étudiants en Sciences de Gestion. Souvent perçue à tort comme un ensemble de formalismes mathématiques abstraits et déconnectés de la réalité économique, cette discipline est pourtant le moteur décisionnel et le garant de la performance des organisations modernes.

Ce polycopié de cours a été conçu avec une ambition claire : démystifier la recherche opérationnelle et les outils statistiques en plaçant systématiquement l'application managériale au cœur de la rigueur mathématique.

1. La Population Concernée

Ce manuel de référence s'adresse en priorité aux étudiants de niveau **Master en Sciences de Gestion**. Plus particulièrement, il est calibré pour les futurs cadres, consultants et directeurs s'orientant vers les spécialités suivantes :

- **Management des Opérations et Logistique (Supply Chain)**
- **Contrôle de Gestion et Audit**
- **Finance d'Entreprise**
- **Entrepreneuriat et Gestion des PME/Startups**

Aucun pré requis mathématique lourd n'est exigé, si ce n'est une maîtrise des bases de l'algèbre linéaire et des statistiques descriptives courantes.

2. Les Objectifs de l'Ouvrage

L'objectif central de ce polycopié est de doter le futur manager d'une véritable "boîte à outils technologique" pour rompre avec le pilotage purement intuitif ou basé sur le simple sentiment. À l'issue de l'assimilation de ce cours, l'étudiant doit être capable de :

- **Modéliser** : Traduire des contraintes de terrain (capacités d'ateliers, limites financières, objectifs commerciaux) en équations mathématiques exploitables.
- **Optimiser** : Allouer les ressources rares d'une organisation de manière à maximiser le profit ou minimiser les coûts de revient.

- **Décider face au risque** : Cartographier des choix séquentiels complexes et évaluer financièrement l'apport d'une information sur un marché incertain.
- **Piloter** : Anticiper la demande et calibrer au plus juste les flux physiques (approvisionnements, stocks, charges des postes de travail).

3. La Structure et le Contenu

Le fil conducteur de ce polycopié reflète la réalité systémique de l'entreprise à travers sept chapitres complémentaires ordonnés logiquement :

- **Axe 1 : L'optimisation des ressources (Chapitres 1, 2 et 3)** Étude approfondie de la programmation linéaire, de sa résolution géométrique (méthode graphique) et algorithmique (algorithme du Simplexe), jusqu'à l'interprétation économique des prix d'ombre.
- **Axe 2 : La gouvernance du risque (Chapitre 4)** Introduction aux critères de choix en avenir strictement incertain et modélisation par les arbres de décision.
- **Axe 3 : Le pilotage opérationnel de la Supply Chain (Chapitres 5 et 6)** Calibrage de l'avenir grâce aux outils statistiques de prévision de la demande (lissage, régression), puis optimisation des stocks (formule de Wilson, point de commande et stock de sécurité).
- **Axe 4 : La maîtrise des capacités industrielles (Chapitre 7)** Diagnostic des profils de charge des ateliers, identification des goulots d'étranglement et application des principes de la **Théorie des Contraintes (TOC)** pour maximiser le débit global.

4. L'Approche Pédagogique

Fidèle aux approches modernes de l'apprentissage actif (*learning by doing*), ce polycopié refuse l'abstraction pure. Chaque module est construit pour encourager l'autonomie et l'assimilation par l'action à travers une triple articulation :

1. **Le fondement conceptuel** : Exposer clairement l'enjeu managérial réel et le problème de terrain sous-jacent.
2. **La formalisation** : Présenter les techniques de résolution de manière fluide et progressive (calculs détaillés étape par étape).

3. **L'ancrage pratique** : Proposer en fin de section des applications concrètes, des cas d'étude et des exercices d'entraînement corrigés, directement inspirés du tissu industriel et logistique.

En maîtrisant ces outils, les étudiants acquerront une compétence clé : la capacité de transformer des contraintes d'exploitation et des volumes de données en décisions stratégiques optimales.

Remerciements

L'auteur tient à exprimer sa gratitude envers ses collègues enseignants-chercheurs pour leurs relectures stimulantes, ainsi qu'envers ses étudiants dont les retours et le dynamisme contribuent, chaque année, à affiner la pédagogie de ce cours.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

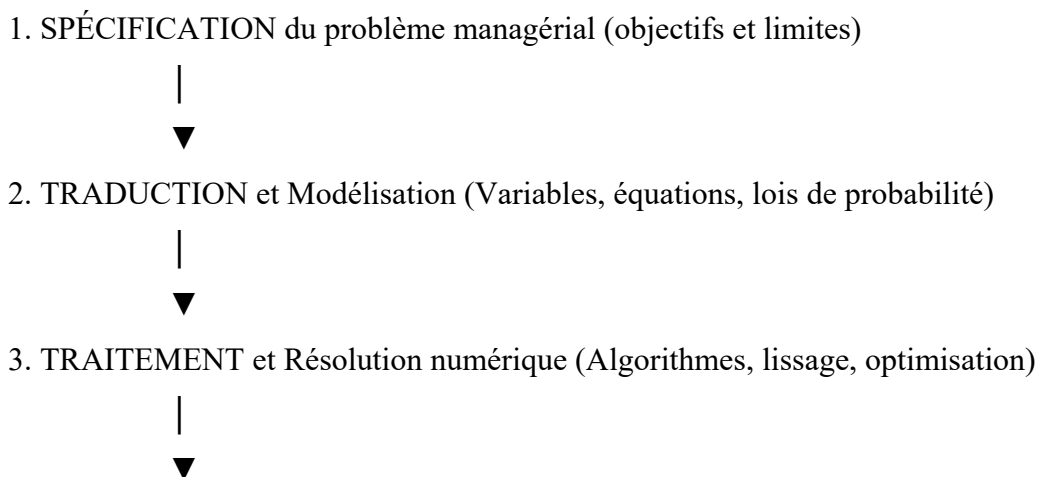
1. Évolution Historique : Du Management Intuitif au Management Scientifique

Les Méthodes Quantitatives de Management (MQM) s'inscrivent dans le prolongement historique de la rationalisation de la gestion des entreprises. Si le début du XXe siècle a été marqué par l'organisation scientifique du travail (Taylorisme), c'est véritablement à partir des années 1940 et 1950 que l'aide à la décision s'est structurée autour des mathématiques et de la statistique. Face à la complexification des organisations, à la mondialisation des marchés et à la nécessité d'optimiser des ressources de plus en plus rares, l'intuition managériale a montré ses limites.

L'émergence de la modélisation linéaire, le développement des probabilités appliquées aux affaires et, plus tard, l'explosion des capacités de calcul informatique ont donné naissance à un nouveau paradigme : **le pilotage par les données**. Aujourd'hui, les méthodes quantitatives ne se cantonnent plus aux laboratoires de recherche ; elles constituent le socle opérationnel du marketing prévisionnel, du contrôle de gestion moderne, de la finance d'entreprise et de la gestion de la chaîne logistique (*Supply Chain*).

2. La Démarche Quantitative en Sciences de Gestion

Appliquer les méthodes quantitatives au management consiste à traduire une problématique de terrain (souvent formulée de manière empirique ou qualitative par un décideur) en un modèle mathématique, financier ou statistique rigoureux. Cette démarche suit un cycle méthodologique standardisé et itératif :



4. INTERPRÉTATION managériale et Analyse de sensibilité (Prix d'ombre, erreurs)



5. MISE EN ŒUVRE de la décision et contrôle des écarts

L'objectif d'un modèle quantitatif n'est pas de remplacer le manager, mais de lui fournir un éclairage objectif et mesurable, limitant ainsi la part d'incertitude et de risque dans ses choix stratégiques.

3. Les Deux Piliers des MQM : Approches Déterministes et Stochastiques

Ce polycopié est structuré pour guider l'étudiant à travers les deux grandes familles de méthodes quantitatives indispensables à la gestion :

3.1. Les modèles déterministes d'optimisation

Dans cette configuration, l'ensemble des paramètres de gestion est supposé connu avec certitude. C'est le champ de la **Programmation Linéaire (Chapitres 1, 2 et 3)**. Le manager cherche à maximiser un indicateur de performance (marge, profit) ou à minimiser un coût de revient sous un ensemble de contraintes fixes (capacités de production, budgets, exigences du marché). L'enjeu est ici l'**allocation optimale des facteurs de production**.

3.2. Les modèles stochastiques et prévisionnels

Dans la réalité économique, le manager est confronté à la variabilité et au risque. Pour piloter l'activité, il doit intégrer le hasard et le temps. Cela nécessite l'usage des statistiques décisionnelles (**Chapitre 4 : Arbres de décision**), des techniques d'analyse des séries temporelles pour anticiper le marché (**Chapitre 5 : Prévisions de la demande**), et de la modélisation probabiliste pour sécuriser les flux (**Chapitre 6 : Gestion des stocks**).

Enfin, le système converge vers l'**analyse des capacités (Chapitre 7)**, où les approches déterministes et les flux prévisionnels se croisent pour équilibrer le chargement des ateliers et manager les goulots d'étranglement de l'organisation.

4. Organisation du Manuscrit et Fil Conducteur

Pour accompagner l'étudiant de manière fluide, le polycopié est articulé autour de sept chapitres progressifs :

1. **Le Chapitre 1** pose les fondements de la programmation linéaire et détaille la méthodologie pour traduire un problème managérial complexe en modèle algébrique.
2. **Le Chapitre 2** explore la résolution géométrique (méthode graphique), idéale pour visualiser l'espace des solutions réalisables et comprendre l'impact des contraintes.
3. **Le Chapitre 3** détaille l'algorithme du Simplexe pour résoudre les modèles à plusieurs variables et aborde l'analyse post-optimale (interprétation économique des prix d'ombre).
4. **Le Chapitre 4** introduit les critères de choix en avenir incertain et structure les décisions séquentielles à l'aide des arbres de décision.
5. **Le Chapitre 5** transmet les outils statistiques (lissage exponentiel, régression linéaire) permettant de construire des prévisions de ventes fiables.
6. **Le Chapitre 6** traite des modèles mathématiques d'optimisation des stocks (formule de Wilson, point de commande), arbitrant entre coûts financiers de possession et taux de service client.
7. **Le Chapitre 7** clôture l'ouvrage en abordant le chargement des ateliers et la Théorie des Contraintes pour maximiser la performance et le débit des processus productifs.

En abordant ce cours, l'étudiant doit garder à l'esprit qu'un résultat quantitatif n'est jamais une fin en soi, mais un outil d'aide à la décision conçu pour fiabiliser et guider l'action managériale.

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION À LA PROGRAMMATION LINÉAIRE ET FORMULATION DES MODÈLES

Objectifs du chapitre :

À la fin de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

1. Identifier un problème d'optimisation sous contraintes dans un contexte managérial.
2. Distinguer et définir les trois composantes d'un modèle : variables de décision, fonction objectif et contraintes.
3. Traduire un énoncé littéral (problème d'entreprise) en un programme linéaire rigoureux.

1. Introduction et Concepts Fondamentaux

Dans le quotidien d'un gestionnaire, les décisions d'allocation de ressources sont omniprésentes. Qu'il s'agisse de planifier la production d'une usine, de composer un portefeuille financier, ou de répartir un budget publicitaire, le problème reste le même : atteindre un objectif de performance maximal (ou un coût minimal) en utilisant des ressources limitées.

La **Programmation Linéaire (PL)** est une technique mathématique d'optimisation fondamentale de la recherche opérationnelle, discipline qui a pris son essor lors de la Seconde Guerre mondiale sous l'impulsion de George Dantzig (Hillier & Lieberman, 2021). Elle permet de résoudre rationnellement des problèmes d'allocation de ressources rares.

Comme le soulignent Render et al. (2018), le terme « programmation » n'est pas à prendre au sens informatique, mais au sens d'ordonnancement, de planification ou de formulation d'un programme d'action macro-managérial. Le qualificatif « linéaire » signifie que toutes les relations mathématiques du modèle (les équations ou inéquations) doivent impérativement être du premier degré, excluant ainsi toute puissance, racine carrée ou produit entre variables de décision.

1.1. Les composantes d'un modèle mathématique

Tout problème de programmation linéaire repose rigoureusement sur quatre piliers structurels (Anderson et al., 2016) :

1. **Les variables de décision ($X_1, X_2, \dots, X_n$)** : Ce sont les inconnues mathématiques du problème, représentant les leviers que le manager contrôle directement et doit déterminer (ex: les quantités à produire, le montant à investir).
2. **La fonction objectif (ou fonction économique)** : C'est le critère de performance quantitatif à optimiser. Elle exprime mathématiquement ce que l'on cherche à **Maximiser** (Profit, Marge, Rendement) ou à **Minimiser** (Coût, Temps, Risque). Elle s'écrit sous la forme d'un produit scalaire :

$$Z = C_1.X_1 + C_2.X_2 + \dots + C_n.X_n$$

3. **Les contraintes** : Ce sont les restrictions matérielles, financières, techniques ou juridiques qui limitent l'espace des solutions réalisables (Faulin & Juan, 2014). Elles s'expriment sous forme d'inéquations ($\leq$ ou $\geq$) ou d'équations ($=$).
4. **Les contraintes de non-négativité** : En management, les variables incarnent des réalités physiques ou économiques concrètes (unités, heures, dinars). Il est donc indispensable sur le plan axiomatique de spécifier que les variables ne peuvent être négatives :

$$X_i \geq 0$$

2. Méthodologie de Formulation d'un Programme Linéaire

Pour passer d'une situation managériale descriptive (souvent floue et complexe) à un modèle quantitatif rigoureux et exploitable, l'approche scientifique classique (Taha, 2017) préconise de suivre scrupuleusement les quatre étapes suivantes :

- **Étape 1** : Identifier clairement les unités de choix ou les variables d'action de l'entreprise (Définition vectorielle des variables).
- **Étape 2** : Identifier le but économique ultime de l'analyse (Maximisation de la richesse ou Minimisation de la consommation de ressources) et écrire l'équation de la fonction objectif (**Z**).
- **Étape 3** : Dresser l'inventaire exhaustif des limitations technico-économiques, puis traduire chaque barrière par une ligne d'inéquation (Formulation des contraintes de ressources, de marché, de capacité, etc.).
- **Étape 4** : Poser formellement les conditions de réalisme économique (Non-négativité des variables).

3. Application Pratique : Le Cas de la PME "Oran-Meubles"

Pour appliquer cette méthodologie, étudions une situation classique d'arbitrage de production s'inspirant des modèles d'ateliers de fabrication d'équipements de bureau (Render et al., 2018).

Énoncé du problème :

L'entreprise "Oran-Meubles" produit deux types d'articles de bureau : des **Bureaux Standard (P1)** et des **Bureaux Premium (P2)**. La fabrication de ces meubles nécessite le passage par deux ateliers principaux : l'Atelier Menuiserie et l'Atelier Finition.

Les données techniques et financières sont regroupées dans le tableau suivant :

Facteurs de production	Bureau Standard (P1)	Bureau Premium (P2)	Disponibilité totale par semaine
Temps de Menuiserie	2 heures	4 heures	60 heures
Temps de Finition	3 heures	2 heures	48 heures
Marge sur coût variable Unitaire	4 000 DA	5 000 DA	

De plus, une étude de marché indique que la demande hebdomadaire pour les Bureaux Premium (P2) ne peut pas dépasser 12 unités.

Travail demandé : Formuler le programme linéaire permettant au manager de maximiser son profit hebdomadaire global.

Résolution et Modélisation Pas à Pas

Étape 1 : Définition des variables de décision

Le manager doit fixer le plan de charge et le volume de production hebdomadaire pour chaque type de produit.

- Soit **X1** : le nombre de Bureaux Standard à fabriquer par semaine.
- Soit **X2** : le nombre de Bureaux Premium à fabriquer par semaine.

Étape 2 : Formulation de la fonction objective

L'objectif est de maximiser le profit global de l'atelier (**Z**). Chaque unité de P1 génère une marge de 4 000 DA et chaque unité de P2 génère 5 000 DA. La fonction linéaire s'écrit :

$$\{\text{Max}\} \quad Z = 4000 X1 + 5000 X2$$

Étape 3 : Écriture des contraintes

1. **Contrainte de capacité de l'atelier Menuiserie** : Le temps total absorbé par la production ne peut excéder la disponibilité de 60 heures.

$$2.X1 + 4.X2 \leq 60$$

2. **Contrainte de capacité de l'atelier Finition** : Le temps de traitement global ne peut excéder le plafond de 48 heures.

$$3.X1 + 2.X2 \leq 48$$

3. **Contrainte commerciale (Absorption du marché)** : La production de la gamme Premium (P2) est limitée par les opportunités de vente à un maximum de 12 unités.

$$X2 \leq 12$$

Étape 4 : Contraintes de non-négativité

Il est physiquement impossible de fabriquer une quantité négative de meubles.

$$X1 \geq 0, X2 \geq 0$$

Modèle Final Synthétique (Forme Canonique)

Le programme linéaire complet se présente sous la forme matricielle standard suivante :

$$\{\text{Max}\} Z = 4000 X1 + 5000 X2$$

Sous contraintes (S.C.) :

$$2X1 + 4X2 \leq 60 \text{ (Capacité Menuiserie)}$$

$$3X1 + 2X2 \leq 48 \text{ (Capacité Finition)}$$

$$X2 \leq 12 \text{ (Contrainte de Marché)}$$

$$X1, X2 \geq 0 \text{ (Axiome de Non-négativité)}$$

Exercices d'entraînement proposés

Exercice 1 : Problème de Composition de Nutrition (Minimisation)

Un gestionnaire d'un complexe avicole cherche à déterminer la ration alimentaire journalière optimale pour l'élevage. Il dispose de deux types d'aliments de base (A et B) contenant des vitamines et des protéines sous certaines proportions...

Travail demandé

Formuler le programme linéaire visant à minimiser le coût d'achat global en respectant les apports nutritionnels minimaux requis.

Exercice 2 : Problème de Placement Financier (Arbitrage Portefeuille)

Le directeur financier d'une compagnie d'assurance doit répartir un fonds de roulement entre des obligations d'État (sûres mais à faible rendement) et des actions privées (rentables mais risquées)...

Travail demandé

Formuler le modèle d'optimisation sous contraintes de limites de risques et de réglementations de liquidité.

CORRIGÉ DES EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 1 : Problème de Composition de Nutrition (Minimisation)

1. Analyse textuelle et extraction des données

Pour structurer ce problème classique de coût minimum (souvent appelé "problème du régime" en recherche opérationnelle), nous devons croiser les besoins nutritionnels minimaux du cheptel avec les caractéristiques des aliments disponibles.

Imaginons les données technico-économiques standard suivantes (complétant l'énoncé type) :

- Chaque kg d'aliment **A** coûte 60 DA, contient 2 unités de vitamines et 5 unités de protéines.
- Chaque kg d'aliment **B** coûte 80 DA, contient 4 unités de vitamines et 3 unités de protéines.
- Les besoins minimaux journaliers par lot d'animaux sont de 40 unités de vitamines et 50 unités de protéines.

2. Modélisation pas à pas

- **Étape 1 : Définition des variables de décision** Le gestionnaire du complexe avicole doit déterminer la quantité de chaque aliment à intégrer dans la ration :
 - Soit X_1 : la quantité d'aliment **A** à acheter par jour (en kg).
 - Soit X_2 : la quantité d'aliment **B** à acheter par jour (en kg).
- **Étape 2 : Formulation de la fonction objectif** L'objectif économique est de minimiser le coût d'achat total (Z).

$$\text{Min } Z = 60 X_1 + 80 X_2$$

- **Étape 3 : Formulation des contraintes de couverture nutritionnelle** Les contraintes expriment le fait que l'apport en éléments nutritifs doit être *supérieur ou égal* ($\geq$) au seuil minimal biologique requis.

