Université d'Oran 2

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

POLYCOPIÉ

Statistique 2

Domaine S.EG.C (Semestre 2)

Socle commun

Présenté par :

Mme DJENNANE Hayat

Maître de conférences "A"

Juin 2026

Avant-propos

Le présent polycopié est destiné aux étudiants de première année de Licence (L1) du système LMD inscrits dans les différentes filières de la Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion. Il a été conçu conformément au programme officiel du module **« Statistique 2 »**, tel que défini par le Comité Pédagogique National du Domaine de Formation Sciences Économiques, de Gestion et des Sciences Commerciales (CPND-SEGC), en application de la réglementation en vigueur et conformément à l'arrêté n° 1017 du 11 septembre 2025 modifiant et complétant l'arrêté n° 802 du 07 juillet 2022 fixant le programme d'enseignement pour de la licence dans le domaine S.E.G.C.

Ce module s'inscrit dans la continuité des enseignements de statistique descriptive dispensés au premier semestre et constitue une étape fondamentale dans l'acquisition des méthodes quantitatives nécessaires à l'analyse des phénomènes économiques, financiers et managériaux. Il vise à initier les étudiants aux concepts essentiels de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique, qui constituent le fondement de nombreuses disciplines telles que l'économétrie, l'analyse des données, la recherche opérationnelle et les méthodes d'aide à la décision.

L'objectif de ce polycopié est de mettre à la disposition des étudiants un support pédagogique à la fois rigoureux, clair et accessible, leur permettant d'assimiler progressivement les notions fondamentales du module. Une attention particulière a été accordée à la présentation des concepts théoriques, à l'illustration des méthodes de calcul ainsi qu'à la résolution d'exemples et d'exercices favorisant la compréhension et l'application des connaissances acquises.

Le contenu de cet ouvrage couvre l'ensemble des thèmes prévus dans le programme officiel. Il débute par les notions préliminaires relatives à la statistique mathématique et à la théorie des probabilités, avant d'aborder la théorie des ensembles et les principaux symboles mathématiques. Il présente ensuite les méthodes de dénombrement et les techniques d'analyse combinatoire, indispensables au calcul des probabilités. Les notions de probabilité, de probabilité conditionnelle et de théorème de Bayes sont ensuite développées, suivies de l'étude des variables aléatoires discrètes et continues ainsi que des principales lois de probabilité utilisées dans les sciences économiques et de gestion.

Afin de faciliter l'apprentissage, chaque chapitre est accompagné d'exemples d'application et d'exercices corrigés permettant aux étudiants de consolider leurs acquis et de développer leur capacité de raisonnement et de résolution de problèmes. Des exercices complémentaires sont également proposés pour encourager le travail personnel et l'approfondissement des connaissances.

Ce travail est le fruit de plusieurs années d'expérience dans l'enseignement universitaire. Il traduit la volonté de contribuer à l'amélioration des conditions d'apprentissage des étudiants en leur offrant un document de référence conforme aux exigences pédagogiques et scientifiques de la formation universitaire.

Je souhaite que ce polycopié puisse constituer un outil utile et efficace pour les étudiants dans leur parcours académique et qu'il les aide à acquérir les compétences quantitatives indispensables à la poursuite de leurs études et à leur future vie professionnelle.

Je tiens enfin à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenue et encouragée dans la réalisation de ce travail. Mes remerciements s'adressent tout particulièrement à ma famille plus particulièrement à mon époux pour son soutien constant, sa patience et ses encouragements. J'ai également une pensée reconnaissante pour tous mes collègues et étudiants qui, à travers leurs remarques et leurs échanges, ont contribué à enrichir mon expérience pédagogique. Enfin, je dédie ce travail à la mémoire de mon père, Ahmed Djennane, et de mon beau-frère, Ahmed Khantache, dont le souvenir demeure une source permanente d'inspiration.

Dr DJENNANE Hayat
Maître de Conférences A
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed
Juin 2026

SOMMAIRE

Avant-propos I
Sommaire III

Introduction générale 1

Chapitre I : Généralités et terminologie de la statistique mathématique et de la théorie des probabilités

Chapitre II : Théorie des ensembles et rappels sur les principaux symboles mathématiques 13

Exercices corrigés du chapitre II 17
Solution exercices du chapitre II 18

Chapitre III : Méthodes de dénombrement et analyse combinatoire 21

Chapitre III : Méthodes de dénombrement et analyse combinatoire

Exercices corrigés du chapitre III 28
Solution exercices du chapitre III 29

Chapitre IV : Introduction au calcul des probabilités 37

Exercices corrigés du chapitre IV 48
Solution exercices du chapitre IV 50

Chapitre V : Variables aléatoires 57

Exercices corrigés du chapitre V 77
Solutions exercices du chapitre V 78
Exercices non corrigés du chapitre V 88

Chapitre VI : Lois de probabilités usuelles : Discrètes et continues 90

Exercices corrigés du chapitre VI 117
Solutions exercices du chapitre VI 119

Conclusion générale 130
Tables statistiques usuelles 131
Bibliographie 137
Table des matières 139

Introduction générale :

La statistique mathématique et le calcul des probabilités occupent aujourd'hui une place centrale dans l'analyse des phénomènes économiques, financiers, commerciaux et managériaux. Face à la complexité croissante des données et à la nécessité de prendre des décisions fondées sur des informations fiables, la maîtrise de ces disciplines constitue un préalable indispensable à la formation des étudiants en sciences économiques, commerciales et de gestion.

Le présent polycopié a été élaboré conformément au programme officiel du module **« Statistique 2 »**, enseigné au deuxième semestre de la première année de Licence à la Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion. Il s'adresse aux étudiants des différentes spécialités de la faculté et a pour vocation de leur fournir les connaissances fondamentales nécessaires à la compréhension des méthodes probabilistes et statistiques qui seront mobilisées tout au long de leur cursus universitaire.

S'inscrivant dans la continuité du module de statistique descriptive étudié au premier semestre, cet enseignement introduit les concepts et les outils de base de la théorie des probabilités ainsi que les fondements de la statistique mathématique. Ces connaissances constituent un socle essentiel pour l'étude ultérieure des techniques quantitatives avancées, de l'économétrie, de la recherche opérationnelle et de l'analyse des données.

Ce support pédagogique est le résultat de plusieurs années d'expérience dans l'enseignement de ce module. Son principal objectif est d'offrir aux étudiants un document de référence à la fois rigoureux, clair et accessible, leur permettant d'acquérir progressivement les notions théoriques et les méthodes de calcul indispensables à la résolution de problèmes concrets. Une attention particulière a été accordée à la présentation pédagogique des contenus à travers des exemples illustratifs, des applications pratiques et des exercices corrigés favorisant l'assimilation des concepts étudiés.

Le contenu du polycopié est organisé selon une progression logique allant des notions les plus élémentaires vers les concepts plus élaborés. Après une présentation des généralités et du vocabulaire fondamental de la statistique mathématique et des probabilités, le document introduit la théorie des ensembles et les principaux symboles mathématiques nécessaires à la compréhension du raisonnement probabiliste. Les méthodes de dénombrement et les techniques d'analyse combinatoire sont ensuite développées en tant qu'outils préliminaires au calcul des probabilités.

Les chapitres suivants sont consacrés à l'étude des concepts fondamentaux des, notamment les expériences aléatoires, les événements, les probabilités conditionnelles et le théorème de Bayes. Le polycopié aborde ensuite la notion de variable aléatoire, discrète ou continue, ainsi que les principales caractéristiques permettant de décrire sa distribution. Enfin, il présente les lois de probabilité les plus couramment utilisées dans les sciences économiques et de gestion, en mettant l'accent sur leurs propriétés et leurs domaines d'application.

Afin d'assurer une meillere cohérence pédagogique, le contenu est structuré en six chapitres :

- **Chapitre I :** Généralités et terminologie de la statistique mathématique et de la théorie des probabilités ;
- **Chapitre II :** Théorie des ensembles et rappels sur les principaux symboles mathématiques ;
- **Chapitre III :** Méthodes de dénombrement et analyse combinatoire ;
- **Chapitre IV :** Introduction au calcul des probabilités ;
- **Chapitre V :** Variables aléatoires discrètes et continues ;
- **Chapitre VI :** Lois de probabilité usuelles : lois discrètes et lois continues.

Nous souhaitons que ce polycopié constitue un support d'apprentissage utile et efficace, permettant aux étudiants de développer les compétences quantitatives nécessaires à la poursuite de leurs études et à leur future insertion professionnelle dans les domaines de l'économie, de la gestion, de la finance et de la recherche.

Chapitre I : Généralités et terminologie de la statistique mathématique et de la théorie des probabilités

Introduction

La statistique occupe aujourd'hui une place centrale dans la recherche scientifique et la prise de décision. Elle constitue un ensemble de méthodes permettant de collecter, d'organiser, de résumer, d'analyser et d'interpréter des données relatives à des phénomènes observés. Associée à la théorie des probabilités, elle fournit des outils rigoureux pour l'étude des phénomènes aléatoires et l'aide à la décision dans des contextes d'incertitude.

Ce chapitre présente un aperçu historique du développement de la statistique, sa définition, ses principales branches ainsi que les concepts fondamentaux nécessaires à l'étude de la statistique mathématique et du calcul des probabilités

1.1 Aperçu historique du développement de la statistique

La statistique est l'une des plus anciennes disciplines liées à l'observation et à l'analyse des phénomènes sociaux et économiques. Son origine remonte à l'Antiquité, où les premières civilisations procédaient déjà à des recensements de population, des inventaires de richesses et des relevés de productions agricoles afin de mieux gérer les ressources disponibles.

Jusqu'au XVIIIe siècle, les activités statistiques se limitaient essentiellement au dénombrement des individus, des biens et des ressources. Les informations recueillies servaient principalement à des fins administratives, fiscales et militaires. Bien que certaines formes de classification des données existaient déjà, aucune méthode scientifique d'analyse statistique n'avait encore été développée.

La civilisation islamique a également contribué au développement des pratiques statistiques à travers les recensements réalisés durant l'époque du califat pour la gestion des finances publiques et la distribution des ressources du trésor musulman. En Europe, les recensements de population se sont progressivement développés à partir du XIe siècle afin de répondre aux besoins administratifs des États.

L'émergence de la théorie moderne des probabilités est étroitement liée aux jeux de hasard qui connaissaient un grand succès en Europe au XVIIe siècle. Les travaux pionniers de Blaise Pascal (1623-1662) et de Pierre de Fermat (1601-

1665), notamment à travers leurs échanges scientifiques, ont permis de poser les premières bases mathématiques de l'étude du hasard. Pascal désignait alors cette nouvelle discipline sous le nom de « géométrie du hasard ».

Au XIXe siècle, la théorie des probabilités connut un essor considérable grâce aux travaux de Pierre-Simon Laplace et de Carl Friedrich Gauss. Ces chercheurs développèrent notamment la loi normale, initialement utilisée pour l'étude des erreurs de mesure en astronomie. Cette période fut également marquée par les travaux d'Adolphe Quételet sur les phénomènes sociaux ainsi que par l'apparition des premiers concepts liés à la corrélation et à la régression.

À partir du milieu du XXe siècle, le développement de l'informatique et des méthodes quantitatives a profondément transformé la statistique. Les théories de l'estimation, des tests statistiques et de l'analyse des données se sont largement développées. Aujourd'hui, les méthodes statistiques sont utilisées dans de nombreux domaines tels que l'économie, la gestion, la finance, les sciences sociales, la médecine, l'ingénierie et l'intelligence artificielle.

1.2 Définition de la statistique

La statistique est une branche des mathématiques appliquées qui regroupe l'ensemble des méthodes permettant de collecter, organiser, présenter, analyser et interpréter des données afin de décrire des phénomènes et de faciliter la prise de décision.

Dans son acception ancienne, la statistique se limitait essentiellement au dénombrement des individus ou des objets d'une population donnée. Elle était alors considérée comme la « science du comptage ».

Avec le développement de la théorie de l'échantillonnage et de la théorie des probabilités, la statistique est devenue une discipline scientifique autonome permettant de tirer des conclusions sur une population à partir de l'étude d'un échantillon représentatif.

La statistique moderne permet notamment :

- d'observer et de décrire les phénomènes ;
- d'organiser et de synthétiser l'information ;
- d'analyser les données recueillies ;
- d'établir des prévisions ;
- de formuler des conclusions scientifiques ;
- d'aider à la prise de décision.

Ainsi, la statistique ne se limite pas à la manipulation de données numériques. Elle constitue une véritable méthode scientifique permettant :

- la collecte des informations ;
- leur organisation sous forme de tableaux et de graphiques ;
- leur synthèse à l'aide d'indicateurs numériques ;
- l'étude des relations entre les variables observées ;
- l'élaboration de modèles de prévision et d'aide à la décision.

1.3 Les branches de la statistique

La statistique est généralement divisée en deux grandes branches complémentaires.

A. La statistique descriptive

La statistique descriptive regroupe l'ensemble des méthodes permettant de résumer et de présenter les données observées sous une forme simplifiée et compréhensible.

Elle utilise notamment :

- les tableaux statistiques ;
- les représentations graphiques ;
- les mesures de tendance centrale (moyenne, médiane, mode) ;
- les mesures de dispersion (variance, écart-type, étendue).

Son objectif principal est de décrire fidèlement les caractéristiques d'un ensemble de données sans chercher à généraliser les résultats à une population plus large.

B. La statistique inférentielle (ou statistique analytique)

La statistique inférentielle a pour objectif de tirer des conclusions concernant une population à partir de l'étude d'un échantillon.

Elle permet notamment :

- d'estimer des paramètres inconnus ;
- de tester des hypothèses ;
- de réaliser des prévisions ;
- d'évaluer les risques liés à la prise de décision.

Cette branche repose fortement sur la théorie des probabilités, qui constitue son fondement théorique.

1.4 La théorie des probabilités et son rôle en statistique

La théorie des probabilités est la branche des mathématiques qui étudie les phénomènes aléatoires, c'est-à-dire les phénomènes dont l'issue ne peut être déterminée avec certitude avant leur réalisation.

Elle fournit les outils nécessaires pour :

- mesurer l'incertitude ;
- modéliser les phénomènes aléatoires ;
- calculer les chances de réalisation d'un événement ;
- effectuer des prévisions fondées sur l'observation de données.

La théorie des probabilités constitue le fondement mathématique de la statistique inférentielle. Elle permet de justifier scientifiquement les méthodes d'estimation, de prévision et de prise de décision utilisées dans de nombreux domaines.

1.5 Terminologie fondamentale de la statistique

L'étude de la statistique mathématique et de la théorie des probabilités nécessite la maîtrise d'un ensemble de notions fondamentales qui constituent le vocabulaire de base de toute analyse statistique. Ces concepts permettent de décrire les phénomènes observés, de structurer les données recueillies et de préparer les traitements statistiques ultérieurs.

A. Population statistique

La population statistique désigne l'ensemble des unités sur lesquelles porte une étude statistique. Elle regroupe tous les individus concernés par le phénomène étudié.

Selon le contexte, la population peut être constituée de personnes, d'entreprises, de ménages, de produits ou de tout autre ensemble d'éléments présentant une caractéristique commune.

Exemples :

- L'ensemble des étudiants inscrits dans une université ;
- Toutes les entreprises d'un secteur d'activité donné ;

- Les ménages d'une commune ou d'une région.

On distingue généralement :

- **La population finie**, lorsque le nombre d'individus est limité ;
- **La population infinie**, lorsque le nombre d'individus est illimité ou théoriquement très grand.

B. Individu statistique

L'individu statistique, également appelé unité statistique, représente l'élément de base composant la population étudiée.

Chaque individu constitue une unité d'observation sur laquelle sont recueillies les informations nécessaires à l'étude.

Exemples :

- Un étudiant dans une enquête universitaire ;
- Une entreprise dans une étude économique ;
- Un ménage dans une enquête socio-économique.

C. Caractère statistique

Le caractère statistique est la propriété ou la caractéristique observée sur chaque individu de la population.

L'objectif de l'étude statistique consiste généralement à analyser les variations de ce caractère au sein de la population.

Exemples :

- L'âge des étudiants ;
- Le revenu mensuel des ménages ;
- Le chiffre d'affaires des entreprises ;
- Le niveau d'instruction d'une population.

D. Modalités d'un caractère

Les modalités correspondent aux différentes valeurs ou catégories que peut prendre un caractère statistique.

Exemples :

Pour le caractère « sexe », les modalités sont :

- Masculin ;
- Féminin.

Pour le caractère « mention obtenue », les modalités peuvent être :

- Passable ;
- Assez bien ;
- Bien ;
- Très bien.

L'ensemble des modalités doit couvrir toutes les situations possibles observées dans la population.

E. Variables statistiques

Une variable statistique est un caractère susceptible de prendre différentes valeurs d'un individu à un autre.

Les variables sont généralement classées en deux grandes catégories : les variables qualitatives et les variables quantitatives.

a) Variables qualitatives

Les variables qualitatives décrivent des caractéristiques non mesurables numériquement. Elles expriment une qualité, une catégorie ou un état.

On distingue :

· **<u>Variables qualitatives nominales</u>**

Les modalités ne peuvent être ni classées ni ordonnées.

Exemples :

- Nationalité ;
- Groupe sanguin ;
- État civil ;

- Filière universitaire.

· **Variables qualitatives ordinales**

Les modalités peuvent être classées selon un ordre logique ou hiérarchique.

Exemples :

- Niveau de satisfaction : faible, moyen, élevé ;
- Mention obtenue : passable, assez bien, bien, très bien ;
- Niveau d'étude : licence, master, doctorat.

b) Variables quantitatives

Les variables quantitatives prennent des valeurs numériques exprimant une quantité ou une mesure.

Elles se subdivisent en deux catégories.

· **Variables quantitatives discrètes**

Une variable quantitative discrète ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs distinctes, généralement obtenues par comptage.

Exemples :

- Nombre d'enfants par famille ;
- Nombre de véhicules possédés par un ménage ;
- Nombre de clients reçus quotidiennement.

· **Variables quantitatives continues**

Une variable quantitative continue peut prendre toute valeur réelle appartenant à un intervalle donné. Ces valeurs sont généralement obtenues par mesure.

Exemples :

- Taille d'un individu ;
- Poids d'un produit ;
- Durée de vie d'un équipement ;
- Temps nécessaire pour accomplir une tâche.

F. Échantillon statistique

Dans de nombreuses situations, il est difficile ou impossible d'étudier l'ensemble de la population. On sélectionne alors un sous-ensemble appelé échantillon.

Un échantillon est donc une partie de la population choisie de manière à représenter le plus fidèlement possible les caractéristiques de celle-ci.

Les conclusions obtenues à partir de l'échantillon pourront ensuite être généralisées à l'ensemble de la population grâce aux méthodes de la statistique inférentielle.

G. Paramètre statistique

Un paramètre statistique est une mesure numérique calculée à partir de l'ensemble des individus de la population.

Les paramètres décrivent les caractéristiques réelles de la population et sont généralement inconnus lorsque celle-ci est très vaste.

Parmi les paramètres les plus utilisés figurent :

- La moyenne de la population ($\boldsymbol{\mu}$) ;
- La variance de la population ($\boldsymbol{\sigma^2}$) ;
- L'écart-type de la population ($\boldsymbol{\sigma}$) ;
- La proportion d'individus possédant une caractéristique donnée (**P** ou **p**).

H. Statistique ou estimateur

Une statistique est une mesure calculée à partir des observations d'un échantillon.

Elle constitue une approximation du paramètre correspondant dans la population.

Par exemple :

- La moyenne d'échantillon ($\boldsymbol{\overline{X}}$) estime la moyenne de la population (μ) ;
- La variance d'échantillon ($\boldsymbol{S^2}$) estime la variance de la population ($\boldsymbol{\sigma^2}$) ;
- La proportion observée (**p**) estime la proportion réelle (**P**).

I. Recensement et sondage

Les données statistiques peuvent être collectées selon deux méthodes principales.

a) Le recensement

Le recensement consiste à observer et à enregistrer les informations concernant tous les individus de la population.

Cette méthode permet d'obtenir des résultats très précis, mais elle est souvent coûteuse en temps et en ressources.

b) Le sondage

Le sondage consiste à étudier uniquement un échantillon représentatif de la population.

Cette méthode est plus rapide et moins coûteuse que le recensement. Elle constitue aujourd'hui la technique la plus utilisée dans les enquêtes économiques, sociales et commerciales.

J. Relation entre population, échantillon, paramètre et statistique

La démarche statistique peut être résumée de la manière suivante :

- La **population** est l'ensemble des individus étudiés ;
- L'**échantillon** est une partie de cette population ;
- Le **paramètre** décrit une caractéristique de la population ;
- La **statistique** est calculée sur l'échantillon afin d'estimer le paramètre inconnu.

Ces notions constituent les fondements de la statistique inférentielle et seront utilisées tout au long de l'étude de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique.

Conclusion

La statistique et la théorie des probabilités constituent aujourd'hui des outils indispensables à l'analyse des phénomènes économiques, sociaux et scientifiques. Après avoir présenté leur évolution historique, leurs définitions et leurs principales branches, les chapitres suivants introduiront les notions

fondamentales de la théorie des ensembles et du calcul des probabilités, qui serviront de base à l'étude des variables aléatoires et des lois de probabilité.

Chapitre II : Théorie des ensembles et rappels sur les principaux symboles mathématiques

Ce premier chapitre est consacré à la présentation des notions fondamentales et des concepts de base de la théorie des ensembles, indispensables à une approche moderne de la théorie des probabilités.

2.1 Ensembles et éléments

Un ensemble peut être défini comme une collection ou un regroupement d'objets clairement identifiés et bien déterminés. Les objets qui composent cet ensemble sont appelés ses **éléments** ou ses **membres**. Lorsqu'un objet appartient à un ensemble, on exprime cette relation à l'aide d'une notation spécifique. On écrit : $x \in A$ si p est un élément de l'ensemble A.

Si chaque élément de A appartient aussi à un ensemble B, c'est-à-dire si $x \in A$ implique $x \in B$, on dit alors que A est un sous-ensemble de B, ou que A est contenu dans B ; ce qu'on écrit :

$$A \subset B \text{ ou } B \supset A$$

Deux ensembles sont identiques si chacun d'eux est contenu dans l'autre, et l'on écrit :

$$A = B \quad \text{si et seulement si} \quad A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A$$

On représente les négations de $x \in A$, $A \subset B$ et $A = B$ par respectivement $x \notin A$,

$A \not\subset B$ et $A \neq B$.

On particularise un ensemble donné soit en dénombrant ses éléments, soit en établissant des propriétés caractérisant ses éléments.

2.3 Opérations sur les ensembles

Les ensembles seront principalement notés à l'aide de lettres majuscules A, B, C, D….etc, tandis que les objets qui les composent, ses éléments, seront désignés par des lettres minuscules i, j, k, l, x, y,…etc.

Pour signifier l'appartenance d'un élément i à un ensemble A, on dit parfois que "i est dans A", on le note $i \in A$. Si au contraire un élément i n'appartient pas à A, on note $i \notin A$.

A. Lois de l'algèbre des ensembles

Propriétés 1.1 *(Lois idempotentes)*

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Propriétés 1.2 *(Lois associatives)*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propriétés 1.3 *(Lois commutatives)*

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Propriétés 1.4 *(Lois de distributivité)*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Propriétés 1.5 *(Lois d'identité)*

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Propriétés 1.6 *(Lois de complémentarité)*

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{\emptyset} = \Omega$$

Propriétés 1.7 *(Lois de Morgan)*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

B. Opérations ensemblistes et opérations logiques :

On peut dès à présent noter le lien entre ces opérations et les opérations (ou connecteurs) logiques " OU", " ET " et " OU " : Un élément de **A∪B** est un élément qui appartient à **A** "**OU**" à **B**. Un élément de **A** ∩ **B** est un élément qui appartient à **A** et à **B**. Un élément de A est un élément qui n'appartient pas à **A**.

a. Ensemble fini :

Définition 1 : On appelle ensemble fini un ensemble ayant un nombre fini d'éléments distincts.

Définition 2 : Le nombre d'éléments d'un ensemble fini A est appelé cardinal de A, noté card [A].

Exemple : E = {*a; b; c*} *et card* [*E*] = 3.

Cardinal

Propriétés : Soient **A** et **B** deux ensembles finis quelconques,

$$card[A \cup B] = card[A] + card[B] - card[A \cap B]$$

Si A et B sont disjoints, c'est-à-dire qu'A ∩ B = ∅ alors,

$$Card\ [A \cup B] = card[A] + card[B]$$

Corollaire : *Soit A est un sous ensemble de E.*

$$card[\overline{A}] = card[E] - card[A]$$

Cardinal d'un produit cartésien :

Définition 3 : *Soient* **X** *et* **Y** *deux ensembles, le* ***produit cartésien*** *noté X .Y* est l'ensemble de tous les couples ***(a ; b)*** où ***a*** est élément de ***X*** et ***b*** élément de ***Y***.

Remarque : X.Y est différent de **Y.X**.

Théorème : Si **X** et **Y** sont finis, on a :

$$\textbf{Card [X × Y] = card [X] . card [Y]}$$

b. Ensembles finis et ensembles dénombrables

Un ensemble peut être fini ou infini. Un ensemble est fini s'il est vide ou s'il contient exactement n éléments, n étant un entier positif. Dans le cas contraire, l'ensemble est infini.