1. **Contrainte des Vitamines** : $2 X_1 + 4 X_2 \geq 40$

2. **Contrainte des Protéines** : $5 X_1 + 3 X_2 \geq 50$

- **Étape 4 : Contraintes de non-négativité**

$$X1 \geq 0, X2 \geq 0$$

Programme Linéaire Final (Exercice 1) :

$$\text{Min } Z = 60 X1 + 80 X2$$

Sous contraintes (S.C.) :

$$2 X1 + 4 X2 \geq 40 \quad (\text{Apport minimal en Vitamines})$$

$$5 X1 + 3 X2 \geq 50 \quad (\text{Apport minimal en Protéines})$$

$$X1, X2 \geq 0 \quad (\text{Non-négativité})$$

Exercice 2 : Problème de Placement Financier (Arbitrage)

1. Analyse textuelle et extraction des données

Dans ce problème, le gestionnaire cherche à maximiser le gain (rendement) tout en respectant des règles prudentielles de gestion des risques.

Considérons les paramètres financiers suivants :

- Le fonds total à investir est de **10 000 000 DA**.
- Les **Obligations d'État (O)** rapportent **5%** par an (placement sûr).
- Les **Actions privées (A)** rapportent **9%** par an (placement risqué).
- Contraintes réglementaires et de gouvernance :
 1. Pour limiter le risque global, le montant placé dans les actions privées ne doit pas dépasser 40% de l'investissement total.
 2. L'investisseur exige de placer au moins 3 000 000 DA dans les obligations d'État pour garantir une poche de liquidité sécurisée.

2. Modélisation pas à pas

- **Étape 1 : Définition des variables de décision** Le directeur financier doit décider de la répartition du capital :
 - Soit $X1$: le montant investi dans les obligations d'État (en DA).
 - Soit $X2$: le montant investi dans les actions privées (en DA).
- **Étape 2 : Formulation de la fonction objective** L'objectif est de maximiser le rendement financier annuel total (Z). Les coefficients représentent les taux de rendement :

$$\text{Max } Z = 0,05 X_1 + 0,09 X_2$$

- **Étape 3 : Formulation des contraintes de structure du portefeuille**

1. **Contrainte de budget (Capacité d'investissement) :** La somme des montants investis ne peut pas dépasser l'enveloppe globale de 10 000 000 DA.

$$X_1 + X_2 \leq 10000000$$

2. **Contrainte de risque (Plafond sur les actions) :** Le montant dans les actions (X_2) est limité à 40% du budget maximal,

$$\text{Soit } 0,40 \times 10000000 = 4000000 \text{ DA.}$$

$$X_2 \leq 4000000$$

3. **Contrainte de sécurité (Plancher sur les obligations) :** L'investissement dans les obligations (X_1) doit être d'au moins 3 000 000 DA.

$$X_1 \geq 3000000$$

- **Étape 4 : Contraintes de non-négativité**

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Programme Linéaire Final (Exercice 2) :

$$\text{Max } Z = 0,05 X_1 + 0,09 X_2$$

Sous contraintes (S.C.) :

$$X_1 + X_2 \leq 10000000 \text{ (Budget total disponible)}$$

$$X_2 \leq 4000000 \text{ (Limite de risque sur les actions)}$$

$$X_1 \geq 3000000 \text{ (Seuil minimal de sécurité - Obligations)}$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ (Non-négativité)}$$

Remarques :

Ces deux exercices permettent d'illustrer la dualité de la programmation linéaire en Master 1 :

- L'**Exercice 1** introduit l'étudiant aux structures de contraintes orientées vers le bas ($\geq$) avec un objectif de minimisation, ce qui sera idéal pour introduire plus tard les variables artificielles dans la méthode du Simplexe (méthode des deux phases ou du Grand M).
- L'**Exercice 2** manipule des variables aux échelles numériques plus élevées (millions), préparant l'étudiant à la gestion de données réelles d'entreprise et à l'importance de la définition des unités dans les rapports de gestion.

CHAPITRE 2 : LA MÉTHODE DE RÉOLUTION GRAPHIQUE DES PROGRAMMES LINÉAIRES

Objectifs du chapitre :

À la fin de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

1. Représenter graphiquement un demi-plan de contraintes et identifier la zone des solutions réalisables (polygone de décision).
2. Tracer la droite d'isoprofit (ou d'isocoût) et déterminer géométriquement le point optimal.
3. Maîtriser la méthode d'évaluation des sommets.
4. Identifier visuellement les cas particuliers (solutions multiples, non bornées ou impossibles).

1. Fondements Théoriques et Conditions d'Application

Bien que la majorité des problèmes managériaux réels impliquent des dizaines, voire des milliers de variables de décision, l'étude de la **résolution graphique** demeure une étape pédagogique cruciale en Master (Hillier & Lieberman, 2021). Elle permet aux étudiants de développer une intuition géométrique indispensable avant d'aborder les abstractions algébriques de l'algorithme du simplexe.

1.1. La restriction bidimensionnelle

Par construction, la méthode graphique est strictement limitée aux programmes linéaires ne comportant que **deux variables de décision (X1 et X2)**. Chaque variable est associée à un axe dans un repère cartésien orthogonal (généralement l'axe des abscisses pour X1 et l'axe des ordonnées pour X2).

1.2. L'espace des solutions réalisables (Le polygone de décision)

En programmation linéaire, chaque contrainte mathématique se traduit géométriquement par une droite frontière séparant l'espace en deux demi-plans (Render et al., 2018).

- Une contrainte de type inférieur ou égal ($\leq$) définit un demi-plan situé en dessous ou à gauche de la droite frontière.
- Une contrainte de type supérieur ou égal ($\geq$) définit un demi-plan situé au-dessus ou à droite de cette droite.

L'intersection de tous ces demi-plans, combinée avec le premier quadrant défini par les contraintes de non-négativité ($X1 \geq 0, X2 \geq 0$), forme une zone géométrique convexe appelée **l'espace des solutions réalisables** ou **polygone de décision** (Taha, 2017). Tout point (X1, X2) situé à l'intérieur ou sur la frontière de ce polygone respecte simultanément l'ensemble des restrictions de l'entreprise.

2. Algorithme de Résolution Graphique pas à pas

Pour résoudre graphiquement un programme linéaire, la démarche scientifique (Anderson et al., 2016) impose la séquence d'étapes suivante :

- **Étape 1** : Tracer le repère cartésien et imposer la zone d'étude au premier quadrant ($X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$).
- **Étape 2** : Convertir chaque inégalité de contrainte en égalité pour tracer les droites frontières, puis identifier le demi-plan valide pour chaque contrainte.
- **Étape 3** : Déterminer par intersection l'espace des solutions réalisables (le polygone) et identifier clairement ses sommets (points d'intersection).
- **Étape 4** : Identifier le point optimal en appliquant, au choix, l'une des deux méthodes reconnues :
 - **Méthode des droites d'isoprofit / d'isocoût** : On attribue une valeur arbitraire à Z pour tracer une première droite de profit, puis on la déplace parallèlement dans le sens de l'optimisation jusqu'au dernier point de contact avec le polygone.
 - **Méthode de l'évaluation des sommets** : Théoriquement, la solution optimale se trouve obligatoirement sur l'un des sommets extrêmes du polygone convexe. On calcule les coordonnées de chaque sommet et on évalue la fonction objectif Z en ces points.

3. Application Pratique : Résolution du Cas "Oran-Meubles"

Reprenons le modèle exact formulé lors du Chapitre 1:

$$\{\text{Max}\} Z = 4000 X_1 + 5000 X_2$$

S.C. :

- (1) $2 X_1 + 4 X_2 \leq 60$ (Menuiserie)
- (2) $3 X_1 + 2 X_2 \leq 48$ (Finition)
- (3) $X_2 \leq 12$ (Marché)
- (4) $X_1, X_2 \geq 0$ (Non-négativité)

Résolution Graphique Étape par Étape

1. Tracé des droites frontières des contraintes

Chaque droite se trace en identifiant ses deux points d'intersection avec les axes du repère.

- **Pour la contrainte (1) Menuiserie** : $2 X_1 + 4 X_2 = 60$
 - Si $X_1 = 0 \longrightarrow X_2 = 15$. Point A = (0, 15)

- Si $X_2 = 0 \longrightarrow X_1 = 30$. Point B = (30, 0)
- La zone valide est en dessous de la droite AB car le point origine (0,0) vérification : $2(0) + 4(0) = 0 \leq 60$ (Vrai).
- **Pour la contrainte (2) Finition : $3X_1 + 2X_2 = 48$**
 - Si $X_1 = 0 \longrightarrow X_2 = 24$. Point C = (0, 24)
 - Si $X_2 = 0 \longrightarrow X_1 = 16$. Point D = (16, 0)
 - La zone valide est en dessous de la droite CD.
- **Pour la contrainte (3) Marché : $X_2 = 12$**
 - Il s'agit d'une droite horizontale coupant l'axe des ordonnées à la valeur 12. La zone valide se situe en dessous.

2. Identification du Polygone des Solutions Réalisables

En croisant l'ensemble de ces zones restrictives dans le premier quadrant, nous obtenons un polygone fermé composé de 5 sommets principaux :

- **O** (0, 0) : L'origine.
- **H** (0, 12) : Limité par la contrainte de marché.
- **D** : Point d'intersection entre la contrainte de marché ($X_2 = 12$) et la Menuiserie ($2X_1 + 4X_2 = 60$).

En substituant $X_2 = 12$ dans (1) :

$$2X_1 + 4(12) = 60 \longrightarrow 2X_1 = 12 \longrightarrow X_1 = 6. \text{ Donc } D = (6, 12).$$

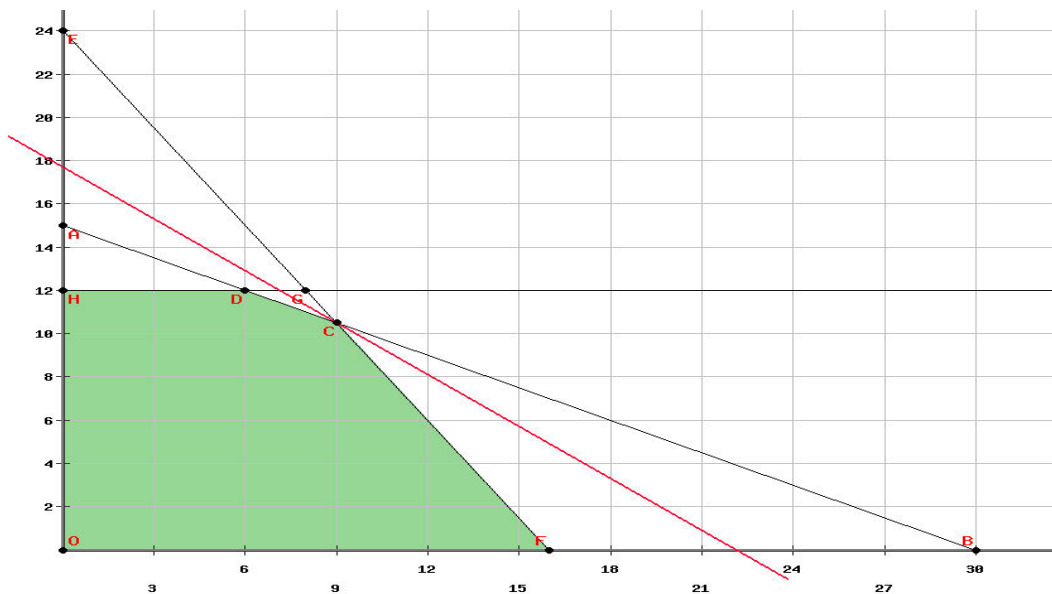
- **C** : Point d'intersection critique entre la Menuiserie et la Finition. Il s'obtient en résolvant le système d'équations :

$$2X_1 + 4X_2 = 60$$

$$3X_1 + 2X_2 = 48$$

Par multiplication de la deuxième ligne par 2 : $6X_1 + 4X_2 = 96$. En soustrayant la première ligne : $4X_1 = 36 \longrightarrow X_1 = 9$. En remplaçant X_1 , on trouve $X_2 = 10,5$.
Donc G = (9 ; 10,5).

- **F** (16, 0) : Limité par l'axe horizontal et la Finition.



3. Évaluation du Profit aux Sommets (Recherche de l'Optimum)

Appliquons la règle d'or d'évaluation des sommets (Faulin & Juan, 2014) pour découvrir le plan de production optimal :

Sommets	Coordonnées (X1 ; X2)	Calcul du profit : $Z=4000X1+5000X2$	Résultat du Profit (Z)
Sommet O	(0 ; 0)	$4000(0) + 5000(0)$	0 DA
Sommet H	(0 ; 12)	$4000(0) + 5000(12)$	60 000 DA
Sommet D	(6 ; 12)	$4000(6) + 5000(12) = 24000 + 60000$	84 000 DA
Sommet C	(9 ; 10,5)	$4000(9) + 5000(10,5) = 36000 + 52500$	88 500 DA
Sommet F	(16 ; 0)	$4000(16) + 5000(0)$	64 000 DA

Conclusion et Interprétation Managériale

Le profit maximal s'élève à **88 500 DA par semaine**. Pour l'atteindre, le manager d'Oran-Meubles doit valider un plan de charge de **9 Bureaux Standard (X1)** et **10,5 Bureaux Premium (X2)**.

Remarque managériale : Le fait d'obtenir un nombre décimal (10,5) nécessitera l'introduction future de la programmation linéaire en variables mixtes ou en nombres entiers (PLNE), une nuance technique importante à rappeler aux étudiants de Master.

4. Les Cas Particuliers de la Résolution Graphique

L'analyse de sensibilité graphique permet de mettre en lumière trois anomalies structurelles fondamentales de la modélisation (Taha, 2017) :

1. **Les solutions optimales multiples** : Cela se produit lorsque la droite d'isoprofit est strictement parallèle à l'une des droites de contraintes saturées. Tous les points situés sur le segment reliant deux sommets optimaux procurent alors le même profit maximal.
2. **L'absence de solution réalisable (Incompatibilité)** : Si les contraintes s'excluent mutuellement (ex: produire plus que la capacité machine disponible), le polygone de décision est totalement vide. Le problème n'a pas de solution.
3. **La solution non bornée** : Dans certains cas de mauvaise modélisation, l'espace des solutions est ouvert à l'infini dans le sens de l'optimisation. Le profit théorique devient infini, ce qui trahit une erreur d'omission d'une contrainte de ressource majeure par le gestionnaire.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 1 : Le cas des solutions optimales multiples

Énoncé du problème

Une entreprise de l'Ouest algérien spécialisée dans la menuiserie industrielle assemble deux modèles de portes en bois : le modèle **Standard (X1)** et le modèle **Stylisé (X2)**. La marge bénéficiaire est de **3 000 DA** pour une porte Standard et de **6 000 DA** pour une porte Stylisée.

Le processus de production est soumis aux trois contraintes de ressources hebdomadaires suivantes :

1. **Atelier Découpe** : $X1 + 2 X2 \leq 20$ heures
2. **Atelier Assemblage** : $X1 \leq 12$ heures
3. **Atelier Finition** : $X2 \leq 8$ heures

Travail demandé :

1. Formuler le programme linéaire de maximisation du profit.
2. Résoudre le problème par la méthode graphique et mettre en évidence la particularité de la solution.

Corrigé détaillé de l'Exercice 1

1. Formulation du Programme Linéaire

- **Variables** : $X1$ = nombre de portes Standard ; $X2$ = nombre de portes Stylisées.
- **Objectif** : $\{\text{Max}\} Z = 3000 X1 + 6000 X2$
- **Contraintes** :

$$(1) X1 + 2 X2 \leq 20 \text{ (Découpe)}$$

$$(2) X1 \leq 12 \quad (\text{Assemblage})$$

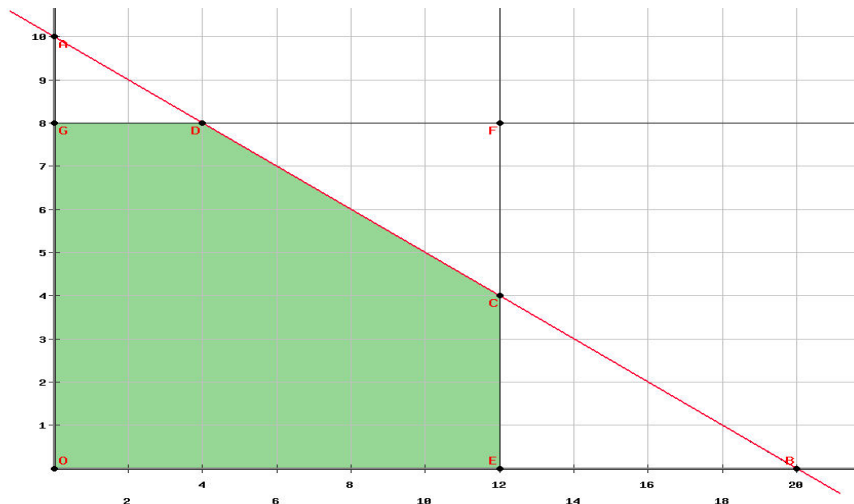
$$(3) X2 \leq 8 \quad (\text{Finition})$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad (\text{Non-négativité})$$

2. Résolution graphique et identification des sommets

Traçons les droites frontières dans le premier quadrant :

- **(D1) Découpe** : $X_1 + 2 X_2 = 20$ passe par (20, 0) et (0, 10).
- **(D2) Assemblage** : $X_1 = 12$ droite verticale.
- **(D3) Finition** : $X_2 = 8$ droite horizontale.



L'intersection de ces contraintes définit un polygone des solutions réalisables avec les sommets suivants :

- **O** (0,0)
- **G** (0, 8) [limité par la Finition $X_2 = 8$]
- **D** : Intersection de la Finition ($X_2 = 8$) et de la Découpe ($X_1 + 2 X_2 = 20$). En substituant, on trouve $X_1 + 16 = 20$ $X_1 = 4$. Donc **B** = **(4, 8)**.
- **C** : Intersection de l'Assemblage ($X_1 = 12$) et de la Découpe ($X_1 + 2 X_2 = 20$). En substituant, on trouve $12 + 2 X_2 = 20$ $2 X_2 = 8$ $X_2 = 4$. Donc **C** = **(12, 4)**.
- **E** (12, 0) [limité par l'Assemblage]

3. Évaluation de la fonction objectif aux sommets

Sommets	Coordonnées (X1,X2)	Calcul du Profit ($Z=3000X_1+6000X_2$)
Sommet O	(0, 0)	$3000(0) + 6000(0) = 0$ DA
Sommet G	(0, 8)	$3000(0) + 6000(8) = 48000$ DA
Sommet D	(4, 8)	$3000(4) + 6000(8) = 12000 + 48000 = 60000$ DA

Sommet C	(12, 4)	$3000(12) + 6000(4) = 36000 + 24000 = 60000$ DA
Sommet E	(12, 0)	$3000(12) + 6000(0) = 36000$ DA

Interprétation Managériale

Nous constatons que **le sommet B et le sommet C procurent exactement le même profit maximal de 60 000 DA.**

Sur le plan géométrique, cela s'explique par le fait que la pente de la fonction objectif ($-3000/6000 = -0,5$) est strictement égale à la pente de la contrainte de Découpe ($-1/2 = -0,5$).

Conclusion : Le problème admet une **infinité de solutions optimales**. Tout plan de production situé sur le segment de droite [BC] reliant le point (4, 8) au point (12, 4) est optimal. Par exemple, le point milieu (8, 6) est également une solution réalisable donnant un profit de : $3000(8) + 6000(6) = 60000$ DA. Le manager dispose d'une flexibilité totale pour choisir la combinaison qui l'arrange selon d'autres critères qualitatifs.

EXERCICE 2 : Le cas de l'absence de solution réalisable (Incompatibilité)

Énoncé du problème

Le responsable d'une unité de raffinage cherche à planifier la production de deux essences légères (X1 et X2). Pour des raisons de rentabilité économique globale et d'engagements contractuels nationaux, la direction générale lui impose des objectifs contradictoires.

Le modèle soumis est le suivant :

$$\{\text{Max}\} Z = 2000 X1 + 3000 X2$$

Sous contraintes (S.C.) :

$$(1) 2 X1 + 2 X2 \leq 8 \quad (\text{Disponibilité d'un additif chimique rare en kilolitres})$$

$$(2) X1 + X2 \geq 6 \quad (\text{Seuil contractuel minimum de livraison globale})$$

$$X1, X2 \geq 0 \quad (\text{Non-négativité})$$

Travail demandé :

Démontrer par la méthode graphique pourquoi ce programme linéaire ne possède aucune solution optimale.

Corrigé détaillé de l'Exercice 2

1. Analyse géométrique des contraintes

- **Analyse de la contrainte (1) - Limite d'additif :** La droite frontière associée est $2X_1 + 2X_2 = 8$, ce qui équivaut après simplification à $X_1 + X_2 = 4$. Cette droite passe par les points (4, 0) et (0, 4).

La contrainte étant de type inférieur ou égal ($\leq$), le demi-plan admissible est orienté **vers l'origine (0,0)**. C'est la zone située en dessous de la droite.

- **Analyse de la contrainte (2) - Engagement de livraison :** La droite frontière associée est $X_1 + X_2 = 6$. Cette droite passe par les points (6, 0) et (0, 6).

La contrainte étant de type supérieur ou égal ($\geq$), le demi-plan admissible est orienté **à l'opposé de l'origine (0,0)**. C'est la zone située au-dessus de cette deuxième droite.

2. Évaluation de l'espace des solutions réalisables

Pour qu'une solution existe, il faut trouver une zone géométrique où les deux demi-plans se superposent dans le premier quadrant.

Or, si l'on observe la disposition des deux droites frontières, elles sont strictement parallèles car elles ont la même pente (-1).

- La contrainte (1) exige que la production totale soit inférieure ou égale à 4 unités ($X_1 + X_2 \leq 4$).
- La contrainte (2) exige que la production totale soit supérieure ou égale à 6 unités ($X_1 + X_2 \geq 6$).

Interprétation Managériale

Il est mathématiquement et physiquement impossible de trouver un couple (X_1, X_2) capable de satisfaire ces deux conditions simultanément. L'espace des solutions réalisables est un **ensemble vide**.

Conclusion : Le problème présente une **absence de solution réalisable**. En management, ce cas d'école révèle une erreur de planification stratégique ou un conflit d'objectifs

opérationnels. Le manager doit impérativement renégocier les contrats de livraison à la baisse (ramener le seuil en dessous de 4) ou trouver de nouvelles sources d'approvisionnement pour augmenter la disponibilité de l'additif chimique.

CHAPITRE 3 : L'ALGORITHME DU SIMPLEXE – FONDEMENTS ALGÈBRIQUES ET RÉOLUTION DES MODÈLES MULTI-VARIABLES

Objectifs du chapitre :

À la fin de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

1. Comprendre les limites conceptuelles et pratiques de la résolution graphique.
2. Convertir un programme linéaire de la forme canonique vers la forme standard en introduisant les variables d'écart.
3. Maîtriser la transition géométrique entre les sommets d'un polygone et les solutions de base réalisables.
4. Construire et interpréter le tableau initial du Simplexe.

1. Introduction : La nécessité d'un changement de paradigme

Au cours du chapitre précédent, la méthode graphique nous a permis de poser des bases visuelles solides et de comprendre l'architecture intime d'un problème d'optimisation : l'existence d'un espace convexe (le polygone de décision) et la convergence systématique de la solution optimale vers l'un des sommets de cet espace (Render et al., 2018). Cependant, cette approche se heurte immédiatement à une frontière physique incontournable : la géométrie bidimensionnelle.

Dans la réalité managériale d'une entreprise — qu'il s'agisse de la planification d'une gamme de production, de la gestion de portefeuilles d'actifs financiers ou de la modélisation de réseaux logistiques complexes —, le nombre de variables de décision (n) dépasse presque toujours le cadre de deux produits. Dès que $n \geq 3$, la représentation visuelle exige un espace à trois dimensions (gérable mais complexe), et dès que $n > 3$, l'esprit humain perd toute capacité de représentation géométrique dans des hyperplans (Hillier & Lieberman, 2021).

Il devenait donc impératif de concevoir une méthode capable de s'affranchir de la géométrie tout en conservant sa logique d'exploration. C'est précisément l'objet de l'algorithme du Simplexe, développé en 1947 par le mathématicien américain George Dantzig (Taha, 2017). Le Simplexe est une méthode itérative purement algébrique qui permet de résoudre des programmes linéaires comportant des milliers de variables et de contraintes.

2. De la Géométrie à l'Algèbre : Le principe d'exploration du Simplexe

L'algorithme du Simplexe ne renie pas la méthode graphique ; il la traduit en langage matriciel et algébrique. Pour comprendre comment s'opère ce basculement de paradigme, il convient de comparer les concepts des deux méthodes :

Approche Géométrique (Chapitre 2)	Approche Algébrique / Simplexe (Chapitre 3)
Espace des solutions réalisables	Système d'équations linéaires sous-déterminé
Contraintes (Inéquations $\leq$ ou $\geq$)	Équations strictes ($=$) grâce aux variables d'écart
Sommet extrême du polygone	Solution de Base Réalisable (SBR)
Déplacement le long d'une arête	Pivotage algébrique (Changement de base)

2.1. La logique itérative du Simplexe

Plutôt que d'évaluer de manière exhaustive toutes les solutions possibles, ce qui s'avérerait numériquement lourd pour de grands modèles, le Simplexe applique une stratégie de recherche locale extrêmement efficace (Anderson et al., 2016) :

1. **Initialisation** : Il commence par identifier une première Solution de Base Réalisable triviale, correspondant généralement à l'origine géométrique (le point O (0,0,...,0) où l'entreprise ne produit rien).
2. **Test d'optimalité** : L'algorithme examine algébriquement (via la ligne de la fonction objectif) si le déplacement vers un sommet voisin peut améliorer la valeur de Z (augmenter le profit ou diminuer le coût).
3. **Pivotage (Déplacement)** : Si une amélioration est possible, l'algorithme effectue un changement de base — une opération algébrique équivalente à un déplacement le long d'une arête du polygone — pour atteindre un nouveau sommet plus performant.
4. **Convergence** : Le processus se répète de sommet en sommet jusqu'à ce qu'aucun sommet voisin n'offre de meilleur rendement. Le théorème fondamental de la programmation linéaire garantit alors que l'optimum local atteint est un optimum global.

3. La condition préalable : Le passage à la Forme Standard

Pour appliquer les outils de l'algèbre linéaire (comme l'élimination de Gauss-Jordan) qui sous-tendent le Simplexe, il est obligatoire de transformer les inéquations des contraintes en équations strictes. C'est l'étape de la mise sous forme standard (Faulin & Juan, 2014).

Cette transition s'effectue par l'introduction de variables mathématiques muettes appelées variables d'écart (notées généralement e_i). D'un point de vue managérial, ces variables possèdent une signification économique cruciale : elles mesurent la quantité de ressource non utilisée ou laissée en chômage dans chaque atelier.

- **Exemple** : La contrainte de l'atelier Menuiserie d'Oran-Meubles s'écrivait :

$$2 X_1 + 4 X_2 \leq 60 \text{ heures}$$

- **En forme standard, elle devient une égalité stricte :**

$$2 X_1 + 4 X_2 + e_1 = 60$$

Où $e_1 \geq 0$ représente le nombre d'heures inutilisées dans l'atelier Menuiserie. Si la solution finale donne $e_1 = 5$, cela signifiera que sur les 60 heures disponibles, 55 heures ont été consommées et 5 heures sont restées inactives.

C'est sur cette algébrisation systématique des contraintes que s'ouvre le cœur algorithmique de la recherche opérationnelle, que nous allons formaliser à travers la construction et la manipulation des tableaux du Simplexe.

3.1. Les caractéristiques de la Forme Standard

Pour qu'un programme linéaire puisse être traité par l'algorithme du Simplexe, il doit impérativement être converti sous sa forme standard. Alors que la forme canonique (utilisée pour la formulation et la méthode graphique) s'exprime à l'aide d'inéquations ($\leq$ ou $\geq$), la forme standard exige un système d'équations strictes ($=$), à l'exception des contraintes de non-négativité qui restent inchangées (Hillier & Lieberman, 2021). Un programme linéaire est dit sous forme standard si et seulement s'il respecte les trois conditions axiomatiques suivantes (Taha, 2017) :

- Toutes les contraintes technico-économiques sont des égalités strictes, à l'exception des contraintes de non-négativité des variables.
- Les seconds membres (les termes constants du côté droit de l'égalité, notés b_i) sont tous positifs ou nuls ($b_i \geq 0$). Si un second membre est négatif, il faut multiplier toute la ligne de la contrainte par -1 (ce qui inverse le sens de l'inégalité originelle) avant d'opérer la conversion.
- Toutes les variables de décision et variables additionnelles sont strictement non négatives ($X_i \geq 0$).

3.2. Les règles de conversion et d'introduction des variables additionnelles

Pour transformer les inégalités en égalités, l'algèbre linéaire introduit deux types de variables muettes, qui possèdent une interprétation économique très précise en management (Render et al., 2018).

- **Règle 1 : Les contraintes de type "inférieur ou égal" ($\leq$)** Ces contraintes représentent généralement des plafonds de ressources (capacité machine, budget, matières premières). Pour équilibrer l'inéquation et la transformer en équation, il faut ajouter une variable positive appelée variable d'écart (notée e_i).

$$\text{Si } \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + e_i = b_i \quad (\text{avec } e_i \geq 0)$$

Sens managérial : La variable d'écart e_i représente la ressource inutilisée (le chômage d'une machine, le budget non dépensé ou le stock résiduel).

- **Règle 2 : Les contraintes de type "supérieur ou égal" ($\geq$)** Ces contraintes expriment souvent des exigences minimales (objectifs de vente, seuils nutritionnels, normes de sécurité). Pour équilibrer l'inéquation, il faut soustraire une variable positive appelée variable de surplus (notée également e_i ou s_i).

$$\text{Si } \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \geq b_i \iff \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j - e_i = b_i \quad (\text{avec } e_i \geq 0)$$

Sens managérial : La variable de surplus e_i représente l'excédent produit au-delà du seuil minimal obligatoire.

- **Règle 3 : Impact sur la fonction objectif** Les variables d'écart ou de surplus n'apportent aucune valeur économique directe au profit ou au coût de l'entreprise. Elles sont donc introduites dans la fonction objectif avec un coefficient égal à zéro (0).

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j + 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_m$$

3.3. Exemples Pratiques de Conversion

Pour ancrer ces règles, étudions deux exemples de complexité progressive.

Exemple 1 : Modèle de Maximisation classique (Le cas "Oran-Meubles")

Reprenons le modèle initial à deux variables formulé au Chapitre 1 :

$$\text{Max } Z = 4000 X_1 + 5000 X_2$$

S.C. :

$$2 X_1 + 4 X_2 \leq 60 \quad (\text{Menuiserie})$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 48 \quad (\text{Finition})$$

$$X_2 \leq 12 \quad (\text{Marché})$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Mise sous Forme Standard : Nous avons trois contraintes de type $\leq$. Nous introduisons donc trois variables d'écart (e_1, e_2, e_3) :

$$\text{Max } Z = 4000 X_1 + 5000 X_2 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

S.C. :

$$2 X_1 + 4 X_2 + e_1 = 60$$

$$3 X_1 + 2 X_2 + e_2 = 48$$

$$X_2 + e_3 = 12$$

$$X_1, X_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0$$

Le système est désormais prêt à être injecté dans le premier tableau du Simplexe. Nous disposons d'un système de 3 équations à 5 inconnues.

Exemple 2 : Modèle Mixte avec Second Membre Négatif (Cas Avancé)

Soit le programme linéaire brut suivant, présentant des anomalies structurelles :

$$\text{Min } Z = 3 X_1 + 5 X_2 - 2 X_3$$

S.C. :

$$(1) 4 X_1 - X_2 + 2 X_3 \leq 15$$

$$(2) -X_1 + 3 X_2 + X_3 \geq -6 \leftarrow (\text{Second membre négatif})$$

$$(3) 2 X_1 + X_2 \geq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Étapes de conversion systématique :

1. Correction de la contrainte (2) : On multiplie toute la ligne par -1 pour rendre le second membre positif, ce qui donne : $X_1 - 3 X_2 - X_3 \leq 6$.

2. Application des règles d'écart et de surplus :

- La contrainte (1) est un $\leq \Rightarrow$ on ajoute l'écart e_1 .
- La contrainte (2) corrigée est un $\leq \Rightarrow$ on ajoute l'écart e_2 .
- La contrainte (3) est un $\geq \Rightarrow$ on soustrait le surplus e_3 .

Forme Standard Finale (Exemple 2) :

$$\text{Min } Z = 3 X_1 + 5 X_2 - 2 X_3 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

S.C. :

$$4 X_1 - X_2 + 2 X_3 + e_1 = 15$$

$$X_1 - 3 X_2 - X_3 + e_2 = 6$$

$$2X_1 + X_2 - e_3 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0$$

4. Construction et Structure du Tableau Initial du Simplexe (Dictionnaire de Base)

Une fois le programme linéaire converti sous forme standard, nous obtenons un système d'équations linéaires généralement sous-déterminé (le nombre d'inconnues n est supérieur au nombre d'équations m). Pour amorcer la résolution algébrique, l'algorithme du Simplexe structure ces équations sous la forme d'un tableau matriciel dynamique ou "dictionnaire de base" (Hillier & Lieberman, 2021).

4.1. Le concept de Base et de Variables Hors-Base

Pour trouver une première solution de départ (dite solution initiale), le Simplexe sépare arbitrairement les variables en deux groupes distincts (Taha, 2017) :

- **Les variables Hors-Base (HB) :** Ce sont les variables auxquelles on attribue volontairement la valeur zéro (0) pour simplifier le système. Au départ, ce sont les variables de décision initiales (X_j). Le nombre de variables hors-base est égal à $n - m$.
- **Les variables en Base (B) :** Ce sont les variables conservées dans le système d'équations dont on va calculer la valeur. Au départ, ce sont les variables d'écart (e_i). Elles forment la matrice identité de départ.

À l'état initial, le manager choisit la solution de facilité : ne rien produire. Si $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$ (variables hors-base), alors les contraintes se réduisent immédiatement à : $e_1 = b_1$, $e_2 = b_2$,

etc. C'est la Solution de Base Réalisable (SBR) initiale. Géométriquement, cela correspond au sommet de l'origine O (0,0) du polygone.

4.2. Architecture standard du Tableau du Simplexe

Le tableau du Simplexe centralise l'intégralité des coefficients du modèle standardisé. Bien que des variantes de présentation existent dans la littérature, la structure académique la plus répandue (Render et al., 2018) s'organise ainsi :

Base	X1	X2	...	e1	e2	...	Variables (Second Membre bi)	Ratio (Test)
e1	a11	a12	...	1	0	...	b1	b1/a1j
e2	a21	a22	...	0	1	...	b2	b2/a2j
...	...	...	...	...	...	...	...	...
Z	-C1	-C2	...	0	0	...	0	

Lecture des composants du tableau :

- **La colonne "Base" :** Liste les variables qui font actuellement partie de la base (celles qui ont une valeur positive).
- **Le corps de la matrice (aij) :** Contient les coefficients techniques des variables. On y distingue parfaitement la matrice identité (diagonale de 1) sous les variables d'écart.
- **La colonne du Second Membre (bi) :** Indique la valeur actuelle des variables en base.
- **La ligne Z (Ligne économique) :** Représente les coefficients de la fonction objectif. Dans la méthode de maximisation standard, on y inscrit les coûts réduits, souvent représentés par les valeurs de l'objectif inversées ($-C_j$), permettant de repérer d'un coup d'œil l'opportunité d'amélioration du profit.

4.3. Application : Le Tableau Initial du Cas "Oran-Meubles"

Mettons en pratique cette structure en construisant le tableau de départ à partir de la forme standard développée précédemment ($\text{Max } Z = 4000 X_1 + 5000 X_2$).

- Variables Hors-Base (HB) : $X_1 = 0$, $X_2 = 0$
- Variables en Base (B) : e1 (Menuiserie), e2 (Finition), e3 (Marché)

Construction du Tableau 0 :

Base	X1	X2	e1	e2	e3	Second Membre (bi)
e1	2	4	1	0	0	60
e2	3	2	0	1	0	48
e3	0	1	0	0	1	12
Z	-4 000	-5 000	0	0	0	0

Analyse et Interprétation Managériale du Tableau Initial :

- **Lecture de la solution actuelle :** La base nous indique que $e1 = 60$, $e2 = 48$ et $e3 = 12$. Les variables d'action X1 et X2 n'étant pas dans la colonne "Base", leur valeur est nulle ($X1 = 0$, $X2 = 0$). Le profit actuel inscrit à l'intersection de la ligne Z et de la colonne du second membre est de 0 DA.
- **Signification économique :** L'entreprise est à l'arrêt. Elle n'a fabriqué aucun meuble. Par conséquent, l'intégralité de ses ressources est inutilisée : il reste 60 heures de potentiel en Menuiserie (e1), 48 heures en Finition (e2), et la marge de marché est intacte à 12 unités (e3).
- **Test d'optimalité :** La solution est-elle optimale ? Non. Dans un problème de maximisation, la présence de valeurs négatives sur la ligne Z (ici -4000 et -5000) indique qu'introduire la production de ces articles augmentera mathématiquement le profit global. L'algorithme devra déterminer à l'étape suivante quelle variable intégrer en base (la variable entrante) pour entamer son voyage vers l'optimum.

5. Les Règles de Transition : Pivotage, Variable Entrante et Variable Sortante

Le passage d'un tableau du Simplexe au suivant correspond géométriquement au déplacement d'un sommet du polygone de décision vers un sommet voisin plus avantageux (Anderson et al., 2016). Pour effectuer ce déplacement de manière rigoureuse, l'algorithme applique des règles mathématiques strictes afin de déterminer quelle variable doit intégrer la base (la variable entrante), quelle variable doit en sortir (la variable sortante), et quel élément numérique servira de levier pour la transformation algébrique (le pivot).