Exemple 1 : Soit A l'ensemble des mois de l'année, c'est-à-dire :

A = {Janvier, février, mars, avril,…, octobre, novembre, décembre).

Alors A est fini.

Exemple 2 : Soit B l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire :

B = {0, 1, 2, 3, 4,…).

Alors B est infini.

Un ensemble est dénombrable s'il est fini ou si l'on peut ranger sous la forme d'une suite. On dit dans ce cas qu'il est dénombrable. Dans le cas contraire, l'ensemble est non dénombrable. L'ensemble de l'exemple 1 est fini, mais l'on peut démontrer que l'ensemble de l'exemple 2 est infini et dénombrable.

Exercices corrigés du chapitre II :

Exercice 1 :

$$\Omega = \{a, b, c, d, e\}$$

et

$$A = \{a, b, d\} \; ; \quad B = \{b, d, e\}$$

Travail à faire : Calculez :

$$A \cup B \; ; \; B \cap A \; ; \; \overline{B} \; ; \; B - A \; ; \; \overline{A} \cap B \; ; \; A \cup \overline{B} \; ; \; \overline{A} \cap \overline{B} \; ; \; \overline{B} - \overline{A} \; ;$$

$$(\overline{A \cap B}) \; ; \; (\overline{A \cup B})$$

Exercice 2 :

On lance simultanément (au même instant) une pièce de monnaie et un dé équilibrés. Soient les événements suivants :

- **A** : obtenir **Face** et un nombre pair ;
- **B** : obtenir **Pile** et un nombre impair ;
- **C** : obtenir un nombre premier différent de 1.

Travail à faire :

a) Déterminer l'ensemble fondamental (univers) de cette expérience aléatoire.

b) Déterminer les événements suivants :

A ; B ; C ; (A ∪ B) ; (C ∪ A) ; (B ∪ C) ; (A ∩ B) ; (C ∩ B) ; (C ∩ A)

Exercice 3 :

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré deux fois successivement (ou, de manière équivalente, à lancer simultanément deux dés équilibrés).

Travail à faire :

a) Déterminer l'ensemble fondamental (univers) de cette expérience aléatoire.
b) Identifier les sous-ensembles de Ω correspondant aux événements suivants :
   - Obtenir deux nombres dont la somme est égale à 7 ;
   - Obtenir deux nombres dont la somme est égale à 11 ;
   - Obtenir deux nombres dont la somme est égale à 4.

Solutions exercices du chapitre II :

Solution exercice 1 :

- $A \cup B = \{a, b, d, e\}$
- $B \cap A = \{b, d\}$
- $\overline{B} = \{a, c\}$
- $B - A = \{e\} \rightarrow B - (A \cap B)$

  La différence de deux ensembles est l'ensemble des éléments qui appartiennent au premier ensemble (à **B**) mais n'appartiennent pas au second (à **A**).
- $\overline{A} \cap B = \{e\}$

  Parce que: $\overline{A} = \{c, e\}$
- $A \cup \overline{B} = \{a, b, c, d\}$

  Parce que: $\overline{B} = \{a, c\}$
- $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)} = \{e\}$ **Loi de Morgan**
- $\overline{B} - \overline{A} = \{a\} \rightarrow \overline{B} - \overline{(A \cap B)}$

  La différence de deux ensembles est l'ensemble des éléments qui appartiennent au premier ensemble (à $\overline{B}$) mais n'appartiennent pas au second (à $\overline{A}$).

- $\overline{(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})} = (\overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ **Loi de Morgan**
- $\overline{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})} = (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{c}\}$ **Loi de Morgan**

Solution exercice 2 :

On note par :

- **F**: obtenir **Face**;
- **P** : obtenir **Pile**.;

a) L'ensemble fondamental (ou l'univers) de cette expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les résultats possibles :

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{F1},\ \mathbf{F2}, \mathbf{F3}, \mathbf{F4}, \mathbf{F5}, \mathbf{F6}, \mathbf{P1}, \mathbf{P2}, \mathbf{P3}, \mathbf{P4}, \mathbf{P5}, \mathbf{P6}\} = \mathbf{12\ cas\ possibles}$$

b) Détermination des événements suivants :

- L'événement ***A*** : obtenir **Face** et un nombre pair ;

$$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{F2}, \mathbf{F4}, \mathbf{F6}\} = \mathbf{03\ cas}$$

- L'événement **B** : obtenir **Pile** et un nombre impair ;

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{P1}, \mathbf{P3}, \mathbf{P5}\} = \mathbf{03\ cas}$$

- L'événement ***C*** : obtenir un nombre premier différent de 1 (C'est-à-dire obtenir 2, 3 ou 5).

$$\boldsymbol{C} = \{\mathbf{F2}, \mathbf{F3}, \mathbf{F5}, \mathbf{P2}, \mathbf{P3}, \mathbf{P5}\} = \mathbf{6\ cas}$$

- $\boldsymbol{A} \cup \mathbf{B} = \{\mathbf{F2}, \mathbf{F4}, \mathbf{F6}, \mathbf{P1}, \mathbf{P3}, \mathbf{P5}\} = \mathbf{6\ cas}$
- $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{A} = \{\mathbf{F2}, \mathbf{F3}, \mathbf{F4}, \mathbf{F5}, \mathbf{F6}, \mathbf{P2}, \mathbf{P3}, \mathbf{P5}\} = \mathbf{8\ cas}$
- $\mathbf{B} \cup \boldsymbol{C} = \{\mathbf{P1},\ \mathbf{P2},\ \mathbf{P3}, \mathbf{P5}, \mathbf{F2}, \mathbf{F3}, \mathbf{F5}\} = \mathbf{7\ cas}$
- $(\boldsymbol{A} \cap \mathbf{B}) = \emptyset$ Ensemble vide

- $(C \cap B) = \{P3,\ P5\} = 2$ cas
- $(C \cap A) = \{F2\} = 1$ cas

Solution exercice 3 :

a) L'ensemble fondamental (ou l'univers) de cette expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les résultats possibles :

$$\Omega = \Omega_1 . \Omega_2 = 6 \times 6 = 6^2 = 36 \text{ cas}$$

$$\Rightarrow \Omega = \{(1,1),\ (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\ \}$$

b) Identification des sous-ensembles de Ω correspondant aux événements suivants :

- **A** : Obtenir deux nombres dont la somme est égale à 7 :

$$A = \{(1,6),\ (6,1), (2,5), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} = 6 \text{ cas}$$

- **B** : Obtenir deux nombres dont la somme est égale à 11 :

$$B = \{(5,6),\ (6,5)\} = 2 \text{ cas}$$

- **C** : Obtenir deux nombres dont la somme est égale à 4 :

$$C = \{(1,3),\ (2,2), (3,1)\} = 3 \text{ cas}$$

CHAPITRE III : Méthodes de dénombrement et analyse combinatoire

Le principe fondamental des probabilités dans le calcul du nombre de cas possibles repose sur une démarche progressive. Dans les expériences simples, il n'est généralement pas nécessaire d'utiliser des techniques mathématiques particulières pour compter les cas possibles. Cependant, lorsque les expériences deviennent plus complexes, la théorie des probabilités met à disposition différentes méthodes mathématiques et techniques de dénombrement facilitant ce calcul.

3.1 Dénombrements

Dans le cadre d'un ensemble fini X, la problématique consiste en :

- La constitution des collections d'ensembles ou d'applications ayant une caractéristique commune (cas favorables),
- Comptabiliser le nombre d'objets constituant cette collection. Le dénombrement ne s'applique qu'à des ensembles finis et fait intervenir deux critères fondamentaux pour la constitution et la distinction des objets à dénombrer : la répétition et l'ordre.

Définition 1 ***(Répétition)*** Lors de la constitution des collections, chaque élément de X peut être utilisé plusieurs fois.

Définition 2 (**Ordre**) Pour distinguer deux collections, on peut tenir compte de l'ordre des éléments qui les composent.

Remarque : Si l'on autorise la répétition on doit nécessairement faire intervenir l'ordre.

A. Nombre de partie d'un ensemble fini

Propriétés : Soit X un ensemble contenant n éléments. Il y a 2^n parties distincts de X.

Démonstration : Il existe diverses démonstrations de cette propriété. On peut par exemple utiliser un arbre et faire une correspondance entre une feuille et une partie. On peut également utiliser la formule du binôme de Newton.

B. La notion de p-listes

Définition : Soit X un ensemble contenant n éléments. Une p-liste d'éléments de X, est une liste ordonnée de p éléments de X avec répétitions possible.

Propriétés : ***(Expression du nombre de p-listes)*** *Le nombre de p-liste distinctes est égal à* n^p.

Exemple : Considérons l'ensemble $\mathbf{X} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ correspondant aux différentes touches d'un clavier de digicode est une succession de 3 caractères issus de X. Combien y-a-t-il de code différents ? Ce sont les 3-listes de X il y en a 5^3 soit 125.

3.3 Analyse combinatoire :

L'analyse combinatoire constitue l'une des méthodes les plus importantes dans ce domaine. Elle comprend notamment :

- les arrangements,
- les permutations.
- Et les combinaisons,

Quand on cherche la probabilité d'événement complexe, l'énumération des cas élémentaires est souvent difficile, fastidieuse, ou l'un et l'autre. Pour faciliter la tâche ; on utilisera les principes de base de l'analyse combinatoire.

A. Arrangement de *n* éléments *p* à *p* : Un arrangement est une suite ordonnée de *p* éléments parmi *n*.

Les trois lettres a,b,c, prises deux à deux conduisent aux arrangements : ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Il y a n manières de choisir le premier élément. Ensuite (n-1) manières de choisir le deuxième élément. Ainsi de suite jusqu'au Piéme élément où il y (n-p+1).

Considérons X un ensemble fini contenant n éléments différents et p un entier naturel inférieur ou égal à n.

Définition : Un **arrangement** à p éléments de X est un échantillon ordonné sans remise de p éléments différents de X.

Propriétés 1.10 (**Expression du nombre d'arrangements**) Le nombre d'arrangements à p éléments de X noté A_p^n est égal à :

$$A_p^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Démonstration : Pour le premier élément, on a n choix possibles. Le premier étant fixé, pour le deuxième élément, on a (n-1) choix possibles le tirage étant sans remise. Le premier et le deuxième étant fixés pour le troisième élément, on a (n-2) choix possibles... et ainsi de suite jusqu'au *p*ième élément, pour lequel on a [*n* − (*p* | −1)] = *n..p* + 1 choix possible. On a donc bien

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Arrangements à p éléments de X.

Définition : *On appelle* ***factorielle*** *n le produit des n premiers entiers :*

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$. *avec la convention* $0! = 1$.

Propriétés :

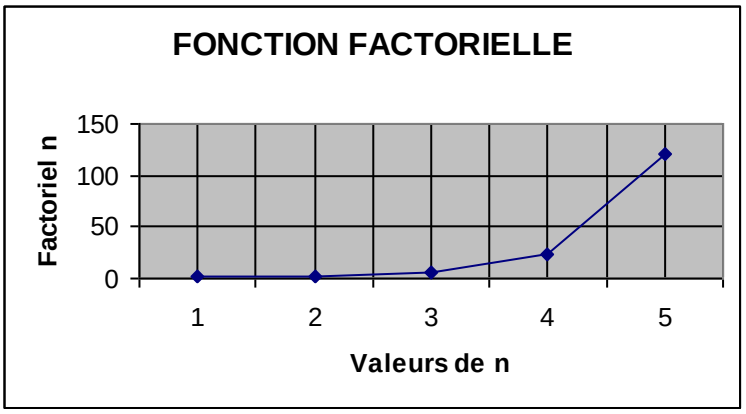
$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemple : Un joueur se demande combien il peut écrire de grilles différentes de tiercé pour une course de 16 chevaux. Il y a 16 possibilités pour le premier, 15 pour le second et 14 pour le troisième. On n'accepte pas les répétitions et on tient compte de l'ordre, il s'agit d'arrangements et on a donc $A^{16} = 16 \times 15 \times 14 = 3360$ possibilités.

Remarque : **n** ! est une touche de la plupart des calculatrices.

La fonction factorielle évolue rapidement, examinons les premières valeurs :

Nombre **n**	Factoriel **n!**
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000



Le 10! dépasse déjà les trois millions ! Les machines à calculer scientifiques ordinaires ne donnent pas les valeurs de la fonction factorielle au delà du nombre 69. Dans ce cas on a recours, soit à la méthode approximative de Stirling (elle est exposée un peu plus loin), soit aux ordinateurs.

B. Permutation de n éléments

Une permutation est une suite ordonnée de n éléments parmi n. une permutation de trois lettres a,b,c, sont : abc ,acb, bac, bca, cab, cba.

Définition : (Les permutations) Une permutation de X est un échantillon ordonné sans remise des n éléments différents pris dans X. C'est donc le cas particulier d'un arrangement de n éléments de X.

Propriétés : *Le nombre de permutations de E_n est donc égal à : $P_n = n!$*

Il y a *n* manières de choisir le premier élément, (*n-1*) manières de choisir le deuxième élément .ainsi de suite jusqu'au dernier élément le niéme où il y a une seule manière de le choisir.

$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)$……3.2.1

P_n= n !

On pose par convention : 0 ! = 1

A_p^n : S'écrit

$A_p^n = (n)(n-1)(n-2)\ldots\ldots; A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple : Si le joueur de tiercé a précédemment choisi les 3 chevaux qu'il va jouer mais ne sait pas dans quel ordre il va les placer, il a 3 ! Choix possibles c'est à dire 3 × 2 × 1 = 6 possibilités de tiercé.

C. Combinaison de *n* éléments p à *p*

Définition : Une combinaison à p éléments de X est un échantillon non ordonné sans remise de p éléments différents de X. C'est un sous ensemble p éléments de X. Dans une combinaison de p éléments, les p éléments sont distincts et non ordonnés.

Les combinaisons représentent le nombre de façons de choisir p éléments parmi n éléments, sans répétition et sans tenir compte de l'ordre.

Une combinaison est une suite non ordonnée de *p* éléments parmi les *n* éléments.

Les trois lettres a, b, c, prises deux à deux donnent les combinaisons suivantes : ab, ac, bc.

Démonstration : On considère les p premiers éléments de X. Avec ces p éléments on peut former $\mathrm{p!}$ arrangements et ces $\mathrm{p!}$ arrangements donnent une seule combinaison or on peut former $\mathrm{A_n^p}$ arrangements avec les n éléments de X, on a donc $\frac{\mathrm{A_n^p}}{\mathrm{p!}}$ combinaisons différentes de X.

Si on permutait entre eux les *p* élément d'une combinaison quelconque, on aurait *p!* Arrangements différents on a :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{(n)(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p+1)}{p!}$$

Propriétés : (Expression du nombre de combinaisons) Le nombre de combinaisons à p éléments de X noté $\mathrm{C_n^p}$ est égal à :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

où :

- n : nombre total d'éléments ;
- p : nombre d'éléments choisis ;
- C_n^p : nombre de combinaisons possibles.

Remarque :

- Si p = 0 alors on a une seule combinaison à zéro élément : la partie vide.
- Si p = n alors on a une seule combinaison à n éléments de E_n : la partie X.
- Si p = 1 alors on a n combinaisons à un élément de X, les n sous-ensembles à un élément de X.

Propriétés :

$$\mathrm{C_n^1} = 1$$

$$\mathrm{C_n^0} = 1$$

$$\mathrm{C_n^p} = \mathrm{C_n^{n-p}}$$

$$\mathrm{C_n^p} = \mathrm{C_{n-1}^p} + \mathrm{C_{n-1}^{p-1}}$$

Exemple 1 : Nous avons vu ci-dessus avec l'exemple du joueur de tiercé que quand on a choisi sans ordre une partie de 3 éléments parmi 16, il reste 3 ! = 6 manières d'ordonner cette partie. Par exemple si on choisit la partie (2,7,9) on peut lui associer les 6 permutations : (2,7,9), (2,9,7), (7,2,9), (7,9,2), (9,2,7) et (9,7,2). En d'autres termes il est possible de regrouper les arrangements par paquets de 6 correspondants à la même partie. Le nombre d'arrangements (ordonnés) de 3 éléments parmi 16 est donc égal à 6 fois le nombre de combinaisons (non ordonnées) de 3 éléments parmi 16. On a donc une application du "Principe des bergers" :

$$\mathbf{C_{16}^3} = \frac{\mathbf{A_{16}^3}}{\mathbf{3!}}$$

Exemple 2 : A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

(1) Combien de choix possibles y a-t-il ? (2) Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre aux 3 premières questions ?

(1) Il y a : $\mathbf{C_8^2} = \mathbf{C_{10}^2} = \frac{\mathbf{10.9}}{\mathbf{1.2}} =$ 45 choix possibles pour les 8 questions.

(2) Si l'étudiant répond aux trois premières questions, il peut choisir les 5 autres questions parmi les 7 questions restant, suivant : $\mathbf{C_7^5} = \mathbf{C_7^2} = \frac{\mathbf{7.6}}{\mathbf{1.2}} =$ 21 possibilités.

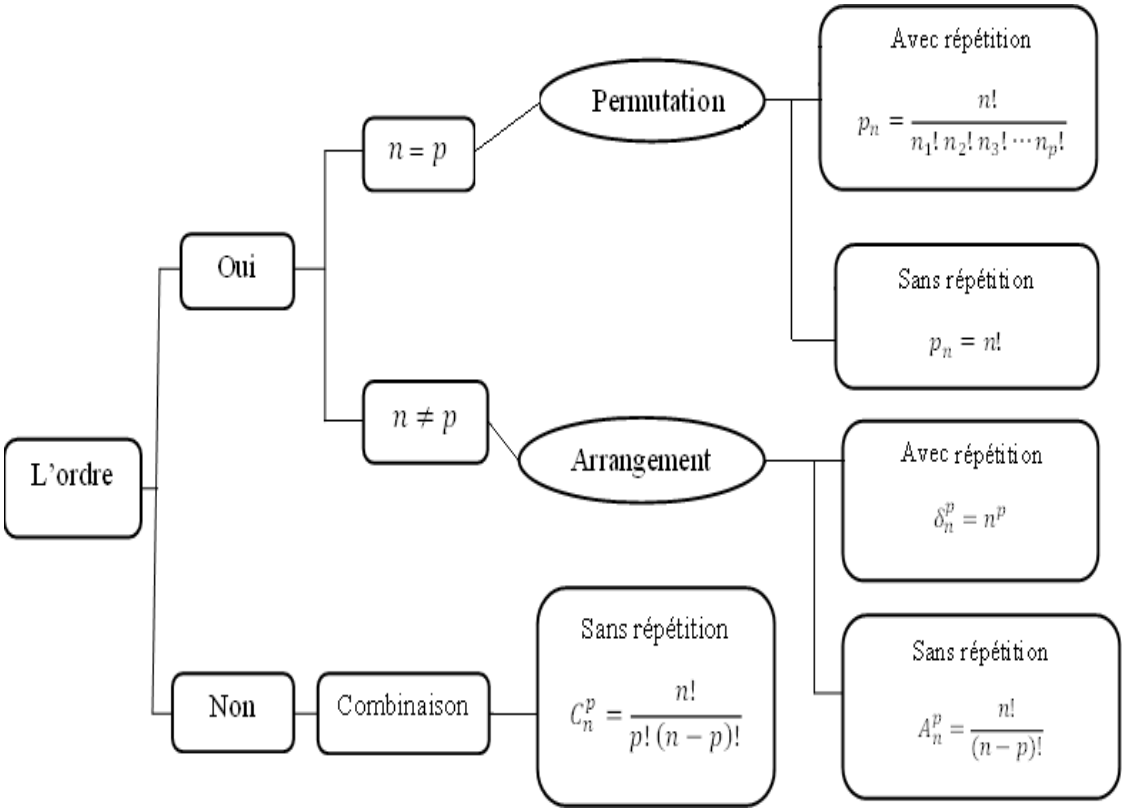


FIGURE 1 – Résumé les techniques de l'analyse combinatoire

Exercices corrigés du chapitre III :

Exercice 1 :

A/ Dans tout l'exercice, on suppose qu'il n'y a pas de répétition.

- Combien de nombre de 4 chiffres peut-on former à l'aide des 7 chiffres 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 ?
- Combien de ces nombres sont inférieurs à 5000 ?
- Combien sont pairs ?
- Combien sont impairs ?
- Combien sont des multiples de 5 ?

B/ Soit un lot de 7 pièces dont 4 sont bonnes et 3 défectueuses.

- Combien d'échantillon de 3 pièces peut-on réaliser ?
- Combien parmi ces échantillons contiennent 3 bonnes pièces ?
- Combien au moins contiennent une pièce bonne ?

C/ pour jouer au bridge on utilise un jeu de 52 cartes. On donne 13 cartes à chacun des 4 joueurs.

1. Quel est le nombre des donnes différentes que peut recevoir un joueur donné ?
2. Quel est le nombre de donne différentes qu'un donné peut recevoir et qui contiennent :
    - Un as exactement
    - Un as et une dame exactement
    - Un roi au moins
    - Le roi de pique

Solutions exercices corrigés du chapitre III :

Corrigé A :

1) Le 1er chiffre du nombre peut-être choisi de 7 manières différentes, le 2^{éme} de 6 manières, le 3^{éme} de 5 manières, et le 4^{éme} de 4 manières. Au total il y a : 7*6*5*4=840 manières décrire un nombre de 4 chiffres choisi parmi les 7 chiffres cités.
2) Pour qu'un nombre soit inférieur à 5000 il faut que le 1er chiffre soit 1, 2 ou 4. Il n'y a que 3 choix possibles.
   Pour le 2^{éme} chiffre, 6 choix et le 3^{éme} chiffre, 5 choix sont possibles. Pour le 4^{éme} chiffre, il n'y a plus que 4 choix. Il y a ainsi : 3*6*5*4=360 nombres inferieurs à 5000.

3) Le dernier chiffre (4^{éme}) ne peut-être que 2 ; 4 ;6 ou8. Il y a donc 4 façons de choisir. Le 1er chiffre sera choisi de 6 manières différentes ; le 2^{éme} de 5 manières différentes ; le 3^{éme} de 4 manières différentes.
   On obtient ainsi : 6*5*4*3=360 nombre pairs.
4) Le même raisonnement que précédemment donne : 6*5*4*3= 360 nombres impairs.
5) Il y a une seule manière de choisir le dernier chiffre d'où le résultat : 6*5*4*1=120 nombre multiples de 5.

Corrigé B :

1) On peut réaliser : $\mathbf{C_7^3} = \frac{7!}{4!3!}$ =35 échantillons de 3 pièces.

2) Parmi ces échantillons, il y en a :

$\mathbf{C_4^3} = \frac{4!}{1!3!}$= 4 qui contiennent 3 pièces bonnes.

3) Parmi les échantillons de 3 pièces il y en a :

$\mathbf{C_4^3 + C_3^2 C_4^1 + C_3^1 C_4^2 = 31}$ qui contiennent au mois une pièce bonne.

Corrigé C :

- Il faut prendre une carte parmi les 4 as et 12 cartes parmi les 48 autres cartes. La cartes as étant choisie, il y a : C_{48}^{12} donne qui conviennent. Au total on a :

$$n_1 = C_4^1 C_{48}^{12}$$ qui contiennent un as exactement.

- On prend une carte as parmi les 4 as, une carte dame parmi les 4 dames et 11 cartes parmi les 44 restantes. Donc on a :

$n_2 = C_4^1 C_4^1 C_{44}^{11}$ Donnes qui contiennent un as et une dame.

Soit le nombre de donnes qui ne contiennent aucun roi : C_{52}^{13}

- Soit le nombre de donnes totales : C_{48}^{13}

D'où : $n_3 = C_{52}^{13} - C_{48}^{13}$. Le nombre de donnes différentes qui contiennent un as au moins.

- Le roi de pique fait partie de la donne considérée, il faut encore choisir 12 cartes parmi les 51 restantes. Au total il y a : $n_4 = C_1^1 . C_{51}^{12}$ donnes qui contiennent le roi de pique.

Exercice 2 :

De combien de manières peut-on tirer l'une après l'autre, quatre cartes d'un jeu de 32 cartes, et ce dans le cas d'un tirage non exhaustif et un tirage exhaustif.