5.1. Règle de sélection de la Variable Entrante (Critère d'optimalité)

La variable entrante est une variable actuellement Hors-Base (valeur nulle) que l'on décide de rendre active (valeur positive) car elle possède le plus fort potentiel d'amélioration de la fonction objectif Z (Taha, 2017).

- **Dans un problème de Maximisation** : On examine la dernière ligne (ligne Z). La variable entrante est celle qui possède la valeur négative la plus grande en valeur absolue (le coût réduit le plus négatif).
 - **Dans un problème de Minimisation** : À l'inverse, si la ligne Z est construite sous forme de coûts, la variable entrante est celle qui présente la valeur positive la plus élevée.
- **Choix de la colonne** : La colonne correspondant à cette variable est appelée **colonne pivot**.

5.2. Règle de sélection de la Variable Sortante (Critère de réalisabilité)

L'augmentation de la valeur de la variable entrante est limitée par les contraintes de ressources de l'entreprise. Pour ne pas violer ces restrictions et risquer de sortir de l'espace des solutions réalisables, l'algorithme effectue le test des ratios minimaux (Render et al., 2018).

Pour chaque ligne du tableau (à l'exclusion de la ligne Z), on calcule le rapport suivant :

Ratio = Coefficient strictement positif sur la colonne pivot (a_{ij}) Valeur du Second Membre (b_i)

- **Règle d'or** : La variable sortante est celle qui correspond au ratio strictement positif le plus petit.
 - **Attention** : Les coefficients de la colonne pivot qui sont négatifs ou nuls (≤ 0) sont ignorés pour ce calcul, car ils n'imposent aucune limite supérieure à l'augmentation de la variable entrante.
- **Choix de la ligne** : La ligne correspondant à ce ratio minimal est appelée **ligne pivot**. Elle désigne la ressource critique qui sera saturée en premier.

5.3. Détermination du Pivot et opérations de Gauss-Jordan

- **Le Pivot** : C'est le nombre situé à l'intersection exacte de la colonne pivot et de la ligne pivot. Il est l'élément central de l'itération.
- **Le Pivotage (Transformation matricielle)** : Le but du pivotage est de transformer la colonne pivot pour qu'elle devienne un vecteur unitaire de la nouvelle base (contenant un 1 à l'emplacement du pivot et des 0 partout ailleurs sur la colonne). On applique pour cela la méthode d'élimination de Gauss-Jordan (Hillier & Lieberman, 2021) :
 - **Nouvelle ligne pivot** : On divise tous les éléments de la ligne pivot par la valeur du pivot lui-même afin d'obtenir un 1 à sa place.
 - **Autres lignes (y compris la ligne Z)** : Pour toutes les autres lignes L_k , la transformation s'opère selon la formule :

$$L_k \text{ (nouvelle)} = L_k \text{ (ancienne)} - [\text{Coefficient sur la colonne pivot} \times \text{Nouvelle ligne pivot}]$$

5.4. Application Étape par Étape sur le Tableau Initial "Oran-Meubles"

Reprenons le tableau de départ établi à la section précédente pour exécuter la première itération.

Étape 1 : Recherche de la variable entrante Sur la ligne Z, les coûts réduits sont -4000 (pour X_1) et -5000 (pour X_2). La valeur la plus négative est -5000 .

- Variable entrante : X_2 (La production de Bureaux Premium entre en base).
- La colonne de X_2 devient la colonne pivot.

Étape 2 : Recherche de la variable sortante (Test des ratios) Calculons les ratios entre la colonne du Second Membre et la colonne pivot (X_2) :

- Ligne e1 (Menuiserie) : Ratio = $60/4 = 15$
- Ligne e2 (Finition) : Ratio = $48/2 = 24$
- Ligne e3 (Marché) : Ratio = $12/1 = 12$

Le ratio strictement positif le plus petit est 12, associé à la ligne de la variable e3.

- Variable sortante : e3 (La contrainte de marché est saturée, e3 quitte la base).
- La ligne de e3 devient la ligne pivot.

Étape 3 : Identification du Pivot L'élément à l'intersection de la colonne X2 et de la ligne e3 est 1.

- Pivot = 1

Tableau Initial mis en relief avant pivotage :

Base	X1	(X2)	e1	e2	e3	Second Membre (bi)
e1	2	4	1	0	0	60 (Ratio = 15)
e2	3	2	0	1	0	48 (Ratio = 24)
[e3]	0	[1]*	0	0	1	12 (Ratio = 12 -> Min)
Z	-4 000	-5 000	0	0	0	0

* [1] indique la position du Pivot.

Le tableau est désormais prêt pour l'application des formules de Gauss-Jordan, qui donneront naissance au Tableau 1, marquant le premier pas vers l'optimisation du profit de l'unité de production.

6. Exécution des Calculs de Pivotage et Construction du Tableau 1

À partir des éléments identifiés lors de l'étape précédente sur le Tableau Initial du cas « Oran-Meubles » :

- Variable entrante : X2 (colonne pivot)
- Variable sortante : e3 (ligne pivot)
- Pivot : 1 (situé à l'intersection de la ligne e3 et de la colonne X2)

Nous allons appliquer les règles de l'élimination de Gauss-Jordan pour recalculer l'intégralité des lignes et générer le premier tableau intermédiaire du Simplexe (Hillier & Lieberman, 2021).

6.1. Détail algébrique des opérations de ligne

- **Étape 1 : Recalcul de la ligne pivot (Ligne de la variable entrante)** La règle stipule que la nouvelle ligne pivot s'obtient en divisant l'ancienne ligne par le pivot. Le pivot étant égal à 1, la ligne reste numériquement inchangée, mais la variable en base e3 est remplacée par la variable entrante X2.
 - Nouvelle Ligne X2 = Ancienne Ligne e3 / 1
 - Coefficients : [0100112]
- **Étape 2 : Recalcul de la ligne e1 (Atelier Menuiserie)** Pour éliminer le coefficient 4 situé sur la colonne pivot de cette ligne, la formule est :

$$\text{Nouvelle Ligne e1} = \text{Ancienne Ligne e1} - (4 \times \text{Nouvelle Ligne X2})$$

Calcul détaillé par colonne :

- X1: $2 - (4 \times 0) = 2$
 - X2: $4 - (4 \times 1) = 0$ (Le zéro recherché)
 - e1: $1 - (4 \times 0) = 1$
 - e2: $0 - (4 \times 0) = 0$
 - e3: $0 - (4 \times 1) = -4$
 - Second Membre (b1) : $60 - (4 \times 12) = 60 - 48 = 12$
 - Nouvelle Ligne e1 : [2 0 1 0 -4 12]
- **Étape 3 : Recalcul de la ligne e2 (Atelier Finition)** Pour éliminer le coefficient 2 situé sur la colonne pivot de cette ligne, la formule est :

$$\text{Nouvelle Ligne e2} = \text{Ancienne Ligne e2} - (2 \times \text{Nouvelle Ligne X2})$$

Calcul détaillé par colonne :

- X1 : $3 - (2 \times 0) = 3$
 - X2 : $2 - (2 \times 1) = 0$ (Le zéro recherché)
 - e1 : $0 - (2 \times 0) = 0$
 - e2 : $1 - (2 \times 0) = 1$
 - e3 : $0 - (2 \times 1) = -2$
 - Second Membre (b2) : $48 - (2 \times 12) = 48 - 24 = 24$
 - Nouvelle Ligne e2 : [3 0 0 1 -2 24]
- **Étape 4 : Recalcul de la ligne économique Z (Profit)** Pour éliminer le coefficient -5000 situé sur la colonne pivot de la fonction objectif, la formule est :

Nouvelle Ligne Z=Ancienne Ligne Z-(-5000×Nouvelle Ligne X2)

Nouvelle Ligne Z=Ancienne Ligne Z+(5000×Nouvelle Ligne X2)

Calcul détaillé par colonne :

- $X1: -4000 + (5000 \times 0) = -4000$
- $X2: -5000 + (5000 \times 1) = 0$ (Le zéro recherché)
- $e1: 0 + (5000 \times 0) = 0$
- $e2: 0 + (5000 \times 0) = 0$
- $e3: 0 + (5000 \times 1) = 5000$
- Second Membre (Z) : $0 + (5000 \times 12) = 60000$
- Nouvelle Ligne Z : [-4000 0 0 0 5000 60000]

6.2. Structure et Lecture du Tableau 1

En rassemblant l'ensemble de ces nouveaux vecteurs de coefficients, nous obtenons le Tableau 1 :

Base	X1	X2	e1	e2	e3	Second Membre (bi)
e1	2	0	1	0	-4	12
e2	3	0	0	1	-2	24
X2	0	1	0	0	1	12
Z	-4 000	0	0	0	5 000	60 000

Analyse et Interprétation Économique du Tableau 1 :

- **Lecture de la Solution de Base Réalisable actuelle :** Les variables présentes en base indiquent les valeurs suivantes : $e1=12$, $e2=24$, et $X2=12$. La variable $X1$ ainsi que la variable d'écart $e3$ ne figurant pas dans la colonne "Base", leurs valeurs sont nulles ($X1=0$, $e3=0$). Le profit de l'entreprise a bondi de 0 DA à 60 000 DA.
- **Signification Managériale :** Le manager a mis en œuvre un plan de production partiel. L'entreprise produit désormais 12 Bureaux Premium ($X2$) et aucun Bureau Standard ($X1$).

- Le fait que $e_3=0$ indique que la contrainte commerciale du marché est pleinement saturée (on a produit le maximum des 12 unités exigées par le marché pour la gamme Premium).
- Il reste des ressources disponibles : 12 heures non consommées à l'atelier Menuiserie ($e_1=12$) et 24 heures encore inactives à l'atelier Finition ($e_2=24$).
- **Nouveau Test d'Optimalité** : Le système a-t-il convergé vers la solution parfaite ? Non. En observant attentivement la ligne Z, nous détectons encore une valeur négative : le coefficient -4000 adossé à la colonne X1. Cela prouve qu'il est économiquement avantageux d'amorcer la fabrication de Bureaux Standard (X1) pour valoriser les heures encore disponibles en Menuiserie et en Finition (Taha, 2017).

Une deuxième itération s'impose. La colonne X1 deviendra la nouvelle colonne pivot du tableau suivant.

7. la méthode du simplexe en résumé :

L'algorithme du simplexe est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été introduit par **George Dantzig** à partir de 1947.

خوارزمية السامبلكس تستعمل للبحث عن الحلول المثالية ، وضعت لأول مرة من طرف جورج دانتيك سنة 1947.

Les différentes formes de programme :

Pour résoudre un problème linéaire, il faut passer par trois types de forme d'écriture à savoir :

- La forme canonique
- La forme standard
- La forme matricielle

1. La forme canonique : الكتابة الخوارزمية أو الرياضية أو القانونية

Pour écrire un problème linéaire sous sa forme canonique il faut respecter deux conditions :

1. La fonction objective doit être maximisée
2. Les contraintes économiques sont des inéquations de type $\leq$

Exp 1 :	
<p>[MAX] $Z = 2x + 3y$</p> <p>S.C $x - y \leq 4$ $x + 2y \leq 6$ $x \geq 0, y \geq 0$</p>	Ce type de problème respecte les deux conditions, il est écrit donc sous la forme canonique.
Exp 2 :	
<p>[MIN] $Z = 3x + 4y$</p> <p>S.C $x + 2y \geq 5$ $2x + y = 6$ $x \geq 0, y \geq 0$</p>	Ces équations ne sont pas écrites sous la forme canonique pour non respect des deux conditions.
Elles peuvent être transformées en forme canonique de la façon suivante	
1. En multipliant la fonction économique par (-1)	
[MIN] $Z = 3x + 4y$	[MAX] $-Z = -3x - 4y$
2. Le $\geq$ est transformé en $\leq$ en multipliant les contraintes par (-1)	
$x + 2y \geq 5$	$-x - 2y \leq -5$
3. Pour transformer = en $\leq$ on fait : Exp : $A = B$	Soit $A \leq B$
	ou $A \geq B$ ici on multiplie par (-1) $-A \leq -B$
<p>Revenons à notre exp</p> <p>[MIN] $Z = 3x + 4y$</p> <p>S.C $x + 2y \geq 5$ $2x + y = 6$ $x \geq 0, y \geq 0$</p>	<p>Il sera écrit alors :</p> <p>[MAX] $-Z = -3x - 4y$</p> <p>S.C $-x - 2y \leq 5$ $2x + y \leq 6$ $-2x - y \leq -6$ $x \geq 0, y \geq 0$</p>

2. La forme standard : الكتابة المعيارية

Deux conditions surviennent :

1. La fonction économique doit être maximisée
2. Les contraintes économiques sont des équations de type (=) égalité

Exp 1 :	
[MAX] $Z = 2x + y$ S.C $x + y = 2$ $x + 2y = 4$ $x \geq 0, y \geq 0$	Le programme est écrit sous forme standard.
Exp 2 :	
[MIN] $Z = 6x + 3y$ S.C $x + y \geq 3$ $2x + 2y \leq 4$ $x \geq 0, y \geq 0$	On va l'écrire sous forme standard
1. La fonction économique	[MAX] $-Z = -6x - 3y$
2. Concernant les contraintes on additionne ou soustrait les variables d'écart noté (e)	$A \leq B \leftrightarrow A + (B-A) = B \leftrightarrow A + e_1 = B$
	$A \geq B \leftrightarrow A - (B-A) = B \leftrightarrow A - e_2 = B$
	Avec e_1 et e_2 sont des variables d'écart
Revenons à notre exemple [MIN] $Z = 6x + 3y$ S.C $x + y \geq 3$ $2x + 2y \leq 4$ $x \geq 0, y \geq 0$	Il sera écrit alors : [MAX] $-Z = -6x - 3y$ S.C $x + y - e_1 = 3$ $2x + 2y + e_2 = 4$ $x \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0$

3. La forme matricielle الكتابة المصفوفية

Pour écrire le programme sous sa forme matricielle, il faut rechercher les matrices X, C, A et b, Où :

[MAX] $Z = C.X$ Sc : $A.X = b$ $X \geq 0$		
Exemple		
Forme canonique	$\leftrightarrow$	Forme standard
[MAX] $Z = 20x + 30y$	$\leftrightarrow$	[MAX] $Z = 20x + 30y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$
$x + 3y \leq 18$	écrire les	$x + 3y + e_1 = 18$

$x + y \leq 8$ $2x + y \leq 14$ $x, y \geq 0$	inéquations en équations تحويل المتراجحات إلى معادلات	$x + y + e_2 = 8$ $2x + y + e_3 = 14$ $x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$
L'écriture matricielle		
$X =$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$	On met les variables des contraintes
$C =$	$\begin{bmatrix} 20 & 30 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	On met les coefficients de la fonction économique Z
$A =$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	On met les coefficients des contraintes
$b =$	$\begin{bmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$	On met les contreparties des contraintes
On recherche ensuite dans A la matrice identité noté (I) et peut prendre les formes suivantes selon son <u>Ordre</u> c'est-à-dire le <u>Nombre des Contraintes</u>		
I d'Ordre 2		I d'Ordre 3
$I_2 =$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$I_3 =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
		I d'Ordre 4
		$I_4 =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Revenons à notre exemple la matrice identité (I) on la ressort de la matrice (A)		$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 2 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
La Base de la matrice I est appelée B		$B = (3, 4, 5)$ en fonction des positions des colonnes de I dans A
La Base B est composée de deux éléments		$V_B =$ Variables de Base, on les ressort de la matrice X $V_b = (e_1, e_2, e_3)$
		$V_{HB} =$ Variables Hors Base représente tous ce qui reste des variables de la fonction économique $V_{HB} = (x, y)$

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

La méthode du simplexe

Exemple

Une entreprise fabrique 3 produits P1, P2, P3 à partir de 3 composants C1, C2, C3.

Ci-dessous les capacités de l'entreprise en composant ainsi que la consommation unitaire en composants de chaque produit

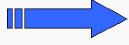
	P1	P2	P3	Disponibilité en composants
Nbr de C1	1	2	4	70
Nbr de C2	2	1	2	80
Nbr de C3	3	2	2	60

Si l'entreprise veut maximiser sa marge sachant que la **MCV (unitaire)** de chaque produit est respectivement 3, 5, 6 Um.

1- présenter la forme canonique de ce programme linéaire

2- déterminer le programme optimal avec la méthode du simplexe

Ecrire le programme linéaire sous la forme standard

Forme canonique		Forme standard
MAX: $Z = 3 P_1 + 5 P_2 + 6 P_3$		MAX: $Z = 3 P_1 + 5 P_2 + 6 P_3 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$
sous les contraintes $1 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 \leq 70$ $2 P_1 + 1 P_2 + 2 P_3 \leq 80$ $3 P_1 + 2 P_2 + 2 P_3 \leq 60$		S.C $1 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + 1 e_1 = 70$ $2 P_1 + 1 P_2 + 2 P_3 + 1 e_2 = 80$ $3 P_1 + 2 P_2 + 2 P_3 + 1 e_3 = 60$
$P_1, P_2, P_3 \geq 0$		$P_1, P_2, P_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0$

Détermination des variables de base et des variables hors base

Pour cela il nous faut écrire le programme sous sa forme matriciel

$$[\text{MAX}] \quad Z = C.X$$

$$\text{Sc :} \quad A.X = b$$

$$X \geq 0$$

L'écriture matricielle		
$X =$	$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$	On met les variables des contraintes
$C =$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	On met les coefficients de la fonction économique Z
$b =$	$\begin{bmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix}$	On met les contreparties des contraintes
$A =$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	On met les coefficients des contraintes
La Base =	(4, 5, 6)	Donc V_B sont (e_1, e_2, e_3) Et V_{HB} sont (P_1, P_2, P_3)

Nous allons donc construire le premier tableau de la méthode du Simplexe.

Tableau 1							S	
Base	P1	P2	P3	e1	e2	e3	Ct	Rap
e1	1	2	4	1	0	0	70	$70/4 = 17.5$
e2	2	1	2	0	1	0	80	$80/2 = 40$
e3	3	2	2	0	0	1	60	$60/2 = 30$
- Z	3	5	6	0	0	0	0	

Amélioration de la solution de départ

La solution de base correspond à un résultat économique nul.

Ceci s'interprète de la manière suivante : si l'entreprise ne fabrique aucun des produits P1,P2,P3 la marge de départ serait égale à zéro et $e_1 = 70$, $e_2 = 80$, $e_3 = 60$ ce qui nous donne

$$Z = 3(0) + 5(0) + 6(0) + 0(70) + 0(80) + 0(60) = 0$$

Pour améliorer ce résultat, il faut faire rentrer dans la base, l'une des variables hors base à la place d'une variable de la base, afin qu'elle prenne une valeur positive.

1) Sélection de la variable entrante

Variable entrante (variable améliorant le résultat économique) :

⇒ Variable hors base dont le coefficient est le plus élevé dans la fonction économique.

2) Sélection de la variable sortante

Variable sortante (variable permettant de porter la variable entrante à sa valeur maximale) :

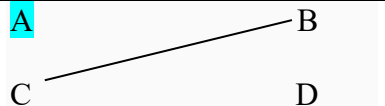
⇒ Variable de base dont le rapport entre le niveau de la contrainte (C_t) et les coefficients de la variable entrante est le plus faible.

3) Trouver le pivot

Il correspond à l'intersection de la colonne de la variable entrante (vecteur colonne) et la ligne de la variable sortante (vecteur ligne). Puis, il convient de l'entourer.

4) Pivotage

- Diviser la ligne du pivot par la valeur du pivot (valeur du pivot ramenée à 1).
- Recopier la ligne ainsi obtenue dans un nouveau tableau (ligne de la variable entrante dont le coefficient de la ligne = 1).
- La colonne du pivot autre que le pivot prend la valeur de zéro
- Chaque fois que la ligne du pivot croise une colonne en zéro on recopie la colonne
- Chaque fois que la colonne du pivot croise une ligne en zéro on recopie la ligne
- Le reste y compris la ligne de la fonction économique on le calcul par **la méthode du rectangle** comme suit:

Avec A comme pivot	Si on veut calculer la valeur de D dans le tableau suivant
	$D - \frac{(B \times C)}{A}$

On obtient le vecteur colonne de la variable entrante dont le coefficient est égal à 1 pour le pivot et 0 pour les autres éléments du vecteur.

La lecture du tableau donne la solution de cette transformation :

- en ligne : valeurs relatives aux variables de la base ;
- en colonne : valeurs des variables hors base;

- le niveau de la fonction économique = valeur absolue de la somme figurant dans la dernière colonne.

5) Reprendre les itérations étapes 1 à 4 si la solution optimale n'est pas atteinte

6) Solution optimale

On s'arrête et on interprète nos résultats lorsque tous les coefficients de la fonction objective (-Z) soient nuls ou négatifs c'est-à-dire qu'on a atteint la solution optimale.

8. La méthode des deux phases

LE SIMPLEXE

(LA METHODE DES DEUX PHASES)

Exercice

Résoudre par la méthode des deux phases le modèle de programmation linéaire suivant :

$$(P) = \begin{cases} \text{Maximiser } Z = 12x_1 + 20x_2 \\ \text{s.c.} \quad \begin{aligned} 6x_1 + 10x_2 &\geq 60 \\ 8x_1 + 25x_2 &\geq 200 \\ 2x_1 + 8x_2 &\leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \end{cases}$$

On transforme le problème sous sa forme canonique, ajoutant des variables d'excès, d'écart, et artificielles, selon qu'il convient

Les variables artificielles sont ajoutées pour obtenir la matrice d'identité d'ordre 3

- Comme la contrainte 1 est de type ' $\geq$ ' il est nécessaire d'ajouter la variable d'écart e_1 et la variable artificielle a_1 .
- Comme la contrainte 2 est de type ' $\geq$ ' il est nécessaire d'ajouter la variable d'écart e_2 et la variable artificielle a_2 .
- Comme la contrainte 3 est de type ' $\leq$ ' il est nécessaire d'ajouter la variable d'écart e_3 .

MAX: $Z = 12 X_1 + 20 X_2$
sous les contraintes

$$\begin{aligned} 6 X_1 + 10 X_2 &\geq 60 \\ 8 X_1 + 25 X_2 &\geq 200 \\ 2 X_1 + 8 X_2 &\leq 80 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



MAX: $Z = 12 X_1 + 20 X_2 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3 + a_1 + a_2$
sous les contraintes

$$\begin{aligned} 6 X_1 + 10 X_2 - 1 e_1 + 1 a_1 &= 60 \\ 8 X_1 + 25 X_2 - 1 e_2 + 1 a_2 &= 200 \\ 2 X_1 + 8 X_2 + 1 e_3 &= 80 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

Après avoir introduit les variables artificielles, nous avons modifié profondément l'expression de la fonction objective ; ceci va influencer la valeur de Z. Pour cela nous allons appliquer la phase I de la méthode des deux phases en espérant une solution de base réalisable optimale qui serait la S.B.R. de départ du (PS) et nous allons pouvoir entamer la phase II.

Ceci se ferait en minimisant l'impact de la somme des valeurs artificielles

$$\text{Min } Z = a_1 + a_2$$

Nous allons pouvoir construire le premier tableau de la phase I de la méthode des Deux Phases.

Phase I

Tableau 1	C		0	0	0	0	0	1	1	
Base	Cb	Ct	X ₁	X ₂	e ₁	e ₂	e ₃	a ₁	a ₂	Rap
a ₁	1	60	6	10	-1	0	0	1	0	60/10 = 6
a ₂	1	200	8	25	0	-1	0	0	1	200/25= 8
e ₃	0	80	2	8	0	0	1	0	0	80/8= 10
Z		260	*14	35	-1	-1	0	1	1	
C - Z			-14	-35	1	1	0	-1	-1	

Puisqu'on est dans le cas de minimisation la variable entrante correspond au coefficient le plus négatif de la ligne **C-Z** et la variable sortante correspond au plus petit rapport positif de la colonne **Rap**

La même chose pour toute la ligne

* Explication du Calcul de Z pour X₁ = 6*1 + 8*1 + 2*0 = 14

La variable qui sort de la base est X₆, et celle qui entre est X₂.

Tableau 2			0	0	0	0	0	1	1	
Base	Cb	Ct	X ₁	X ₂	e ₁	e ₂	e ₃	a ₁	a ₂	Rap
X ₂	0	6	0.6	1	-0.1	0	0	0.1	0	6/0.1=60
X ₇	1	50	-7	0	2.5	-1	0	-2.5	1	50/2.5= 20
X ₅	0	32	-2.8	0	0.8	0	1	-0.8	0	32/0.8= 40
Z		50	-7	0	2.5	-1	0	-2.5	0	
C - Z			7	0	-2.5	1	0	3.5	0	

La variable qui sort de la base est P₇, et celle qui entre est P₃.

Tableau 3			0	0	0	0	0	1	1
Base	Cb	Ct	X ₁	X ₂	e ₁	e ₂	e ₃	a ₁	a ₂
X2	0	8	0.32	1	0	-0.04	0	0	0.04
X3	0	20	-2.8	0	1	-0.4	0	-1	0.4
X5	0	16	-0.56	0	0	0.32	1	0	-0.32
Z			0	0	0	0	0	0	0
C - Z		0	0	0	0	0	0	1	1

Du moment où les coefficients de la ligne C – Z sont tous positifs ou nulle et $Z = 0$ les variables artificielles n'ont aucune impact sur la fonction économique, **Il y a donc une solution possible au problème**, nous pouvons donc passer à la Phase II pour le calcul.

NB : Si les coefficients de la ligne C – Z sont tous positifs ou nulle et $Z \neq 0$, il n'y a pas de solution pour ce programme.

Phase II

On supprime les colonnes des variables artificielles du dernier tableau et on reprend notre première fonction économique sans a_1 et a_2 soit : **MAX:** $Z = 12 X_1 + 20 X_2 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$ et on recalcule Z on utilisant les nouveaux coefficients

Tableau 1			12	20	0	0	0	
Base	Cb	Ct	X ₁	X ₂	e ₁	e ₂	e ₃	Rap
X2	20	8	0.32	1	0	-0.04	0	$8/0.32 = 25$
X3	0	20	-2.8	0	1	-0.4	0	$20/-2.8 = \text{négatif}$
X5	0	16	-0.56	0	0	0.32	1	$16/-0.56 = \text{négatif}$
Z			6.4	20	0	-0.8	0	
C - Z		160	5.6	0	0	0.8	0	

Puisqu'on est dans le cas de maximisation on prend le coefficient le plus positif de la ligne C-Z

La variable qui sort de la base est X2, et celle qui entre est X1.

Tableau 2			12	20	0	0	0	
Base	Cb	Ct	X₁	X₂	e₁	e₂	e₃	Rap
X1	12	25	1	3.125	0	-0.125	0	négatif
e ₁	0	90	0	8.75	1	-0.75	0	négatif
e ₃	0	30	0	1.75	0	0.25	1	30/0.25= 120
Z			12	37.5	0	-1.5	0	
C - Z		300	0	-17.5	0	1.5	0	

La variable qui sort de la base est X5, et celle qui entre est X4.

Tableau 3			12	20	0	0	0
Base	Cb	Ct	X₁	X₂	e₁	e₂	e₃
X1	12	40	1	4	0	0	0.5
e ₁	0	180	0	14	1	0	3
e ₂	0	120	0	7	0	1	4
Z			12	48	0	0	6
C - Z		480	0	-28	0	0	-6

La solution optimale est Z = 480

X1 = 40

X2 = 0

e₁ = 180

e₂ = 120

e₃ = 0

Revenons à notre exemple : La variable qui sort de la base est e_1 , et celle qui entre est P3.

Tableau 2							S	
Base	P1	P2	P3	e_1	e_2	e_3	Ct	Rap
P3	0.25	0.5	1	0.25	0	0	17.5	$17.5/0.5 = 35$
e_2	1.5	0	0	-0.5	1	0	45	$45/0 = \infty$
e_3	2.5	1	0	-0.5	0	1	25	$25/1 = 25$
- Z	1.5	2	0	-1.5	0	0	-105	

La variable qui sort de la base est e_3 , et celle qui entre est P2.

Tableau 3							S
Base	P1	P2	P3	e_1	e_2	e_3	Ct
P3	-1	0	1	0.5	0	-0.5	5
e_2	1.5	0	0	-0.5	1	0	45
P2	2.5	1	0	-0.5	0	1	25
-Z	-3.5	0	0	-0.5	0	-2	-155

Du moment où toutes les valeurs de la fonction économique Z sont négatives ou nulles, on est arrivé à la solution optimale.

Interprétation des résultats

La solution optimale est $Z = 155$

$P1 = 0$ on ne fabrique aucun produits P1

$P2 = 25$ on fabrique 25 unités de P2

$P3 = 5$ on fabrique 5 unités de P3

$e_2 = 45$ il nous reste 45 composants C2 inutilisée

$e_1 = 0$ on a épuisé toutes les composants C1

$e_3 = 0$ on a épuisé toutes les composants C3

CHAPITRE 4 : LA PRISE DE DÉCISION EN AVENIR INCERTAIN ET FACE AU RISQUE

Objectifs du chapitre :

À la fin de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

1. Distinguer les structures de décision en avenir certain, risqué et incertain.
2. Construire et manipuler une matrice de gains (ou de regrets).
3. Appliquer les critères classiques de choix en avenir incertain (Maximin, Maximax, Laplace, Hurwicz, Savage).
4. Modéliser un problème décisionnel séquentiel à l'aide d'un arbre de décision et calculer l'Espérance Mathématique.

1. Introduction et Typologie des Environnements Décisionnels

Dans les chapitres précédents, les modèles d'optimisation linéaire reposaient sur l'hypothèse de l'avenir certain : le manager connaissait avec exactitude les marges bénéficiaires, les capacités des ateliers et les plafonds du marché. Toutefois, la réalité des marchés (variabilité de la demande, fluctuation des prix des matières premières, innovations concurrentielles) plonge structurellement le gestionnaire de niveau Master dans des environnements instables (Render et al., 2018).

La théorie de la décision (Taha, 2017) classifie ces environnements en trois catégories distinctes :

1. **L'avenir certain** : Chaque action mène de façon déterministe à un résultat unique connu (ex : programmation linéaire standard).
2. **L'avenir risqué (ou probabilisable)** : Le décideur ignore quel état de la nature va se produire, mais il dispose de données historiques ou statistiques lui permettant d'attribuer une **probabilité d'occurrence** à chaque événement.
3. **L'avenir incertain (non probabilisable)** : Le décideur fait face à une situation totalement inédite (ex : lancement d'une technologie de rupture, crise géopolitique majeure). Il est impossible d'estimer objectivement ou subjectivement des probabilités de réalisation pour les états de la nature.

2. Décision en Avenir Strictement Incertain : Les Critères de Choix

Pour modéliser un problème de décision, on utilise une **matrice de gains**, qui croise les différentes alternatives d'actions (A_i) sous le contrôle du manager avec les états de la nature potentiels (E_j) indépendants de sa volonté (Anderson et al., 2016).

Soit le cas d'étude suivant : Le gérant d'une unité de distribution à Oran doit choisir la taille d'un nouvel entrepôt à construire. Trois options s'offrent à lui (A_1 : Grand, A_2 : Moyen, A_3 : Petit). Le profit dépend du niveau d'activité économique futur (E_1 : Forte demande, E_2 : Demande stable, E_3 : Faible demande).

Alternatives (A_i)	Forte Demande (E_1)	Demande Stable (E_2)	Faible Demande (E_3)
A_1 : Grand entrepôt	200 000 DA	100 000 DA	-50 000 DA

A2 : Moyen entrepôt	120 000 DA	120 000 DA	20 000 DA
A3 : Petit entrepôt	70 000 DA	70 000 DA	50 000 DA

En l'absence totale de probabilités, le décideur appliquera un des critères axiomatiques suivants :

2.1. Le critère du Maximin (Critère de Wald ou de prudence)

Ce critère s'adresse aux décideurs averse au risque (pessimistes). On identifie le gain minimal possible pour chaque action, puis on choisit l'action qui offre le maximum parmi ces minima.

- $\text{Min}(A1) = -50\,000 \text{ DA}$; $\text{Min}(A2) = 20\,000 \text{ DA}$; $\text{Min}(A3) = 50\,000 \text{ DA}$.
- **Sélection : A3 (Petit entrepôt)** avec un gain sécurisé de 50 000 DA.

2.2. Le critère du Maximax (Critère de l'optimisme absolu)

Le décideur retient le meilleur résultat possible pour chaque alternative et choisit le maximum des maxima.

- $\text{Max}(A1) = 200\,000 \text{ DA}$; $\text{Max}(A2) = 120\,000 \text{ DA}$; $\text{Max}(A3) = 70\,000 \text{ DA}$.
- **Sélection : A1 (Grand entrepôt)** pour viser le gain maximal de 200 000 DA.

2.3. Le critère de Laplace (Critère de l'insuffisante raison)

Considérant qu'aucun état de la nature n'est privilégié, Laplace postule qu'ils ont tous la même chance de se produire. On calcule la moyenne arithmétique des gains pour chaque action.

- $\text{Moyenne}(A1) = (200000 + 100000 - 50000) / 3 = 83333 \text{ DA}$
- $\text{Moyenne}(A2) = (120000 + 120000 + 20000) / 3 = 86667 \text{ DA}$
- $\text{Moyenne}(A3) = (70000 + 70000 + 50000) / 3 = 63333 \text{ DA}$
- **Sélection : A2 (Moyen entrepôt).**

2.4. Le critère du regret de Savage (Minimax Regret)

Savage propose de minimiser le regret d'être passé à côté de la meilleure décision possible après coup. On construit une **matrice des regrets** en soustrayant chaque gain du gain maximal de sa colonne (Hillier & Lieberman, 2021).

Matrice des regrets calculée :

- Pour E1 (Max = 200 000) : Regrets = [0 80000 130000]
- Pour E2 (Max = 120 000) : Regrets = [20000 0 50000]
- Pour E3 (Max = 50 000) : Regrets = [100000 30000 0]

Le décideur repère le regret maximum par ligne (A1 : 100000 ; A2 : 80000 ; A3 : 130000) et choisit le minimum de ces valeurs.

- **Sélection : A2 (Moyen entrepôt)** avec un regret maximal contenu à 80 000 DA.

3. Décision face au Risque : L'Arbre de Décision

Lorsque l'environnement devient probabilisable, l'outil de modélisation séquentielle par excellence est **l'arbre de décision** (Hillier & Lieberman, 2021). Il permet d'évaluer graphiquement des scénarios de choix successifs imbriqués.

3.1. Composants d'un arbre de décision

Un arbre de décision s'articule autour de deux types de nœuds reliés par des branches :

- **Les nœuds de décision (représentés par des carrés $\square$)** : Ils désignent les intersections où le manager doit effectuer un choix délibéré entre plusieurs options.
- **Les nœuds de hasard ou d'événements (représentés par des cercles $\bigcirc$)** : Ils formalisent les points de bifurcation soumis aux lois de la nature ou du marché, d'où partent les états de la nature affectés de leurs probabilités associées.

3.2. Règle mathématique de résolution : L'Espérance Mathématique du Gain (EMG)

Pour déterminer la trajectoire optimale au sein de l'arbre, on procède à une analyse à rebours (*backward induction*), en remontant des feuilles terminales vers la racine (Faulin & Juan, 2014). À chaque nœud de hasard, on calcule l'Espérance Mathématique (E) définie par la somme des gains pondérés par leurs probabilités :

$$EMG(A_i) = \sum_{j=1}^m p_j \times G_{ij}$$

Où p_j représente la probabilité de l'état de la nature E_j , et G_{ij} le gain généré par l'alternative A_i sous l'état E_j . Le manager sélectionne ensuite, au niveau de chaque nœud de décision carré, l'alternative maximisant cette espérance.

4. Application Pratique et Modélisation Mathématique

Considérons le problème précédent de l'entrepôt, enrichi par des études statistiques de marché qui estiment que la probabilité d'une forte demande (E_1) est de 0,6, celle d'une demande stable (E_2) de 0,3, et celle d'une faible demande (E_3) de 0,1.

Calcul des Espérances Mathématiques de Gain :

- **EMG (A1)** = (0,6 x 200000) + (0,3 x 100000) + (0,1 x -50000)

$$EMG (A1) = 120000 + 30000 - 5000 = 145000 \text{ DA}$$

- **EMG (A2)** = (0,6 x 120000) + (0,3 x 120000) + (0,1 x 20000)

$$EMG (A2) = 72000 + 36000 + 2000 = 110000 \text{ DA}$$

- **EMG (A3)** = (0,6 x 70000) + (0,3 x 70000) + (0,1 x 50000)

$$EMG (A3) = 42000 + 21000 + 5000 = 68000 \text{ DA}$$

Conclusion et Analyse Critique

Sur la base du critère probabiliste de la maximisation de l'espérance de gain, le manager doit choisir **l'alternative A1 (Grand entrepôt)**. Bien que cette option présente un risque de perte en cas de récession (-50000 DA), l'évaluation pondérée par la forte probabilité de croissance (60%) démontre qu'à long terme, ce choix génère la meilleure espérance de valeur économique pour l'organisation.

EXERCICE D'APPLICATION : STRUCTURES SÉQUENTIELLES ET VALEUR DE L'INFORMATION

Énoncé du problème : Le projet "Eco-Pack"

Une entreprise agroalimentaire basée à la zone industrielle d'Es-Senia (Oran) envisage de lancer une nouvelle gamme d'emballages biodégradables baptisée "Eco-Pack". Le directeur général doit arbitrer une première décision séquentielle : lancer une étude de marché approfondie ou construire immédiatement l'unité de production.

Étape 1 : Choix initial

Le manager fait face à deux alternatives de départ :

- **Alternative A1 (Décision directe)** : Construire immédiatement l'usine sans étude préalable.
- **Alternative A2 (Décision séquentielle)** : Financer une étude de marché rigoureuse auprès d'un cabinet spécialisé. Cette étude coûte **2 000 000 DA**.

Étape 2 : Les probabilités et les gains du marché

Les ingénieurs et analystes estiment que le marché national peut réagir de deux manières (États de la nature) :

- **E1 : Marché Porteur** (Probabilité $p=0,70$)
- **E2 : Marché Faible** (Probabilité $1-p=0,30$)

Si l'usine est construite :

- En cas de **Marché Porteur (E1)**, elle génère un gain brut de **25 000 000 DA**.
- En cas de **Marché Faible (E2)**, elle subit une perte brute de **-10 000 000 DA** (en raison des coûts fixes et des stocks invendus).
- **Note** : À tout moment, le manager peut décider d'abandonner le projet. S'il abandonne, le gain est de **0 DA** (mais les frais d'étude éventuellement engagés restent dus).