Réponse :

i) **Tirage non exhaustif :**
On peut tirer chaque carte de 32 manières différentes, alors le nombre de manières pour tirer 4 cartes est : 32. 32. 32. 32 = 32^4

ii) **Tirage exhaustif :** 32 .31 .30 .29

Exercice 3 :

Soient 3 garçons et 2 filles :

i. De combien de façons différentes peuvent-ils s'assoir sur un banc ?
ii. *De combien de façons peuvent-ils s'assoir si les garçons*

s'assoient les uns à côté des autres et s'il en est de même pour les filles ?

iii. *De combien de manières différentes peuvent-ils s'assoir si seulement les filles s'assoient l'une à côté de l'autre.*

Réponse :

i. 5! =5.4.3.2.1= 120 façons

ii. Il y a deux façons pour distribuer les personnes selon le sexe (GGGFF) et (FFGGG). Donc le nombre de façons possibles est :

2. (3!).(2!)= 24

iii. Il ya 4 façons de distribuer les personnes selon le sexe, (FFGGG), (GFFGG), (GGFFG), (GGGFF). Donc le nombre de façons possibles est :

4 (3!).(2!)=48

Exercice 4 :

Combien de mots à 9 lettres (avec ou sans sens) peut-on former avec les lettres suivantes :

i. AEIOLNRST

ii. GGGGFNNNB

Réponse :

i. C'est une permutation sans répétition :

$$9!$$

ii. C'est une permutation avec répétition :

$$\frac{\mathbf{9}!}{\mathbf{4}!.\mathbf{1}!.\mathbf{3}!.\mathbf{1}!}$$

Exercice 5 :

Combien de nombre à cinq chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les cas suivants :

i. Sans aucune restriction
ii. Le nombre est un multiple de 2
iii. Le nombre est divisible par 5
iv. Le nombre est impair

Réponse :

i. Sans restriction : l'ordre est important, donc c'est un arrangement de :

$$\mathbf{A_9^5}$$

ii. Le nombre est un multiple de 2 :

$$\mathbf{A_5^4}.\ \mathbf{A_4^1}$$

iii. Le nombre est divisible par 5 :

$$\mathbf{A_5^4}.\ \mathbf{A_4^1}$$

iv. Le nombre est impair :

$$\mathbf{A_8^4}.\ \mathbf{A_1^1}$$

Exercice 6 :

On veut former un comité comprenant 3 des 10 personnes d'un groupe. Combien y a-t-il de ces comites ?

Réponse : il y a $\mathbf{C_{10}^3}$ comités possibles.

Exercice 7:

Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots :

i. leur
ii. anabase
iii. statistics

Réponse :

i. il y a (**4!**), car chaque lettre apparait une seule fois (permutation sans répétition)

ii. *il y a :*

$$\frac{\mathbf{7}!}{\mathbf{3}!.\mathbf{1}!.\mathbf{1}!.\mathbf{1}!.\mathbf{1}!}$$

Car le mot anabase comporte 7 lettre dont a apparait 3 fois (permutation avec répétition).

iii. *il y a :*

$$\frac{\mathbf{10}!}{\mathbf{3}!.\mathbf{3}!.\mathbf{1}!.\mathbf{2}!.\mathbf{1}!}$$

(Permutation avec répétition).

Exercice 8 :

Une classe contient 9 garçons et 3 filles,

i. De combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ?

ii. Combien de ces choix comportent au moins une fille ?

iii. Combien comportent exactement une fille ?

Réponse :

i. C_{12}^{4}

ii. $C_{9}^{3}.C_{3}^{1}+ C_{9}^{2}.C_{3}^{2}+ C_{9}^{1}.C_{3}^{3}$

iii. $C_{9}^{3}.C_{3}^{1}$

Exercice 9 :

De combien de manières peut-on classer 4 livres dans une étagère ?

Réponse :

4 ! = 4.3.2.1 = 24

Donc il y a 24 manières de classer 4 livres dans une étagère.

Exercice 10 :

De combien de manières peut-on classer les 3 lettres ABC ?

Réponse :

3 ! = 3.2.1 = 6 manières. Ces manières sont : ABC BAC ACB CBA CAB BCA.

Exercice 11 :

De combien de manières peut-on choisir un lot de 3 antibiotiques parmi 8 ?

Réponse :

Ce nombre est donné par :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!}$$

Donc le nombre de manières de choisir 3 antibiotiques parmi 8 est égal à **112.**

Exercice 12 :

De combien de manières peut-on choisir 2 lettres parmi les 5 A B C D E ?

Réponse :

Ce nombre est donné par :

$$\mathbf{C_5^2 = \frac{5!}{2!\ (5-2)!}}$$

Exercice 13 :

Soit une urne contient 12 boules. On tire de façon exhaustive trois boules,

Quel est le nombre d'échantillons possibles ?

Réponse : il y a 12 façons pour tirer la première boule, et 11 façons pour la deuxième boule et 10 façons pour la troisième boule. Le nombre d'échantillons est $\mathbf{12.\ 11.\ 10} = \mathbf{1320}$.

CHAPITRE IV : Introduction au calcul des probabilités

Introduction

Le calcul des probabilités est la branche des mathématiques qui étudie les phénomènes aléatoires ou non déterministes. Par exemple, lorsqu'on lance un dé, il est certain qu'il retombera au sol, mais il est impossible de prévoir avec certitude la face qui apparaîtra. Si l'on répète cette expérience un grand nombre de fois, en notant par (s) le nombre de succès (c'est-à-dire le nombre d'apparitions de la face 6) et par (n) le nombre total de lancers, on obtient le rapport $f = \frac{S}{n}$, appelé fréquence relative. L'expérience montre que, lorsque le nombre d'essais augmente, cette fréquence tend à se stabiliser autour d'une valeur limite. Cette propriété de stabilité constitue le fondement de la théorie des probabilités.

Pour chaque phénomène étudié, le calcul des probabilités construit un modèle mathématique en associant des probabilités aux différents événements susceptibles de se produire lors d'une expérience. Ces probabilités peuvent être interprétées comme les limites des fréquences relatives observées à long terme. La pertinence du modèle dépend alors de l'adéquation entre les probabilités théoriques attribuées et les fréquences réellement observées. L'étude de cette adéquation conduit aux méthodes d'estimation et de test qui relèvent du domaine de la statistique.

Historiquement, le calcul des probabilités s'est développé à partir de l'étude des jeux de hasard, tels que les jeux de cartes ou la roulette. Dans le cas où un événement (A) peut se produire (s) fois parmi un total de (n) issues équiprobables, sa probabilité (p) est définie par :

$$\mathbf{P = P(A) = \frac{S}{n}}$$

Définition :

La probabilité admet une définition classique dont la formulation mathématique est la suivante :

$$f_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}$$

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A)$$ Sachant que : $$0 \le f_n(A) \le 1 \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$$

La probabilité est une mesure numérique permettant d'évaluer la possibilité de réalisation d'un événement.

Lorsqu'on considère des événements équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Ainsi :

Probabilité d'un événement = Nombre de cas favorables / Nombre total de cas possibles

Cette définition s'applique lorsque toutes les issues ont les mêmes chances de se produire.

4.1 Concepts fondamentaux des probabilités

A. Expérience aléatoire

Toute opération dont les résultats possibles sont connus, mais dont le résultat exact ne peut être prédit à l'avance.

Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle un événement élémentaire.

B. Ensemble fondamental ou univers

Ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Il est généralement noté : Ω.

L'ensemble des résultats possibles s'appelle *ensemble fondamental* (ou univers) et est noté traditionnellement Ω. Chaque élément ω de Ω représente donc un événement élémentaire, et toute partie $A \subset \Omega$ (ou $A \in P(\Omega)$) sera un événement. Parfois on dit que Ω est l'ensemble des *éventualités possibles* et les événements élémentaires sont alors les singletons, c'est-à-dire les ensembles réduits à un seul

élément {ω}, qui sont effectivement en toute rigueur des événements, puisqu'appartenant à P (Ω), ce qui n'est pas le cas du point ω.

Chaque résultat, c'est-à-dire un élément de Ω, s'appelle un point de Ω . Un événement A est un ensemble de résultats, ou en d'autres termes, un sous-ensemble de l'ensemble fondamental Ω. L'événement (a) consistant d'un seul point a ∈ Ω est appelé événement élémentaire. L'ensemble vide ∅ et Ω lui-même sont des événements ; on appelle parfois ∅ l'événement impossible, et Ω l'événement sûr ou certain.

Quelques exemples des expériences aléatoires :

- Si le résultat d'une expérience est la détermination du sexe d'un nouveau-né, alors l'ensemble fondamental Ω = {$garçon$, $fille$}.
- Si l'issue de l'expérience est l'ordre d'arrivé à une course entre 7 chevaux ayant les positions de départ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, alors : Ω = {$toutes\ les\ permutations\ de$ (1,2, … ,7)}, soit 7! Au total.
- Si l'expérience consiste à jeter deux pièces de monnaies, alors l'ensemble fondamental est constitué de 4 couples suivant : Ω = {($pille, pile$), ($face, face$), ($pile, face$), ($face, pile$)}.

Par ailleurs, tout sous ensemble E de l'ensemble fondamental Ω est appelé
« événement ». De ce fait, un événement est donc un ensemble correspondant aux divers résultats possibles d'une expérience aléatoire. Si un résultat est compris dans l'ensemble E, alors on dit que l'événement E est réalisé.

Exemple 1 : Soit une expérience aléatoire avoir un nouveau-né dans une famille, alors l'ensemble fondamental Ω = {G,F}, tel que G : garçon, F : fille. Le sous ensemble E1={G} est l'événement l'enfant né est un garçon. E2={F} est l'événement né est une fille.

Exemple 2 : Soient $\Omega = \{touteslespermutationsde\ (1,2, \ldots .7)\}$ et E = {tous les résultats de Ω qui commencent par 3}, donc E est l'événement que le cheval n°3 gagne la course.

Exemple 3: Nous avons l'ensemble fondamental $\Omega = \{(\mathrm{P}, \mathrm{P}), (\mathrm{F}, \mathrm{F}), (\mathrm{P}, \mathrm{F}), (\mathrm{F}, \mathrm{P})\}$ tel que, P : pile et F : face.

Soit $E = \{(\mathrm{P}, \mathrm{P}), (\mathrm{P}, \mathrm{F})\}$, alors E est l'événement la première pièce de monnaie montre un pile.

C. Événement

Etant donnée une expérience aléatoire, on note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. Un singleton de Ω est appelé *évènement élémentaire*. Un sous-ensemble A de Ω est appelé un *évènement*. Un évènement A est donc un ensemble constitué de résultats possibles de l'expérience. Si le résultat d'une expérience est dans A, on dit que A est réalisé.

Exemple : On détermine le sexe d'un nouveau-né. On posera : Ω = {G, F}

Donc, un événement est un sous-ensemble de l'univers Ω.

Un événement peut être :

- simple : contenant une seule issue ;
- composé : contenant plusieurs issues.

a) Espace probabilisé (Axiome de Kolmogorov)

On appelle espace probabilisé tout triplet $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ dans lequel Ω est l'ensemble fondamental des événements d'une expérience aléatoire, $\mathfrak{I}$ est une tribu d'événements de Ω, et P est une application $\mathfrak{I}$ dans [0, 1] (P: $\mathfrak{I} \longmapsto [0, 1]$) telle que :

- $P(\Omega) = 1$

- Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles $A_1, A_2 \ldots . A_n$, on a :

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$$

Remarque : n fini

b) Axiomes de probabilités

Axiomes : Soient Ω un ensemble fondamental d'une expérience aléatoire, et A un événement de Ω, alors il existe une valeur P(A) appelée probabilité de l'événement A où :

Axiome 1 : $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

Axiome 2 : $\mathbf{P(\Omega) = 1}$

Axiome 3 : Si A et B sont deux événements qui s'excluent mutuellement alors :

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

4.3 Opérations sur les événements

On peut aussi combiner des événements pour former de nouveaux événements, à l'aide des différentes opérations sur les ensembles :

A. Union de deux événements

L'union de deux événements A et B signifie que l'un au moins des deux événements se réalise :

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Corollaire : A, B et C étant des événements quelconques,

$$\mathbf{P(AUBUC) = P(A) + P(B) + (C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +}$$

$$\mathbf{P(A \cap B \cap C)}$$

Cette formule est appelée règle de l'addition pour des événements non incompatibles.

Si les événements sont incompatibles :

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B)}$$

$$\mathbf{A \cap B = \emptyset}$$

B. Intersection de deux événements

Soient A et B deux événements de l'ensemble fondamental Ω, le nouvel événement $A \cap B$, appelé intersection de l'événement A et l'événement B, est considéré comme l'ensemble de réalisations qui sont à la fois dans l'événement A et dans l'événement B. Autrement dit, l'événement $A \cap B$ ne sera réalisé qui si A et B le sont à la fois.

Exemple :

Soient A = **{(p, p), (p, f), (f, p)}** , **et** B = **{(f, f), (f, p), (p, f)},** alors : l'événement $A \cap B$ = **{(p, f), (f, p)}** est l'événement une pièce de monnaie montre pile et l'autre donne face.

L'intersection signifie que les deux événements se réalisent simultanément.

Evénement impossible :

Exemple :

On jette à la fois deux dés équilibrés, alors l'ensemble fondamental est :

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1, 3) \dots \dots \dots . . (6,6)\},$$

C'est à dire le nombre de résultats possibles de telle expérience est 6x6=36 couples.

Par ailleurs, supposant deux événements A et B tel que A : « la somme des deux égale à 7 » et B : « la somme des deux dés égale à 6 ».

Donc,

A = {(1,6), (2,5), (3,4), (5,2), (6,1)}, B = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}

L'événement $A \cap B = \emptyset$: c'est-à-dire ne contient aucune réalisation, et par

conséquent un tel événement ne peut pas survenir. Celui-ci est appelé l'événement impossible, noté ∅. De ce fait, si $A \cap B = \emptyset$, alors l'événement A et l'événement B sont mutuellement disjoints (incompatibles).

Pour des événements indépendants :

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) \, . \, P(B)}$$

Pour des événements dépendants (liés):

La probabilité conditionnelle mesure la probabilité de réalisation d'un événement sachant qu'un autre événement est déjà réalisé. L'événement connu est appelé « condition » :

- Si l'on souhaite calculer la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, on utilise la formule suivante :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B/A)}$$

$$\Rightarrow P(B/A) = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \quad \textbf{avec } \mathbf{P(A) \neq 0}$$

Cette relation est appelée loi des probabilités conditionnelles.

- Si l'on souhaite calculer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé, on utilise la formule suivante :

P(B/A) représente la probabilité conditionnelle de **B** sachant que **A** est réalisé.

$$\text{et } \mathbf{P(B \cap A) = P(B) \, . \, P(A/B)}$$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{\mathbf{P(B \cap A)}}{\mathbf{P(B)}} \textbf{ avec } \mathbf{P(B) \neq 0}$$

P(A/B) représente la probabilité conditionnelle de **A** sachant que **B** est réalisé.

C. Événement complémentaire

L'événement complémentaire de $\bar{A}$ ou A^C est l'événement contraire à **A**.

$$\mathbf{P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1}$$

C'est-à-dire l'événement $\bar{A}$ ou A^C doit, par définition, contenir tous les points de l'ensemble fondamental Ω qui ne sont pas dans l'ensemble A.

Exemple : On jette à la fois deux dés équilibrés, alors l'ensemble fondamental est : Ω = {(1,1), (1,2), (1, 3) … … … . . (6,6)}, c'est à dire le nombre de résultats possibles de telle expérience est 6x6=36 couples. Par ailleurs, supposant l'événement A tel que A : « la somme des deux égale à 7 »

$\Rightarrow$ A = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}, alors $\bar{A}$ ou A^C, sera réalisé lorsque la somme des deux dés n'est pas égale à 7.

Remarque : $\bar{\Omega} = \phi$. Autrement dit, l'événement complémentaire de l'ensemble fondamental est l'ensemble vide (l'événement impossible).

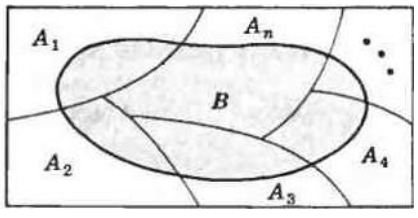
4.3 Théorie de la probabilité conditionnelle : PARTITIONS ET THEOREME DE BAYES

Cette probabilité repose sur la chance de réalisation d'un événement sachant qu'un autre événement, lié au premier, s'est déjà produit. L'événement dont la réalisation est connue est appelé **condition**. C'est pour cette raison que la probabilité considérée dans ce cas est appelée **probabilité conditionnelle**.

Ainsi, si l'événement **B** est un événement connu (déjà réalisé) et que l'événement A est un autre événement dont on souhaite calculer la probabilité de réalisation, sous la condition que l'événement **B** se soit produit, alors cette probabilité se calcule en appliquant la formule suivante :

A. Partitions

Supposons que les événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ forment une partition d'un ensemble fondamental Ω :



- les événements Ai s'excluent donc mutuellement,
- leur réunion est Ω.

1) $\forall i, P(A_I) > 0$
2) $i \neq j,\ A_i \cap A_J$

Soit B un autre événement quelconque. Alors :

$$B = \Omega \cap B = (\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \dots, \mathbf{A_{n-1}}, \mathbf{A_n}) \cap B$$

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_N \cap B)$$

Où les $A_i \cap B$ s'excluent mutuellement. Par conséquent,

$$P(B) = P(\mathbf{A_1} \cap \mathbf{B}) + P(\mathbf{A_2} \cap \mathbf{B}) + P(\mathbf{A_3} \cap \mathbf{B}) + \cdots + P(\mathbf{A_n} \cap \mathbf{B})$$

Ainsi d'après le théorème de la multiplication,

$$\mathbf{P(B) = P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B/A_n)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(B) = \sum_{i=1}^{n}[P(A_i)\,P(B/A_i)]} \quad (1) \rightarrow \underline{\textbf{Probabilité totale}}$$

Utilisation pratique :

La formule de probabilité totale nous permet de résoudre beaucoup de problème de probabilité.

Soit l'événement B qui nous peut se réaliser avec les événements $\mathbf{A_i}$ $(\boldsymbol{i = \overline{1,n}})$ nommés les hypothèses concernant le problème.

Pour calculer $\mathbf{P(B)}$ **il faut avoir les probabilités des hypothèses** $\mathbf{P(A_i)}$ et les probabilités conditionnelles $\mathbf{P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$.

Exemple :

Trois machines X, Y et Z produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine.

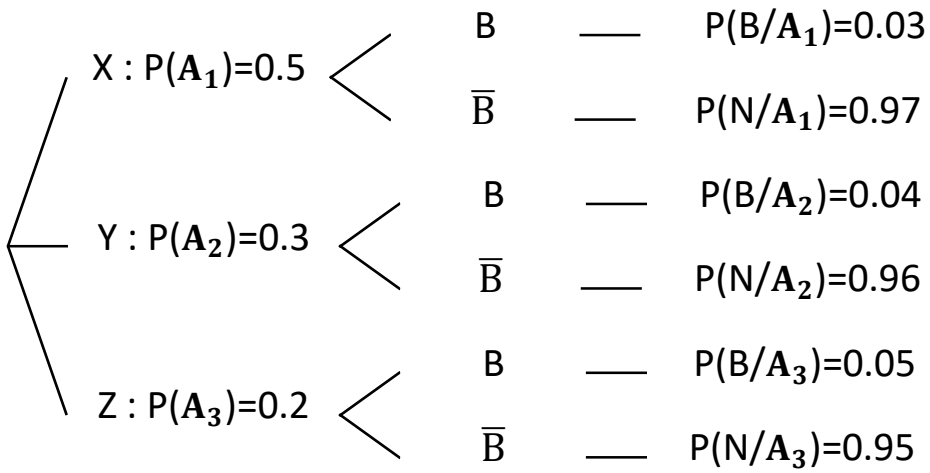
Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

Travail à faire :

Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

Solution :

On peut considérer ce problème comme un processus stochastique ayant le diagramme suivant :



Probabilités des hypothèses	**Probabilités conditionnelles P (B/A_i)**
P (A_1) = 0,5	P (B/H_1) = $5\% = 0{,}05$
P (A_2) = 0,3	P (B/H_2) = $4\% = 0{,}04$
P (A_3) = 0,2	P (B/H_3) = $2\% = 0{,}02$

Soit B l'événement correspondant à une pièce défectueuse. Alors, d'après la relation (1) → **Probabilité totale** :

$$P(B) = P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = [0,5\,.\,0,03] + [0,3\,.\,0,04] + [0,2\,.\,0,05] = 0,037$$

B. Théorème de Bayes : (Mathématicien anglais : 1702 – 1761)

Pour un i donné, la probabilité conditionnelle de Ai, B étant réalisé, est définie par :

$$\mathbf{P\ (A_i/B)\ =\ \frac{P\ (A_i \cap B)}{P\ (B)}}$$

Dans cette équation, on remplace P (B) par (1) et P (Ai ∩ B) par P (Ai ∩ B) = P (Ai) .P (B/Ai), ce qui donne :

$$\mathbf{P\ (A_i/B)\ =\ \frac{P\ (A_i)\ P\ (B/A_i)}{P\ (A_1)\ P\ (B/A_1) + P\ (A_2)\ P\ (B/A_2) + \cdots + P\ (A_n)\ P\ (B/A_n)}}$$

Exemple :

On reprend l'exemple précédent. Supposons que l'on prenne une pièce au hasard et que celle-ci soit défectueuse. Calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine X ?

Solution :

On nous demande de calculer : $\mathbf{P\ (A_1/B)}$

D'après le théorème de Bayes :

$$\mathbf{P\ (A_i/B)\ =\ \frac{P\ (A_1 \cap B)}{P\ (B)}\ =\ \frac{P\ (A_1)\ P\ (B/A_1)}{P\ (B)}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow P\ (A_i/B)\ =\ \frac{[0,5\ .\ 0,03]}{0,037} = 0,405}$$

Autrement dit, on divise la probabilité du chemin désiré par la probabilité de l'ensemble fondamental réduit, c'est-à dire des chemins qui mènent à une pièce défectueuse.

Exercices du chapitre IV :

Exercice 1 :

Soit A et B deux événements tel que :

$$\mathbf{P(A) = \frac{3}{8}\ ;} \qquad \mathbf{P(B) = \frac{1}{2}\ ;} \quad \mathbf{P\ (A \cap B) = \frac{1}{4}}$$

Travail à faire : Calculez :

$$\mathbf{P\ (A \cup B)\ ;\ P\ (\overline{A})\ ;\ P\ (\overline{B})\ ;\ P\ (\overline{A} \cap \overline{B})\ ;\ P\ (\overline{A} \cup \overline{B})\ ;\ P\ (B - A)\ ;\ P\ (A - B)}$$

Exercice 2 :

Soit A et B deux événements tels que :

$$\mathbf{P(A) = \frac{1}{5}\ ;} \qquad \mathbf{P(AUB) = \frac{1}{2}}$$

Travail à faire :

a) Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer P(B).
b) Supposons que A et B soient indépendants. Calculer P(B).
c) Calculer P(B) en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.

Exercice 3 :

Soit l'expérience aléatoire consistant à effectuer un lancer unique d'un dé équilibré à six faces. On considère les événements suivants :

- **A** : « le résultat obtenu est un nombre pair » ;
- **B** : « le résultat obtenu est un nombre impair » ;
- **C** : « le résultat obtenu est un nombre divisible par 3 ».

Travail à faire :

a) On demande de calculer : Les probabilités des événements indiqués ci-dessous :

$\mathbf{P(A)}$, $\mathbf{P(B)}$, $\mathbf{P(C)}$, $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$, $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$, $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$, $\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{C}})$,

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} - \mathbf{C}),\ \mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{C}})$$

b) Déterminer si les événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ sont indépendants. Justifier votre réponse.

c) Déterminer si les événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ sont incompatibles (ou mutuellement exclusifs). Justifier votre réponse.

Exercice 4 :

a) Montrer que, pour 3 événements quelconques *A*, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, **on a :**

$$\mathbf{P(A\ U\ B\ U\ C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A)}$$

$$\mathbf{+ P(A \cap B \cap C)}$$

b) Généraliser dans le cas de n événements $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n}$.

Exercice 5 :

Une boite contient trois pièces de monnaie :

- la première est bien équilibrée ;
- la deuxième est marquée avec deux faces ;
- la troisième est truquée pour que la probabilité de donner face soit égale à $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

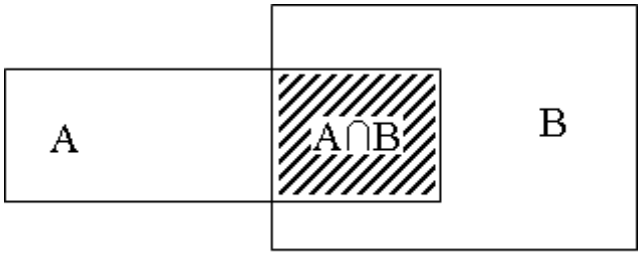
Travail à faire :

a) On choisit une des pièces au hasard et on la lance. Calculer la probabilité **p** pour que l'on obtienne face.

b) Si l'on choisit une pièce au hasard et on s'aperçoit qu'elle est face. Calculer la probabilité pour que cette pièce soit la première.

Solutions des exercices du chapitre IV :

Solution exercice 1 :



Calcul des probabilités suivantes :

- $\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}}$
- $\mathbf{P(\overline{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{5}{8} = 0.625}$
- $\mathbf{P(\overline{B}) = P(\Omega) - P(B) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.5}$
- $\mathbf{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0.375}$
- $\mathbf{P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = 0.75}$
- $\mathbf{P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25}$
- $\mathbf{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0.125}$

Solution exercice 2 :

a) $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ soient incompatibles. Donc $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$

D'où $\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B)}$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

b) **A et B indépendants :** $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - [P(A).P(B)]$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + (P(B).[1 - P(A)])$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B).\left[1 - \frac{1}{5}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B).\left[\frac{4}{5}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = P(B).\left[\frac{4}{5}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{5-2}{10} = P(B).\left[\frac{4}{5}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10} = P(B).\left[\frac{4}{5}\right]$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{10}.\frac{5}{4} = \frac{3}{8}$$

Deuxième méthode :

$$P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5}P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}P(B) = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$$

c) A ne peut être réalisé que si B est réalisé : tous les éléments de A sont dans B :

$$\Rightarrow \mathbf{P(A \cap B) = P(A)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \mathbf{P(B)} - \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(B)} = \frac{1}{2}$$

Solution exercice 3 :

a) L'univers **Ω** de l'expérience aléatoire correspondant à un lancer unique d'un dé équilibré à six faces :

$$\Omega = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \,\} = 6$$

- Le nombre de cas favorables à l'événement **A** est : $\mathbf{A} = \{2, 4, 6\} = 3$
- Le nombre de cas favorables à l'événement **B** est : $\mathbf{B} = \{1, 3, 5\} = 3$
- Le nombre de cas favorables à l'événement **C est** : $\mathbf{C} = \{3, 6\} = 2$

Calcul de :

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

, $\mathbf{P(C)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

– P(AUB) = P(A) + P(B) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Parce que les événements **A** et **B** sont incompatibles (mutuellement exclusifs).