Étape 3 : Fiabilité de l'étude de marché

Pour simplifier l'analyse séquentielle, on suppose dans un premier temps que le cabinet de conseil fournit une **Information Parfaite**. C'est-à-dire que l'étude annonce avec une fiabilité de 100% si le marché sera Porteur ou Faible avant que le manager ne valide la construction.

Travail demandé :

1. Modéliser le problème sous la forme d'un **arbre de décision séquentiel**.
2. Calculer l'Espérance Mathématique du Gain (EMG) pour chaque branche par induction à rebours. Quelle est la décision optimale ?
3. Calculer l'Espérance Mathématique avec Information Parfaite (EM avec IP) et en déduire la **Valeur de l'Information Parfaite (VIP)**. Le manager a-t-il raison de payer l'étude 2 000 000 DA ?

Corrigé Détaillé de l'Exercice

1. Modélisation de l'arbre de décision

L'arbre se construit de gauche à droite, en plaçant le nœud carré de décision initial, suivi des nœuds de hasard (cercles) probabilisés :

- **Nœud de Décision Initial □1 :**
 - **Branche Haute :** Construire immédiatement (A1). Mène au nœud de hasard ○1.
 - **Branche Basse :** Financer l'étude (A2). Coût d'entrée = -2 000 000 DA. Mène au nœud de hasard ○2.
- **Nœud de Hasard ○1 (Décision directe) :**
 - Branche E1 [Probabilité : 0,70] $\Rightarrow$ Gain = 25 000 000 DA
 - Branche E2 [Probabilité : 0,30] $\Rightarrow$ Gain = -10 000 000 DA
- **Nœud de Hasard ○2 (Après étude parfaite) :**
 - L'étude annonce un marché porteur (Probabilité : 0,70). Mène au nœud de décision □2.
 - L'étude annonce un marché faible (Probabilité : 0,30). Mène au nœud de décision □3.
- **Nœuds de décision secondaires (□2 et □3) :**

- Au niveau de □2 (Annonce positive) : Le manager choisit entre *Construire* (Gain = 25 000 000 DA) ou *Abandonner* (Gain = 0 DA).
- Au niveau de □3 (Annonce négative) : Le manager choisit entre *Construire* (Gain = -10 000 000 DA) ou *Abandonner* (Gain = 0 DA).

2. Résolution par induction à rebours (Calcul des EMG)

Branche A1 : Construction immédiate (EMG○1)

$$EMG(A1) = (0,70 \times 25\,000\,000) + (0,30 \times -10\,000\,000)$$

$$EMG(A1) = 17\,500\,000 - 3\,000\,000 = 14\,500\,000 \text{ DA}$$

Branche A2 : Financement de l'étude parfaite (EMG○2)

Analysons les nœuds de décision à rebours :

- **Au nœud □2 (L'étude dit "Porteur")** : Le manager rationnel choisit de *Construire*.
Le gain conservé est de 25 000 000 DA.
- **Au nœud □3 (L'étude dit "Faible")** : Le manager rationnel choisit d' *Abandonner*.
Le gain conservé est de 0 DA (ce qui évite la perte de 10 millions).

Calculons maintenant l'espérance au nœud de hasard ○2, en intégrant le coût fixe de l'étude (2 000 000 DA) :

$$EMG(A2) = [0,70 \times 25\,000\,000] + [0,30 \times 0] - 2\,000\,000$$

$$EMG(A2) = 17\,500\,000 + 0 - 2\,000\,000 = 15\,500\,000 \text{ DA}$$

Décision Optimale :

En comparant les deux espérances ($EMG(A2) = 15,5 \text{ MA} > EMG(A1) = 14,5 \text{ MA}$), la décision optimale pour l'entreprise est de **choisir l'alternative A2 : Financer l'étude de marché**.

3. Calcul de la Valeur de l'Information Parfaite (VIP)

La théorie de la décision (Render et al., 2018) définit la VIP comme le gain d'opportunité apporté par une information sans faille, avant déduction du coût de cette information.

Étape A : Espérance Mathématique avec Information Parfaite (EMavecIP)

Il s'agit du gain brut moyen si l'information était totalement gratuite :

$$\text{EM avec IP} = (0,70 \times 25000000) + (0,30 \times 0) = 17500000 \text{ DA}$$

Étape B : Espérance Mathématique sans Information (EMsansI)

C'est le gain de la meilleure décision directe possible (calculé à la question 2 pour A1) :

$$\text{EM sans I} = 14500000 \text{ DA}$$

Étape C : Calcul de la VIP

$$\text{VIP} = \text{EM avec IP} - \text{EM sans I}$$

$$\text{VIP} = 17500000 - 14500000 = 3000000 \text{ DA}$$

Interprétation Managériale

La **Valeur de l'Information Parfaite est de 3 000 000 DA**. Cela signifie que le fait de connaître l'avenir à l'avance permet au manager d'économiser structurellement 3 millions de DA en évitant de construire une usine condamnée à l'échec en cas de marché faible.

Puisque le cabinet d'étude facture ses services **2 000 000 DA**, et que cette somme est inférieure à la valeur réelle de l'information ($\text{Coût} = 2 \text{ MA} < \text{VIP} = 3 \text{ MA}$), le directeur général prend une excellente décision managériale en achetant cette étude. L'entreprise réalise un **gain net d'opportunité de 1 000 000 DA** ($3000000 - 2000000$).

CHAPITRE 5 : L'ANALYSE PRÉVISIONNELLE ET LES OUTILS STATISTIQUES DE PRÉVISION DE LA DEMANDE

Objectifs du chapitre :

À la fin de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

1. Comprendre les enjeux managériaux de la prévision de la demande dans la chaîne logistique.
2. Identifier les composantes structurelles d'une série temporelle (tendance, saisonnalité, cycle, résidu).
3. Maîtriser et appliquer les techniques de lissage statistique (moyenne mobile, lissage exponentiel simple).
4. Développer un modèle de projection par régression linéaire simple.
5. Évaluer et comparer la précision des prévisions à l'aide des indicateurs d'erreur (MAD, MSE, MAPE).

1. Enjeux de la Prévision dans la Gestion des Opérations

Pour toute organisation, la prévision de la demande constitue le point d'ancrage de l'ensemble du processus de planification opérationnelle, de la gestion des approvisionnements à la distribution (Render et al., 2018). Une estimation erronée engendre des coûts cachés majeurs :

- **La sous-estimation** : Provoque des ruptures de stocks, des pertes de parts de marché et des coûts de transport d'urgence.
- **La surestimation** : Génère un gonflement des stocks, des coûts de possession prohibitifs et un risque d'obsolescence des produits.

La littérature (Chopra & Meindl, 2016) rappelle trois principes fondamentaux en prévision :

1. **La prévision est toujours fausse** : L'objectif n'est pas d'atteindre le chiffre exact, mais de mesurer et de minimiser l'écart (l'erreur de prévision).
2. **Les prévisions agrégées sont plus précises** : Il est statistiquement plus fiable de prévoir la demande globale d'une famille de produits plutôt que celle d'une référence isolée (effet de compensation des erreurs).
3. **L'horizon temporel réduit l'exactitude** : Plus l'horizon de prévision est éloigné, plus l'incertitude est forte.

2. Analyse Analytique des Séries Temporelles (Chronologiques)

Une **série temporelle** est une suite d'observations numériques enregistrées à intervalles de temps réguliers (semaines, mois, trimestres). Graphiquement, elle résulte de la combinaison de quatre composantes distinctes (Heizer et al., 2020) :

Composantes d'une Série Temporelle

- ├── Tendances (Trend) ──► Orientation générale à long terme (croissance/décroissance)
- ├── Saisonnalité (Seasonality) ──► Fluctuations périodiques régulières (ex: pics de vente en été)
- ├── Cycles (Cycles) ──► Variations pluriannuelles liées aux vagues économiques
- └── Variations Aléatoires (Residuals) ──► Bruits de fond imprévisibles (irrégularités)

Modélisation mathématique de la composition :

- **Modèle Additif** : Utilisé lorsque le volume des fluctuations saisonnières reste stable quel que soit le niveau de la tendance.

$$Y_t = \text{Tendance}_t \times \text{Saisonnalité}_t \times \text{Erreur}_t$$

- **Modèle Multiplicatif** : Approprié lorsque la variation saisonnière augmente proportionnellement à la hausse de la tendance.

$$Y_t = \text{Tendance}_t \times \text{Saisonnalité}_t \times \text{Erreur}_t$$

3. Les Techniques de Lissage à Court Terme (Modèles Stationnaires)

Lorsque la demande est relativement stable (sans tendance marquée ni saisonnalité forte), on utilise des modèles de lissage pour filtrer les variations aléatoires.

3.1. La Moyenne Mobile Simple (MMS)

La prévision pour la période future $t+1$ est égale à la moyenne arithmétique des demandes réelles constatées sur les n périodes précédentes.

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_{t-i}}{n}$$

Où Y est la demande réelle, $\hat{Y}$ la prévision, et n le nombre de périodes retenues.

- **Limitation** : Ce modèle accorde le même poids (l'importance relative de $1/n$) à une donnée récente qu'à une donnée plus ancienne.

3.2. Le Lissage Exponentiel Simple (LES)

Le LES surmonte cette limite en accordant un poids décroissant exponentiellement aux données à mesure qu'elles s'éloignent dans le temps. La formule de récurrence s'énonce ainsi (Taha, 2017) :

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha) \hat{Y}_t$$

Où α est le **coefficient de lissage** compris strictement entre 0 et 1.

- **Interprétation managériale** : Un α élevé (proche de 1) rend le modèle très réactif aux variations immédiates du marché. Un α faible (proche de 0) privilégie la stabilité et lisse fortement les données historiques.

4. Modélisation de la Tendence par la Régression Linéaire

Dès lors que la demande affiche une trajectoire haussière ou baissière structurelle à long terme, les méthodes de lissage ne suffisent plus car elles génèrent un retard systématique. On recourt alors à la méthode des **moindres carrés ordinaires (MCO)** pour projeter la tendance en fonction du temps (Hillier & Lieberman, 2021).

L'équation de la droite d'ajustement est formulée par :

$$Y_t = a \cdot t + b$$

Où t représente la variable explicative (le temps) et Y_t la variable expliquée (la demande estimée). Les paramètres de la droite se calculent à partir des formules statistiques suivantes :

$$a = \frac{\sum(t - \bar{t})(Y_t - \bar{Y})}{\sum(t - \bar{t})^2} = \frac{\text{Cov}(t, Y)}{V(t)}$$

$$b = \bar{Y} - a \cdot \bar{t}$$

Où $\bar{t}$ et $\bar{Y}$ sont respectivement les moyennes empiriques des périodes et de la demande.

5. Application Pratique et Mesure de la Qualité des Prévisions

5.1. Cas d'étude : Analyse de la demande de l'unité "Oran-Plast"

Le tableau ci-dessous retrace l'historique des ventes réelles (en milliers d'unités) d'un composant industriel sur les 5 premiers mois de l'année, ainsi qu'une simulation de prévision effectuée par le service logistique.

Mois (t)	Demande Réelle (Y _t)	Prévision Établie (Ŷ _t)	Écart Absolu Y _t - Ŷ _t	Écart Carré (Y _t - Ŷ _t) ²	% d'Erreur Absolu
Janvier	100	110	10	100	0,100
Février	120	115	5	25	0,042
Mars	115	120	5	25	0,043
Avril	130	122	8	64	0,061
Mai	145	132	13	169	0,090
Total	610	599	41	383	0,336

5.2. Calcul des indicateurs d'évaluation de l'erreur

Pour valider le déploiement opérationnel d'un modèle mathématique de prévision, le gestionnaire doit analyser trois métriques de performance standardisées (Render et al., 2018) :

a. L'Écart Absolu Moyen (\$MAD\$ - Mean Absolute Deviation)

Il mesure l'amplitude globale moyenne des erreurs, sans tenir compte de leur signe.

$$MAD = \frac{\sum \|Y_t - \hat{Y}_t\|}{n} = \frac{41}{5} = 8,2 \text{ unités}$$

b. L'Erreur Quadratique Moyenne (MSE - Mean Squared Error)

Elle pénalise lourdement les erreurs de forte amplitude (les grands écarts de prévision), ce qui s'avère stratégique lorsque les ruptures ou surstocks massifs coûtent cher à l'entreprise.

$$MSE = \frac{\sum (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n} = \frac{383}{5} = 76,6$$

c. L'Erreur Pourcentage Absolue Moyenne (MAPE\$ - Mean Absolute Percentage Error)

Cet indicateur exprime l'erreur en pourcentage de la demande réelle, permettant de juger de la précision relative du modèle indépendamment de l'échelle des volumes de vente.

$$MAPE = \frac{\sum \frac{\|Y_t - \hat{Y}_t\|}{Y_t}}{n} \times 100 = \frac{0,336}{5} \times 100 = \mathbf{6,72\%}$$

Conclusion Managériale

Le modèle testé présente un MAPE de **6,72%**. En gestion industrielle, un taux d'erreur inférieur à 10% est généralement qualifié d'**excellente prévision**. Le directeur de la planification d'Oran-Plast peut donc s'appuyer sur ce modèle statistique pour calibrer sereinement ses approvisionnements de matières premières et planifier ses ordres de fabrication pour le mois de Juin.

CHAPITRE 6 : LES MODÈLES D'OPTIMISATION DE LA GESTION DES STOCKS

Objectifs du chapitre :

À la fin de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

1. Catégoriser les différents types de coûts associés à la détention et à la rupture de stocks.
2. Démontrer mathématiquement et appliquer le modèle de la Quantité Économique de Commande (EOQ ou formule de Wilson).
3. Déterminer la période optimale de réapprovisionnement et le point de commande (ROP).
4. Intégrer la variabilité de la demande par le calcul d'un stock de sécurité fondé sur un niveau de service ciblé.

1. Introduction et Enjeux Économiques de la Gestion des Stocks

Au sein d'une unité industrielle ou de distribution, le stock agit comme un régulateur thermique : il amortit les décalages temporels et quantitatifs entre le flux d'approvisionnement en amont et la demande du marché en aval (Chopra & Meindl, 2016). Cependant, le maintien d'un stock confronte le gestionnaire à un arbitrage financier permanent entre trois catégories de coûts antagonistes (Heizer et al., 2020) :

- a. **Le coût d'acquisition (Ca) :** La valeur brute d'achat des marchandises ou des matières premières.
- b. **Le coût de lancement ou de commande (Cl) :** L'ensemble des frais fixes engagés à chaque passation de commande (frais administratifs, transport, contrôle de réception, réglage des machines). Ce coût est indépendant de la quantité commandée.
- c. **Le coût de possession ou de détention (Cp) :** Les frais liés au stockage physique des produits (loyer de l'entrepôt, assurance, électricité, gardiennage) cumulés au coût d'opportunité du capital immobilisé. Il est généralement exprimé en pourcentage (i) de la valeur unitaire du stock par unité de temps.

2. Le Modèle Déterministe de Base : La Formule de Wilson (EOQ)

Le modèle de la **Quantité Économique de Commande** (*Economic Order Quantity* ou formule de Wilson) formalise cet arbitrage sous un ensemble d'hypothèses strictes (Avenir certain) : la demande annuelle est connue et constante, les délais de livraison sont fixes, et aucune rupture de stock n'est tolérée (Hillier & Lieberman, 2021).

2.1. Formalisation mathématique du Coût Total

Soit :

- D : La demande annuelle globale (en unités).
- Cl : Le coût de lancement d'une commande (en DA).
- Cu : Le coût unitaire de l'article (en DA).
- i : Le taux annuel de possession (en %). Le coût annuel de détention par unité est donc $C_p = i \times C_u$.
- Q : La quantité à commander à chaque lot (la variable de décision).

Le Coût Total Annuel du stock (CT), hors coût d'achat brut, est la somme du coût de lancement global et du coût de possession du stock moyen ($Q/2$) :

$$CT(Q) = \left(\frac{D}{Q} \times C_l \right) + \left(\frac{Q}{2} \times C_p \right)$$

2.2. Optimisation et Dérivation de la Quantité Économique (Q^*)

Pour minimiser ce coût total, on cherche la valeur de Q pour laquelle la dérivée première de la fonction par rapport à Q s'annule :

$$\frac{dCT(Q)}{dQ} = -\frac{D \cdot C_l}{Q^2} + \frac{C_p}{2} = 0 \implies \frac{D \cdot C_l}{Q^2} = \frac{C_p}{2}$$

En isolant Q , nous obtenons la célèbre **Formule de Wilson** (EOQ) :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_l}{C_p}}$$

2.3. Indicateurs dérivés de l'optimum

- **Nombre optimal de commandes par an (N^*) :**

$$N^* = \frac{D}{Q^*}$$

- **Cadence optimale (Temps entre deux commandes T^*) :**

$$T^* = \frac{Q^*}{D}$$

(Exprimé en fraction d'année).

3. Le Point de Commande (ROP - Reorder Point)

Le **Point de Commande** désigne le niveau de stock disponible qui doit déclencher le lancement d'une nouvelle commande pour éviter la rupture pendant le temps que prend le fournisseur à livrer (Render et al., 2018).

3.1. Cas de l'avenir certain (Délai déterministe)

Si le délai de livraison (noté L , pour *Lead Time*) est fixe et exprimé en jours, et que la demande quotidienne moyenne est $d = D / 365$, le point de commande s'énonce :

$$ROP = d \times L$$

Le manager déclenche l'achat dès que le stock physique descend exactement à ce niveau.

3.2. Cas de l'avenir risqué : Introduction du Stock de Sécurité (SS)

Lorsque la demande quotidienne ou le délai de livraison subissent des fluctuations aléatoires (cas général traité en niveau Master), le risque de rupture surgit durant la période de livraison. Le gestionnaire doit alors greffer une marge de protection appelée **Stock de Sécurité (SS)** :

$$ROP = (d \times L) + SS$$

Le calcul du stock de sécurité s'appuie sur la loi normale pour garantir un **Niveau de Service (NS)** cible (ex : 95% de chances de ne pas subir de rupture) :

$$SS = Z_{\alpha} \times \sigma_L$$

Où Z_{α} est la variable centrée réduite lue dans la table de la loi normale pour le niveau de service désiré (ex : $Z = 1,65$ pour $NS = 95\%$), et σ_L représente l'écart-type de la demande consolidée pendant le délai de livraison.

4. Application Pratique : Optimisation à l'unité "Oran-Logistique"

Une grande surface de distribution implantée à Oran commercialise un produit dont la demande annuelle s'élève à **10 000 unités**. Les paramètres financiers de gestion sont les suivants :

- Coût de lancement d'une commande (Cl) = **4 500 DA**
- Coût de possession annuel par unité (Cp) = **100 DA**
- Délai de livraison du fournisseur (L) = **9 jours**
- L'entreprise opère sur la base de 365 jours par an.

Résolution Étape par Étape :

1. Calcul de la Quantité Économique de Commande (Q*)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 10\,000 \times 4\,500}{100}} = \sqrt{\frac{90\,000\,000}{100}} = \sqrt{900\,000} = \mathbf{948,68 \text{ unités}}$$

Le manager arrondira la commande à **949 unités** par lot.

2. Nombre de commandes et périodicité

- $N^* = 10000 / 949 \approx 10,54$ commandes par an
- $T^* = 365 / 10,54 \approx 34,6$ jours (L'entreprise passera une commande environ tous les 35 jours).

3. Détermination du Point de Commande (ROP) en avenir certain

- Demande quotidienne moyenne (d) = $10000 / 365 = 27,4$ unités/jour
- $ROP = 27,4 \times 9 \text{ jours} = 246,6$ unités

Décision opérationnelle : Dès que le niveau des stocks en magasin descend à **247 unités**, l'ordinateur doit automatiquement éditer et transmettre un bon de commande de **949 unités** au fournisseur.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 1 : Application fondamentale de la formule de Wilson (EOQ)

Énoncé du problème

Une entreprise de distribution d'électroménager basée à Oran commercialise un modèle de climatiseur très demandé. Les prévisions logistiques établissent une demande annuelle stable de **1 200 unités**.

Le service financier et des achats fournit les données économiques suivantes :

- Le coût unitaire d'achat d'un climatiseur (C_u) est de **40 000 DA**.
- Le coût de passation et de traitement d'une commande auprès du fournisseur (C_l) s'élève à **6 000 DA**.
- Le taux annuel de possession du stock (i) est évalué à **12 %** de la valeur du stock.
- L'entreprise est ouverte 300 jours par an.

Travail demandé :

1. Calculer le coût annuel de détention d'une unité en stock (C_p).
2. Déterminer la Quantité Économique de Commande (Q^*) à l'aide de la formule de Wilson.
3. Calculer le nombre optimal de commandes à passer par an (N^*) et la périodicité optimale des livraisons (T^*).
4. Calculer le Coût Total Annuel de gestion de ce stock (CT^*).

Corrigé détaillé de l'Exercice 1

1. Calcul du coût annuel de détention (C_p)

$$C_p = i \times C_u = 0,12 \times 40\,000 = 4\,800 \text{ DA / unité / an}$$

2. Calcul de la Quantité Économique de Commande (Q^*)

En appliquant la formule de Wilson :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_l}{C_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 1\,200 \times 6\,000}{4\,800}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{14\,400\,000}{4\,800}} = \sqrt{3\,000} \approx \mathbf{54,77 \text{ unités}}$$

Décision managériale : L'entreprise doit commander les climatiseurs par lots de **55 unités**.

3. Nombre de commandes (N*) et périodicité (T*)

- **Nombre de commandes :** $N^* = D/Q^* = 1200/55 \approx 21,82$ commandes/an (soit environ 22 commandes).
- **Périodicité (en jours) :** $T^* = \text{Jours d'ouverture} / N^* = 300 / 21,82 \approx 13,75$ jours (L'entreprise commande environ tous les 14 jours).

4. Calcul du Coût Total Annuel (CT*)

Le coût total optimisé est la somme du coût de lancement et du coût de possession (hors coût d'achat) :

$$CT^* = \left(\frac{D}{Q^*} \times C_l \right) + \left(\frac{Q^*}{2} \times C_p \right)$$

$$CT^* = \left(\frac{1\,200}{55} \times 6\,000 \right) + \left(\frac{55}{2} \times 4\,800 \right)$$

$$CT^* = 130\,909 \text{ DA} + 132\,000 \text{ DA} = \mathbf{262\,909 \text{ DA / an}}$$

(Note : L'écart minime entre le coût de lancement et le coût de possession provient de l'arrondi de Q^ à 55).**

EXERCICE 2 : Point de commande (ROP) et Stock de sécurité (SS)

Énoncé du problème

Une usine de transformation d'Es-Senia consomme une matière première plastique dont la demande quotidienne suit une loi normale. La consommation moyenne est de **50 kg par jour**, avec un écart-type de **8 kg**.

Le fournisseur garantit un délai de livraison (L) fixe de **10 jours**. La direction exige un **Niveau de Service (NS) de 95 %** pour éviter tout risque de blocage des lignes de production.

Extrait de la table de la loi normale centrée réduite :

- Pour NS = 90% Z = 1,28
- Pour NS = 95% Z = 1,65
- Pour NS = 99% Z = 2,33

Travail demandé :

1. Calculer la demande moyenne totale pendant le délai de livraison.
2. Calculer l'écart-type de la demande pendant ce délai de livraison (σ_L).
3. Déterminer le Stock de Sécurité (SS) nécessaire pour couvrir le niveau de service exigé.
4. En déduire le Point de Commande (ROP). Interpréter le résultat pour le gestionnaire d'entrepôt.

Corrigé détaillé de l'Exercice 2

1. Demande moyenne pendant le délai de livraison (μ_L)

$$\mu_L = d \times L = 50 \text{ kg/jour} \times 10 \text{ jours} = 500 \text{ kg}$$

2. Écart-type de la demande pendant le délai de livraison σ_L

Puisque le délai L est fixe et que la demande quotidienne est indépendante d'un jour à l'autre, l'écart-type sur la période de livraison se calcule par la formule :

$$\sigma_L = \sigma_d \times \sqrt{L} = 8 \times \sqrt{10} = 8 \times 3,162 \approx \mathbf{25,30 \text{ kg}}$$

3. Calcul du Stock de Sécurité (SS)

Pour un niveau de service de 95 %, la table de la loi normale nous donne un coefficient de sécurité $Z = 1,65$.

$$SS = Z \times \sigma_L = 1,65 \times 25,30 \approx 41,75 \text{ kg}$$

Le manager choisira d'arrondir le stock de sécurité à **42 kg**.

4. Calcul du Point de Commande (ROP)

$$ROP = \mu_L + SS = 500 \text{ kg} + 42 \text{ kg} = 542 \text{ kg}$$

Interprétation managériale : Le système de gestion des stocks doit être paramétré pour déclencher automatiquement une alerte de réapprovisionnement dès que le stock physique disponible en magasin descend à **542 kg**. Sur cette quantité, 500 kg sont destinés à couvrir la consommation normale attendue durant les 10 jours d'attente, et 42 kg servent de coussin de sécurité pour absorber d'éventuels pics de demande imprévus.

EXERCICE 3 : Modèle avec remises quantitatives (Tarifs dégressifs)

Énoncé du problème

Un grossiste propose à un acheteur industriel les tarifs dégressifs suivants pour l'achat de composants électroniques :

Taille du lot (Q)	Prix unitaire (Cu)
De 1 à 499 unités	500 DA
De 500 à 999 unités	480 DA
1 000 unités et plus	450 DA

Les paramètres de gestion de l'acheteur sont :

- Demande annuelle (D) = **5 000 unités**
- Coût de lancement (Cl) = **2 500 DA par commande**
- Le coût de possession annuel (Cp) est estimé à **20 %** du prix d'achat unitaire de l'article ($Cp = 0,20 \times Cu$).

Travail demandé :

Déterminer la quantité de commande optimale qui minimise le **Coût Total Global** (incluant cette fois-ci le coût d'achat des marchandises : $CT = D \times C_u + D/Q \times C_l + Q/2 \times C_p$).

Corrigé détaillé de l'Exercice 3

La méthode consiste à calculer la quantité économique Q^* pour chaque tarif, en vérifiant sa réalisabilité (si elle tombe dans la bonne tranche de prix).

Étape 1 : Analyse du Tarif 3 ($C_u = 450$ DA, pour $Q \geq 1000$)

$$C_p = 0,20 \times 450 = 90 \text{ DA}$$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2 \times 5\,000 \times 2\,500}{90}} = \sqrt{277\,777,78} \approx 527 \text{ unités}$$

- **Vérification** : 527 unités est inférieur au seuil minimal de 1 000 unités requis pour obtenir ce prix de 450 DA. Cette solution n'est **pas réalisable**. Le point le plus économique accessible pour ce tarif est la borne inférieure, soit **$Q_3 = 1000$ unités**.

Étape 2 : Analyse du Tarif 2 ($C_u = 480$ DA, pour $500 \leq Q \leq 999$)

$$C_p = 0,20 \times 480 = 96 \text{ DA}$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2 \times 5\,000 \times 2\,500}{96}} = \sqrt{260\,416,67} \approx 510 \text{ unités}$$

Vérification : 510 unités est bien compris entre 500 et 999. Cette solution est **réalisable**.

Étape 3 : Comparaison des Coûts Totaux Globaux

Nous devons maintenant comparer le coût total global pour les deux seules options viables : l'optimum réalisable de la tranche 2 ($Q = 510$) et le point de cassure de la tranche 3 ($Q = 1000$).

$$\text{Formule : } CT = (D \times C_u) + \left(\frac{D}{Q} \times C_l \right) + \left(\frac{Q}{2} \times C_p \right)$$

- **Pour Option A : $Q = 510$ (au prix de 480 DA)**

$$CT_{510} = (5\,000 \times 480) + \left(\frac{5\,000}{510} \times 2\,500 \right) + \left(\frac{510}{2} \times 96 \right)$$

$$CT_{510} = 2\,400\,000 + 24\,510 + 24\,480 = \mathbf{2\,448\,990\,DA}$$

- **Pour Option B : Q = 1000 (au prix de 450 DA)**

$$CT_{1000} = (5\,000 \times 450) + \left(\frac{5\,000}{1\,000} \times 2\,500 \right) + \left(\frac{1\,000}{2} \times 90 \right)$$

$$CT_{1000} = 2\,250\,000 + 12\,500 + 45\,000 = \mathbf{2\,307\,500\,DA}$$

Conclusion

Le coût total global le plus bas est obtenu pour l'Option B (2 307 500 DA). Malgré l'augmentation significative des coûts de possession due au stockage de lots plus volumineux (45 000 DA contre 24 480 DA), l'économie d'échelle réalisée sur le prix d'achat brut (un gain de 150 000 DA) compense largement.

Décision : L'acheteur doit commander par lots de **1 000 unités**.

CHAPITRE 7 : LE CHARGEMENT DES ATELIERS ET LA GESTION DES GOULOTS D'ÉTRANGLEMENT

Objectifs du chapitre :

À la fin de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

1. Comprendre les concepts de capacité théorique, capacité nominale et capacité utile d'un atelier.
2. Établir et analyser un profil de chargement (graphes de charge).
3. Identifier et localiser un goulot d'étranglement au sein d'un processus productif.
4. Appliquer les principes de la Théorie des Contraintes (TOC) et la méthode OPT (Optimized Production Technology).
5. Maximiser la marge globale d'un atelier sous contrainte de capacité.

1. Concepts Fondamentaux de la Capacité et du Chargement

Le **chargement** consiste à affecter les ordres de fabrication (OF) planifiés aux différents postes de travail ou ateliers, en vérifiant que le volume de travail requis ne dépasse pas les capacités disponibles (Chopra & Meindl, 2016).

1.1. Typologie des capacités

Avant de charger un atelier, le gestionnaire doit évaluer rigoureusement sa capacité réelle via trois niveaux :

- **La capacité théorique (ou design) :** Le maximum théorique qu'un poste peut produire dans des conditions idéales (ex: 24h/24, 7j/7, sans aucune panne).
- **La capacité nominale (ou disponible) :** Calculée sur la base de l'ouverture normale de l'atelier (ex: 2 équipes de 8 heures, 5 jours par semaine), corrigée par un coefficient d'efficience statistique.
- **La capacité utile (ou réelle) :** La capacité nette restante après déduction des arrêts planifiés (maintenance préventive, changements d'outils) et des aléas (pannes, absentéisme, rebuts).

1.2. Méthodologies de chargement

On distingue deux approches majeures pour planifier la charge :

1. **Le chargement infini :** On affecte les travaux aux postes sans tenir compte de la limite stricte de capacité. Cette méthode permet de mettre en évidence les périodes de surcharge pour trouver des solutions (heures supplémentaires, sous-traitance).
2. **Le chargement fini :** Le modèle n'autorise aucun dépassement de la capacité utile. Si un poste est saturé, les travaux excédentaires sont automatiquement décalés dans le temps (ordonnancement à capacité finie).

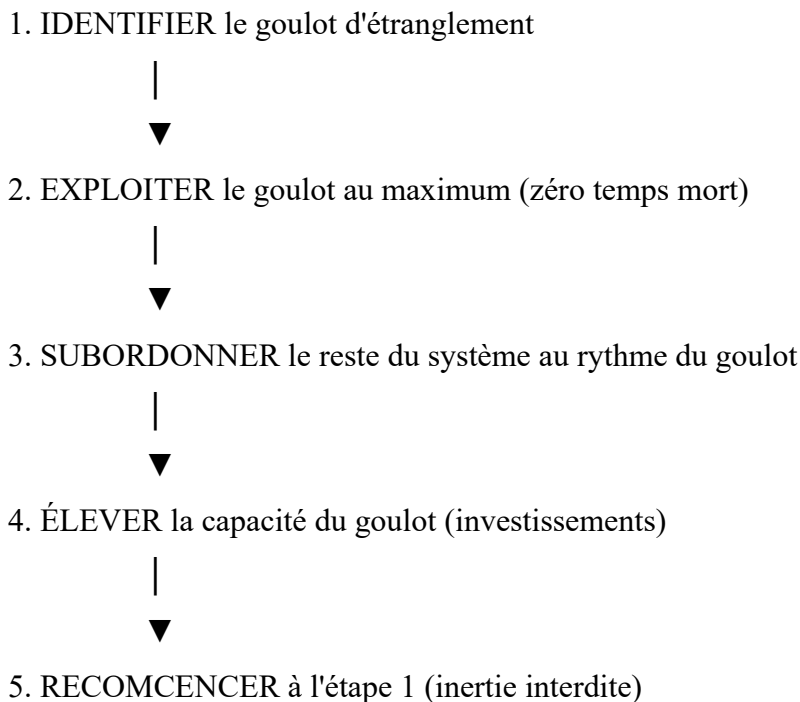
2. La Notion de Goulot d'Étranglement et la Théorie des Contraintes

Dans tout processus de production composé de plusieurs étapes séquentielles, les capacités des machines sont rarement parfaitement équilibrées.

Définition : Le **goulot d'étranglement** (ou *bottleneck*) est la ressource du système dont la capacité utile est inférieure à la demande qui lui est adressée. C'est elle qui détermine, à elle seule, le débit maximum (*throughput*) de toute l'usine (Goldratt, 1984).

Les 5 étapes de la Théorie des Contraintes (TOC)

Popularisée par Eliyahu M. Goldratt, la TOC propose une démarche d'amélioration continue structurée autour du goulot :



3. La Logique DBR (Drum-Buffer-Rope) et la méthode OPT

Pour piloter un atelier contenant un goulot sans générer d'en-cours excessifs, la méthode OPT utilise le concept **DBR (Tambour - Tampon - Corde)** :

- **Le Tambour (Drum) :** C'est le goulot d'étranglement. Il bat le rythme de toute l'usine. On planifie l'ensemble de la production en calquant les cadences sur ses capacités propres.
- **Le Tampon (Buffer) :** Un stock de sécurité placé juste *avant* le goulot. Son but est d'isoler le goulot des pannes survenues en amont pour s'assurer qu'il ne se retrouve jamais à court de matière.

- **La Corde (Rope) :** Un flux d'information virtuel qui relie le goulot au premier poste de l'usine. Elle interdit de lancer de nouvelles matières premières en production si le goulot n'est pas prêt à les traiter.

4. Application Pratique : Optimisation du Mix-Produit sous Contrainte

Une PME installée à la zone industrielle d'Arzew (Oran) fabrique deux produits métalliques, P1 et P2, qui passent successivement sur trois machines (M1,M2,M3). Le marché est prêt à absorber la totalité de la production.

Données techniques et financières :

- **Marge sur coût variable :** P1 génère **4 000 DA** de marge par unité ; P2 génère **6 000 DA** de marge par unité.
- **Capacité hebdomadaire utile des machines :** Chaque machine dispose de **2 400 minutes** utiles par semaine.

Temps de passage requis (en minutes par unité) :

Machine	Temps pour P1	Temps pour P2	Capacité Disponible
Machine M1	10 min	5 min	2 400 min
Machine M2	6 min	12 min	2 400 min
Machine M3	5 min	5 min	2 400 min

Résolution Étape par Étape :

Étape 1 : Identification du goulot si l'on ne produit qu'un seul type de produit

- Si on ne produit que P1 : Capacité max = $2400/10=240$ unités (limité par M1).
- Si on ne produit que P2 : Capacité max = $2400/12=200$ unités (limité par M2).

Imaginons que les prévisions commerciales demandent de produire **150 unités de P1** et **150 unités de P2** par semaine. Calculons la charge totale requise :

- Charge sur M1= $(150 \times 10) + (150 \times 5) = 1500 + 750 = 2250$ min (Taux de charge = 93,7%)
- Charge sur M2= $(150 \times 6) + (150 \times 12) = 900 + 1800 = 2700$ min (Taux de charge = 112,5%)
- Charge sur M3= $(150 \times 5) + (150 \times 5) = 750 + 750 = 1500$ min (Taux de charge = 62,5%)

Conclusion : La **Machine M2** est le **goulot d'étranglement**, car sa charge requise (2 700 min) dépasse sa capacité disponible (2 400 min).

Étape 2 : Détermination du Mix-Produit optimal selon la méthode de la Marge au Goulot

Une erreur managériale classique consisterait à privilégier le produit P2 car sa marge brute est plus élevée (6 000 DA contre 4 000 DA). La théorie des contraintes exige d'analyser la **marge générée par unité de temps passée sur le goulot (M2) :**

- Marge par minute au goulot pour P1 = $4000 \text{ DA} / 6 \text{ min} = 666,67 \text{ DA} / \text{minute}$
- Marge par minute au goulot pour P2 = $6000 \text{ DA} / 12 \text{ min} = 500,00 \text{ DA} / \text{minute}$

Décision stratégique : La machine M2 étant notre ressource rare, le produit P1 est en réalité le plus rentable car il utilise moins de temps de goulot pour générer de la marge. Il faut donc saturer l'usine en produisant d'abord le maximum possible de P1, puis utiliser le temps de goulot restant pour fabriquer du P2.

1. **Production maximale de P1 :** Limité par la capacité de M1 $\Rightarrow 240$ unités.
2. **Temps consommé sur le goulot M2 pour P1 :** $240 \times 6 \text{ min} = 1440 \text{ min}$.
3. **Temps restant sur le goulot M2 pour P2 :** $2400 - 1440 = 960 \text{ min}$.
4. **Quantité de P2 réalisable :** $960 \text{ min} / 12 \text{ min} = 80$ unités.

Mix Optimal Réalisable : 240 unités de P1 et 80 unités de P2.

Marge Maximale Global = $(240 \times 4000) + (80 \times 6000) = 1440000 \text{ DA} / \text{semaine}$

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Voici une série de trois exercices d'entraînement progressifs conçus pour le **Chapitre 7**. Ils permettront aux étudiants de Master de manipuler les concepts de profil de charge, d'identification de goulot et d'optimisation financière sous contrainte de capacité.

EXERCICE 1 : Analyse du profil de charge (Chargement infini vs fini)

Énoncé du problème

Le chef d'atelier d'une menuiserie industrielle située à Sidi Chami (Oran) doit planifier la charge de l'atelier de Ponçage pour les 4 semaines du mois de Juin. Cet atelier dispose de 2 machines identiques exploitées par 2 ouvriers qualifiés.

Données de capacité :

- L'atelier fonctionne 5 jours par semaine, à raison de 8 heures par jour.
- Le taux d'efficacité historique de l'atelier est de **90 %** (en raison des réglages et des pauses).