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$$

– P(AUC) = P(A) + P(B) – P(A∩C) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Parce que les événements **A** et **C** ne sont pas incompatibles (puisqu'ils peuvent se réaliser simultanément.)

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \{ \mathbf{6} \} \Rightarrow \mathbf{P(A \cap C)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

- $\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{C}}) = \mathbf{1} - \mathbf{P(C)} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$
-
- $\mathbf{P(B - C)} = \mathbf{P(B)} - \mathbf{P(B \cap C)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

$$\mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \{ \mathbf{3} \} \Rightarrow \mathbf{P(B \cap C)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

- $\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{C}}) = \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{C}}) = \mathbf{1} - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

Ceci en utilisant les lois de De Morgan.

b) Démonstration de l'indépendance des événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$:

Condition d'indépendance :

Les événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ sont indépendants si la relation suivante est vérifiée :

$$\mathbf{P(A \cap C)} = \mathbf{P(A)} \times \mathbf{P(C)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

La condition d'indépendance étant vérifiée, on conclut que les événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ sont indépendants.

c) Démonstration que les événements A et C sont incompatibles :

$$\mathbf{P(AUC)} = \mathbf{P(A)} + \mathbf{P(B)} - \mathbf{P(A \cap C)}$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(A \cap C)} = \mathbf{0}$$

On a:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \{\, \mathbf{6} \,\} \Rightarrow \mathbf{P(A \cap C)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \neq \mathbf{0}$$

On en déduit que les événements A et C ne sont pas mutuellement exclusifs.

(Autrement dit, ils peuvent se réaliser simultanément et $\mathbf{A} \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$.

Solution exercice 4 :

3. On prend par exemple $\mathbf{B \cup C = E}$, soit $\mathbf{P(A \cup E) = P(A) + P(E) -}$

   $\mathbf{P(A \cap E)}$

   $\Rightarrow \mathbf{P(E) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)}$ **et**

   $\mathbf{(A \cap E) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

   $\Rightarrow \mathbf{P(A \cap E) = P(A \cap B) \cup P(A \cap C) - P(A \cap B \cap A \cap C)}$

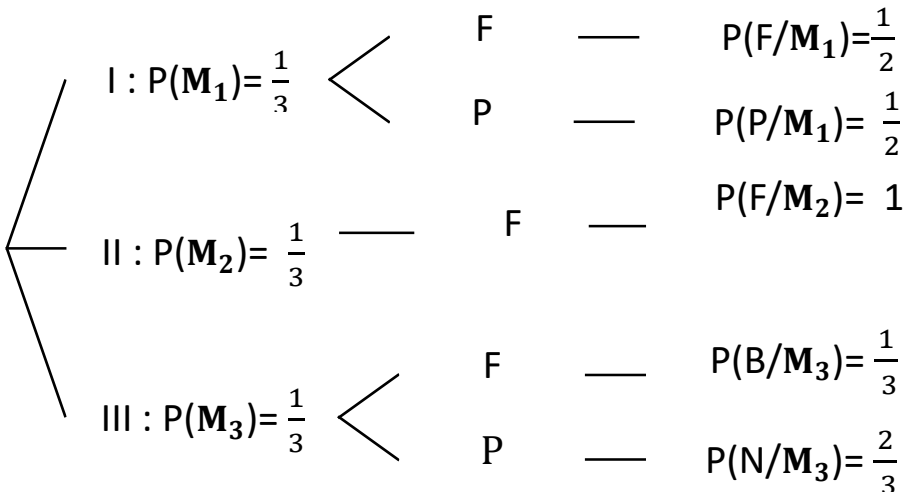
   $\Rightarrow \mathbf{P(A \cap B) \cup P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}$

   Donc en remplaçant, on obtient la formule.

4. Même chose par récurrence.

Solution exercice 5 :

a) Construisons comme sur la Figure ci-dessous le diagramme en arbre. Notons que $\mathbf{M_1}$ est relatif à la pièce bien équilibrée, $\mathbf{M_2}$ à la pièce comportant deux faces, et $\mathbf{M_3}$ à la pièce truquée. Face apparaît aux trois des branches de l'arbre ; d'où :



Probabilités des hypothèses	**Probabilités conditionnelles P $(\mathbf{F}/\mathbf{M}_i)$**
P $(\mathbf{M}_1)$ = 0,5	P $(\mathbf{F}/\mathbf{M}_1)$ = $5\% = 0{,}05$
P $(\mathbf{M}_2)$ = 0,3	P $(\mathbf{F}/\mathbf{M}_2)$ = $4\% = 0{,}04$
P $(\mathbf{M}_3)$ = 0,2	P $(\mathbf{F}/\mathbf{M}_3)$ = $2\% = 0{,}02$

Soit F l'événement correspondant à une pièce défectueuse. Alors, d'après la relation (1) → **Probabilité totale** :

$$\mathbf{P}\,(\mathbf{F}) = \mathbf{P}\,(\mathbf{M_1})\,\mathbf{P}\,(\mathbf{F}/\mathbf{M_1}) + \mathbf{P}\,(\mathbf{M_2})\,\mathbf{P}\,(\mathbf{F}/\mathbf{M_2}) + \mathbf{P}\,(\mathbf{M_3})\,\mathbf{P}\,(\mathbf{F}/\mathbf{M_3})$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}\,(\mathbf{F}) = \left[\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3}.\mathbf{1}\right] + \left[\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\right] = \frac{11}{18}$$

b) On nous demande de calculer : $\mathbf{P}\,(\mathbf{M_1}/\mathbf{F})$

D'après le théorème de Bayes :

$$\mathbf{P}\,(\mathbf{M_1}/\mathbf{F}) = \frac{\boldsymbol{P}\,(\mathbf{M_1} \cap \mathbf{F})}{\mathbf{P}\,(\mathbf{F})} = \frac{\mathbf{P}\,(\mathbf{M_1})\,\mathbf{P}\,(\mathbf{F}/\mathbf{M_1})}{\mathbf{P}\,(\mathbf{F})}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P\,(M_1/F)} = \frac{\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}.\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]}{\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{18}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}.\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{11}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{11}}$$

Autrement dit, on divise la probabilité du chemin désiré par la probabilité de l'ensemble fondamental réduit, c'est-à dire des chemins qui mènent à Face.

Chapitre V : Variables aléatoires

5.1 Définitions générale d'une variable aléatoire

Définition : On appelle variable aléatoire le résultat d'une épreuve aléatoire lorsque l'issue de celle-ci peut être représentée par un nombre.

une variable aléatoire réelle X sur un ensemble fondamental Ω se définit souvent comme une fonction de Ω dans l'ensemble R des nombres réels, tels que l'inverse de chaque intervalle de R doit être un événement de Ω. Autrement dit, X : Ω → R. Pour tout intervalle [a, b] ⊂ R, l'ensemble {X ∈ [a, b]} = {ω ∈ Ω : X(ω) ∈ [a, b]} est un événement.

Définition 2 : l'ensemble $\{x \in R / \ x = (\omega), \omega \in \Omega\}$ est appelé l'espace de la variable aléatoire X.

Exemple :

On lance successivement deux fois une pièce de monnaie, on définit la variable aléatoire X correspond au nombre de « face » obtenu.

Réponse :

L'ensemble fondamental des résultats possibles est :

$$\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\},$$

Evénements élémentaires	**Variable aléatoire X (nombre de face)**	**Probabilité ($X = x$)**
(P,P)	**0**	**1/4**
(P,F)	**1**	**1/4**
(F,P)	**1**	**1/4**
(F,F)	**2**	**1/4**

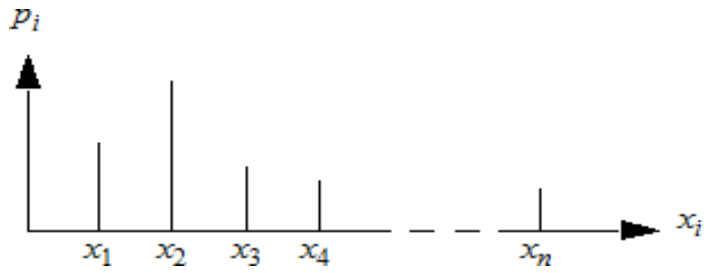
Donc les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X, ou l'espace de X, sont les suivantes: X = {0,1,2}.

5.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : la loi de probabilité d'une variable aléatoire X consiste à déterminer pour toutes les valeurs possibles de X leurs probabilités d'apparition. C'est-à-dire, si X est une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω fini, alors les événements élémentaires de Ω relatifs à X sont définis comme suit : X(ω) = {x_1, x_2, … … x_n}. La probabilité pour que l'événement relatif à $x_i$sont réalisées et définies par (X = x_i)=f(x_i). cette dernière est appelée loi de probabilité, ou encore densité de distribution de probabilité. Le tableau ci- dessus résume une telle définition :

Variables aléatoires X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	$\sum$
Probabilité $P(X = x_i)$ (ou P_i)	$(X = x_1)$	$(X = x_2)$	…	$P(X = x_i)$	…	$(X = x_n)$	1

En outre, toute loi de probabilité se représente graphiquement par diagramme en bâtons, comme ci-dessous :



Propriétés d'une loi de probabilité P (X = x_i) :

i) P (X = x_i) ≥ 0,
ii) $\sum_{i=1}^{n}$ P (X = x_i) = 1

5.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

5.3.1. Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est une application F de R dans [0,1]. Autrement dit, la fonction de répartition F permet de calculer les différentes probabilités d'une variable aléatoire dont la

valeur est inférieure strictement à un seuil donné (x).Mathématiquement parlant, la fonction de répartition, noté F(x), est définie de la manière suivante :

$\boldsymbol{X}$: $R \rightarrow$ [0,1].

$$F(x) = P(X \leq x)$$

5.3.2. Propriétés de la fonction de répartition : Toute fonction de répartition (x) doit remplir les critères suivants :

i) (x) est une fonction croissante, autrement dit si a et $b \in R$, et $a < b$, alors : $(a) < F(b)$

ii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

iii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$

iv) (x) est continue à droite.

5.3.3. Relation entre fonction de répartition et la probabilité de X : Les calculs de probabilités relatifs aux différentes valeurs de X peuvent être traités en se basant sur la fonction de répartition.

$$(a \leq X \leq b) = (b) - (a), \text{ tel que } a < b$$

Démonstration : on peut écrire ($X \leq b$) comme l'union de deux événements mutuellement disjoints. C'est à dire, {($\leq b$)} = {($X \leq a$)} ∪ {($a \leq X \leq b$)} alors :

$$(X \leq b) = (X \leq a) + (a \leq X \leq b) \Rightarrow P(a \leq X \leq \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{b}) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{a})$$

Pour obtenir la probabilité $P(\mathrm{X} < b)$ en utilisant la propriété de continuité, alors :

$$P(\mathrm{X} < b) = \mathrm{P}\left(\lim_{n \to \infty} \left\{X < b - \frac{1}{n}\right\} = \lim_{n \to \infty} P\left\{X < b - \frac{1}{n}\right\} = \lim_{n \to \infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right)\right.$$

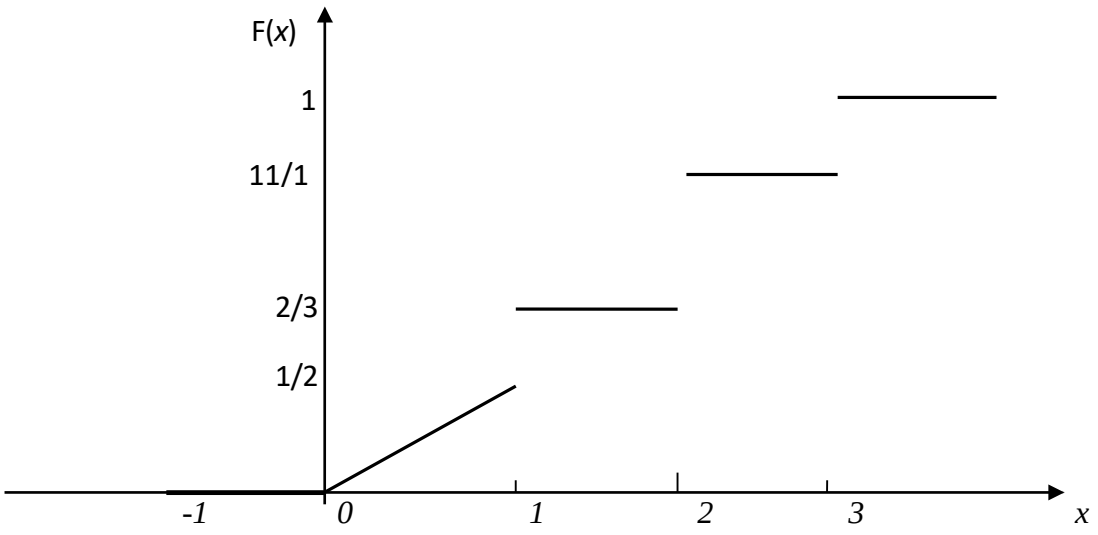
Exemple :

Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition (X) est définie par :

$$\textbf{Si } \mathbf{X \geq 3} \Rightarrow \mathbf{F(X_5) = P(X \geq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq X < 1 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 1 \leq X < 2 \\ \frac{11}{12} & \text{si } 2 \leq X < 3 \\ 1 & \text{si } X \geq 3 \end{cases}$$

La représentation graphique d'une telle fonction de répartition est la suivante :



En se basant sur la fonction de répartition mentionnée ci-dessus pour calculer les probabilités suivantes :

$$(X < 3),\ (X = 1),\ P\,(X > \tfrac{1}{2}),\ P(2 < X \leq 4)$$

Réponse :

a) P (X<3) = P ($\lim_{n\to\infty} \left\{X < 3 - \frac{1}{n}\right\} = \lim_{n\to\infty} F\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{11}{12}$

b) P (X=1) = $P(X \leq 1) - P(X < 1) = F(1) - \lim_{n\to\infty} F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

c) P (X> $\frac{1}{2}$) = 1− $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

d) $P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

5.4 Types de variables aléatoires

Une variable aléatoire est une variable dont les valeurs possibles sont associées à des probabilités. Elle est généralement représentée par une lettre majuscule latine.

On distingue :

- les variables aléatoires discrètes ;
- les variables aléatoires continues.

Autrement dit, une variable aléatoire est une variable qui prend différentes valeurs réelles représentant les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Chaque valeur prise par cette variable possède une probabilité associée.

Les variables aléatoires se divisent donc en deux catégories :

1. Variables aléatoires discrètes ;
2. Variables aléatoires continues.

A Variables aléatoires discrètes

Définition : une variable aléatoire X est dite discrète si et seulement si que toutes les valeurs qui peuvent prendre X sont des quantités dénombrables. Sa loi de probabilité est définie par $(x) = (X = x)$. Donc si la variable aléatoire discrète X peut prendre les valeurs dénombrables x_1, x_2, x_3 … alors $(x_i) = (X = x_i) \geq 0$ telle que. i = 1,2, ….

a) Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète est l'un des concepts les plus importants dans la théorie des probabilités.

En réalité, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs que peut prendre X, et les poids sont les probabilités qui les associées.

Ainsi, l'espérance mathématique E[X] d'une variable aléatoire X joue le rôle dévolu à la moyenne en statistiques : elle correspond à la valeur moyenne espérée par un observateur lors d'une réalisation de la variable aléatoire X. Les valeurs prises par cette variable sont pondérées par les probabilités des événements élémentaires de sorte que l'on définit : E[X]

Pour une aléatoire discrète X de loi de probabilité $(X = x_i)$, l'espérance mathématique de X, notée (X), se définit par l'expression suivante :

$$\mathrm{E(x)} = \sum \mathrm{x_i}.\ P(X = x_i)$$

En réalité, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs que peut prendre X, et les poids sont les probabilités qui les associées.

Exemple : on cherche l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X résultant du lancer d'un dé équilibré

Réponse :

$(X = 1) = (X = 2) = (X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = 1/6$

Alors :

$(X) = 1.(X = 1) + 2.P(X = 2) + 3.P(X = 3) + 4.P(X = 4) + 5.P(X = 5) + 6.P(X = 6)$

$(X) = 7/2$

Propriétés de l'espérance mathématique :

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors nous avons :

i) $E(\mathrm{a}) = \mathrm{a}, a \in R$

ii) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

iii) $E(aX) = aE(X), a \in R$

iv) $E(aX + b) = aE(X) + b, (a, b) \in (R, R)$

v) $E(X\ .\ Y) = E(X)\ .\ (Y)$ Si les deux variables X et Y sont indépendants.

vi) $Si\ X \geq 0, alors\ (X) \geq 0$

Remarque : l'espérance mathématique E(X) est un opérateur linéaire.

b) Variance d'une variable aléatoire discrète :

Soit X une variable aléatoire discrète, alors la variance de X sera donnée par l'expression suivante :

$$(X) = [X - (X)]^2 \Rightarrow V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Démonstration :

$$(X) = [X - (X)]^2 = \mathrm{E}[\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{XE}(\mathrm{X}) + 2(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2]$$

$$= (X^2) - 2\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{X}) + 2(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$$

$$= (X^2) - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$$

En réalité, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs que peut prendre X, et les poids sont les probabilités qui les associées.

Exemple : On veut calculer la variance d'une variable aléatoire X relative au nombre obtenu lors du jet d'un dé équilibré.

Réponse : Nous avons les probabilités :

$$(X = 1) = (X = 2) = (X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = 1/6$$

Alors : $(X) = 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + 6P(X = 6)$

$(X) = 7/2$

Et $(X^2) = 1^2P(X = 1) + 2^2P(X = 2) + 3^2P(X = 3) + 4^2P(X = 4) + 5^2P(X = 5) + 6^2P(X = 6)$ $E(X^2) = 91/6$

Alors la variance :

$$(X) = (X^2) - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Propriétés de la variance :

i) $\forall (a, b) \in (R, R), alors\ (aX) = a^2(X)$

ii) $(aX + b) = a^2(X)$, car $V(b) = 0$

iii) L'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

iv) $(X) \geq 0$

c) Distribution conjointe des variables aléatoires discrètes :

Une **variable aléatoire conjointe** ne dépend pas d'une seule valeur, telle que la valeur de X, mais de deux variables simultanément. Ainsi, considérons deux variables aléatoires discrètes X et Y .

On désigne par **probabilité conjointe** la probabilité que les deux variables prennent simultanément des valeurs données. Cette probabilité :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}, \mathrm{Y} = \mathrm{y})$$

est notée $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}, \mathrm{Y} = \mathrm{y})$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \geq 0$$

$$\sum x \sum y \ \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 1$$

où $\mathbf{x_i}$ **et** $\mathbf{y_j}$ sont respectivement des valeurs possibles des variables aléatoires X et Y.

La distribution conjointe décrit alors l'ensemble des probabilités associées à toutes les combinaisons possibles des valeurs de X et de Y, et elle est généralement représentée sous forme de tableau à double entrée appelé **tableau de distribution conjointe**. Ce tableau permet d'étudier simultanément le comportement des deux variables aléatoires ainsi que les relations pouvant exister entre elles.

Par conséquent, le tableau de la loi conjointe se présente comme suit :

Y / X	y_1	y_2	. . .	y_m	$f_1(x)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	. . .	$f(x_1,y_m)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	. . .	$f(x_2,y_m)$	$f_1(x_2)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	. . .	$f(x_n,y_m)$	$f_1(x_n)$
$f_2(y)$	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	. . .	$f_2(y_n)$	1

La probabilité que X prenne la valeur x se calcule et s'écrit comme suit :

$$P(X = x) = f_1(x) = \sum_{k=1}^{m} f(x, y_k)$$

La probabilité que Y prenne la valeur y se calcule et s'écrit comme suit :

$$P(Y = y) = f_2(y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y)$$

Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(y)$ sont appelées les **fonctions marginales** (ou **distributions marginales**). Elles vérifient les propriétés suivantes :

$$\sum f_1(x) = 1 \text{ et } \sum f_2 f2(y) = 1$$

B Variables aléatoires continues

Définition : soit une application : $\Omega \to R$, on dit que X est une variable aléatoire continue (parfois dite absolument continue), s'il existe une fonction $f \geq 0$ définie pour tout $x \in R$ et vérifiant pour tout B de nombre réel la propriété suivante :

Il s'agit d'une variable qui peut prendre un nombre infini de valeurs dans un intervalle limité, ou encore toute valeur à l'intérieur de cet intervalle. Pour cette

raison, les unités de mesure des variables continues sont elles-mêmes continues, comme le temps, le poids, la distance, le volume, etc.

Par conséquent, une variable aléatoire continue est une variable qui prend des valeurs continues. Si X est une variable aléatoire continue et qu'elle appartient à l'intervalle (a,b) alors :

$$\{X = x: a < x < b\}$$

Ainsi, la variable X possède un nombre infini de valeurs comprises entre les bornes inférieure et supérieure (a, b).

Parmi les exemples de variables quantitatives continues, on peut citer :

- La quantité de miel produite par les abeilles, exprimée en kilogrammes par semaine :

$$\{X = x : 10 < x < 40\}$$

- La taille des étudiants de première année universitaire :

$$\{X = x : 150 < x < 180\}$$

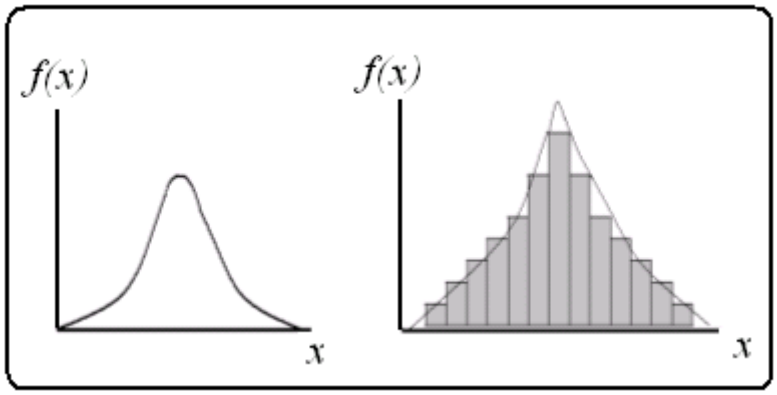
Il convient de signaler que le passage d'une variable discrète à une variable continue nécessite de prendre en considération deux changements :

1. Le symbole de sommation ∑, utilisé dans le cas discret, est remplacé par le symbole d'intégration ∫ dans le cas continu.
2. La probabilité devient, dans le cas continu, une fonction appelée **fonction de densité de probabilité**, notée f(x).

Propriétés de la variable aléatoire continue :

a) La distribution de probabilité continue

C'est l'ensemble des valeurs que peut prendre une variable aléatoire continue ainsi que les probabilités qui leur sont associées. Une telle distribution est appelée **fonction de densité de probabilité** ou **fonction de probabilité**, et elle est représentée par une courbe continue.



L'aire située sous la courbe représente la somme totale des probabilités. Par conséquent, cette aire est égale à l'unité (1). La fonction f(x)f(x)f(x) est appelée **fonction de densité de probabilité**.

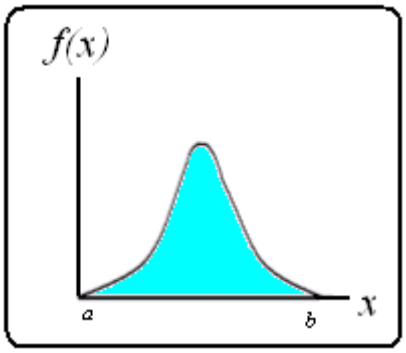
En supposant que la variable aléatoire continue **X** prend ses valeurs dans un intervalle donné, et que la courbe de cette fonction a la forme suivante, la probabilité que **X** appartienne à un intervalle **[a, b]** est égale à l'aire comprise sous la courbe de densité entre ces deux valeurs :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

avec la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

On suppose que la courbe de la fonction de densité f(x)f(x)f(x) est représentée par la figure suivante :



Les principales propriétés de la fonction de densité de probabilité sont les suivantes :

1. La fonction $f(x)$ est positive sur l'intervalle (a,b), c'est-à-dire que :

$$f(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$$

2. L'intégrale de f(x) sur l'intervalle (a,b) est égale à 1, puisqu'elle représente l'aire totale sous la courbe :

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

Cette fonction est soumise aux mêmes conditions fondamentales que celles applicables aux variables aléatoires discrètes. En effet, elle doit être positive sur l'intervalle (a,b) appelé **domaine de continuité**, et son intégrale sur cet intervalle doit être égale à l'unité.