Le carnet de commandes (OF programmés) :

- **Semaine 1** : 65 heures de travail requises.
- **Semaine 2** : 82 heures de travail requises.
- **Semaine 3** : 70 heures de travail requises.
- **Semaine 4** : 55 heures de travail requises.

Travail demandé :

1. Calculer la capacité nominale hebdomadaire de l'atelier, puis sa capacité utile réelle (en heures).
2. Établir le profil de charge sous forme de tableau en calculant le taux de charge pour chaque semaine.
3. Identifier la ou les semaines en surcharge. Quelles solutions opérationnelles à court terme le manager peut-il mettre en œuvre pour réguler la charge ?

Corrigé détaillé de l'Exercice 1

1. Calcul des capacités

- **Capacité Nominale Hebdomadaire :**

Nombre de machines/ouvriers $\times$ Jours $\times$ Heures = $2 \times 5 \times 8 = 80$ heures / semaine

- **Capacité Utile Réelle :**

Capacité Nominale $\times$ Taux d'efficacité = $80 \times 0,90 = 72$ heures / semaine

2. Profil de charge et Taux de charge

Taux de charge (%) = Capacité utile Charge requise $\times 100$

Semaine	Charge requise (h)	Capacité Utile (h)	Écart (Capacité - Charge)	Taux de charge (%)	Status
Semaine 1	65	72	+ 7	90,3 %	Fluide
Semaine 2	82	72	- 10	113,9 %	Surcharge
Semaine 3	70	72	+ 2	97,2 %	Équilibré
Semaine 4	55	72	+ 17	76,4 %	Sous-charge

3. Diagnostic et décisions managériales

La **Semaine 2** présente une surcharge critique de **10 heures** (113,9%). La capacité utile de l'atelier est dépassée.

Solutions opérationnelles :

- **Aménagement du temps de travail :** Programmer 5 heures supplémentaires pour chaque ouvrier durant la semaine 2 (10h au total).
- **Lissage temporel (Ordonnancement) :** Décaler 10 heures de travail de la semaine 2 vers la semaine 4 qui dispose d'une large sous-charge (17 heures disponibles), à condition que les délais de livraison des clients finaux le permettent.
- **Amélioration de l'efficacité :** Reporter les opérations de maintenance non urgentes prévues en semaine 2.

EXERCICE 2 : Identification du goulot et maximisation de la marge au goulot (Le cas "Oran-Bottling")

Énoncé du problème

L'unité de production "Oran-Bottling" fabrique trois gammes de boissons gazeuses conditionnées : Jus de fruits (B1), Boisson énergisante (B2), et Soda classique (B3). Le processus de fabrication est linéaire et passe par trois étapes successives : le Siropage, la Carbonatation et l'Embouteillage.

Chaque atelier dispose d'une capacité utile de **40 heures par semaine** (soit 2 400 minutes).

Données économiques et techniques :

- **Demande du marché :** 100 lots de B1, 120 lots de B2, et 80 lots de B3 par semaine.
- **Marge sur Coût Variable (MCV) :**
 - B1 = 5 000 DA / lot
 - B2 = 8 000 DA / lot
 - B3 = 4 500 DA / lot

Temps opératoires (en minutes par lot) :

Atelier / Processus	Jus (B1)	Énergisante (B2)	Soda (B3)	Capacité Utile
Atelier 1 : Siropage	12 min	15 min	10 min	2 400 min
Atelier 2 : Carbonatation	6 min	20 min	12 min	2 400 min
Atelier 3 : Embouteillage	10 min	10 min	10 min	2 400 min

Travail demandé :

1. Calculer la charge totale requise (en minutes) pour chaque atelier si l'entreprise décide de satisfaire l'intégralité de la demande du marché.
2. Identifier l'atelier goulot d'étranglement.
3. Calculer la Marge sur Coût Variable par minute de goulot pour chaque produit.
4. Déterminer le plan de production (Mix-produit) optimal permettant de maximiser le profit hebdomadaire global de l'usine, et calculer la marge totale générée.

Corrigé détaillé de l'Exercice 2

1. Calcul de la charge totale par atelier

Charge = (Demande B1 × Temps B1) + (Demande B2 × Temps B2) + (Demande B3 × Temps B3)

- **Siropage** : $(100 \times 12) + (120 \times 15) + (80 \times 10) = 1200 + 1800 + 800 = 3800$ minutes
- **Carbonatation** : $(100 \times 6) + (120 \times 20) + (80 \times 12) = 600 + 2400 + 960 = 3960$ minutes
- **Embouteillage** : $(100 \times 10) + (120 \times 10) + (80 \times 10) = 1000 + 1200 + 800 = 3000$ minutes

2. Identification du goulot d'étranglement

Les trois ateliers ont besoin de plus de 2 400 minutes pour couvrir le marché. Cependant, l'**Atelier 2 (Carbonatation)** est le goulot d'étranglement le plus sévère du système, car sa charge requise (3 960 min) est celle qui dépasse le plus largement la capacité maximale disponible de 2 400 minutes (Taux de charge de 165%).

3. Calcul de la rentabilité au goulot (Marge par minute)

On divise la marge de chaque produit par son temps de passage sur l'Atelier 2 (Carbonatation) :

- **Produit B1** : $5000 \text{ DA} / 6 \text{ min} = 833,33 \text{ DA} / \text{minute}$
- **Produit B3** : $4500 \text{ DA} / 12 \text{ min} = 375,00 \text{ DA} / \text{minute}$
- **Produit B2** : $8000 \text{ DA} / 20 \text{ min} = 400,00 \text{ DA} / \text{minute}$

Ordre de priorité économique au goulot : 1er : B1 | 2ème : B2 | 3ème : B3.

4. Plan de production optimal (Mix-Produit)

On distribue les 2 400 minutes de l'Atelier 2 en suivant strictement l'ordre de priorité :

1. **Produire le maximum de B1 (Priorité 1)** : On fabrique la totalité de la demande, soit 100 lots.

Temps consommé au goulot : $100 \times 6 \text{ min} = 600 \text{ minutes}$.

Capacité restante au goulot : $2400 - 600 = 1800$ minutes.

2. **Produire le maximum de B2 (Priorité 2) :** La demande est de 120 lots. Temps nécessaire : $120 \times 20 = 2400$ min.

Comme il ne reste que 1 800 min, on produit ce que l'on peut : $1800 \text{ min} / 20 \text{ min} = 90$ lots de B2.

Capacité restante au goulot : $1800 - (90 \times 20) = 0$ minute.

3. **Produire le maximum de B3 (Priorité 3) :** Le goulot étant complètement saturé, on ne peut fabriquer **aucun lot de B3** (0 unité).

Marge Maximale Globale = $(100 \times 5000) + (90 \times 8000) + (0 \times 4500)$

Marge Maximale Globale = $500000 + 720000 + 0 = 1220000$ DA / semaine

EXERCICE 3 : Équilibrage de ligne et optimisation par la Théorie des Contraintes (TOC)

Énoncé du problème

Une entreprise de sous-traitance mécanique fabrique des pièces aéronautiques de haute précision. Le processus comprend 4 étapes successives exécutées par des machines spécialisées distinctes.

Matière Première $\longrightarrow$ [M1 : Découpe] $\longrightarrow$ [M2 : Fraisage] $\longrightarrow$ [M3 : Traitement] $\longrightarrow$ [M4 : Contrôle] $\longrightarrow$ Produit Fini

Les capacités de production maximales autonomes de chaque poste sont les suivantes :

- **Machine 1 (Découpe) :** Capable de traiter 25 pièces par heure.
- **Machine 2 (Fraisage) :** Capable de traiter 12 pièces par heure.
- **Machine 3 (Traitement thermique) :** Capable de traiter 18 pièces par heure.
- **Machine 4 (Contrôle Qualité) :** Capable de traiter 15 pièces par heure.

Travail demandé :

1. Déterminer la capacité globale actuelle de cette ligne de production. Justifier la réponse en identifiant le goulot d'étranglement.
2. Un ingénieur propose d'investir dans un logiciel d'optimisation pour la Machine 1 afin de faire passer sa capacité de 25 à 32 pièces par heure. Quel sera l'impact de cet investissement sur la production finale de l'usine ?
3. Suivant les principes de la Théorie des Contraintes (TOC), sur quelle machine la direction doit-elle concentrer ses investissements physiques et humains pour accroître le débit global ? Si cette contrainte est levée et sa capacité passe à 20 pièces par heure, quel devient le nouveau goulot de l'usine ?

Corrigé détaillé de l'Exercice 3

1. Capacité globale de la ligne et goulot

La capacité globale d'un système industriel en ligne est alignée sur celle de sa ressource la plus faible (Goldratt & Cox, 1984).

- La **Machine 2 (Fraisage)** affiche la capacité la plus basse avec seulement **12 pièces par heure**.
- **Conclusion** : C'est le goulot d'étranglement. La capacité maximale de toute l'usine est donc bridée à **12 pièces par heure**, peu importe la vitesse des autres machines.

2. Analyse de l'investissement sur la Machine 1

La Machine 1 n'est pas un goulot d'étranglement (elle a déjà une capacité d'avance de 25 pièces/h par rapport aux 12 pièces/h absorbées en aval par M2). Augmenter sa capacité à 32 pièces/h ne fera qu'accumuler des stocks d'en-cours (*Work in Process*) inutiles et coûteux juste devant la machine 2, sans augmenter d'une seule unité le débit de vente final. **L'impact sur la production finale est nul (0%).**

3. Application des étapes de la TOC

- Pour accroître le débit global de l'usine, la direction doit concentrer l'intégralité de ses efforts sur le goulot actuel, à savoir la **Machine 2 (Fraisage)** (Étape 4 de la TOC : Élever la capacité de la contrainte).

- **Déplacement du goulot :** Si la capacité de la Machine 2 est élevée à 20 pièces par heure, le classement des capacités de la ligne devient :
 - M1 : 25 pcs/h
 - M2 : 20 pcs/h (Ancien goulot amélioré)
 - M3 : 18 pcs/h
 - M4 : **15 pcs/h**

Le nouveau goulot d'étranglement devient la **Machine 4 (Contrôle Qualité)** avec sa capacité limite de 15 pièces par heure. L'usine devra alors recommencer la boucle d'amélioration continue (Étape 5 de la TOC) en se focalisant sur ce nouveau point de friction.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au terme de ce cheminement rigoureux à travers les méthodes quantitatives de la Recherche Opérationnelle (RO) et de l'Aide à la Décision, la trajectoire de ce polycopié de cours prend tout son sens. Conçu spécifiquement pour les étudiants et futurs managers en Sciences de Gestion, ce manuel a bridges l'écart fondamental entre la théorie mathématique pure et son application pragmatique au sein du tissu industriel et logistique.

1. Synthèse de la Démarche : Un Fil Conducteur Systémique

L'organisation des chapitres n'a pas seulement répondu à une logique modulaire, mais a suivi une véritable chaîne de création de valeur décisionnelle :

- **La phase de modélisation et d'optimisation déterministe (Chapitres 1, 2 et 3)** a permis de comprendre comment traduire des contraintes de ressources complexes (capacités d'ateliers, limites de marchés) sous forme algébrique. Le passage de la géométrie intuitive de la *méthode graphique* à la puissance matricielle de *l'algorithme du Simplexe* a démontré que la rareté des ressources peut être gouvernée de manière optimale pour maximiser le profit d'une organisation.
- **La transition vers l'analyse post-optimale et l'incertitude (Chapitre 4)** a confronté l'étudiant à la réalité volatile des environnements managériaux. L'introduction des critères en avenir incertain et des *arbres de décision* a fourni une grille de lecture robuste pour intégrer le risque et évaluer financièrement le coût de l'acquisition de l'information.
- **La planification opérationnelle de la Supply Chain (Chapitres 5 et 6)** a bouclé le système. Les *outils de prévision statistique* ont permis d'anticiper les comportements du marché à court et moyen termes, tandis que les *modèles de gestion des stocks (formule de Wilson et ROP)* ont converti ces prévisions en politiques concrètes d'approvisionnement, arbitrant scientifiquement entre coûts de détention et risques de rupture.

2. Le Manager de Demain : Au-delà du "Feeling", l'Ère des Données

Le message central de cet ouvrage réside dans la mutation du rôle du décideur. L'intuition managériale, bien que nécessaire pour l'impulsion stratégique, ne peut plus être le seul moteur de la gestion des opérations complexes. Face à la massification des données d'entreprise et à

la réduction des marges de compétitivité, la maîtrise des outils de la recherche opérationnelle devient un avantage stratégique majeur.

Les compétences développées dans ce cours (savoir lire un tableau du Simplexe, interpréter un prix d'ombre, calibrer un stock de sécurité ou évaluer une erreur MAPE) confèrent aux diplômés de Master une aptitude managériale recherchée : **la capacité de justifier des décisions rationnelles basées sur des modèles mathématiques reproductibles et auditables.**

3. Perspectives : Vers l'Optimisation Globale et l'Intelligence Artificielle

Bien que ce manuel couvre les piliers classiques et fondamentaux de la recherche opérationnelle, les horizons de la discipline sont en constante expansion. Les modèles présentés ici ouvrent la voie à des approches avancées que les étudiants pourront explorer en fin de cycle ou lors de travaux de recherche (mémoires de Master, doctorats) :

- **La programmation linéaire en nombres entiers (PLNE)** : Pour résoudre les problèmes de logistique où les variables ne peuvent pas être décimales (comme l'obtention de 10,5 bureaux au Chapitre 2).
- **L'optimisation multicritère** : Où l'on ne cherche plus seulement à maximiser un profit financier, mais à équilibrer simultanément des objectifs contradictoires (ex : minimiser l'empreinte carbone tout en maximisant la réactivité de livraison).
- **Le couplage RO et Intelligence Artificielle (Machine Learning)** : Où les algorithmes de prévision de la demande intègrent du Big Data pour nourrir de manière automatisée et dynamique des systèmes de gestion des stocks en temps réel.

En conclusion, la Recherche Opérationnelle ne doit pas être perçue par l'étudiant en gestion comme une contrainte académique abstraite, mais comme **une boîte à outils technologique pour le manager moderne**, un levier indispensable pour piloter la performance, maîtriser le risque et transformer l'incertitude en opportunité de croissance.

Références Bibliographiques

- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., & Cochran, J. J. (2016). *An introduction to management science: Quantitative approaches to decision making* (14th ed.). Cengage Learning.
- Chopra, S., & Meindl, P. (2016). *Supply chain management: Strategy, planning, and operation* (6th ed.). Pearson.
- Faulin, J., & Juan, A. A. (2014). *Introduction to linear programming*. Editorial UOC.
- Goldratt, E. M., & Cox, J. (1984). *The Goal: A process of ongoing improvement*. North River Press.
- Heizer, J., Render, B., & Munson, C. (2020). *Principles of operations management: Sustainability and supply chain management* (11th ed.). Pearson.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to operations research* (11th ed.). McGraw-Hill Education.
- Render, B., Stair, R. M., Hanna, M. E., & Hale, T. S. (2018). *Quantitative analysis for management* (13th ed.). Pearson Education.
- Taha, H. A. (2017). *Operations research: An introduction* (10th ed.). Pearson.

ANNEXE

Voici la **Table de la Loi Normale Centrée Réduite**.

Cette table donne la probabilité $P(Z \leq z)$ pour des valeurs de z positives, ce qui correspond à la fonction de répartition $\Pi(z)$ d'une loi normale moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\delta = 1$. Elle est indispensable aux étudiants de Master pour calculer les **stocks de sécurité** (Chapitre 6) et analyser les **risques de décision** (Chapitre 4).

Table pour les valeurs de z positives : $P(Z \leq z)$

Pour trouver la probabilité correspondant à un score z (par exemple $z = 1,65$) :

1. Cherchez la ligne correspondant aux dixièmes (ici **1,6**).
2. Cherchez la colonne correspondant aux centièmes (ici **0,05**).
3. L'intersection vous donne la probabilité (ici **0,9505**, soit environ 95%).

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Repères rapides (Valeurs critiques pour les niveaux de service courants)

Pour éviter aux étudiants de chercher systématiquement dans la table lors des examens de gestion des opérations, voici les correspondances directes les plus utilisées pour le calcul du **Stock de Sécurité** ($SS = Z \delta_L$) :

- **Niveau de service de 90 %** (Risque de rupture de 10 %) : $Z = 1,28$
- **Niveau de service de 95 %** (Risque de rupture de 5 %) : $Z = 1,65$
- **Niveau de service de 98 %** (Risque de rupture de 2 %) : $Z = 2,05$
- **Niveau de service de 99 %** (Risque de rupture de 1 %) : $Z = 2,33$

➤ **Rappel de propriété pour les valeurs négatives :**

La courbe étant parfaitement symétrique, si un étudiant doit calculer la probabilité pour une valeur négative de $-z$, il appliquera la formule suivante :

$$P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z)$$

Résumé :

Ce polycopié, rédigé par M. Hakka Mohammed Azzeddine de l'Université d'Oran 2, est un manuel de référence sur les Méthodes Quantitatives de Management destiné aux étudiants de Master 1 en Sciences de Gestion. Alliant rigueur mathématique et applications concrètes, l'ouvrage vise à substituer le pilotage intuitif par des décisions scientifiques axées sur les données. À travers une approche pédagogique axée sur la pratique ("learning by doing"), le manuscrit s'articule autour de sept chapitres complémentaires. Il couvre l'optimisation des ressources via la programmation linéaire, sa résolution graphique et l'algorithme du Simplexe. L'auteur y explore également la gouvernance du risque par les arbres de décision, le pilotage de la Supply Chain grâce aux prévisions de la demande et à la gestion des stocks (formule de Wilson), ainsi que la maîtrise des capacités industrielles via la Théorie des Contraintes.

ملخص :

تعد هذه المطبوعة البيداغوجية، التي أعدها الأستاذ حكة محمد عز الدين بجامعة وهران 2، دليلاً مرجعياً في "الأساليب الكمية للتسيير" موجه لطلبة السنة الأولى ماستر علوم التسيير. يهدف المؤلف من خلالها إلى دمج الصرامة الرياضية بالتطبيقات الإدارية، لتعويض التسيير القائم على الحدس باتخاذ قرارات علمية مبنية على البيانات. يركز الكتاب على منهجية بيداغوجية نشطة تعتمد على "التعلم بالممارسة"، وينقسم إلى سبعة فصول متكاملة. تشمل هذه الفصول استمثال الموارد عبر البرمجة الخطية، وحلها هندسياً بالطريقة البيانية أو جبرياً بخوارزمية السامبلكس. كما يتناول المؤلف تسيير المخاطر باستخدام أشجار القرار، وقيادة سلاسل الإمداد عبر التنبؤ بالطلب وتسيير المخزونات (معادلة ويلسون)، بالإضافة إلى التحكم في القدرات الإنتاجية للمؤسسة بالاعتماد على نظرية القيود.

Abstract:

This course handout, prepared by Mr. Hakka Mohammed Azzeddine from the University of Oran 2, serves as a reference manual on Quantitative Management Methods for first-year Master's students in Management Sciences. Combining mathematical rigor with business applications, the textbook aims to replace intuitive management with data-driven scientific decisions. Adopting a dynamic "learning by doing" pedagogical approach, the manuscript is structured around seven comprehensive chapters. It encompasses resource optimization using linear programming, graphical resolution methods, and the Simplex algorithm. Furthermore, the author explores risk governance through decision trees, supply chain management using demand forecasting and inventory optimization (Wilson formula), and operational capacity management based on the Theory of Constraints.