Il convient également de souligner que l'intégration ne s'effectue que sur un intervalle. En effet, la probabilité associée à une valeur ponctuelle est nulle dans le cas d'une variable aléatoire continue. Ainsi, la probabilité est calculée par l'intégration entre deux points dont les bornes appartiennent au domaine de continuité (a,b).

b) Fonction de répartition F(x) d'une variable aléatoire continue

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue est définie comme suit :

$$F(X) = P\ (X \leq x)$$

où F(x) représente la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x.

La fonction de répartition revêt une importance particulière dans le cas d'une variable aléatoire continue. En effet, pour une variable continue, l'intérêt porte sur la probabilité d'un **intervalle** plutôt que sur celle d'une valeur isolée. Pour cette raison, il est souvent plus simple de calculer la probabilité d'un intervalle à l'aide de la fonction de répartition que de recalculer une intégrale à chaque fois.

Cela découle de la règle suivante : soient a et b deux points appartenant au domaine de définition de la variable aléatoire X, avec b > a. La probabilité que X appartienne à l'intervalle]a,b] est donnée par :

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

où la fonction de répartition F(x) est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Le symbole t est une variable muette d'intégration utilisée à la place de x, et l'intégration s'effectue sur le domaine considéré.

c) Espérance mathématique et variance

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue est calculée à l'aide de la relation suivante :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

où f(x) est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X.

La variance est quant à elle définie par :

$$V(X) = E[(X - E(X)^2)]$$

et peut également s'écrire :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \, f(x)\, dx$$

ou encore sous la forme :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

La variance mesure la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de son espérance mathématique.

L'espérance mathématique et la variance vérifient chacune quatre propriétés fondamentales, présentées ci-après :

Espérance mathématique	Variance
$E(C) = C$	$V(C) = 0$
$E(CX) = C \cdot E(X)$	$V(CX) = C^2 \cdot V(X)$
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	**Lorsque les deux variables aléatoires sont indépendantes** $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$
Lorsque les deux variables aléatoires sont indépendantes $E(X.Y) = E(X) \cdot E(Y)$	$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

d) Distribution conjointe des variables aléatoires continues

Soient X et Y deux variables aléatoires continues. On définit leur **fonction de densité de probabilité conjointe** comme suit :

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y)$$

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+} f(x,y)\, dx\, dy = 1$$

Cette fonction permet de décrire la répartition conjointe des probabilités des variables aléatoires continues X et Y.

d.1 La densité marginale :

Les deux **densités marginales** de la densité de probabilité conjointe du couple (X,Y) sont définies comme suit :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$

et

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

où :

- $f_1(x)$ est la densité marginale de la variable aléatoire X ;
- $f_2(y)$ est la densité marginale de la variable aléatoire Y.

Ces densités vérifient les propriétés suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, dx = 1$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\, dy = 1$$

Elles s'obtiennent en intégrant la densité conjointe $f(x,y)$ par rapport à l'autre variable. Ainsi, la densité marginale de X est obtenue en intégrant par rapport à y, tandis que celle de Y est obtenue en intégrant par rapport à x.

d.2 La densité (ou loi) conditionnelle

Dans le cas où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, la fonction de probabilité conditionnelle de X sachant que $Y = y$, notée $f(x/y)$, est définie par :

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

Cette définition découle de la formule classique des probabilités conditionnelles :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

La distribution de probabilité de X sachant que Y= y est constituée de l'ensemble des valeurs possibles de la variable X lorsque Y est fixée à la valeur y, ainsi que des probabilités conditionnelles correspondantes f(x/y). Cette distribution décrit le comportement de X sous la condition que l'événement Y= y soit réalisé.

d.3 Définition de l'indépendance de deux variables

Nous avons vu dans le premier chapitre que deux événements aléatoires A et B sont indépendants si :

$$\mathrm{P(A \text{ et } B) = P(A)\,P(B)}$$

À partir de cette règle, deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites **indépendantes** si, et seulement si, pour toute valeur possible x de X et y de Y, on a :

$$\mathrm{P(X = x,\ Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y)}$$

ou encore :

$$\mathrm{f(x,\ y) = f_1(x)\,f_2(y)}$$

où :

- f(x,y) est la fonction de probabilité conjointe de (X,Y);
- $f_1(x)$ est la fonction marginale de X ;
- $f_2(y)$ est la fonction marginale de Y.

Ainsi, l'indépendance de XX et Y signifie que la connaissance de la valeur de l'une des variables n'apporte aucune information sur la valeur de l'autre.

- **Cas des variables aléatoires continues :**

Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires continues, elles sont indépendantes si :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x},\ \mathrm{Y} \leq \mathrm{y}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x})\ \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq \mathrm{y})$$

ce qui s'écrit également :

$$\mathrm{F}(\mathrm{x},\ \mathrm{y}) \ = \mathrm{F}_1(\mathrm{x})\ \mathrm{F}_2(\mathrm{y}$$

où :

- F(x,y) est la fonction de répartition conjointe de (X,Y);
- $F_1(x)$ est la fonction de répartition marginale de X ;
- $F_2(y)$ est la fonction de répartition marginale de Y.

Ainsi, deux variables aléatoires continues sont indépendantes si, et seulement si, leur fonction de répartition conjointe peut s'écrire comme le produit de leurs fonctions de répartition marginales.

De manière équivalente, si les densités existent, X et Y sont indépendantes lorsque leur densité conjointe peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{f}\ (\mathrm{x},\mathrm{y}) = f_X(x) f_Y(y)$$

où $f_X(x)\ et\ f_Y(y)$ sont les densités marginales de X et Y, respectivement.

Autrement dit, deux variables aléatoires indépendantes sont celles dont la fonction de répartition conjointe (ou la densité conjointe) peut être exprimée comme le produit de deux fonctions marginales de répartition (ou de deux densités marginales).

d.4 Espérance conjointe et covariance

* Espérance conjointe :

Soient X et Y deux variables aléatoires :

L'espérance du produit XY, appelée **espérance conjointe**, est définie comme suit :

Dans le cas discret :

$$\mathbf{E(XY)} = \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{x_i y_j}\ \mathbf{f(x_i, y_j)}$$

où $\mathbf{f(x_i, y_j)}$ est la fonction de probabilité conjointe de X et Y.

Dans le cas continu :

$$\mathbf{E(XY)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{xy\ f(x,y)\ dx\ dy}$$

où $\mathbf{f(x,y)}$est la densité de probabilité conjointe de XXX et YYY

* Covariance :

La covariance mesure le degré de liaison linéaire entre deux variables aléatoires X et Y. Elle est définie par :

$$\mathbf{Cov\ (X\ Y)} = \mathbf{E}\left[\left(X - \boldsymbol{E}(X)\right)\left(Y - \boldsymbol{E}(Y)\right)\right]$$

En développant cette expression, on obtient :

$$\mathbf{Cov\ (X\ Y)} = \mathbf{E\ (X\ Y)} - \boldsymbol{E}(X)\ \boldsymbol{E}(Y)$$

Propriétés :

- Si $\mathbf{Cov\ (XY)} > \mathbf{0}, \mathbf{les}$ variables ont tendance à évoluer dans le meme sens.
- Si $\mathbf{Cov\ (XY)} < \mathbf{0}$, elles ont tendance à évoluer en sens opposé.
- Si $\mathbf{Cov\ (XY)} = \mathbf{0}$, les variables sont dites non corrélées.

Remarque :

Si X et Y sont indépendantes, alors :

et par conséquent :

$$. \mathbf{E}\,(\mathbf{X}\,\mathbf{Y}) \;= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})\;\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y})$$

Cependant, la réciproque n'est pas toujours vraie : une covariance nulle n'implique pas nécessairement l'indépendance des variables.

d.5 Coefficient de corrélation

C'est un paramètre statistique qui mesure l'intensité de la linéarité et le sens de la relation entre les deux variables quantitatives X et Y.

Le **coefficient de corrélation linéaire** de deux variables aléatoires X et Y, noté $r_{x,y}$ ou simplement r, est défini par

$$r_{x,y} \;=\; \frac{\mathrm{Cov}\,(\mathrm{X}\,\mathrm{Y})}{\sigma_x\;\sigma_y}$$

où :

- $\mathrm{Cov}\,(\mathrm{X}\,\mathrm{Y})$est la covariance entre X et Y ;
- $\sigma_{\mathrm{x}} \;=\; \sqrt{\mathrm{V(X)}}$est l'écart-type de X ;
- $\sigma_{\mathrm{y}} \;=\; \sqrt{\mathrm{V(Y)}}$est l'écart-type de Y ;

Propriétés du coefficient de corrélation :

$$-1 \leq\; \mathrm{r_{x,y}} \;\leq\; +1$$

- Si $\mathbf{r_{x,y}} \;=\; +1$, il existe une corrélation linéaire positive parfaite entre X et Y.
- Si $\mathbf{r_{x,y}} \;=\; -1$, il existe une corrélation linéaire négative parfaite entre X et Y.
- Si $\mathbf{r_{x,y}} \;=\; 0$, il n'existe pas de corrélation linéaire entre X et Y.

Interprétation :

Le coefficient de corrélation mesure l'intensité et le sens de la relation linéaire entre deux variables :

- Plus $\mathbf{r_{x,y}}$ est proche de 1, plus la liaison linéaire positive est forte.
- Plus $\mathbf{r_{x,y}}$ est proche de –1, plus la liaison linéaire négative est forte.
- Plus $\mathbf{r_{x,y}}$ proche de 0, plus la liaison linéaire est faible.

Remarque :

Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbf{Cov\,(X,Y)\ = 0}$$

et donc :

$$\mathbf{r_{x,y}\ = 0}$$

Cependant, l'absence de corrélation $(\mathbf{r_{x,y}})$ n'implique pas nécessairement l'indépendance des variables, sauf dans certains cas particuliers, notamment lorsque (X,Y) suit une loi normale conjointe.

On remarque que $r_{x,y}$ et $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ ont le même signe.

Le coefficient de corrélation est compris entre -1 et 1, en voici l'interprétation de ses différentes valeurs numériques (à titre indicatif) :

Coefficient de corrélation	**Qualité de corrélation**
$r_{x,y} = 1$	corrélation positive parfaite
$0{,}6 \leq r_{x,y} < 1$	bonne corrélation
$0{,}3 \leq r_{x,y} < 0{,}6$	corrélation médiocre
$0 < r_{x,y} < 0{,}3$	corrélation faible
$r_{x,y} = 0$	pas de corrélation

Mêmes remarques pour les valeurs négatives de $r_{x,y}$.

Coefficient de corrélation	**Qualité de corrélation**
$r_{x,y} = -1$	corrélation négative parfaite
$-0,6 \leq r_{x,y} < -1$	bonne corrélation
$-0,3 \leq r_{x,y} < -0,6$	corrélation médiocre
$-0 < r_{x,y} < -0,3$	corrélation faible
$r_{x,y} = 0$	pas de corrélation

Exercices du chapitre V :

Exercice 1 :

La probabilité qu'un étudiant inscrit à l'Université d'Oran 2 soit diplômé est de **0,4**. On sélectionne au hasard **cinq étudiants** de cette université. Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) Aucun des cinq étudiants n'obtient son diplôme ;
b) Un seul des cinq étudiants obtient son diplôme ;
c) Au moins un des cinq étudiants obtient son diplôme.

Exercice 2 :

On lance une **pièce de monnaie équilibrée** six (6) fois. On considère que l'apparition de la **face** constitue un succès. Calculer les probabilités associées aux événements suivants :

a) Calculer la probabilité d'obtenir **exactement deux faces**.
b) Calculer la probabilité d'obtenir **au moins quatre faces**.
c) Calculer la probabilité de **n'obtenir aucune face**.

Exercice 3 :

On choisit au hasard **trois personnes** parmi un groupe composé de **4 hommes** et **3 femmes**.

Soit $\mathbf{X_i}$ une variable aléatoire représentant le **nombre de femmes** dans l'échantillon sélectionné.

a) Établir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire $\mathbf{X_i}$.
b) Déterminer la **fonction de répartition F(x)** de $\mathbf{X_i}$.
c) Calculer l'**écart-type** de la variable aléatoire $\mathbf{X_i}$.

Exercice 4 :

On considère une variable aléatoire continue X admettant la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} kx \ si \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \quad ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante K.
2. Calculer la fonction de répartition F(x) puis la représenter graphiquement.
3. Calculer la probabilité :

$$. \mathrm{P}(1 \leq \mathrm{x} \leq 1.5)$$

4. Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance.

Solutions exercices du chapitre V :

Solution exercice 1 :

À partir des données de l'énoncé, nous déduisons les éléments suivants :

- Nombre d'épreuves : $\mathbf{n}= 5$.
- Probabilité de succès : il s'agit de la probabilité qu'un étudiant inscrit à l'Université d'Oran 2 obtienne son diplôme : $\mathbf{p = 0.4}$
- Probabilité d'échec : il s'agit de la probabilité qu'un étudiant n'obtienne pas son diplôme :

$$\mathbf{q = 1 - p = 1 - 0.4 = 0.6}$$

Par ailleurs :

- À chaque épreuve, deux issues seulement sont possibles : **succès** (obtention du diplôme) ou **échec** (non-obtention du diplôme) ;
- Le résultat de chaque épreuve est indépendant de celui des autres épreuves ;
- Les probabilités de succès et d'échec demeurent constantes d'une épreuve à l'autre.

Ces conditions étant réunies, la variable aléatoire X, représentant le nombre d'étudiants diplômés parmi les cinq étudiants sélectionnés, suit une **loi binomiale** de paramètres $\mathbf{n= 5}$ et $\mathbf{p = 0.4}$:

Sa fonction de probabilité est donnée par :

$$\mathbf{P(X = x) = C_n^x . p^x . q^{n-x}}$$

a) Probabilité qu'aucun des cinq étudiants n'obtienne son diplôme :

$$\mathbf{P(X = 0) = C_5^0 . (0.4)^0 . (0.6)^{5-0} = 0.0778}$$

b) La probabilité qu'un seul étudiant parmi les cinq sélectionnés obtienne son diplôme est donnée par :

$$\mathbf{P(X = 1) = C_5^1 . (0.4)^1 . (0.6)^{5-1} = 0.2592}$$

c) La probabilité qu'au moins un des étudiants sélectionnés obtienne son diplôme est donnée par :

$$\mathbf{P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)}$$

$$\mathbf{P(X = 1) = 0.2592}$$

$$\mathbf{P(X = 2) = C_5^2 . (0.4)^2 . (0.6)^{5-2} = 0.3456}$$

$$\mathbf{P(X = 3) = C_5^3 . (0.4)^3 . (0.6)^{5-3} = 0.2304}$$

$$\mathbf{P(X = 4) = C_5^4 . (0.4)^4 . (0.6)^{5-4} = 0.0768}$$

$$\mathbf{P(X = 5) = C_5^5 . (0.4)^5 . (0.6)^{5-5} = 0.0102}$$

$$\mathbf{\Rightarrow P(X \geq 1) = 0.2592 + 0.3456 + 0.2304 + 0.0768 + 0.0102}$$

$$\mathbf{P(X \geq 1) = 0.9222}$$

Remarque :

Cette probabilité $\mathbf{P(X \geq 1)}$ peut être calculée en utilisant la méthode de calcul de la probabilité de l'événement complémentaire, à savoir :

$$\mathbf{P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)}$$

$$\mathbf{P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)}$$

$$\mathbf{P(X \geq 1) = 1 - 0.0778}$$

$$\mathbf{\Rightarrow P(X \geq 1) = 0.9222}$$

Solution exercice 2 :

À partir des données de l'énoncé, nous déduisons les éléments suivants :

- Nombre d'épreuves : $\mathbf{n = 6}$.
- Probabilité de succès : il s'agit de la probabilité qu'un étudiant inscrit à l'Université d'Oran 2 obtienne son diplôme : $\mathbf{p = 0.4}$
- Probabilité d'échec : il s'agit de la probabilité qu'un étudiant n'obtienne pas son diplôme :

$$\mathbf{q = 1 - p = 1 - 0.4 = 0.6}$$

- **Probabilité de succès** : il s'agit de la probabilité d'obtenir la **face** lors d'un lancer de la pièce :

$$\mathbf{p = \frac{1}{2}}$$

- **Probabilité d'échec** : il s'agit de la probabilité d'obtenir le **pile** :

$$\mathbf{q = \frac{1}{2}}$$

En effet :

- À chaque lancer, deux issues seulement sont possibles : **succès** (apparition de la face) ou **échec** (apparition du pile) ;
- Le résultat de chaque lancer est indépendant de celui des autres lancers ;
- Les probabilités de succès et d'échec demeurent constantes d'un lancer à l'autre, puisque la pièce est équilibrée.

Par conséquent, si X désigne le nombre de faces obtenues au cours des six lancers, alors X est une **variable aléatoire discrète** qui suit une **loi binomiale** de paramètres

$$\boldsymbol{X_i \rightsquigarrow B(n = 6, p = \frac{1}{2})}$$

$$\mathbf{P(X = x) = C_n^x . p^x . q^{n-x}}$$

a) Calculer la probabilité d'obtenir **exactement deux faces** :

$$\mathbf{P(X = 2) = C_6^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.2344}$$

b) Calculer la probabilité d'obtenir **au moins quatre faces** est :

$$\boldsymbol{P(x \geq 4) = P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)}$$

$$\boldsymbol{P(x = 4) = C_6^4 . \left(\frac{1}{2}\right)^4 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.2344}$$

$$\boldsymbol{P(x = 5) = C_6^5 . \left(\frac{1}{2}\right)^5 . \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.0938}$$

$$\boldsymbol{P(x = 6) = C_6^6 . \left(\frac{1}{2}\right)^6 . \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0.0156}$$

$$\boldsymbol{P(x \geq 4) = 0.2344 + 0.0938 + 0.0156 = 0.3438}$$

c) Calculer la probabilité de **n'obtenir aucune face** :

$$\boldsymbol{P(x=0)=C_6^0.\left(\frac{1}{2}\right)^0.\left(\frac{1}{2}\right)^6=0.0156}$$

Solution exercice 3 :

Soit $\mathbf{X_I}$ une variable aléatoire discrète désignant le nombre de femmes parmi les trois personnes choisies au hasard.

$$X_i=\{0,1,2,3\}$$

a) La **loi de probabilité** de la variable aléatoire $\mathbf{X_i}$:

$$X_i=0\Rightarrow P(X=0)=\frac{C_4^3*C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$$

$$X_i=1\Rightarrow P(X=1)=\frac{C_4^2*C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$$

$$X_i=2\Rightarrow P(X=2)=\frac{C_4^1*C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$$

$$X_i=3\Rightarrow P(X=3)=\frac{C_4^0*C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$$

x_i	0	1	2	3	Total
P_i	4/35	18/35	12/35	1/35	1
$P_i.x_i$	0	18/35	24/35	3/35	45/35 =1.285
$P_i.X_i^2$	0	18/35	48/35	9/35	75/35 = 2.142

b) Déterminer la **fonction de répartition F(x)** de $\mathbf{X_i}$:

$$F(X) = P(X < X_i)$$

Si $X < 0 \Rightarrow F(X_1) = P(X < 0) = 0$

Si $X < 1 \Rightarrow F(X_2) = P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{4}{35}$

Si $X < 2 \Rightarrow F(X_3) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4 + 18}{35} = \frac{22}{35}$

Si $X < 3 \Rightarrow F(X_4) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4 + 18 + 12}{35}$

$$= \frac{34}{35}$$

Si $X \geq 3 \Rightarrow F(X_5) = P(X \geq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

$$\mathbf{F(X)} = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \frac{4}{35} & \text{si } X < 1 \\ \frac{22}{35} & \text{si } X < 2 \\ \frac{34}{35} & \text{si } X < 3 \\ 1 & \text{si } X \geq 3 \end{cases}$$

c) Calculer l'**écart-type** de la variable aléatoire $\mathbf{X_i}$:

Calcul de l'espérance mathématique de $\mathbf{X_i}$:

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i . P(X_i)$$

$$E(X_i) = \left(0 * \frac{4}{35}\right) + \left(1 * \frac{18}{35}\right) + \left(2 * \frac{12}{35}\right) + \left(3 * \frac{1}{35}\right) = \frac{45}{35} = 1.285$$

Calcul de la variance de $\mathbf{X_i}$

$$V(X_i) = E(x^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X_i) = \sum P_i X_i^2 - [E(X)]^2 = 2.142 - 1.285 = 0.847$$

Calcul de l'écart-type de $\mathbf{X_i}$

$$\delta_{X_i} = \sqrt{V(X_i)} = \sqrt{0.847} = 0.92$$

Solution exercice 4 :

a) La valeur de la constante K :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} kxdx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{2} kxdx = 1$$

$$k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow k\left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 1$$

$$2k = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si\ 0 \le x \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

b) Calculer la fonction de répartition F(x) puis la représenter graphiquement :

$$\boldsymbol{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f(t)dt}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X est définie par :

$$\mathbf{F(X) = P(X \leq X)}$$

Elle représente la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à X.

Si f(x) est la densité de probabilité de X, alors la fonction de répartition s'écrit :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La fonction de répartition revêt une importance particulière dans le cas d'une variable aléatoire continue. En effet, pour une variable continue, l'intérêt porte sur la probabilité d'un **intervalle** plutôt que sur la probabilité d'une valeur ponctuelle.

Pour calculer la probabilité d'un intervalle, il est généralement plus simple d'utiliser la fonction de répartition que de calculer une intégrale à chaque fois. Cela découle de la propriété suivante :

Soient a et b deux points appartenant au domaine de définition de la variable aléatoire X, avec b>ab>ab>a. La probabilité que X appartienne à l'intervalle] a, b] est donnée par :

$$\mathbf{F(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$$

où F(x) désigne la fonction de répartition de X.

Cette relation permet de déterminer facilement la probabilité associée à tout intervalle à partir de la fonction de répartition, sans avoir à recalculer l'intégrale de la densité de probabilité.

$$\boxed{P(a < x \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)}$$

$$si\ x < 0\ \Rightarrow F(x_1) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

$$si\ x < 2 \Rightarrow F(x_2) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

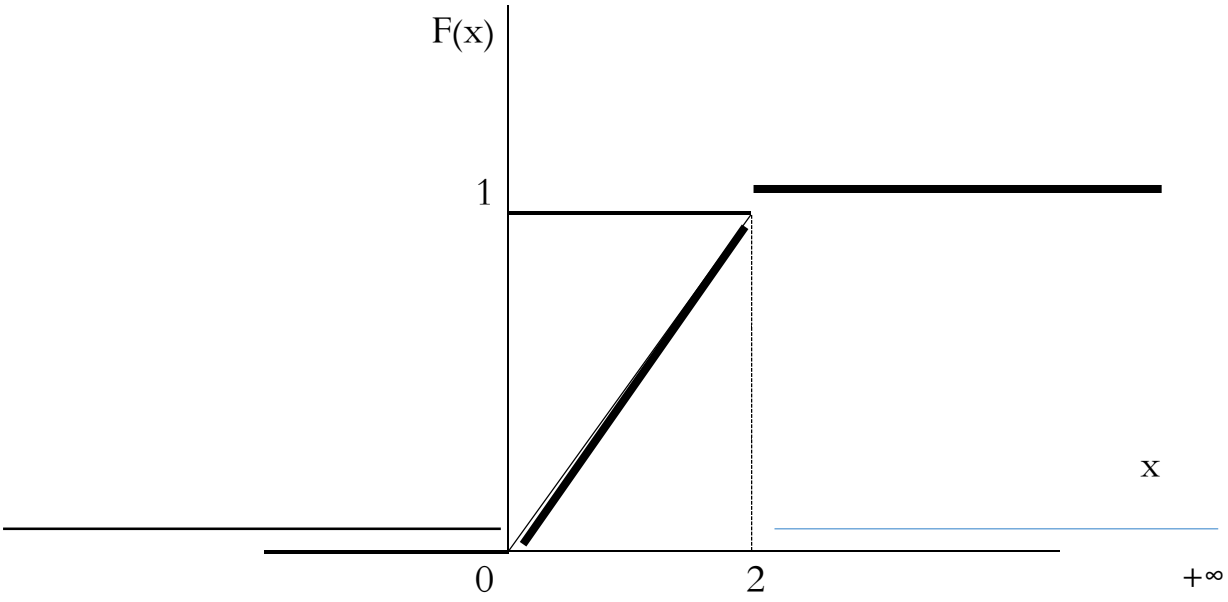
$$= \frac{x^2}{4} - 0 = \boldsymbol{\frac{x^2}{4}}$$

$$si\ x \geq 2 \Rightarrow F(x_3) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} f(t)dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{2} \frac{t}{2}dt + 0 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2^2}{4} - 0 = 1$$

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

<u>Représentation graphique de la fonction de répartition F(X) :</u>



$-\infty$

c) Calculer la probabilité : $\mathbf{P(1 \leq x \leq 1.5)}$

$$P(1 \leq x \leq 1.5) = \int_{1}^{1.5} f(x)dx = \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{1.5} = \frac{1}{2}\left[\frac{1.5^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right]$$

$$= 0.3125$$

5. Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance :

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{2} xf(x)dx + \int_{2}^{+\infty} xf(x)dx = 0 + \int_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx + 0$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2^3}{3} - 0\right] = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$\mathrm{V(x)} = \mathrm{E(x^2)} - [\mathrm{E(x)}]^2$$

$$E(\mathrm{x^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{2} x^2 f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$E(\mathrm{x^2}) = 0 + \int_{0}^{2} x^2 f(x)dx + 0 = \int_{0}^{2} x^2 \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2^4}{4} - 0\right] = 2$$

$$\mathrm{V}(x) = 2 - (1.33)^2 = 0.23$$

Exercices non corrigés du chapitre V :

Exercice 1 :

On jette trois fois une pièce de monnaie mal équilibrée et telle que :

$P(F) = 3/4$ *et* $P(P) = 1/4$.

Soit X la variable aléatoire représentant la plus grande succession de faces que l'on obtient.

Travail à faire :

a) Déterminer la loi de probabilité de X et représenter la graphiquement.

b) Donner sa fonction de répartition et sa représentation graphique.

c) Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X.

Exercice 2 :

Un joueur lance deux pièces de monnaie bien équilibrée. Il gagne 10 DA ou 20 DA selon qu'il obtient 1 ou 2 faces. Par contre, il perd 50 DA s'il n'obtient aucune face. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 3 :

Une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose **X** " le nombre d'essais pour ouvrir la porte ".

Travail à faire :

a) Calculer la loi de probabilité de *X*, c'est-à-dire P(X = k) avec *k* = 1, 2, 3, 4.

b) Calculer E(X) et Var(X).

Exercice 4 :

On choisit deux cartes au hasard dans une boite contenant 5 cartes numérotées 1,1, 2, 2, et 3. Soit X la somme et Y le maximum des deux nombres tirés.

Travail à faire :

a) Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et la variable aléatoire Y ?

b) Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X+Y ?

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X, Y et X+Y ?

Exercice 5 :

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de probabilité est:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} C(4\mathbf{x} - \mathbf{x}^2) & x \in [0;4] \\ 0 & x \notin [0;4] \end{cases}$$

Travail à faire :

a) Quelle est la valeur de *C* ?

b) Quelle est la fonction de répartition de X ?

c) Calculer E(X) et V(X) ?

d) Calculer la probabilité de P (X =3).

Chapitre VI : Lois de probabilités usuelles : Lois discrètes et continues

Introduction :

Le présent chapitre a pour objectif de présenter les principales lois de probabilité couramment utilisées. Pour chacune d'elles, seront exposés son nom, son symbole, ses caractéristiques essentielles, sa loi de probabilité ou sa fonction de densité, ainsi que ses principaux moments. Selon la nature de la variable aléatoire considérée, les lois de probabilité usuelles se répartissent en deux grandes catégories : les lois discrètes et les lois continues.

6.1 Lois discrètes

Par convention, en entend par une loi discrète, toute loi de probabilité associée à une variable aléatoire discrète.

A. Lois discrètes uniformes

Définition : soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une loi discrète Uniforme sur l'intervalle [1, n], notée X $\rightsquigarrow$ I $[1, \mathrm{n}]$, si est seulement si $P\,(X = x)$ = $1/n$, et ce pour toute valeur de X = {1,2, … . n}. Cela implique $P\,(X = 1) = P\,(X = 2) = \cdots = (\,X = n)$.

Exemple : On lance un dé, alors l'ensemble des résultats possibles est :

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, 5,\ 6\},\ alors\ (X = x) = 1/6 \qquad \forall = \{1,2, \ldots . , n\}.$$

Il est clair que $n = 6$ points, alors $(X = x) = 1/6$. De ce fait, la variable aléatoire X suit une loi uniforme et on note X $\rightsquigarrow$ I $[1, 6]$ .Autrement dit, pour toute partie finie A de Ω, alors :

$$\mathrm{P\,(A)} = \frac{\mathrm{Card\ (A)}}{\mathrm{Card\ (B)}} = \frac{\mathrm{Nombre\ de\ cas\ favorables\ de\ A}}{\mathrm{Nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

Moments d'une loi discrète uniforme :

- **L'espérance mathématique $(\boldsymbol{X})$:**

$$\mathbf{E\,(X)} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)(\mathbf{1}) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)(\mathbf{2}) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)(\mathbf{3}) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)(\mathbf{4}) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)(\mathbf{5}) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)(\mathbf{6})$$

$$\text{D'où : } \quad \mathbf{E\,(X) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x \;=\; \frac{n+1}{2}}$$

- **La variance** (X)

$$\mathrm{V\,(X)} \;= \mathrm{E\,[(X} \;- \mathrm{E\,(X)^2)\,]} = \;\mathrm{V\,(X)} \;= \mathrm{E\,(X^2)} \;-\; \mathrm{[E\,(X)]^2}, \text{ alors :}$$

$$\mathrm{E\,(X^2)} \;=\; \left(\frac{1}{n}\right)[1 \;+ 4 + 9 \;+ \cdots + n^2] \;=\; \frac{1}{n}\;.\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Par conséquent, $\mathrm{V\,(X)} \;=\; \frac{(n+1)\,(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$

$$\text{D'où : } \mathrm{V\,(X)} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2 \;-\; \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \;=\; \frac{n^2-1}{12}$$

B. Loi de Bernoulli, notée (p)

Définition : La loi de Bernoulli intervient dans le cas où la variable aléatoire X prend uniquement deux valeurs, appelée par convention succès ou échec. En effet, la loi de Bernoulli de paramètre p est celle associée à une variable aléatoire discrète dont les valeurs ne peut être que 1 ou 0 avec les probabilités p et $(1 - p)$.

On note alors $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$, c'est-à-dire la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Quelques Exemples relatifs aux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli :

- On lance une pièce de monnaie, donc les résultats possibles sont : pile ou face ;
- Un étudiant passe un examen, il se pourrait qu'il ait ou pas ;
- Le test de qualité d'un lot de pièces, des pièces défectueuses ou non défectueuses ;
- Une porte fermée ou ouverte.

Pour une telle expérience, on va associer à la variable aléatoire X la valeur 1 pour un succès, et la valeur 0 pour un échec. Alors on note :

$$X = \begin{cases} 1 : succés \\ 0 : échec \end{cases}$$

Si La probabilité d'avoir un succès : $(X = 1) = p$, alors la probabilité d'avoir un échec est $P(X = 0) = 1 - p = q$. on note alors $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$:

Moments : Les moments d'une variable X qui suit une loi de Bernoulli sont donnés par :

- **L'espérance mathématique** (X) :

$$(X) = (1).\ p + (0).\ (1 - p) = p$$

D'où : $(X) = p$

- **La variance** (X) :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (1^2).p + (0^2)(1 - p) - p^2$$
$$= p - p^2 = (1 - p)$$

D'où : $(X) = p.q = p.(1 - p)$

Exemple :

On lance, une seule fois, dans l'air une pièce de monnaie, les résultats possibles sont ainsi :

$$\Omega = \{pile, face\}$$

On désigne par $X = \begin{cases} 1 : pile \\ 0 : face \end{cases}$

Il est clair que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli dont **P (X = 1)** $= \frac{1}{2}$ et **P (X = 0)** $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc on note : **X** $\rightsquigarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

- L'espérance mathématique de $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{(X) = p = \frac{1}{2}}$
- La variance de $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{V(X) = pq = \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}}$

C. Loi Binomiale, notée (n,p):

Soit X une variable aléatoire discrète dont les résultats possibles sucés ou échec. Si on répète la même expérience n fois, alors on dit que la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on note alors $\rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$.

La loi binomiale est l'une des lois de probabilité discrètes. Elle est utilisée pour déterminer la probabilité qu'un événement donné (succès) se produise exactement X fois au cours de n répétitions d'une même expérience. Cette probabilité est notée P(X), sous réserve que les conditions suivantes soient vérifiées :

- **Chaque essai comporte uniquement deux issues possibles et incompatibles** : Chaque répétition de l'expérience se termine par l'une de deux issues possibles. La première est appelée **succès**, dont la probabilité est notée **p**. Il s'agit de l'événement étudié dans le problème. La seconde issue correspond à **l'échec**, dont la probabilité est notée **q**, avec :

$$\mathbf{p + q = 1}$$

- **Les essais sont indépendants** : Les n essais sont indépendants les uns des autres, ce qui signifie que le résultat d'un essai n'a aucune influence sur les résultats des essais précédents ou suivants.
- **La probabilité de succès est constante** : La probabilité de succès p demeure la même pour chaque essai et ne varie pas d'une répétition à l'autre. En d'autres termes, les expériences effectuées avec remise peuvent être modélisées par une loi binomiale.

Remarque : $\sum \mathcal{B}(p) \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$, c'est dire répéter n fois une loi de Bernoulli va donner une loi binomiale.

Par conséquent, la probabilité d'obtenir exactement X succès parmi n essais est calculée comme suit :

$$P(X = x) = C_n^x . p^x . q^{n-x}$$

$$x = 0,1,2,3,\dots,n$$

$$n = 1,2,3,\dots$$

Où :

- X représente le nombre de succès observés ;
- p désigne la probabilité de succès lors d'un essai unique (elle demeure constante d'un essai à l'autre) ;
- q =1−p représente la probabilité d'échec ;
- n est le nombre total d'essais réalisés.

Ainsi, X : est nombre de succès parmi les n durant les n expériences.

Cette relation constitue la définition de la **loi binomiale**. Sa loi de probabilité peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$P(X = x) = C_n^x . p^x . (1-p)^{n-x}$$

$$\text{Où} \quad \mathbf{X \sim B(n, p)}$$

Caractéristiques de la loi binomiale :

Moments d'une loi binomiale :

Espérance mathématique et variance :

Soit une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, notée :

$$X \sim B(n, p)$$

L'espérance mathématique et la variance de X sont données par :

$$E(X) = n.\ p$$

et

$$V(X) = n.\ p.\ (1-p) = n.\ p.\ q$$

où :

- n est le nombre d'essais ;
- p est la probabilité de succès à chaque essai ;
- $q = 1 - p$ est la probabilité d'échec.

L'écart-type est alors :

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q}$$

Ces paramètres permettent de caractériser la position centrale et la dispersion de la distribution binomiale.

La loi binomiale comme extension de la loi de Bernoulli :

La loi binomiale constitue une généralisation de la loi de Bernoulli.

On dit qu'une expérience est une **épreuve de Bernoulli** lorsqu'elle ne comporte que deux issues possibles et mutuellement exclusives : A et A'. L'événement A est appelé **succès**, tandis que l'événement A' est appelé **échec**.

Considérons la variable aléatoire X représentant le nombre de succès obtenus. Cette variable prend la valeur :

- $X = 1$ si l'événement A se réalise (succès) ;
- $X = 0$ dans le cas contraire (échec).

On note généralement :

- P la probabilité de succès, c'est-à-dire la probabilité de réalisation de l'événement A ;
- $q = 1 - p$ la probabilité de l'événement contraire A' (échec).

La variable aléatoire X suit alors une **loi de Bernoulli** de paramètre p, notée :

$$X \sim B(p)$$

Sa loi de probabilité est définie comme suit :

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{si } x = 1, \\ q = 1 - p, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

ou encore sous forme de tableau :

$\mathbf{x}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{P}\,(\mathbf{X} = \boldsymbol{x})$	$\mathbf{q} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p}$	$\mathbf{p}$

Ainsi, la loi de Bernoulli modélise une seule épreuve, tandis que la loi binomiale modélise la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques.

Exemple :

On veut réaliser une étude clinique sur des malades se présentant à une consultation hospitalière. Pour cette étude, seuls les malades répondant à un ensemble de critères C sont retenus. Des caractéristiques antérieures ont montré que 20% des consultations présentent les critères$C$.

Dix malades viennent consulter le premier jour. Soit X la variable aléatoire relative au « nombre de malades retenus » c'est-à-dire répondant à l'ensemble des critères C. la variable X alors suit la loi binomiale, c'est-à-dire $\boldsymbol{X \rightsquigarrow \mathscr{B}}$ **(10; 0,20)**.

La probabilité pour qu'aucun malade ne soit consulté ce jour est égale à :

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{X} = 0) \;=\; \mathrm{C}_{10}^{0} \,.\, (0{,}20)^{0} \,.\, (0{,}80)^{10-0} \;= 0{,}107$$

Par ailleurs, la probabilité pour qu'au moins un malade soit consulté :

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{X} \geq 1) \;= 1 \;-\; \mathrm{P}\,(\mathrm{X} = 0) \;=\; 1 \;-\; 0{,}107 \;= 0{,}803$$

D. Loi géométrique

La loi géométrique est la loi de la variable $\mathbf{X}$, « loi de nombre d'essais nécessaires », pour qu'un événement de probabilité p apparaisse la première fois après le n^{ième} essai. Les hypothèses étant les mêmes que la loi binomiale, en particulier, la probabilité $\mathbf{p}$ reste constante au cours des essais, alors :

$$\mathrm{P}\,(X = x) = p \,.\, (1 \;- p)^{x\,-1} \;\; x \;\in N^{*}$$

Il y a $(\mathrm{X} - 1)$ échecs avant d'obtenir le succès au $\mathrm{X}^{\grave{e}}$ essai.

Caractéristiques de la loi géométrique :

Moments d'une loi géométrique :

Espérance mathématique et variance :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1 - P}{P^2}$$

Ce paramètre p correspond à :

- la probabilité de succès (avec $0 < p \leq 1$),
- et 1 — p représente la probabilité d'échec.

L'écart-type est alors :

$$\boldsymbol{\sigma = \frac{\sqrt{1 - P}}{P}}$$

Exemple :

Un certain matériel a une probabilité p = 0,02 constante de défaillance à chaque mise en service. On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mise en marche, arrêté, mis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne. Le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. La probabilité pour que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au deuxième essai égale à :

$$P\,(X = 10) = \,(0{,}02)\,.\,(1\, - 0{,}02)^9\, = 0{,}0167$$

Moments :

Espérance mathématique et variance :

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}02}$$

$$V(X) = \frac{1 - P}{P^2} = \frac{1 - 0{,}02}{(0{,}02)^2}$$

E. **Loi de Poisson, notée** (λ)

La loi de Poisson est une autre loi de probabilité discrète. Elle est utilisée pour déterminer la probabilité qu'un nombre donné d'événements (ou de succès) se produise au cours d'une unité de temps, d'une unité d'espace ou dans un intervalle donné.

Cette loi s'applique lorsque les événements (ou succès) sont **indépendants les uns des autres** et lorsque le **nombre moyen d'occurrences par unité de temps ou d'espace demeure constant**.

Dans ces conditions, la variable aléatoire représentant le nombre d'événements observés suit une **loi de Poisson**. Ainsi, la probabilité d'observer un certain nombre d'événements peut être calculée à l'aide de cette loi.

Cette loi a été découverte au début du XIX° par Siméon-Denis Poisson (1781-1840). Cette loi s'applique aux événements rares, c'est dire la probabilité de survenance d'un tel événement est très faible. C'est le cas notamment de contrôle de qualité puisque on suppose que les erreurs sont rares, les risques liés aux crédits…etc. En effet, on dit qu'une une variable aléatoire entière X, positive ou nulle, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si et seulement si :

$$P(X) = e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!}$$

Où $X \in N$

Où :

- X : le nombre d'événements (ou de succès) observés ;
- $\mathbf{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$: la probabilité d'observer exactement X événements ;
- λ (lettre grecque lambda) : le nombre moyen d'événements ou de succès par unité de temps (ou d'espace) ;
- **e** : la base des logarithmes népériens, dont la valeur approximative est :

$$e = 2{,}71828$$

De manière générale, les phénomènes modélisés par une **loi de Poisson** sont ceux pour lesquels on observe un **taux moyen d'occurrence** d'un événement donné. Ce taux est généralement associé à une période de temps déterminée, à un espace donné, ou aux deux à la fois.

Parmi les exemples d'applications de la loi de Poisson, on peut citer :

- Le nombre d'appels téléphoniques pendant un intervalle de temps (Le nombre moyen d'appels téléphoniques reçus par le centre de surveillance d'un hôpital durant la matinée).
- Le nombre moyen de femmes enceintes admises dans une maternité entre minuit et quatre heures du matin.
- Le nombre moyen de fautes typographiques relevées sur une page d'un ouvrage donné.
- Le nombre moyen d'avions arrivant à un aéroport international entre huit heures du matin et midi.
- Le nombre de pièces défectueuses dans une livraison importante, la production étant de bonne qualité.

Dans tous ces cas, l'intérêt porte sur le comptage du nombre d'occurrences d'un événement au cours d'un intervalle de temps ou dans une zone donnée, ce qui justifie l'utilisation de la loi de Poisson pour leur modélisation.

Ce taux moyen constitue le **paramètre de la loi de Poisson**, noté λ. Sa valeur varie en fonction de l'intervalle de temps ou de l'espace considéré. Ainsi, lorsque la durée d'observation ou la zone d'étude change, la valeur de λ se modifie proportionnellement. Cette propriété sera illustrée plus en détail à travers les exercices résolus présentés ultérieurement.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Sa loi de probabilité est :

$$P(X) = e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Nous allons démontrer que :

$$E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda$$

Démonstration de l'espérance mathématique :

Par définition,

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \sum_{X=0}^{\infty} x\, P(X = x)$$

Soit

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \sum_{X=0}^{\infty} x\, \mathrm{e}^{-\lambda} . \frac{\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x!}}$$

Comme le terme correspondant à $\mathrm{X} = 0$ est nul, on obtient :

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{X=1}^{\infty} x\, . \frac{\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x!}}$$

Or,

$$\frac{\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x!}} = \frac{1}{(x-1)!}$$

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{X=1}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathrm{x}}}{(x-1)!}$$

En factorisant par λ,

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{X=1}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathrm{x}-1}}{(x-1)!}$$

Posons $\mathrm{k} = \mathrm{x} - 1$. Lorsque x varie de 1 à $+\infty$, k varie de 0 à $+\infty$. Ainsi,

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{X=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{k!}$$

Or,

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \sum_{X=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda}\, \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda$$

Ainsi,

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \lambda$$

Démonstration de la variance :

Pour calculer la variance, on utilise :

$$\mathrm{V}\,(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\,(\mathrm{X}^2) - [\mathrm{E}\,(\mathrm{X})]^2$$

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = \sum_{X=0}^{\infty} x\, \mathrm{e}^{-\lambda} . \frac{\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x!}}$$

On utilise l'identité :

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}^2) = \mathrm{E}\,[X\,(X-1)] + \mathrm{E}\,(\mathrm{X})$$

Calculons d'abord $\mathrm{E}\,[X\,(X-1)]$:

$$\mathrm{E}\,[X\,(X-1)] = \sum_{X=0}^{\infty} x\,(x-1)\, . \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x!}}$$

Les termes pour $x = 0$ et $x = 1$ étant nuls :

$$\mathrm{E}\,[X\,(X-1)] = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{X=2}^{\infty} \frac{x\,(x-1)\,\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x!}}$$

Or,

$$\frac{x\,(x\,-1)}{\mathrm{x!}} = \frac{1}{(x\,-2)!}$$

Ainsi,

$$\mathrm{E}\,[X\,(X\,-1)]\;=\;\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{X\,=2}^{\infty}\frac{\lambda^{\mathrm{x}}}{(x\,-2)!}$$

En factorisant λ^2,

$$\mathrm{E}\,[X\,(X\,-1)]\;=\;\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{X\,=2}^{\infty}\frac{\lambda^{\mathrm{x}\,-2}}{(x\,-2)!}$$

Posons k $= x\,-2$. On obtient :

$$\mathrm{E}\,[X\,(X\,-1)]\;=\;\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\,=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{k!}$$

Donc

$$\mathrm{E}\,[X\,(X\,-1)]\;=\;\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda}\;=\;\lambda^2$$

Par suite,

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}^2)\;=\;\lambda^2\,+\,\lambda$$

La variance vaut alors :

$$\mathrm{V}\,(X)\;=\;(\lambda^2\,+\,\lambda)\,-\,\lambda^2\,=\,\lambda$$

Ainsi,

$$\boldsymbol{V\,(X)}\;=\;\boldsymbol{\lambda}$$

et l'écart-type est :

$$\boldsymbol{\sigma}\;=\;\sqrt{\boldsymbol{V(X)}}\;=\;\sqrt{\boldsymbol{\lambda}}$$

Résultat final :

Pour une variable aléatoire $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \lambda$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) = \lambda$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\lambda}$$

Ces résultats montrent que, dans une **loi de Poisson**, l'espérance et la variance sont égales au paramètre λ.

F. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi binomiale peut être approximée par la loi de Poisson lorsque l'événement de succès est un **événement rare**.

Un événement de succès est considéré comme rare lorsque sa probabilité d'occurrence est très faible. Dans ce cas, l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson devient pertinente et permet de simplifier les calculs probabilistes.

Cette approximation est généralement utilisée lorsque certaines conditions sont réunies, notamment lorsque le nombre d'essais est élevé et que la probabilité de succès est faible. Dans ces circonstances, la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \mathbf{np}$ fournit une bonne approximation de la loi binomiale.

Lorsque $n \to \infty$ et que la probabilité de succès p est très faible, la loi binomiale peut être approximée par la loi de Poisson.

En pratique, la loi de Poisson fournit des résultats très proches de ceux de la loi binomiale lorsque :

- le nombre d'essais n est suffisamment grand ;
- la probabilité de succès p est très faible ;
- le produit **n p** reste fini et modéré.

Dans ces conditions, une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p,

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,\ p)$$

peut-être approximée par une loi de Poisson de paramètre :

$$\lambda = np$$

Une règle pratique souvent utilisée est que l'approximation est satisfaisante lorsque :

$$n \geq 30$$

Et

$$p \leq 0,1$$

Ou

$$np < 5 \text{ et } nq < 5$$

Dans ce cas, les probabilités binomiales peuvent être remplacées par les probabilités de la loi de Poisson, ce qui simplifie considérablement les calculs.

6.2 Lois continues :

Les lois continues sont celles associées à des variables aléatoires continues.

A. Loi de Laplace-Gauss (Loi Normale) :

Introduction :

La loi normale dite encore la loi de Laplace-Gauss est une loi très fréquente. Plusieurs phénomènes dans la nature suivent cette loi, du fait qu'ils vérifient d'emblée les conditions de Borel :

- La dépendance de plusieurs facteurs
- L'additivité.

La loi normale est utilisée comme modèle théorique dans les ajustements des distributions expérimentales (observées), particulièrement en économie, en sciences de gestion, en médecine et en biologie. Elle constitue également la base

du fondement théorique de la statistique inductive. **Le fameux 5%** largement utilisé dans les tests statistiques, la variable **centrée réduite t** et la **variable testée** $\varepsilon\alpha$ trouvent leur explication dans les propriétés conséquentes de cette loi comme on peut le constater un peu plus loin.

Principe :

Une variable aléatoire continue **x** suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ si sa densité de probabilité s'exprime sous la forme :

Où $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

π = 3,14 (constante)

e = 2,71 (base du logarithme népérien)

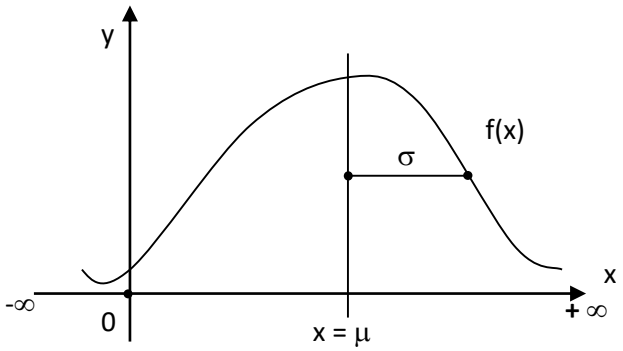
μ : la moyenne

σ : l'écart type

Notation :

N (μ , σ) *signifie que* ***x*** *est une variable gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ.*
La variable aléatoire **x** appartient à l'intervalle] -∞ à +∞ [

La densité de probabilité de la loi normale est une fonction qui est représentée graphiquement par la fameuse courbe dite en « **cloche** » :



Déduction :

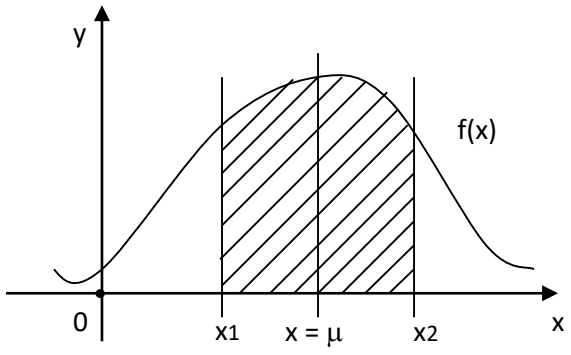
1. La courbe de la loi normale est symétrique (axe de symétrie $x = \mu$)
2. La surface sous la courbe de la loi normale est égale à 1 (densité de la probabilité).
3. $F(x) \geq 0$ (propriété des probabilités $p(x) \geq 0$)

Probabilité et surface :

La surface totale comprise entre la courbe de la loi normale et l'axe des abscisses vaut 1 ; d'autre part l'aire comprise sous la courbe, entre les deux points d'abscisses $x = x_1$ et $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, représente la probabilité pour que x se trouve entre x_1 et x_2 et que l'on écrit :

$P(x_2 > x > x_1)$

Alors $P(x_2 > x > x_1) =$ surface hachurée



Donc, la probabilité cherchée est équivalente à la surface hachurée, qui est obtenue par intégration.

⇒ **DIFFICULTES RENCONTREES**

1. La fonction de la loi normale ne peut être intégrée au moyen des techniques classiques (exponentielle au deuxième degré).
2. La fonction de la loi normale comprend, en plus de la variable x, deux paramètres μ et σ. A chaque fois que l'on donne une valeur à μ ou à σ ou aux deux paramètres simultanément, on obtient une nouvelle fonction.

⇒ **SOLUTIONS APPORTEES**

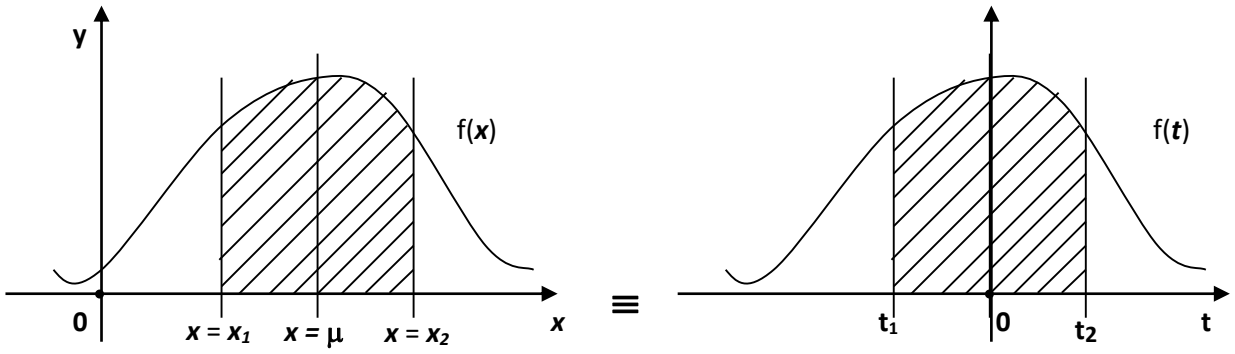
1. On utilise le développement limité pour l'intégration.
2. On fixe les paramètres μ et σ pour obtenir une seule table (standardisation) en passant de la loi normale **N** (μ, σ) à la loi normale Centrée Réduite **N** (0 ; 1) en procédant par le changement de variable :

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Procédure :

Passage de la loi normale **N (μ ; σ)** à la loi normale centrée réduite **N (0 ; 1)**

(Equivalence des surfaces hachurées dans les deux repères)



Le modèle mathématique donne :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\mathbf{N}(\mu, \sigma) \longrightarrow \mathbf{N}(0, 1)$$

On associe les surfaces aux probabilités : $P(x_2 > x > x_1) = P(t_2 > x > t_1)$

Les probabilités de f (t) sont tabulées pour les valeurs de t comprises entre 0 et 5. (voir table en annexe).

Exemple :

Dans un échantillon de 200 personnes adultes, les résultats de la glycémie ont montré qu'elle présente une moyenne de 1,08 g/l et un écart type de 0,10 g/l. En supposant que la variable « taux de glycémie » suit une loi normale, déterminer :

1- la probabilité d'avoir un taux compris entre 0,90 et 1,25 g/l.

2- Le nombre d'individus ayant un taux compris entre 0,90 et 1,25 g/l.

Solution :

Données : $\mu = 1{,}08$ g/l ; $\sigma = 0{,}10$ g/l

$$P(1{,}25 \geq x \geq 0{,}90) = ? \Rightarrow x_1 = 0{,}90 \text{ et } x_2 = 1{,}25$$

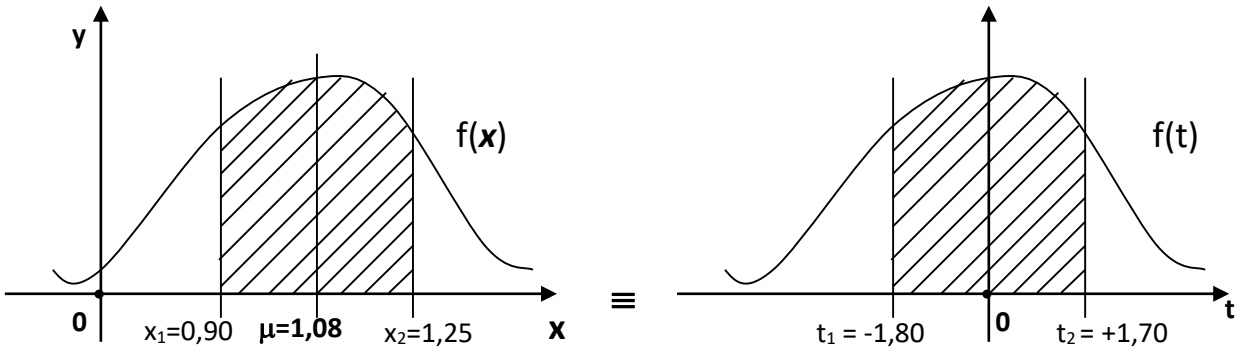
1- La probabilité d'avoir un taux compris entre 0,90 et 1,25 g/l :

Première étape : calcul de la variable centrée réduite.

$$t_1 = \frac{t_1 - \mu}{\sigma} = \frac{0{,}90 - 1{,}08}{0{,}10} = -1{,}80$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{t_2 - \mu}{\sigma} = \frac{1{,}25 - 1{,}08}{0{,}10} = +1{,}70$$

Deuxième étape : Schéma.



P (1,25 ≥ x ≥ 0,90) = P (1,70 ≥ t ≥ -1,80) = Probabilité demandée.

Troisième étape : utilisation de la table (ci-jointe à la page 20)

Probabilité demandée = G (-1,80) + G (1,70) = G (1,80) + G (1,70)

= 0,4641 + 0,4554 = 0,9195.

Alors P (65 ≥ x ≥ 55) = **0,9195**

2- Le nombre d'individus ayant un taux compris entre 0,90 et 1,25 g/l

n.p = 200 . 0,9195 = **184** individus.

DETERMINATION DES INTERVALLES REMARQUABLES :

On suppose que **X** est une variable aléatoire continue distribuée normalement selon les paramètres μ et σ.

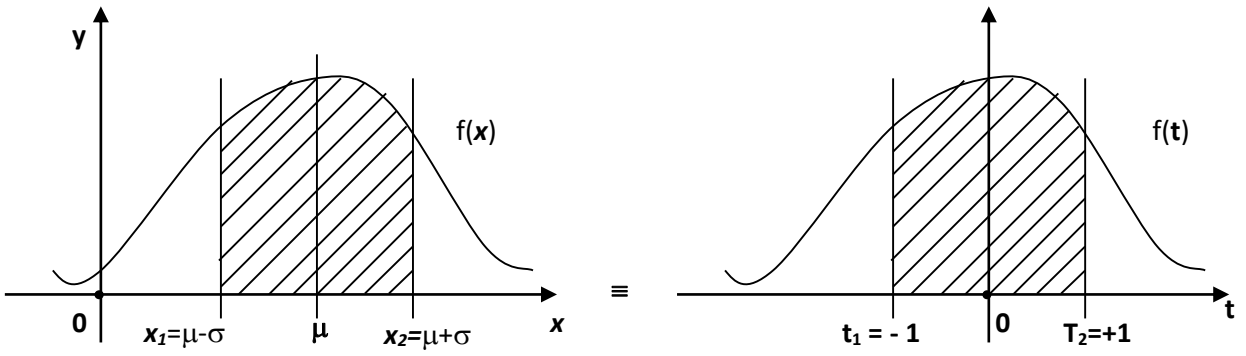
CAS N° 1 $\quad P (\mu + \sigma \geq x \geq \mu - \sigma) = ?$

Première étape : calcul des variables centrées réduites

$$t_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} = -1$$

$$t_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} = +1$$

Deuxième étape : Schéma.



Troisième étape : utilisation de la table (ci-jointe en annexe)

$P(\mu + \sigma \geq x \geq \mu - \sigma) = P(+1 \geq t \geq -1) = G(-1) + G(1)$

$= G(1) + G(1) = 2x\ 0{,}3413 = 0{,}68$

$\Rightarrow P(\mu+\sigma \geq x \geq \mu-\sigma) =$ **68 %**

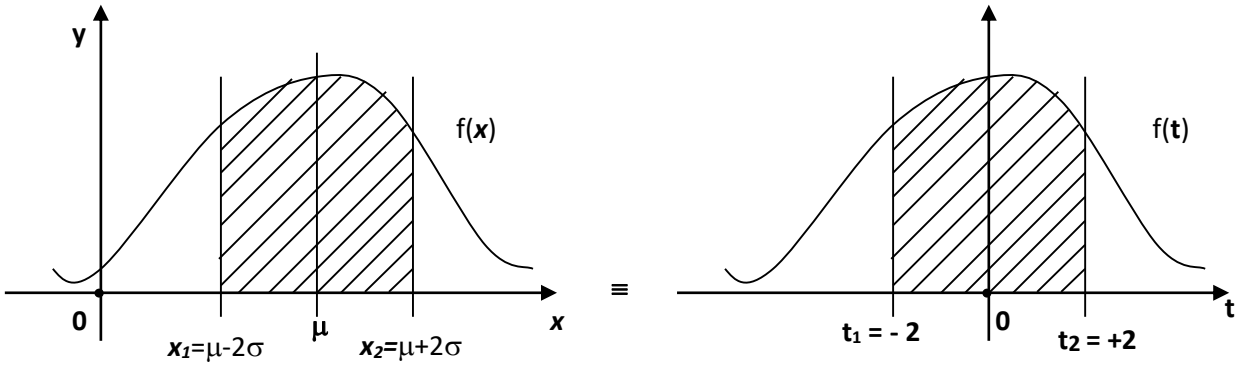
CAS N° 2 $\quad$ **$P(\mu + 2\sigma \geq x \geq \mu - 2\sigma) = ?$**

Première étape : calcul des variables centrées réduites

$$t_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} = -2$$

$$t_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} = +2$$

Deuxième étape : Schéma.



Troisième étape : utilisation de la table

$P(\mu+2\sigma \geq x \geq \mu-2\sigma) = P(+2 \geq t \geq -2) = G(-2) + G(2)$

$= G(2) + G(2) = 2 \times G(2) = 2 \times 0{,}4772$

$= 0{,}9544$

$\Rightarrow P(\mu+2\sigma \geq x \geq \mu-2\sigma) =$ **95 %**

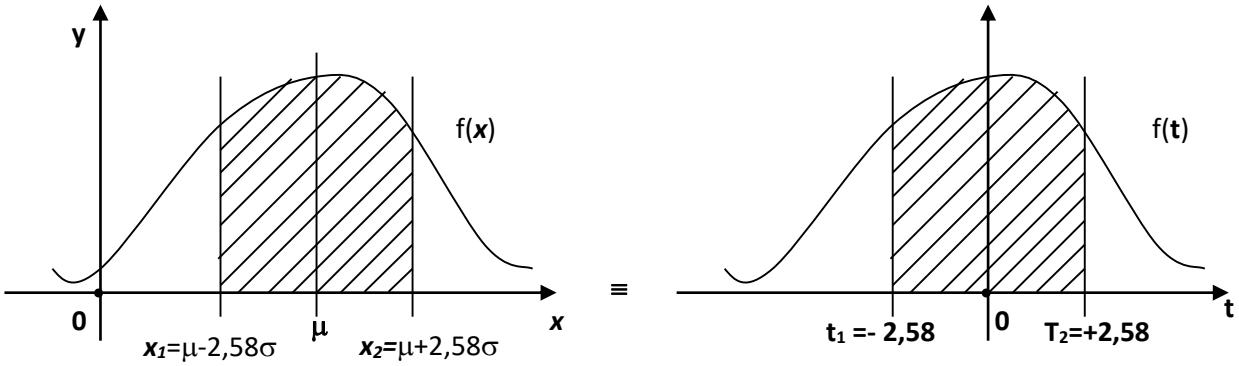
CAS N° 3 $\quad$ **$P(\mu + 2{,}58\,\sigma \geq x \geq \mu - 2{,}58\,\sigma) = ?$**

Première étape : calcul des variables centrées réduites

$$t_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 2{,}58\,\sigma - \mu}{\sigma} = -2{,}58$$

$$t_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 2{,}58\,\sigma - \mu}{\sigma} = +2{,}58$$

Deuxième étape : Schéma.



Troisième étape : utilisation de la table

$P(\mu+2{,}58\sigma \geq \boldsymbol{x} \geq \mu-2{,}58\sigma) = P(+2{,}58 \geq t \geq -2{,}58)$

$= G(-2{,}58) + G(2{,}58) = 2 \times G(2{,}58) = 2 \times 0{,}4951$

$= 0{,}99 = 99\%$

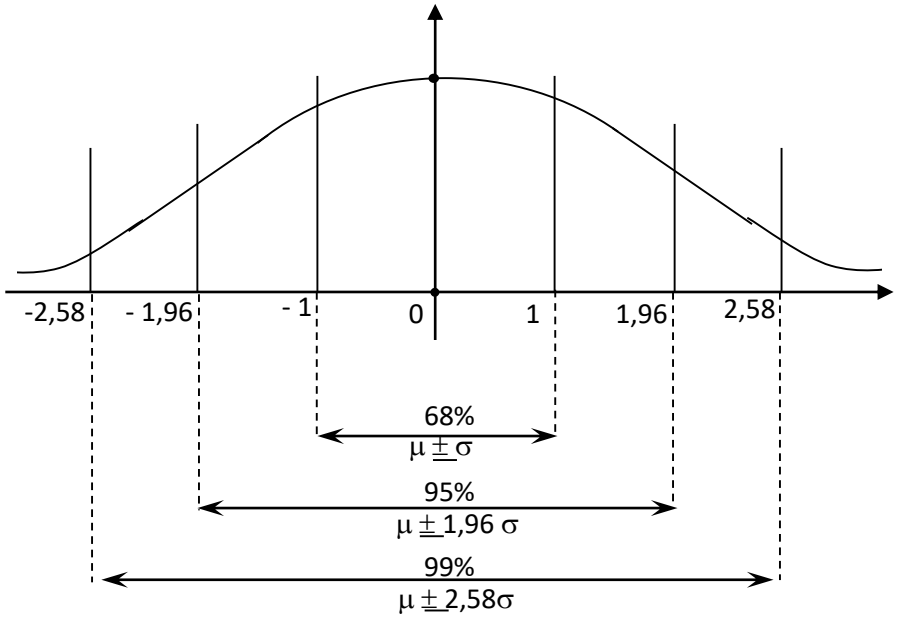
$\Rightarrow P(\mu+2{,}58\sigma \geq \boldsymbol{x} \geq \mu-2{,}58\sigma) =$ **99 %**

Alors :

$P(\mu+\sigma \geq \boldsymbol{x} \geq \mu-\sigma) = P(1 \geq t \geq -1) = 0{,}68 = 68\ \%$

$P(\mu+1{,}96\sigma \geq \boldsymbol{x} \geq \mu-1{,}96\sigma) = P(1{,}96 \geq t \geq -1{,}96) = 0{,}95 = 95\ \%$

$P(\mu+2{,}58\sigma \geq \boldsymbol{x} \geq \mu-2{,}58\sigma) = P(2{,}58 \geq t \geq -2{,}58) = 0{,}99 = 99\ \%$



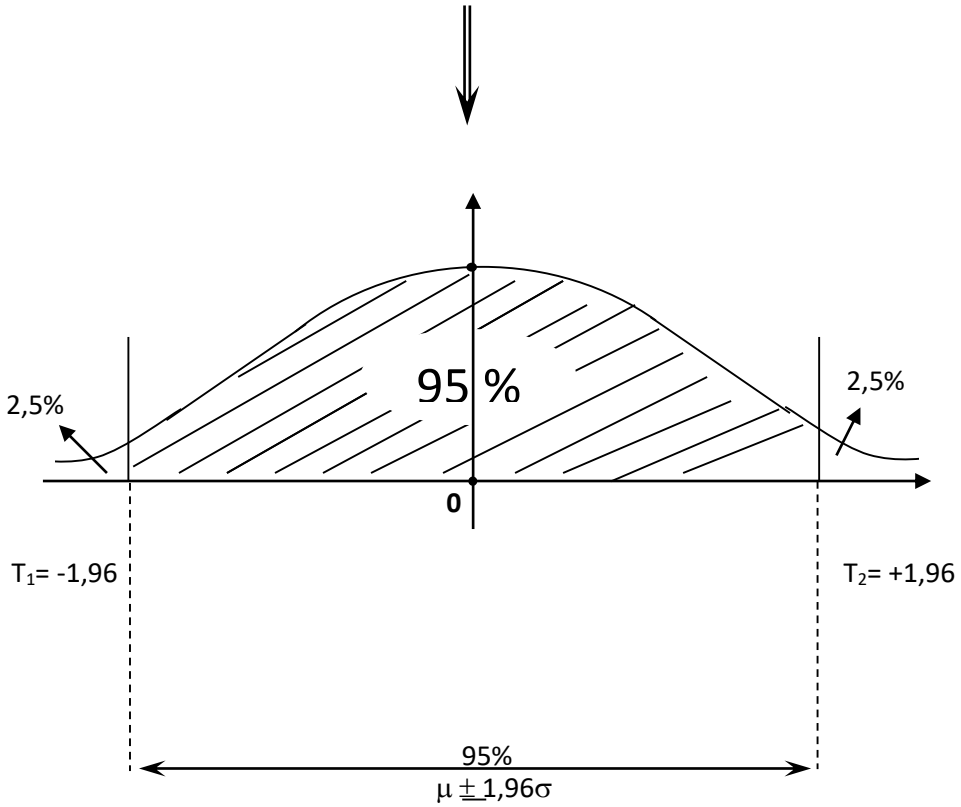
Conclusion :

Pour une variable gaussienne on a :

- ⇒ 68 % des observations comprises dans l'intervalle $\mu + \sigma$
- ⇒ 95 % des observations comprises dans l'intervalle $\mu + 2\sigma$
- ⇒ 99 % des observations comprises dans l'intervalle $\mu + 2{,}58\sigma$

Le Fameux 5 % :

C'est la probabilité (0,05) d'avoir une valeur de la variable à l'extérieur de l'intervalle de sécurité $\mu \pm 1{,}96\ \sigma$ qui est équivalent à l'intervalle $\pm 1{,}96$ en variable centrée réduite.



$\alpha = 5\ \% \Rightarrow \varepsilon\alpha = 1{,}96$ (t = 1,96)

$\alpha = 1\ \% \Rightarrow \varepsilon\alpha = 2{,}58$ (t = 2,58)

Probabilité d'avoir la variable hors de l'intervalle de sécurité

Variable centrée réduite. ($t = \varepsilon\alpha$)

B. Loi exponentielle

La **loi exponentielle** est une loi de probabilité continue fréquemment utilisée pour modéliser le temps d'attente entre deux occurrences successives d'un événement aléatoire lorsque ces événements surviennent indépendamment et à un taux moyen constant. Elle est étroitement liée à la loi de Poisson.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée :

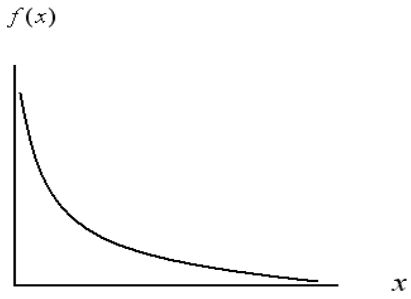
$$X \sim \varepsilon\,(\lambda)$$

Sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

et

$$f(x) = 0, \qquad x < 0$$



Fonction de répartition :

La fonction de répartition de X est :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{X < 0} \\ \mathbf{1 - e^{x}}, & \mathbf{X \geq 0} \end{cases}$$

Espérance et variance :

Pour une variable aléatoire $X \sim \varepsilon\,(\lambda)$, on a :

$$\boldsymbol{E\,(X)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}}}$$

L'écart-type est donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\lambda}$$

Remarque : l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle est égale à son écart type, car :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{V}(\mathbf{X})} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}}}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{E}(\mathbf{X})$$

Propriété sans mémoire

La loi exponentielle possède une propriété remarquable appelée **propriété sans mémoire** :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} > \mathrm{s} + \mathrm{t} \mid \mathrm{X} > \mathrm{s}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > \mathrm{t}),$$

Pour tous $\mathbf{s}, \mathbf{t} \geq \mathbf{0}$.

Cela signifie que la probabilité d'attendre encore au moins **t** unités de temps ne dépend pas du temps déjà écoulé.

Applications :

La loi exponentielle est utilisée pour modéliser :

- le temps d'attente entre deux appels téléphoniques reçus par un standard ;
- le temps séparant deux arrivées successives de clients dans une file d'attente ;
- la durée de fonctionnement d'un composant avant sa panne (lorsque le taux de défaillance est constant) ;
- le temps entre deux arrivées successives d'avions, de véhicules ou de patients dans un service.

Ainsi, la loi exponentielle décrit les temps d'attente, tandis que la loi de Poisson décrit le nombre d'événements survenant pendant un intervalle de temps donné.

Exercice corrigés du chapitre VI :

Exercice 1 :

Quelle est la probabilité d'avoir 3 garçons dans une famille de 10 enfants ?

Travail à faire : Calculer l'espérance mathématique et la variance de cette variable.

Exercice 2 :

On s'intéresse au nombre de garçons dans une famille de 4 enfants.

Déterminer la probabilité :

a) de n'avoir aucun garçon

b) d'avoir un garçon

c) d'avoir quatre garçons .

Exercice 3 :

Une intoxication répartie au hasard affecte 10% de l'ensemble des habitants d'une ville.

On considère l'ensemble des familles de 5 personnes. Quelle est la probabilité :

a) que les cinq membre de la famille soient malades ?
b) que 4 des 5 membres de la famille soient malades ?
c) qu'il y ait au moins 3 malades dans la famille ?
d) quelles sont l'espérance mathématique et la variance de cette variable ?

Exercice 4 :

On suppose qu'une variable biologique discontinue est distribuée dans le temps avec une moyenne de 9 unités par heure.

Quelle est la probabilité d'avoir 3 unités durant une heure ? (On suppose que cette variable suit une loi de Poisson).

Exercice 5 :

On suppose que le standard téléphonique du C.H.U. d'Oran reçoit en moyenne 5 appels par minute. Sous l'hypothèse que le nombre d'appel pendant un intervalle de temps suit une loi de Poisson.

Travail à faire : Calculer la probabilité que durant une minute le standard téléphonique reçoit :

a) - Trois appels
b) - Au plus deux appels.

Exercice 6 :

Suite à une vaccination contre le Covid-19, dans une population à risque, on estime à **2%**, compte tenu du délai d'immunisation, la proportion de personnes qui seront pourtant atteintes de la maladie. Quelle est la probabilité de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de **100** habitants tous récemment vaccinés, plus d'une personne malade ? (On supposera l'indépendance des éventualités).

Exercice 7 :

Une entreprise produit des pièces dont la proportion de pièces défectueuses est estimée à (0,01) (soit 1 %). On prélève au hasard un échantillon de (100) pièces de la production totale.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) L'échantillon contient exactement une pièce défectueuse.
b) L'échantillon contient exactement deux pièces défectueuses.
c) L'échantillon contient au moins deux pièces défectueuses.

Exercice 8 :

Soit $\mathbf{X_I}$ une variable aléatoire suivant une loi normale, et soit $\mathbf{Z_I}$la valeur centrée réduite associée à $\mathbf{X_I}$, qui suit la loi normale centrée réduite N(0,1).

Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z} \geq -1.96)\mathbf{/}\ \mathbf{P}(\mathbf{Z} \geq 1.96)\ \mathbf{/P}(\mathbf{Z} \leq 1.96)\ \mathbf{/P}(\mathbf{Z} \leq 1.65)\ \mathbf{/P}(-1.20 \leq \mathbf{Z_i} \leq 1.42)$$

$$\mathbf{P}(-1.96 \leq \mathbf{Z_i} \leq 1.96)\mathbf{/}\ \mathbf{P}(\mathbf{Z} \leq 0.51)\ \mathbf{/}\ \mathbf{P}(1.2 \leq \mathbf{Z_i} \leq 2.5)$$

Exercice 9 :

On suppose que le poids de **800 personnes** suit une **loi normale** de moyenne **66 kg** et d'écart-type **5 kg**.

Déterminer le nombre de personnes dont le poids est :

a) compris entre **65 kg** et **70 kg** ;
b) supérieur ou égal à **72 kg**.

Solutions exercices du chapitre VI :

Solution exercice 1 :

- Cette variable est discontinue
- Il n'y a que 2 éventualités (garçon ou fille)

➔ elle suit une loi binomiale de paramètres : n = 10 et p = $\frac{1}{2}$.

n = 10 , p = $\frac{1}{2}$, q = $\frac{1}{2}$, x = 3

et

$$P(x) = C_n^x \cdot P^x \cdot q^{n-x}$$

Alors

La probabilité d'avoir 3 garçons :

$$P(x=3) = C_{10}^3 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 \cdot (\tfrac{1}{2})^7 = 10!/\,[3!(10-3)!] \cdot (\tfrac{1}{2})^{10} \cdot (\tfrac{1}{2})^7 = 0{,}117$$

P(x=3) = 0,117

Ou bien directement de la table de la loi binomiale : P(x=3) = 0,117

L'espérance mathématique :

$$E(x) = n.p = 10 \cdot \tfrac{1}{2} = 5$$

La variance :

$$V(x) = n.p.q = 10 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 2{,}5$$

Solution exercice 2 :

Il s'agit d'une variable aléatoire discontinue (nombre de garçons)

et deux éventualités (garçon ou fille).

On a :

$n = 4$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

$P(x) = C_n^x \cdot P^x \cdot q^{n-x}$

Alors :

a) La probabilité de n'avoir aucun garçon :

$P(x = o) = C_4^0 \cdot (\frac{1}{2})^0 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 1/16 = 0{,}062$

b) La probabilité d'avoir un garçon :

$P(x = 1) = C_4^1 \cdot (\frac{1}{2})^1 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 4/16 = 0{,}250$

c) La probabilité d'avoir quatre garçons :

$P(x = 4) = C_4^4 \cdot (\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{1}{2})^0 = 1/16 = 0{,}062$

On peut déterminer ces probabilités directement de la table de la loi binomiale.

Solution exercice 3 :

$\rightarrow$ variable aléatoire discontinue (nombre de malades)

$\rightarrow$ deux éventualités (malade ou non malade)

Donc cette variable est régie

par une loi binomiale de paramètres

$n = 5$ et $p=0{,}1$ (10%)

On a :

$n=5$, $p= 0{,}1$ et $q=0{,}9$ et $P(x) = C_n^x \cdot P^x \cdot q^{n-x}$

Alors :

a) $x=5 \Rightarrow P(5) = C_5^5 \cdot (0{,}1)^5 \cdot (0{,}9)^0 = 0{,}000$

b) x=4 $\Rightarrow$ P (4) = C_5^4 . $(0,1)^4$. $(0,9)^1$ = 0,000

c) $x \geq 3 \Rightarrow P(x \geq 3) = p(3)+p(4)+p(5) =$

$C_5^3 . (0,1)^3 . (0,9)^2 + C_5^4 . (0,1)^4 . (0,9)^1 + C_5^5 . (0,1)^5 . (0,9)^0 =$

0,000 + 0,000 + 0,008 = 0,008

Donc P ($x \geq 3$) = 0,008

d) L'espérance mathématique :

E(x) = n.p = 5. 0,1 = 0,5

La variance :

V(x) = n.p.q = 5. 0,1. 0,9 = 0,45

Solution exercice 4 :

On a comme données :

E(x) $=\lambda$ **= 9 unités**

x = 3

x suit la loi de Poisson, donc :

$$\mathbf{P\,(X) = e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!}}$$

$$\mathbf{P\,(X = 3) = e^{-9} . \frac{9^3}{3!}}$$

P (x=3) = 0,015

Ou bien directement de la table :

P(x=3) = 0,015.

Solution exercice 5 :

a) - On a les données :

$E(x) = \lambda = 5$ appels par minute

$x = 3$

x suit la loi de Poisson, donc :

$$P(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(x=3) = \frac{5^3 \cdot e^{-5}}{3!}$$

La probabilité de recevoir 3 appels:

P (x=3) = 0,140

Ou bien directement de la table

P(x=3) = 0,140.

b) - Au plus deux appels :

$P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$$\mathbf{P\,(X = 0) = e^{-5} . \frac{5^0}{0!}}$$

$$\mathbf{P\,(X = 1) = e^{-5} . \frac{5^1}{1!}}$$

$$\mathbf{P\ (X = 2) = \ e^{-5} . \frac{5^2}{2!}}$$

P (X = 0) = 0,006 P (X = 1) = 0,033 et P (X = 2) = 0,084

Alors

P(X ≤ 2) = P (X = 0) + P (X = 1) + P (X = 2)

= 0,006 + 0,033 + 0,084

La probabilité de recevoir au plus 2 appels :

P(X ≤ 2) = 0,123

Solution exercice 6 :

P (x > 1) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + …+…

Ou bien

P (x > 1) = 1 – [p(0) + p(1)]

On a

n =100, p = 0,02 et q = 0,98 et P(x) = C_n^x . P^x . q^{n-x}

Alors :

Pour x = 0 ⇒ P (0) = C_{100}^0 . $(0,02)^0$. $(0,98)^{100}$ = 0,133

et pour x =1 ⇒ P (1) = C_{100}^1 . $(0,02)^1$. $(0,98)^{99}$ = 0,27

donc P (x > 1) = 1 – [p(0) + p(1)] = 1 – [0,113 + 0,270] = 0,617

La probabilité de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de **100** habitants tous récemment vaccinés, plus d'une personne malade est égale à 0,617.

Solution exercice 7 :

On remarque, d'après les données de l'exercice, que :

- la probabilité de réalisation de l'événement considéré (présence d'un défaut sur une pièce choisie) est $\mathbf{p = 0.01}$, ce qui constitue une probabilité très faible ;
- la taille de l'échantillon est $\mathbf{n = 100}$, ce qui peut être considérée comme suffisamment grande.

$$\mathbf{p = 0.01 \rightarrow 0}$$

$$\mathbf{n = 100 \rightarrow \infty}$$

Par conséquent, la variable aléatoire X, représentant le nombre de pièces défectueuses observées dans l'échantillon, peut être modélisée par une **loi de Poisson**.

On écrit :

$\mathbf{p = 0.01}$ $\mathbf{n = 100}$ $\mathbf{n.\ p = (100)\ (0{,}01) = 1}$

Par conséquent,

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

c'est-à-dire que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \mathbf{1}$.

a) **Probabilité qu'il y ait exactement une pièce défectueuse dans l'échantillon :**

x suit la loi de Poisson, donc :

$$\mathbf{P(X) = e^{-\lambda} . \frac{\lambda^{x}}{x!}}$$

$$\mathbf{P(X = 1) = e^{-1} . \frac{1^{1}}{1!}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow P(X = 1) = e^{-1} \approx 0{,}3679}$$

b) L'échantillon contient exactement deux pièces défectueuses :

$$\mathbf{P\,(X = 2) = \ e^{-1}.\frac{1^2}{2!}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \ P\,(X = 2) \ = \frac{e^{-1}}{2}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \ P\,(X = 2) \ \approx 0,1839}$$

c) L'échantillon contient au moins deux pièces défectueuses :

$$\mathbf{P\,(X \ \geq 2)}$$

En utilisant l'événement complémentaire :

$$\mathbf{P\,(X \ \geq 2) = \ 1 \ - \ P\,(X \ < 2)}$$

$$\mathbf{P\,(X \ \geq 2) = \ 1 - \ [P\,(X = 0) \ + \ P\,(X = 1)]}$$

Or

$$\mathbf{P\,(X = 0) = \ e^{-1}.\frac{1^0}{0!}\ e^{-1} \ \approx 0,3679}$$

et $\mathbf{P\,(X = 1) = \ e^{-1} \ \approx 0,3679}$

Donc :

$$\mathbf{P\,(X \ \geq 2) = \ 1 - \ [P\,(0,3679) \ + \ P\,(0,3679)]}$$

$$\mathbf{P\,(X \ \geq 2) = \ 1 - 0,7348}$$

$$\mathbf{P\,(X \ \geq 2) = 0,2642}$$

Ainsi, la probabilité d'observer exactement une pièce défectueuse est d'environ **36,79 %**, celle d'observer exactement deux pièces défectueuses est d'environ **18,39 %**, et celle d'en observer au moins deux est d'environ **26,42 %**.

Solution exercice 8 :

$$X_i \rightsquigarrow N(\mu; \delta)$$
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \rightsquigarrow N(0; 1)$$

où :

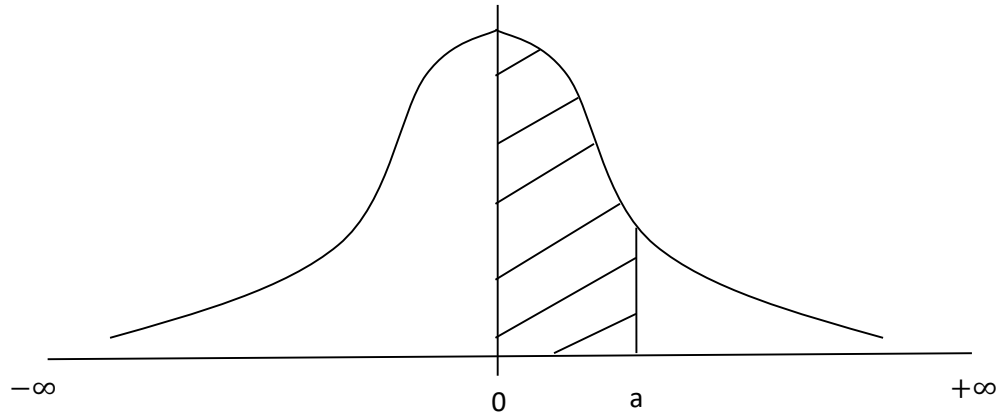
- μ est l'espérance mathématique (ou moyenne) de X_i ;
- δ est l'écart-type de X_i.

Ainsi, la variable centrée réduite Z_i est définie par :

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\mu}$$

et suit une loi normale centrée réduite :

$$Z_i \sim N(0, 1)$$



Calcul des probabilités suivantes :

$$P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96) = P(-\infty \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.96)$$
$$= 0.5 + 0.4750 = 0.9750$$

$$P(Z \geq 1.96) = P(0 \leq Z \leq +\infty) - P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.5 - 0.4750$$
$$= 0.0250$$

$$P(Z \leq 1.96) = P(-\infty \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.5 + 0.4750$$
$$= 0.9750$$

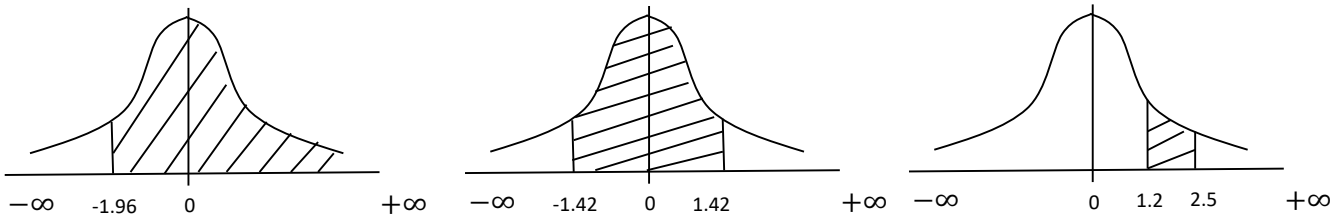
$$P(Z \leq 1.65) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.65) = 0.5 + 0.4505 = 0.9505$$

$$P(-1.20 \leq Z_i \leq 1.42) = P(0 \leq Z \leq 1.20) + P(0 \leq Z \leq 1.42)$$
$$= 0.3849 + 0.4222 = 0.8071$$

$$P(-1.96 \leq Z_i \leq 1.96) = 2 * P(0 \leq Z \leq 1.96) = 2 * 0.4750 = 0.95$$

$$P(Z \leq 0.51) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.51) = 0.5 + 0.1950 = 0.6950$$

$$P(1.2 \leq Z_i \leq 2.5) = P(0 \leq Z \leq 2.5) - P(0 \leq Z \leq 1.2)$$
$$= 0.4938 - 0.3849 = 0.1089$$



D'après les propriétés de la loi normale centrée réduite, on a :

$$P(-\infty \leq Z \leq +\infty) = 1$$

$$P(-\infty \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq +\infty) = 0.5$$

$$P(-a \leq Z \leq +a) = 2 * P(0 \leq Z \leq +a)$$

Solution exercice 9 :

On suppose que :

- $\mathbf{X_i}$ est une variable aléatoire représentant le poids des individus et suit une loi normale de moyenne 66 kg et d'écart-type 5 kg.

- n désigne l'effectif total de la population étudiée, soit :

$$\mathbf{n = 800}$$

Ainsi, $\mathbf{X_i}$ représente le poids d'une personne choisie au hasard parmi les 800 individus considérés.

$$\boldsymbol{X_i \rightsquigarrow N(\mu = 66; \delta = 5)}$$
$$\boldsymbol{Z_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \rightsquigarrow N(0; 1)}$$

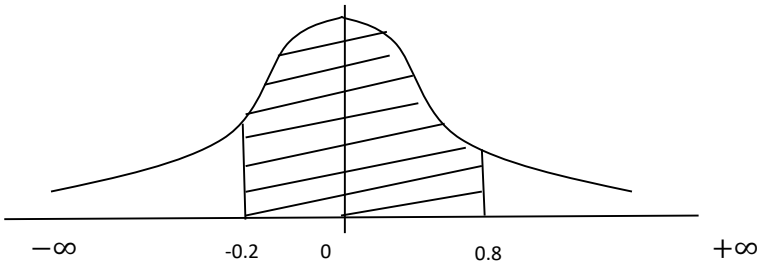
a) Calcul du nombre de personnes dont le poids est compris entre 65 kg et 70 kg : Calcul de la probabilité qu'une personne ait un poids compris entre 65 kg et 70 kg :

$$\boldsymbol{P(65 \leq X_i \leq 70)}$$

où X représente le poids d'une personne choisie au hasard et suit la loi normale :

Pour déterminer cette probabilité, on procède à la standardisation de la variable X :

$$\boldsymbol{P(65 \leq X_i \leq 70) = P\left(\frac{65 - 66}{5} \leq Z_i \leq \frac{70 - 66}{5}\right)}$$
$$\boldsymbol{= P(-0.2 \leq Z_i \leq 0.8)}$$
$$\boldsymbol{= P(0 \leq Z_i \leq 0.2) + P(0 \leq Z_i \leq 0.8)}$$
$$\boldsymbol{= 0.0793 + 0.2881 = 0.3674}$$



Par conséquent, le nombre de personnes dont le poids est compris entre 65 kg et 70 kg est :

$$\boldsymbol{P(65 \leq X_i \leq 70) * n = 0.3674 * 800 = 297 \text{ personnes}}$$

b) Calcul du nombre de personnes dont le poids est compris entre 65 kg et 70 kg :

$$\boldsymbol{P(x \geq 72) = P\left(Z \geq \frac{72-66}{5}\right) = P(Z \geq 1.2)}$$

$$\boldsymbol{= 0.5 - P(0 \leq Z_i \leq 1.2) = 0.5 - 0.3849 = 0.1151}$$

Ainsi, le nombre de personnes dont le poids est supérieur ou égal à 72 kg est d'environ 92 personnes.

$$\boldsymbol{P(x \geq 72) * n = 0.1151 * 800 = 92 \text{ personnes}}$$

Conclusion générale

La statistique mathématique et le calcul des probabilités constituent des outils fondamentaux pour l'analyse, la modélisation et l'interprétation des phénomènes observés dans de nombreux domaines, notamment l'économie, la gestion, la finance, le commerce et les sciences sociales. Leur maîtrise permet non seulement de comprendre les mécanismes de l'incertitude, mais également de développer des méthodes rigoureuses d'aide à la décision fondées sur l'exploitation des données.

À travers ce polycopié, les notions essentielles de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique ont été présentées de manière progressive et structurée. Les concepts fondamentaux relatifs à la théorie des ensembles, aux méthodes de dénombrement, aux probabilités, aux variables aléatoires ainsi qu'aux principales lois de probabilité ont été développés afin de fournir aux étudiants les bases théoriques nécessaires à la compréhension des méthodes statistiques modernes.

L'acquisition de ces connaissances constitue une étape importante dans le parcours de formation des étudiants, puisqu'elle prépare à l'étude de disciplines quantitatives plus avancées telles que l'échantillonnage, l'estimation statistique, les tests d'hypothèses, l'économétrie, la recherche opérationnelle et l'analyse des données. Ces outils seront également mobilisés dans de nombreuses situations professionnelles nécessitant l'interprétation d'informations chiffrées et la prise de décision en contexte d'incertitude.

Nous espérons que ce support pédagogique aura contribué à faciliter l'apprentissage des notions abordées et qu'il constituera un document de référence utile pour les étudiants tout au long de leur cursus universitaire. Toutefois, la maîtrise de la statistique et des probabilités ne peut être acquise sans une pratique régulière. Il est donc recommandé aux étudiants de compléter l'étude de ce polycopié par la résolution d'exercices, l'analyse de cas pratiques et l'approfondissement personnel des concepts présentés.

Enfin, nous souhaitons que ce travail puisse servir de base solide à la poursuite des études en méthodes quantitatives et favoriser le développement d'un raisonnement scientifique rigoureux, indispensable à la compréhension et à l'analyse des réalités économiques et managériales contemporaines.

Les tables statistiques usuelles

Tables Statistiques usuelles

Table 1

Loi Binomiale

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 10

	p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n=20

	p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
	3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
	4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
	5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
	6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
	7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
	8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
	9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Loi Binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 25

k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,2774	0,0718	0,0172	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,6424	0,2712	0,0931	0,0274	0,0070	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
2	0,8729	0,5371	0,2537	0,0982	0,0321	0,0090	0,0021	0,0004	0,0001	0,0000
3	0,9659	0,7636	0,4711	0,2340	0,0962	0,0332	0,0097	0,0024	0,0005	0,0001
4	0,9928	0,9020	0,6821	0,4207	0,2137	0,0905	0,0320	0,0095	0,0023	0,0005
5	0,9988	0,9666	0,8385	0,6167	0,3783	0,1935	0,0826	0,0294	0,0086	0,0020
6	0,9998	0,9905	0,9305	0,7800	0,5611	0,3407	0,1734	0,0736	0,0258	0,0073
7	1,0000	0,9977	0,9745	0,8909	0,7265	0,5118	0,3061	0,1536	0,0639	0,0216
8	1,0000	0,9995	0,9920	0,9532	0,8506	0,6769	0,4668	0,2735	0,1340	0,0539
9	1,0000	0,9999	0,9979	0,9827	0,9287	0,8106	0,6303	0,4246	0,2424	0,1148
10	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9703	0,9022	0,7712	0,5858	0,3843	0,2122
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9985	0,9893	0,9558	0,8746	0,7323	0,5426	0,3450
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,9396	0,8462	0,6937	0,5000
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9745	0,9222	0,8173	0,6550
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9907	0,9656	0,9040	0,7878
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9971	0,9868	0,9560	0,8852
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9957	0,9826	0,9461
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9942	0,9784
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9927
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9980
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Loi Binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 50

	p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
	8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000
	9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
	10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
	11	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
	12	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
	13	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
	14	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
	15	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
	16	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
	17	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
	18	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
	19	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
	20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
	21	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
	25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
	26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
	27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
	28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
	29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
	31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
	32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
	33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
	34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
	35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
	36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
	37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 2

Loi de Poisson

$$P(X = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

(μ le nombre d'occurrences moyen)

	μ									
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
x **0**	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	μ									
	1,5	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x **0**	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,5578	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005
2	0,8088	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028
3	0,9344	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103
4	0,9814	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293
5	0,9955	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671
6	0,9991	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301
7	0,9998	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202
8	1,0000	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328
9	1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579
10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9965
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 3

Loi Normale Centrée Réduite

Fonction de répartition F(z)=P(Z<z)

Exemple : P(Z<1,96)= 0,97500 se trouve en ligne 1,9 et colonne 0,06

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56750	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59484	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67365	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69498	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72241
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76731	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78231	0,78524
0,8	0,78815	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82382	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84135	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90148
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93575	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95544	0,95637	0,95728	0,95819	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97933	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976

Bibliographie

I. Ouvrages fondamentaux de probabilités et de statistique mathématique :

1. Blitzstein, J. K., & Hwang, J. (2019). *Introduction to Probability* (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC.
2. Devore, J. L. (2021). *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences* (10th ed.). Cengage Learning.
3. Grinstead, C. M., & Snell, J. L. (2019). *Introduction to Probability* (2nd revised ed.). American Mathematical Society.
4. Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.
5. Ross, S. M. (2023). *A First Course in Probability* (11th ed.). Pearson.
6. Ross, S. M. (2019). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists* (6th ed.). Academic Press.
7. SEYMOUR L. (1973). *Probabilités : Cours et problèmes* (Serie Schaum.). McGraw-Hill Inc.
8. Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. L. (2020). *Mathematical Statistics with Applications* (8th ed.). Cengage Learning.
9. Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2018). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists* (10th ed.). Pearson.

II. Ouvrages de statistique appliquée aux sciences économiques, commerciales et de gestion :

10. Aczel, A. D., & Sounderpandian, J. (2018). Complete Business Statistics (9th ed.). McGraw-Hill Education
11. Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., & Cochran, J. J. (2023). Statistics for Business and Economics (15th ed.). Cengage Learning.
12. Dagnelie, P. (2021). Statistique théorique et appliquée (3e éd.). De Boeck Supérieur.
13. Gouriéroux, C., & Monfort, A. (2018). Statistique et modèles économétriques. Economica.
14. Kennedy, P. (2018). A Guide to Econometrics (7th ed.). Wiley-Blackwell.
15. Levine, D. M., Stephan, D. F., Szabat, K. A., & Berenson, M. L. (2022). Statistics for Managers Using Microsoft Excel (9th ed.). Pearson.
16. Newbold, P., Carlson, W., & Thorne, B. (2020). Statistics for Business and Economics (9th ed.). Pearson.
17. Piller A. (2008). *Probabilités pour économistes : Manuel d'exercices corrigés avec rappels de cours* (2ème édition.). Premium Editeur.

18. Saporta, G. (2020). Probabilités, analyse des données et statistique (4e éd.). Technip.
19. Tassi, P. (2018). Méthodes statistiques (9e éd.). Economica.

TABLE DES MATIERES

Avant-propos I
Sommaire III

Introduction générale 1

Chapitre I : Généralités et terminologie de la statistique mathématique et de la théorie des probabilités

Introduction 3
1.1 Aperçu historique du développement de la statistique 3
I.2. Définition de la statistique 4
1.3 Les branches de la statistique 5
A. La statistique descriptive 5
B. La statistique inférentielle (ou statistique analytique) 5
1.4 La théorie des probabilités et son rôle en statistique 6
1.5 Terminologie fondamentale en statistique 6
A. Population statistique 6
B. Individu statistique 7
C. Caractère statistique 7
D. Modalité d'un caractère 7
E. Variables statistiques 8
a. Variables qualitatives 8
b. Variables quantitatives 9
F. Echantillon statistique 9
G. Paramètre statistique 10
H. Statistique ou estimateur 10
I. Recensement et sondage 11
a. Le recensement 11
b. Le sondage 11
J. Relation entre population, échantillon, paramètre et statistique 11
Conclusion 12

Chapitre II : Théorie des ensembles et rappels sur les principaux symboles mathématiques 13
2.1 Ensembles et éléments 13
2.2 Opérations sur les ensembles 13
A. Les de l'algèbre des ensembles 14
B. Opérations ensemblistes et opérations logiques 15
a. Ensemble fini 15
b. Ensembles finis et ensembles dénombrables 16
Exercices corrigés du chapitre II 17
Solution exercices du chapitre II 18
Chapitre III : Méthodes de dénombrement et analyse combinatoire 21

3.1 Dénombrements **21**
A. Nombre de parties d'un ensemble fini **21**
B. La notion de p-listes **22**
3.2 Analyse combinatoire **22**
A. Arrangement de n éléments p à p **22**
B. Permutations de n éléments **24**
C. Combinaisons de p à p **25**
Exercices corrigés du chapitre III **28**
Solution exercices du chapitre III **29**

Chapitre IV : Introduction au calcul des probabilités **37**
Introduction **37**
4.1 Concepts fondamentaux des probabilités **38**
A. Expérience aléatoire **38**
B. Ensemble fondamental ou univers **38**
C. Evénements **40**
a. Espace probabilisé (Axiome de Kolmogrov) **40**
b. Axiomes de probabilités **41**
4.2 Opérations sur les événements **41**
A. Union de deux événements **41**
B. Intersection de deux événements **42**
C. Evénements complémentaires **43**
4.3 Théorie de la probabilité conditionnelle : Partition et théorème de Bayes **44**
A. Partitions (Probabilité totale) **44**
B. Théorème de Bayes **47**
Exercices corrigés du chapitre IV **48**
Solution exercices du chapitre IV **50**

Chapitre V : Variables aléatoires **57**
5.1 Définitions générale d'une variable aléatoire **57**
5.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire **58**
5.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle **58**
5.3.1 Définition **58**
5.3.2 Propriétés de la fonction de répartition **59**
5.3.3 Relation entre fonction de répartition et la probabilité de X **59**
5.4 Types de variables aléatoires **61**
A. Variables aléatoires discrètes **61**
a. Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète **61**
b. Variance d'une variable aléatoire discrète **63**
c. Distribution conjointe des variables aléatoires discrètes **64**
B. Variables aléatoires continues **65**
a. La distribution de probabilité continue **66**
b. Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue **68**
c. Espérance mathématique et variance **69**

d. Distribution conjointe des variables aléatoires continues **70**
d.1 La densité marginale **70**
d.2 La densité (ou loi) conditionnelle **71**
d.3 Définition de l'indépendance de deux variables **72**
d.4 Espérance conjointe et covariance **74**
d.5 Coefficient de corrélation **75**
Exercices corrigés du chapitre V **77**
Solutions exercices du chapitre V **78**
Exercices non corrigés du chapitre V **88**

Chapitre VI : Lois de probabilités usuelles : Discrètes et continues **90**
6.1 Lois discrètes **90**
A. Lois discrètes uniformes **90**
B. Loi de Bernoulli **91**
C. Loi Binomiale **93**
D. Loi géométrique **96**
E. Loi de Poisson **98**
F. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson **103**
6.2 Lois continues **104**
A. Loi de Laplace-Gauss **(**Loi Normale) **104**
B. Loi exponentielle **115**
Exercices corrigés du chapitre VI **117**
Solutions exercices du chapitre VI **119**

Conclusion générale **130**
Tables statistiques usuelles **131**
Bibliographie **137**
Table des matières **139**